

République algérienne démocratique et populaire  
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Université Saâd Dahleb - Blida  
Département d'Aéronautique

07 3 / 03



Projet de fin d'études  
pour l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Aéronautique

Option : Structure

Thème :

**Prédiction de la vie  
dans le cas d'un chargement  
multiaxial complexe**

Présenté par :  
M. Chekchaki Mourad  
M. Chetbi Adlane

Encadrés par :  
Mme. Semmar Yasmina

Promotion : 2002-2003

**Prédiction de la vie  
dans le cas d'un chargement multiaxial  
complexe**

## **Remerciements**

Nos remerciements vont en premier lieu à Dieu le tout puissant, qui nous a permis de réunir les informations nécessaires à l'élaboration de ce modeste travail, ainsi qu'à nos parents pour leur grand soutien.

Nous témoignons notre reconnaissance à notre promotrice, Mme Semmar Yasmina, pour ses précieux conseils.

Nous remercions aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation du présent travail.

إن أهمية ظاهرة التعب في علم الطيران تلزم علينا معرفتها بالضبط. تبعا لدراسة قمنا بها أمكننا تحقيق طريقة مبرمجة بلغة الفورتران تعلمنا عن مدة حياة الهياكل المنجزة بالخلات الخفيفة المعرضة لاجهادات مختلفة المحاور و المعقدة في مجال الاجهادات المركزة القوية و ذلك باستعمال منهج التقريب المحلي.

### Résumé :

L'importance du phénomène de la fatigue en aéronautique nous oblige à connaître parfaitement ce problème. Suite à une étude effectuée nous avons pu élaborer une méthode sous code fortran qui prédit la durée de vie d'un matériau ou d'une structure en alliage léger soumis à des chargements multiaxiaux complexe dans le domaine de fortes concentrations de contraintes en utilisons la procédure de l'approche locale.

### Summary:

The importance of the phenomenon of fatigue in aeronautics obliges us to know this problem perfectly. Following a study carried out we could work out a method under code FORTRAN which predicts the lifespan of a material or of light an alloy structure subjected to loadings multiaxials complex in the field of strong stress concentrations use the procedure of the local approach of it.

## Sommaire

Sommaire.....	vi
Liste des symboles.....	iii
Liste des figures.....	i
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Notions sur la fatigue</b> .....	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Fatigue et endurance.....	3
1.2.1 La fatigue.....	3
1.2.2 L'endurance.....	4
1.3 Diagramme d'endurance ( la courbe de WÖHLER ).....	5
1.4 Description phénoménologique de la fatigue plastique oligo-cyclique.....	10
1.4.1 L'érouissage cyclique.....	10
1.4.2 Résistance à la fatigue.....	11
1.5 Le dommage en fatigue.....	13
1.6 Evolution structurale.....	14
1.7 Les lois d'endommagement en fatigue.....	15
1.7.1 La loi de MINER.....	16
1.7.2 La loi de LEMAITRE-CHABOCHE.....	17
1.8 Idéalisations d'un chargement entraînant la fatigue.....	18
1.8.1 Influence de la contrainte moyenne.....	19
1.8.2 Diagramme de HAIGH.....	20
1.9 Les facteurs d'influence.....	23
1.9.1 Paramètres d'ordre métallurgique.....	23
1.9.2 Paramètres d'ordre mécanique et géométrique.....	24
1.9.3 Environnement.....	28
1.10 conclusion.....	28
<b>Chapitre 2 : Contraintes multiaxiales et critère de calcul de la contrainte équivalente</b> .....	29

2.1 Introduction.....	29
2.2 Etat de contraintes.....	29
2.2.1 Etat de contraintes triaxiales.....	30
2.2.2 Etat de contraintes biaxiales.....	31
2.3 Le formalisme général des critères.....	32
2.3.1 Modèles empiriques.....	33
2.3.2 Les critères d'approche globale.....	33
2.4 Les critères d'approche plan critique.....	33
2.4.1 Critère de VON MISES.....	34
2.4.2 Critère de TORRE STASSI.....	37
2.5 Conclusion.....	40
<b>Chapitre 3 : Décomposition des cycles par la méthode de RAIN-FLOW</b> .....	41
3.1 Introduction.....	41
3.2 Différents types de chargements.....	41
3.3 Représentation des chargements.....	42
3.3.1 Pic-vallée.....	42
3.3.2 Séquence d'amplitude variable.....	42
3.4 Méthode de comptage.....	43
3.4.1 La méthode de RAIN-FLOW.....	44
3.4.2 Procédure générale.....	44
3.5 conclusion.....	46
<b>Chapitre 4 : Calcul de la vie par l'approche locale</b> .....	47
4.1 Introduction.....	47
4.2 Calcul des valeurs locales.....	48
4.3 Procédure de calcul de la vie ou le nombre de cycle à l'amorçage.....	50
4.4 Conclusion.....	52
<b>Chapitre 5 : Application et calcul</b> .....	53
5.1 Introduction.....	53
5.2 La méthode de calcul proposée.....	53
5.3 Application.....	56
5.3.1 Calcul de la contrainte équivalente.....	56
5.3.2 Décomposition du chargement par RAIN-FLOW.....	58

5.3.3 Calcul de la vie par l'approche locale.....	60
5.3 conclusion.....	62
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>63</b>
Bibliographie.....	64
Annexe A.....	65
Annexe B.....	70
Annexe C.....	72
Annexe D.....	73
Annexe E.....	80

