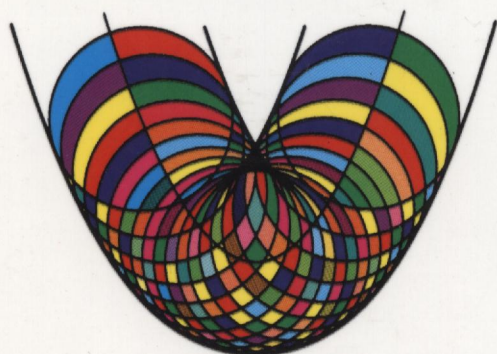


Frédéric Pham

MAÎTRISE

Géométrie et calcul différentiel sur les variétés

Cours, études et exercices



2^e édition

DUNOD

Préface à la deuxième édition	VII
Préface à la première édition	IX
PREMIÈRE PARTIE : SOUS-VARIÉTÉS DE \mathbb{R}^N	1
Introduction	2
Chapitre 1 – Calcul différentiel « à l'ancienne »	3
0. Défense et illustration du calcul « à l'ancienne »	3
1. Différentielles	6
2. Interprétation géométrique	18
3. Théorème des fonctions implicites	27
Étude 1 : Points critiques et extrema locaux des fonctions	31
Étude 1^{bis} : Lemme de Morse	36
Chapitre 2 – Applications différentiables et sous-variétés	45
1. Applications différentiables entre ouverts d'espaces numériques	45
2. Point de vue géométrique sur les sous-variétés	51
3. Applications différentiables entre sous-variétés	55
4. Le « foncteur tangent »	61
5. Transversalité	67
Exercices	69
Étude 2 : Contours apparents des surfaces	71
Chapitre 3 – Champs de vecteurs	75
1. Intégration d'un champ de vecteurs et dérivation le long d'un champ de vecteurs	75
2. Transformation des champs de vecteurs par difféomorphismes	79
Appendice : Compléments sur la notion de « flot »	82
Exercices	84
Étude 3 : Champs de gradients	85
Étude 3^{bis} : Mécanique de Newton et orbites planétaires	86
Travaux pratiques : À propos de hérissons...	92
Intermède – Indices des champs de vecteurs et caractéristique d'Euler des surfaces	93
1. Indice d'un champ de vecteurs le long d'un lacet du plan	93
2. Indice d'un point singulier isolé d'un champ de vecteurs du plan	96
3. Caractéristique d'Euler d'une surface compacte	100

DEUXIÈME PARTIE : POINT DE VUE INTRINSÈQUE SUR LES VARIÉTÉS	105
Introduction	107
Chapitre 4 – Variétés différentielles	109
0. Variétés topologiques	110
1. Structures différentielles sur une variété	112
2. Morphismes de variétés	115
Étude 4 : Un peu de géométrie plane	122
Étude 4^{bis} : La sphère de Riemann $S \approx CP^1$	124
Appendice : Rappels sur les fonctions holomorphes	127
Étude 4^{ter} : Structures complexes sur le tore T^2	127
Chapitre 5 – Tangence	130
0. Tangence de deux applications, jets d'applications	131
1. Foncteurs tangent et cotangent	133
2. Le théorème des fonctions implicites entre en scène	137
3. Fibré tangent et champs de vecteurs	138
4. Fibré cotangent et formes différentielles de degré 1	140
Étude 5 : Familles à un paramètre de droites du plan	143
Étude 5^{bis} : Champs de vecteurs constants sur les tores	154
Chapitre 6 – Espaces fibrés	156
0. De la notion de famille d'espaces à celle d'espace fibré	158
1. Fibrés vectoriels	163
2. Espaces fibrés, dans le contexte différentiel	166
Étude 6 : Enveloppes des familles de courbes	169
Appendice : Éléments de contact sur une variété et condition d'intégrabilité de Legendre	187
Chapitre 7 – Homotopie et revêtements	190
0. La catégorie d'homotopie	190
1. Groupe fondamental	194
2. Revêtements	200
3. Orientations	212
Étude 7 : Où une relecture de l'intermède nous ramène au tore T^2	217
Chapitre 8 – Introduction au calcul intégral sur les variétés	220
0. L'algèbre des formes extérieures sur un espace vectoriel	221
1. L'algèbre graduée des formes différentielles sur une variété	223
2. Formes volumes	227
3. Intégration des formes différentielles	230
4. Introduction à l'homologie et à la cohomologie	234
Étude 8 : Mécanique hamiltonnienne et géométrie symplectique	241
Index	257



Frédéric Pham

GÉOMÉTRIE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES VARIÉTÉS

Cours, études et exercices

2^e édition

La notion de « variété » est, depuis Riemann, au centre de la géométrie. Conçu principalement pour les étudiants de maîtrise, ce livre tente de cerner l'essentiel du sujet, dans un style léger et imagé quoique moderne et rigoureux.

La première partie a pour but de consolider les acquis essentiels du calcul différentiel de licence. Elle a été profondément remaniée pour cette deuxième édition.

La deuxième partie présente la théorie intrinsèque des variétés (avec comme objectif essentiel la compréhension des notions de fibré tangent et fibré normal) et enchaîne sur les premiers rudiments de la topologie algébrique (homotopie et revêtements). Elle se termine par une ébauche de théorie de l'intégration sur les variétés, où l'on fait connaissance avec l'homologie et la cohomologie.

Parallèlement aux chapitres proprement dits, qui cherchent à présenter de façon cohérente les concepts formant l'ossature de la théorie, les « études » insérées entre les chapitres ont pour but de montrer ces concepts en action dans un contexte. Allant de la géométrie algébrique élémentaire à la mécanique, ces contextes ont été choisis de façon à donner une image large et ouverte de ce qu'est la géométrie. On pourra y reconnaître l'influence des idées de R. Thom et V. Arnold.

Géomètre ayant débuté dans la recherche comme physicien théoricien, Frédéric Pham est professeur de mathématiques à l'université de Nice-Sophia Antipolis.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE

CHIMIE

PHYSIQUE APPLIQUÉE

INFORMATIQUE

SCIENTES DE LA NATURE
ET DE LA VIE

9 782100 041299

ISBN 2 10 004129 0
Code 044129



DUNOD