## Liste des symboles

Symbole	Signification	Unité
$R$	Rapport de la contrainte minimale, maximale	/
$S_{max}$	Contrainte maximale	N/mm <sup>2</sup>
$S_{min}$	Contrainte minimale	N/mm <sup>2</sup>
$S_a$	Contrainte alternée	N/mm <sup>2</sup>
$S_m$	Contrainte moyenne	N/mm <sup>2</sup>
$n$	Nombre de cycle effectué	/
$N_r$	Nombre de cycle à rupture	/
$\varepsilon_p$	Déformation plastique	/
$C$	Constante issue de la relation puissance	/
$S_D$	Limite de fatigue	N/mm <sup>2</sup>
$a$	Paramètre propre au matériau	/
$b$	Paramètre propre au matériau	/
$D_i$	Domage cumulatif	/
$SA$	Aire d'une section d'un élément de volume endommagé de normale $n$	mm <sup>2</sup>
$SA_D$	Aire totale des traces des défauts	mm <sup>2</sup>
$D_n$	Endommagement local relatif à la direction $n$	/
$\Gamma$	Contrainte effective	N/mm <sup>2</sup>
$R_m$	Résistance à la traction d'un matériau	N/mm <sup>2</sup>
$R_e$	Limite d'élasticité d'un matériau	N/mm <sup>2</sup>
$K_t$	Coefficient de concentration de contrainte	/
$T_{oct}$	Contrainte tangentielle octaédrique	N/mm <sup>2</sup>
$R_e$	Résistance à la traction	N/mm <sup>2</sup>
$S_{1,2,3}$	Contraintes issues des relations de MOHR	N/mm <sup>2</sup>
$T_e$	Contrainte limite dans le cas du cisaillement pur	N/mm <sup>2</sup>
$I$	Effort tranchant	N
$S_{eq}$	Contrainte équivalent	N/mm <sup>2</sup>
$S_{oct}$	la contrainte normale octaédrique	N/mm <sup>2</sup>
$\rho$	Rapport de la résistance à la traction et l'élasticité	/
$\Delta\sigma$	Intervalle de contrainte locale	N/mm <sup>2</sup>
$\Delta\varepsilon$	Intervalle de déformation locale	/
$S$	Contrainte nominale	N/mm <sup>2</sup>
$e$	Déformation nominale	/
$E$	Module de Young	N/mm <sup>2</sup>

$K'$	L'ordonnée à l'origine de la courbe d'écroutissage	/
$n$	La pente de la courbe d'écroutissage	/
$\Delta\varepsilon_t$	Intervalle de la déformation locale totale	/
$\Delta\varepsilon_p$	Intervalle de la déformation locale plastique	/
$\Delta\varepsilon_e$	Intervalle de la déformation locale élastique	/
$\sigma_f$	Coefficient de résistance à la fatigue	/
$\varepsilon_f$	Coefficient de ductilité	/

## Liste des figures

Figure	Nom de la figure	Page
1.1	Comparaison entre la statique et la fatigue	4
1.2	Principales zones de la courbe de Wöhler	5
1.3	Représentation de l'accommodation et le rochet	6
1.4	Représentation de l'adaptation	7
1.5	Construction de la courbe d'érouissage cyclique ou boucle d'hystérésis	11
1.6	Relation entre la déformation locale et la durée de vie	12
1.7	Résistance à la fatigue plastique oligo-cyclique par Neuber	13
1.8	Représentation schématique de la courbe d'endurance de Wöhler(A) Et de la courbe de dommage de French (B)	14
1.9	Cumul non linéaire	18
1.10	Variation de contrainte rencontrée en pratique	18
1.11	Contrainte variant de façon sinusoidale	19
1.12	Courbe (S-N) en fonction de divers niveaux de contrainte moyenne	20
1.13	Diagramme de Haig	21
1.14	Diagramme de Haig. Représentation de Goodman et Sordeberg	22
1.15	Définition du coefficient de concentration de contrainte Sur une éprouvette entaillée	26
2.1	Notation des contraintes	30
2.2	Image dans le plan S3 du critère de Von Mises	36
2.3	Image dans le plan S3 du critère de Torre-stassi	39
3.1	Chargement pic-vallée	42
3.2	Chargement séquentiel	42
3.3	Boucles d'hystérésis issues de la méthode de Rain-flow	45
3.4	Méthode de Rain-flow	46
5.2	Chargement réel d'une structure aéronautique	58

## INTRODUCTION

Les pannes mécaniques ont causé beaucoup de dégâts matériels et de pertes financières. L'usure due aux chargements répétés, c'est à dire la fatigue représente au moins la moitié de ces pannes mécaniques.

Il n'y a pas de pourcentages exactes disponibles mais beaucoup de livres et d'articles ont suggéré qu'entre 50 et 90 pour cent de ces échecs mécaniques sont dues à la fatigue, la majorité de ces pannes sont des fractures inattendues. Cela défie l'ingénieur à améliorer les décisions concernant la conception impliquant la fatigue.

Beaucoup d'approches à la conception impliquant la fatigue existent, elles peuvent être simples et pas chères comme elles peuvent être extrêmement complexes, sophistiquées et coûteuses. Donc la question la plus importante dans la conception est à quel point l'analyse est complète. Les lois récentes de la fiabilité des produits ont mis l'accent sur les décisions concernant l'ingénieur sur la conception.

La fatigue des matériaux est encore à moitié comprise. Ce qu'on sait réellement a été développé par étape et est devenu assez complexe. Pour comprendre en général le phénomène de fatigue on commence d'abord par un aperçu bref historique.

C'est en Allemagne en 1840 qu'Auguste WÖHLER, ingénieur des chemins de fer bavarois, fut le premier à tenir compte scientifiquement du phénomène de fatigue. Chargé de déterminer les causes des ruptures, il formula les lois fondamentales de la fatigue ; il a été reconnu que les chemins de fer échouent toujours au niveau des épaules puisque les ruptures apparaissent assez différentes des ruptures normales associées aux tests monotones, le concept due aux vibrations a été suggéré mais plus tard renié [1].

Le mot fatigue a été introduit dans les années 1840 et les années 1850 pour décrire les échecs apparaissant à cause des contraintes répétées, ce mot a continué d'exister comme étant la description normale de la rupture due aux contraintes répétées.

WÖLER a dit :

« Le fer et l'acier peuvent se rompre sous un effort unitaire inférieur non seulement à charge de rupture statique mais aussi à la limite élastique, lorsque l'effort est répété un nombre suffisant de fois. »

« la rupture n'a pas lieu quel que soit le nombre de sollicitations si l'écart entre l'effort minimal et l'effort maximal est inférieur à une certaine valeur limite ».

C'est ainsi que sont nées les idées sur la fatigue, un nouveau concept sur la résistance des structures aéronautiques sont soumises, lorsqu'elles sont en service, à des sollicitations fluctuantes au cours du temps pouvant causer la ruine parfois catastrophique alors que ces sollicitations dynamiques jugées modestes par rapport aux capacités statiques des matériaux définis communément par leur résistance à la rupture et leur limite d'élasticité. Le responsable de ces ruines est très souvent le phénomène de fatigue, ce phénomène qui se développe lentement dans le temps, sans modifications apparentes des pièces et structures, et dans des zones souvent inaccessibles, mais particulièrement sujettes à cet endommagement de par leur fonctionnement.

La prise en compte du phénomène de fatigue doit se faire dès la conception des structures voir même avant, c'est à cet effet que des doctrines ont été développées comme "Fail-safe", "Safe life" et la tolérance au dommage (voir annexe A). La question ardue à laquelle le constructeur aéronautique doit répondre est celle du compromis nécessaire entre les exigences économiques, techniques et réglementaires; ainsi il est impératif de tenir compte des réglementations relatives à la justification des structures des avions, civiles ou militaires.

Notre travail consiste à mettre en œuvre un programme fortran qui nous permettra de calculer le nombre de cycles à l'amorçage de fissures c'est à dire avant même que la fissure principale se forme dans un cas de contraintes multiaxiales.

Une procédure pour la prédiction de la vie au problème de fatigue a été développée en utilisant la méthode de la déformation locale proposée par NEUBER. La méthode de RAIN-FLOW a été utilisée pour décomposer la réponse mécanique complexe obtenue, en des événements simples. Tandis que le dommage a été évalué par la loi linéaire de MINER.

## CHAPITRE 1

### Notions sur la fatigue

#### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous évoquerons les différentes notions permettant de comprendre le phénomène de fatigue en général à savoir la définition d'endurance, comportement structurale, facteurs d'influences ainsi que quelques courbes qui permettent de mettre en évidence le problème de fatigue et en particulier le domaine oligo-cyclique qui est le site de notre travail.

#### 1.2 Fatigue et endurance

##### 1.2.1 La fatigue

Etat d'une pièce a la suite d'efforts répétés et alternés susceptibles d'entraînés une déformation ou une rupture, même s'il s'agit d'efforts notablement inférieurs à la limite d'élasticité [2]. **Voir annexe B**

Ainsi d'une façon très générale, il y'aura fatigue d'un matériau ou d'une pièce toutes les fois que l'on est en présence d'efforts variables dans le temps. Dans le cas de la résistance statique, c'est le dépassement d'un niveau de contrainte qui entraîne la rupture lors de l'application de l'effort (figure 1.1). Ce qui est bien particulier à la fatigue et qui en fait le danger, c'est que la rupture peut se produire pour des contraintes apparentes relativement faibles, souvent bien inférieures à la résistance à la traction et même à la limite d'élasticité du matériau, lorsque leur application est répétée un grand nombre de fois.

Les déformations interviennent éventuellement dans le cas de la fatigue plastique sur laquelle nous reviendrons plus-tard. En général, la fatigue se produit sans déformation plastique d'ensemble mais avec une déformation plastique très localisée d'abord autour des défauts, à

fond d'entailles ou en surface, ensuite à l'extrémité de la fissure une fois que celle-ci s'est formée. Il en résulte que la mesure de cette déformation est extrêmement difficile [3].

Les contraintes seront définies par l'amplitude maximale atteinte au cours d'un cycle,  $S$ , par la valeur moyenne de la contrainte  $S_m$ , et par le rapport de la contrainte minimale à la contrainte maximale  $R = \frac{S_{min}}{S_{max}}$ .

### 1.2.2 L'endurance

On appelle endurance la capacité de résistance à la fatigue des pièces, des structures et des assemblages.

La durée de vie est généralement mesurée par le nombre de cycles à la rupture  $N_f$ . L'exécution de  $n$  cycles ( $n < N_f$ ) entraîne un certain endommagement de la pièce qui est important de chiffrer car il détermine sa capacité de vie résiduelle et peut indiquer s'il faut ou non remplacer la pièce pour éviter un accident.

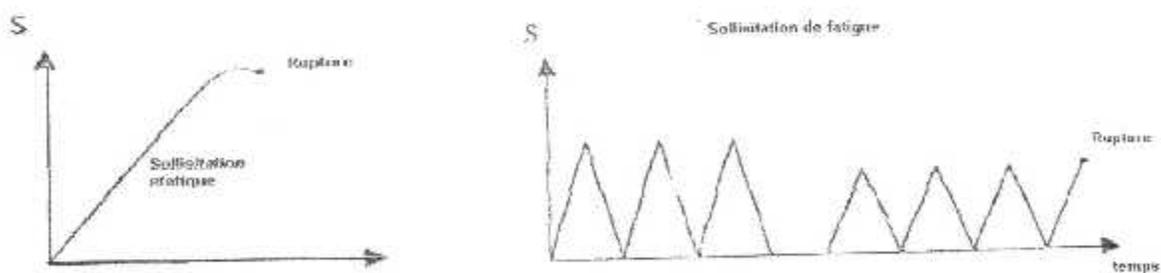


Fig1.1

Comparaison entre la statique et la fatigue

### 1.3 Diagramme d'endurance ( courbe de Wohler )

L'essai de fatigue le plus simple consiste à soumettre chaque éprouvette "lisse ou entaillée", ou pièces soudées à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude maximale et de fréquence constante et à noter le nombre de cycles  $N_r$  au bout duquel la rupture se produit.

on reporte ce nombre  $N_r$ , en général sur une échelle logarithmique, en fonction de la contrainte maximale des cycles. A chaque éprouvette correspond un point du plan (S,N), à partir d'un lot d'éprouvettes soumises à des contraintes maximales différentes, on obtient une courbe nommée courbe de WOHLER ou courbe S-N (stress-number of cycles). Cette courbe [4] peut être en général décomposée en trois zones ( figure 1.2 ) :

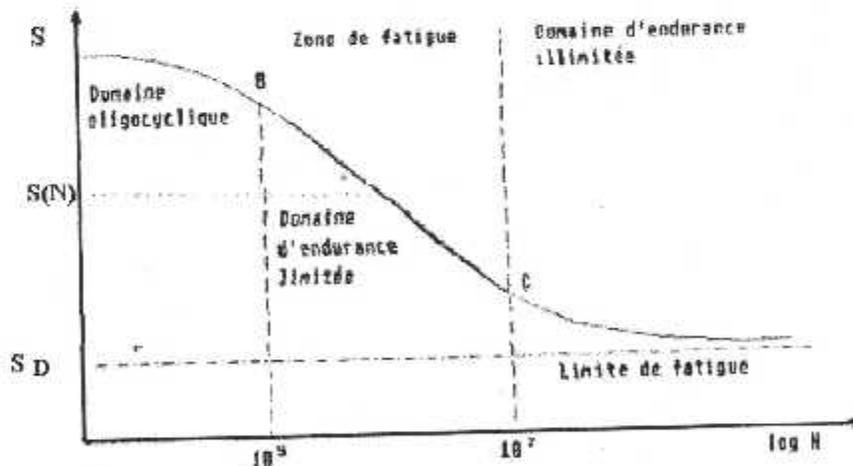
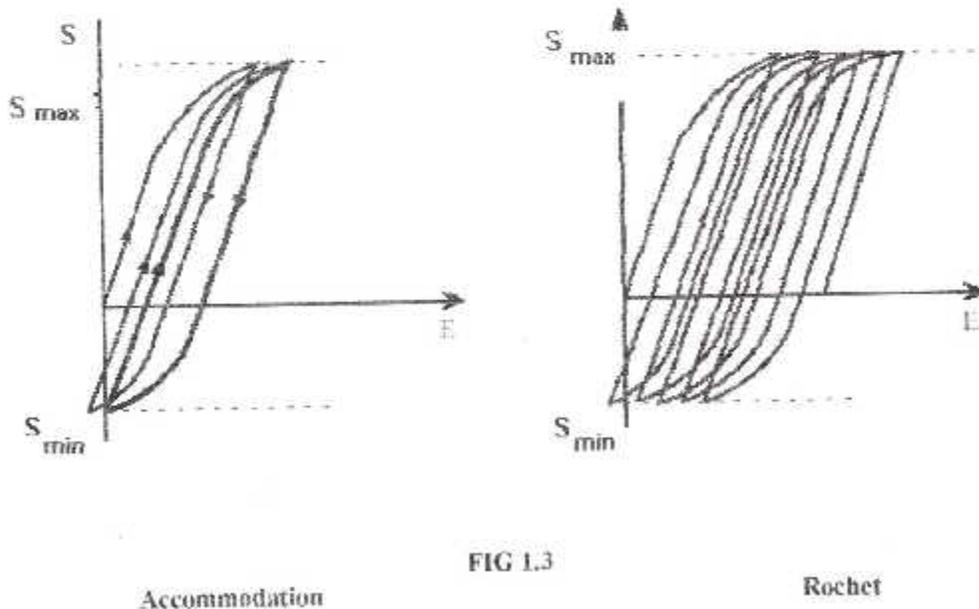


FIG 1.2  
PRINCIPALES ZONES DE LA COURBE DE WÖHLER

### a/ La zone oligo-cyclique

C'est la zone **AB**, qui correspond aux contraintes les plus grandes, supérieures à la limite d'élasticité macroscopique et où le nombre de cycles à la rupture s'étend de 0.5 jusqu'à  $10^4$  ou  $10^5$  (pour les aciers doux). L'éprouvette atteint généralement un état d'accommodation plastique ou un rochet élasto-plastique voir (figure 1.3) :

- L'accommodation se produit lorsque la réponse de l'éprouvette devient périodique, c'est à dire la déformation plastique devient périodique, un cycle d'hystérésis élasto-plastique se produit.
- Le rochet se produit lorsque la réponse de l'éprouvette n'atteint jamais un état périodique, la déformation plastique croît sans cesse, ce qui va provoquer la ruine de la structure en un nombre de cycles relativement faible.



Dans cette zone, la rupture survient après un petit nombre d'alternance et est précédée d'une déformation plastique notable. Par suite de l'amplitude de la contrainte maximale, chaque cycle d'effort entraîne une déformation plastique d'ensemble accompagnée le plus

souvent soit d'un durcissement notable, soit d'un adoucissement du métal. La déformation plastique  $\varepsilon_p$  peut être ici reliée au nombre de cycles à la rupture par une relation simple de la forme :

$$N^K \varepsilon_p = C \dots\dots\dots (1.1)$$

Où l'exposant  $K$  est voisin de 5 pour les métaux courants (aciers, alliages légers)

### b/ La zone d'endurance limitée

C'est la zone **BC** ou d'endurance limitée, où la rupture est atteinte après un nombre limité de cycles compris approximativement entre  $10^4$  à  $10^6$  à  $10^7$ . la rupture n'est pas accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble, mesurable. La réponse de l'éprouvette atteint dans ce cas un régime adapté.

L'adaptation est l'état élastique voir (figure 1.4), où la réponse de l'éprouvette est purement élastique, il peut y avoir de la déformation plastique due au premier cycle, mais au bout d'un certain nombre de cycles, elle reste constante ; bien entendu l'état final dépend de l'état initial de la structure.

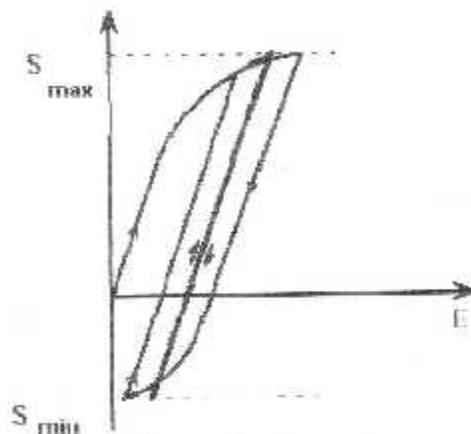


FIG :1.4  
Adaptation

C'est le domaine dans lequel travaillent les structures qui pour diverses raisons, doivent avoir des masses et des volumes impérativement réduits (cas des structures aéronautiques).

Il existe de très nombreuses relations reliant  $S$  et  $N$  pour représenter le phénomène dans ce domaine où  $N$  croît quand  $S$  décroît.

### C/ La zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité

C'est la zone **CD**, où D est un point pour les métaux ferreux qui est à l'infini. La courbe de WÖHLER présente généralement une variation de pente plus au moins marquée autour de  $10^6$  à  $10^7$  cycles, suivie d'une zone (CD) où la courbe tend vers une limite asymptotique parallèle à l'axe des  $N$ . Au dessus de cette valeur de  $S$ , notée  $S_D$ , il n'y a jamais rupture par fatigue quelque soit le nombre de cycles appliqués.

$S_D$  est nommée limite de fatigue ou aussi limite d'endurance. Cette limite peut ne pas exister ou être mal définie pour certains matériaux (aciers à haute résistance, métaux non ferreux). Les grandes durées de vie concernent le domaine de la fatigue polycyclique.

### Représentation analytique de la courbe de WÖHLER

Diverses expressions analytiques ont été proposées pour représenter les courbes de WÖHLER, dans les domaines d'endurance limité ou illimité lorsqu'elles sont connues pour un matériau ou une pièce donnée.

La courbe de WÖHLER est en général tracée dans des axes semi-logarithmiques (Log  $N$ ,  $S$ ) dans lesquels elle présente une partie approximativement linéaire (autour d'un point d'inflexion) variable suivant le matériau (BC) suivie d'une asymptote à la droite  $S = S_D$ .

Voici quelques formules qui représentent les résultats d'essais de fatigue [4] :

**Formule de WÖHLER 1870**

$$S_o = a - b \log N_f \dots\dots\dots(1.2)$$

où  $a > 0, b > 0$

Cette relation ne décrit pas la totalité de la courbe puisque  $S$  ne tend vers une limite  $S_D$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ . Elle ne représente que la partie BC.

**Formule de BASQUIN 1910**

$$\ln S_o = a - b \log N_f \dots\dots\dots(1.3)$$

où  $a > 0, b > 0$

où  $N_f S_o^\beta = C \dots\dots\dots(1.4)$

En posant  $\beta = 1/b$  et  $\ln C = a/\beta$ , où  $b$  est quelque fois nommé index de la courbe de fatigue.

Dans l'expression (1.4), la contrainte tend vers zéro quand  $N$  tend vers l'infini. Cette relation n'est donc représentative de la courbe de WÖHLER que dans sa partie BC. Par ailleurs, elle représente une droite dans des axes logarithmiques et non dans des axes semi-logarithmiques.

**Formule de STROMEYER (1914)**

$$\ln(S_o - S_D) = a - b \log N \dots\dots\dots(1.5)$$

où  $a > 0, b > 0$

où

$$S_a = S_D \left( \frac{C}{N_f} \right)^{\frac{1}{b}} \dots \dots \dots (1.6)$$

Ici  $S$  tend vers  $S_D$  quand  $N$  tend vers l'infini.

#### Formule de PALMGREEN (1924)

$$S_a = S_D \left( \frac{C}{N_f + A} \right)^{\frac{1}{b}} \dots \dots \dots (1.7)$$

Relation qui s'ajuste mieux aux courbes expérimentales que celle de STROMEYER.

### 1.4 Description phénoménologique de la fatigue plastique oligo-cyclique

Pour décrire le comportement des matériaux en fatigue plastique oligo-cyclique nous nous placerons dans le cas simplifié d'un essai à déformation imposée alternée.

#### 1.4.1 L'écrrouissage cyclique

Quand une éprouvette est soumise à une déformation cyclique imposée, on constate que les contraintes maximales et minimales ne restent que rarement constantes pendant tout l'essai.

Le plus souvent, après un stade transitoire où les contraintes maximales varient très sensiblement en croissant ou décroissant, les contraintes se stabilisent pendant un temps plus au moins long, on a une consolidation de la matière ( accommodation ).

La courbe de consolidation cyclique se présente en général assez bien par loi de RANBERG OSGOOD [5]. Cette loi est souvent utilisée pour représenter la courbe contrainte déformation au cour de l'essai. La déformation élastique peut être très aisément estimée relation (1.8). Il a été constaté que la linéarité de la relation effort-déformation est très

réduite, ceci illustre que la limite d'élasticité en compression après un cycle de traction ou l'inverse est sensiblement réduite; c'est une manifestation qui est appelée « effet BAUSHINGER » [3].

$$\epsilon_p = \left( \frac{\sigma}{K'} \right)^{1/n'} \dots\dots\dots (1.8)$$

$K'$ ,  $n'$  paramètres matériaux.

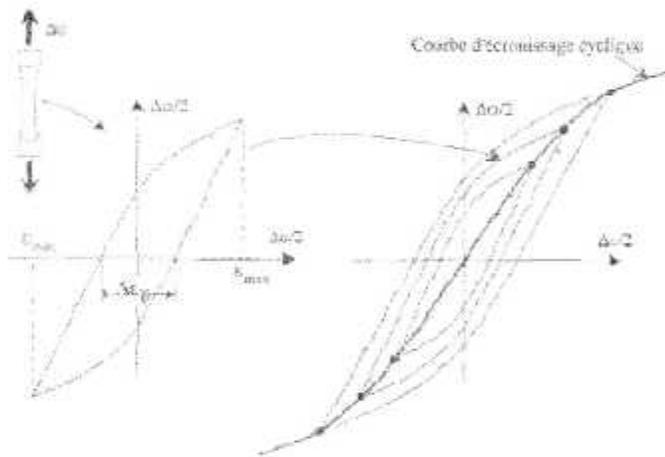


FIG 1.5

Construction de la courbe d'écrouissage cyclique ou courbe d'hystérésis

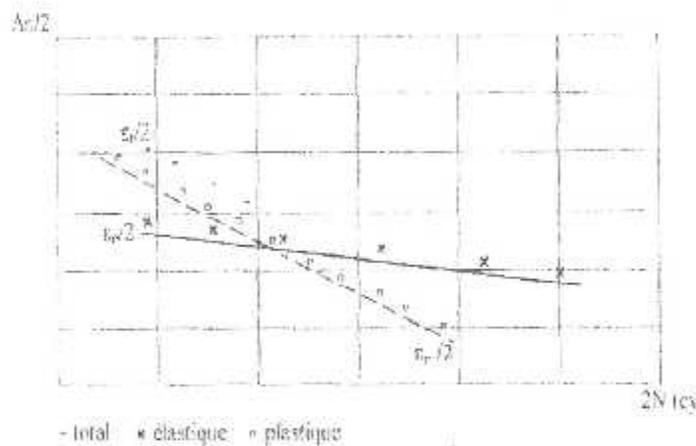
### 1.4.2 Résistance à la fatigue

Si la courbe d'écrouissage est la donnée essentielle pour choisir un modèle de comportement cyclique ou pour analyser le comportement micro-structural d'un matériau, la courbe de résistance à la fatigue plastique présente un intérêt évident pour tous ceux qui cherchent à contrôler le phénomène de fatigue plastique d'un appareil.

Il a été montré [3,5] qu'une relation puissance reliant la déformation plastique ( MANSON-COFFIN ) (1.9) et la déformation élastique ( loi de BASQUIN ) (1.10) au nombre de cycle à rupture.

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \epsilon_f (2N)^c \dots \dots \dots (1.9)$$

$$\frac{\Delta \epsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2N)^b \dots \dots \dots (1.10)$$



**FIG 1.6**  
Relation entre la déformation locale et la durée de vie

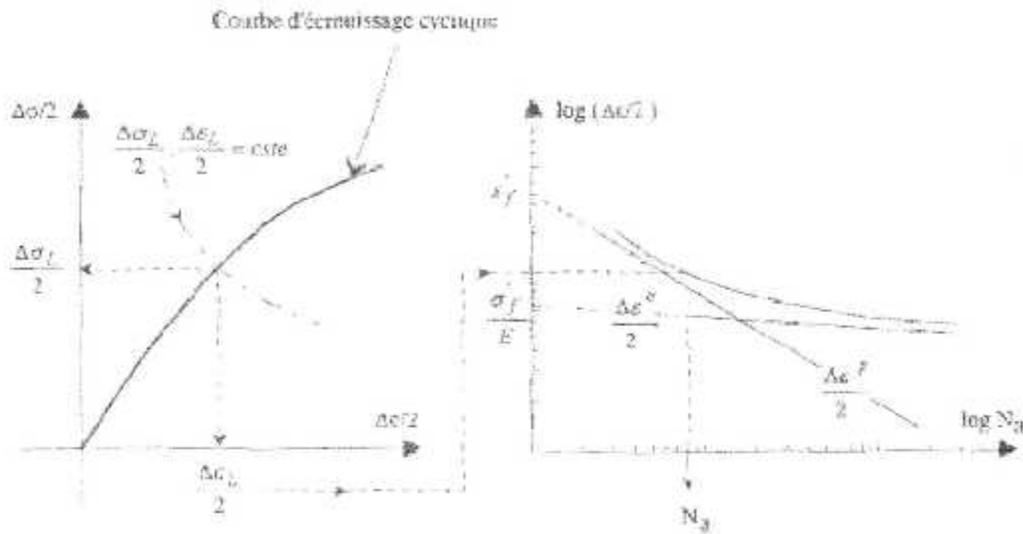


FIG 1.7  
Prédiction de la résistance à la fatigue plastique oligo-cyclique par NEUBER.

### 1.5 Le dommage en fatigue

L'aspect physique du dommage correspond aux variations des propriétés physiques des matériaux pendant la fatigue, variation qui reflètent les modifications que subit la matière sous l'action des sollicitations variables.

Considérant les effets de surcharge et de sous charges, FRENCH [3] a proposé de distinguer quatre zones dans le diagramme d'endurance voir (figure 1.8).

La zone supérieur « 1 » correspond a des conditions pour lesquelles les éprouvettes sont rompues. La zone « 4 » correspond a des éprouvettes non rompues, la courbe A séparant les deux zones ; dans la région immédiatement inférieure à la courbe A, French distingue deux nouvelles zones, toutes deux au-dessus de la limite d'endurance : la zone « 2 » correspond à un endommagement du métal par surcharge tel que sa limite d'endurance ultérieure soit abaissée, la zone « 3 » correspond comme la partie supérieure de la zone « 4 », à une amélioration plus ou moins importante de l'endurance, suivant la valeur de l'effort.

Entre les courbes A et B, il y a propagation des fissures jusqu'à la rupture, au dessous de la courbe B, les micro fissures ne se développent pas nécessairement.

On peut admettre que leurs effets d'entaille est compensé par la relaxation résultant des déformations plastiques en tête de fissure.

Il faut noter qu'une amélioration de l'endurance peut se produire non seulement au dessous de la limite d'endurance zone - « 4 » - ,mais également au dessus -zone « 3 »-, à condition de ne pas franchir la courbe de dommage

La courbe B est appelée courbe de dommage ou ligne de FRENCH.

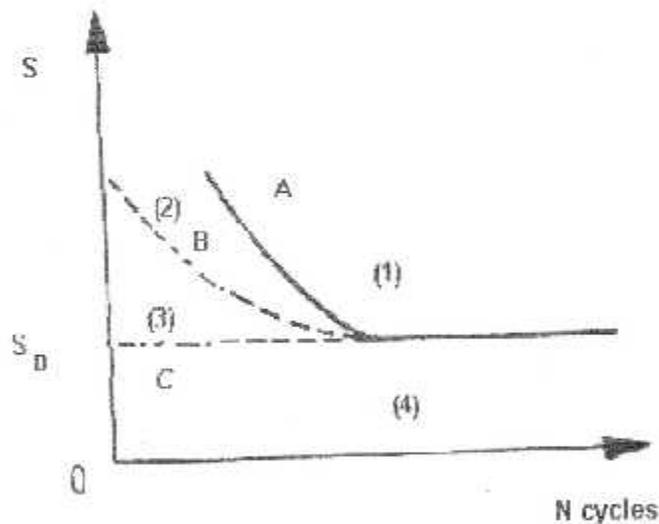


FIG 1.8

Représentation schématique de la courbe d'endurance de WÖHLER (A)  
Et de la courbe de dommage de FRENCH (B)

## 1.6 Evolution structurale de la fissure

Dès les premiers cycles de déformation, on observe au microscope optique la formation superficielle de bandes de glissement, cet aspect assez général, au bout de certain nombre de cycles, des bandes de glissement persistantes apparaissent là où il y a localisation des

déformation. Une étude détaillée de ces bandes révèle qu'il y a formation d'extrusions et d'intrusions qui constituent les amorces de micro fissures. Les micro fissures se propagent tout d'abord par scission selon des plans inclinés à environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de traction, n'affectent la pièce que sur une profondeur limitée à quelque grains : après quoi, quelques-unes d'entre elles, en se rejoignant, forment une fissure principale, qui se propage cette fois selon le plan perpendiculaire à l'axe de la contrainte maximale. Une fois qu'elle est formée la fissure principale se propage à l'intérieur du matériau.

Pour un certain intervalle de vitesse de fissuration ( $10^{-4}$  à  $10^{-2}$  mm/ cycle), chaque strie correspond un cycle de chargement ; ceci indique que la progression microscopique de la fissure résulte de l'accumulation d'un endommagement se produisant en tête de fissure, accumulation qui entraîne finalement la rupture sur une distance égale à la longueur de l'inter-

strie. Soulignons qu'il n'est pas toujours possible de mettre en évidence des stries microscopiques ; en effet la netteté des stries dépend de la structure cristalline du matériau.

### 1.7 Les lois d'endommagement en fatigue

La théorie de l'endommagement, a pour objet de décrire l'évolution des phénomènes entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures ou de cavités à l'échelle microscopique) et l'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (de 0,1 à 1 mm pour les métaux). Au-delà, c'est le domaine de la fissuration [3,4,6].

Les paramètres de dommage les plus fréquemment rencontrés dans la bibliographie sont :

- La fraction de vie ( utilisée par exemple dans la loi linéaire d'endommagement de MINER )
- La surface effective ( LEMAITRE – CHABOCHE ).

## Lois d'endommagement uni axial

**1.7.1 Loi de Miner**

MINER reprenant les études de PALMGREEN a proposé une loi simple du dommage, cette loi est sans aucun doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'étude, du fait de sa simplicité.

Elle suppose que le dommage se cumule de manière linéaire. Le paramètre de dommage retenu dans cette formulation est la fraction de vie définie par :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \dots \dots \dots (1.11)$$

où  $n_i$  est le nombre de cycles effectués avec un chargement donné pour lequel le nombre de cycles à rupture serait  $N_i$ . La condition de rupture s'écrit :

$$\sum D_i = 1 \Leftrightarrow \sum \frac{n_i}{N_i} = 1 \dots \dots \dots (1.12)$$

Cette loi rend bien compte du fait que les niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'endurance sont supposés non endommageant.

Le dommage induit par un cycle de sollicitation est donc fonction de la durée de vie  $N_i$  du matériau pour le cycle en question. Une évaluation de cette quantité peut être obtenue à partir de la connaissance de la courbe de Wöhler relative aux conditions de chargement.

Cette courbe représente la contrainte dynamique  $S_m$  (contrainte maximale, contrainte minimale ou encore amplitude de contrainte), en fonction du nombre de cycles  $N_i$  à rupture (reporté sur une échelle logarithmique), pour une contrainte moyenne  $S_m$  fixée.

### 1.7.2 Loi de LEMAITRE-CHABOCHE

Cette loi repose sur les notions de fraction de vie  $\frac{n_i}{N_i}$  et de contrainte effective  $\Gamma$  introduite par RABOTNOV.

Par définition

$$D_n = \frac{SA_p}{SA} \dots\dots\dots (1.13)$$

$SA$  : aire d'une section d'un élément de volume endommagé de normale  $n$ .

$SA_p$  : aire totale des traces des défauts (cavités, fissures).

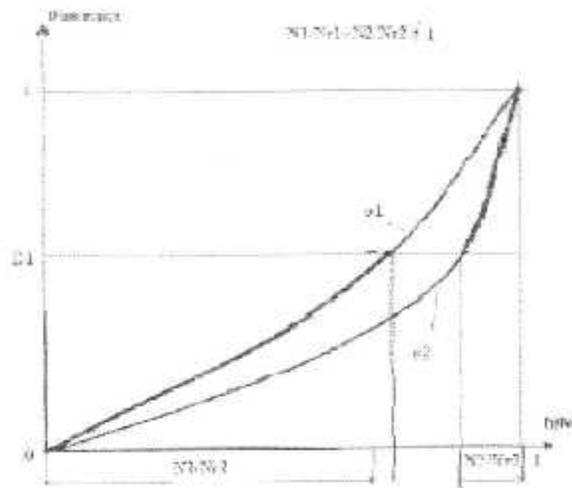
$D_n$  correspond à la mesure mécanique de l'endommagement local relatif à la direction  $n$ .

Il permet de caractériser l'état d'endommagement.

La contrainte effective représente la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts. Dans le cas d'un endommagement isotrope (c'est à dire :  $D = D_n$  pour tout  $n$ ), elle est définie par :

$$\Gamma = \frac{SA}{1 - D} \dots\dots\dots (1.14)$$

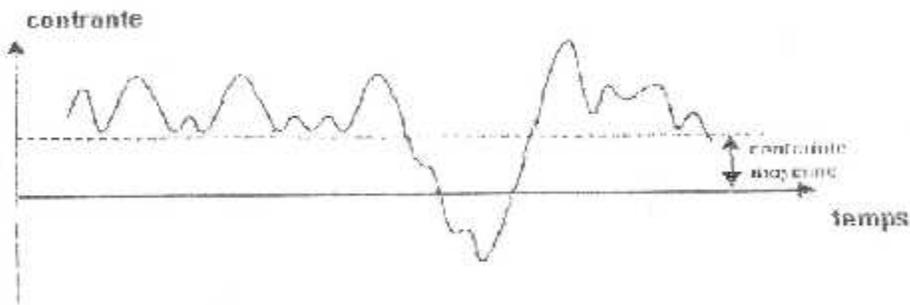
L'expérience montre que les courbes d'évolution du dommage en fonction du paramètre d'endommagement  $(n_i/N_i)$ , peuvent dépendre du niveau de sollicitation imposé. Il n'y a donc pas de cumul linéaire du dommage. La figure (1.9) permet d'illustrer ces propos. Elle est relative à un essai de fatigue à deux niveaux de contrainte.



**FIG 1.9**  
Cumul non linéaire

**1.8 Idéalisisation d'un chargement entraînant la fatigue**

Jusqu'ici, l'étude de la fatigue a été limitée au cas où la contrainte cyclique s'alternant de façon sinusoïdale autour d'une valeur moyenne nulle, or en pratique, ce type de chargement n'est qu'occasionnel, alors que celui représenté à la figure (1.10) est plus fréquent.



**Fig1.10**  
Variation de contrainte rencontrée en pratique

On remarque que :

- La variation de contrainte, bien qu'elle soit vaguement périodique, est loin d'être sinusoidale.
- La valeur moyenne de la contrainte n'est pas nulle à cause, par exemple de la contribution statique du poids propre de la pièce ou, à cause d'un pré serrage.

Il est possible, cependant, de représenter adéquatement une variation de contrainte comme celle montrée à la figure précédente par la superposition de contraintes sinusoidales de diverses amplitudes et de différentes valeurs moyennes.

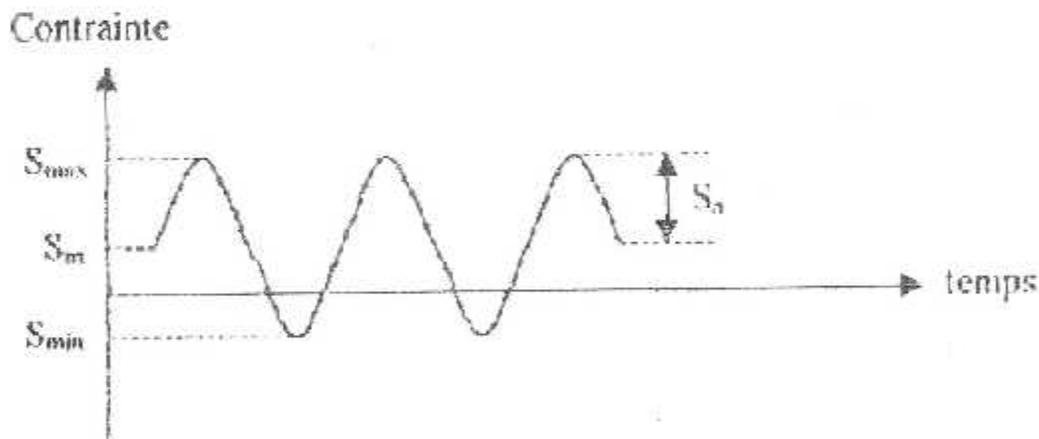


Fig 1.11

Contrainte variante de façon sinusoidale

### 1.8.1 Influence de la contrainte moyenne ( $S_m \neq 0$ )

La courbe de la figure (1.11) représente une contrainte variant de façon sinusoidale (amplitude =  $S_a$ ), superposée à une contrainte moyenne ( $S_m$ ) statique. On peut, en principe, effectuer ce type de chargement sur des éprouvettes soumises à une flexion rotative, en leur imposant une charge additionnelle de traction ou de compression statique.

La figure (1.12) fournit certains résultats types courbes S-N en fonction de divers niveaux de contrainte moyenne.

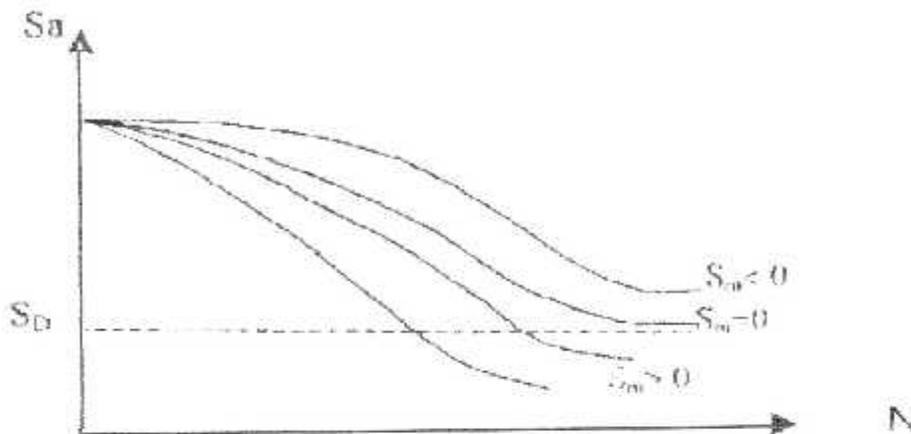


FIG 1.12

Courbe (S-N) en fonction de divers niveaux de contrainte moyenne

Il a été proposé plusieurs relations pour prédire l'effet de la contrainte moyenne sur la vie d'un matériau, à partir de l'analyse des résultats concernant la fatigue due à une contrainte moyenne nulle et en fonction de la résistance déterminée lors d'un chargement statique uniaxial.

Ces relations sont interprétées par le diagramme de Haig qui représente la variation de l'amplitude de la contrainte alternée en fonction de la contrainte moyenne pour un nombre de cycles à rupture donné. Il a l'avantage de bien montrer que tout se passe comme si la sollicitation résultait de la composition d'une contrainte moyenne consentante statique et d'une contrainte purement alternée dynamique.

### 1.8.2 Diagramme de Haig

Sur ce diagramme, l'amplitude de contrainte  $S_a$  est portée en fonction de la contrainte moyenne  $S_m$  à laquelle a été réalisé l'essai de fatigue (Figure 1.13). Deux points particuliers sont à considérer :

- Le point A qui représente la limite d'endurance  $S_D$  en sollicitation purement alternée
- Le point B qui représente le comportement limite du matériau pour une contrainte alternée nulle. Ce point correspond donc à la contrainte de rupture du matériau au cours d'un essai statique.

L'ensemble des limites d'endurance observées pour diverses valeurs de la contrainte moyenne se placent alors sur la courbe AB ajustée en fonction des résultats d'essais.

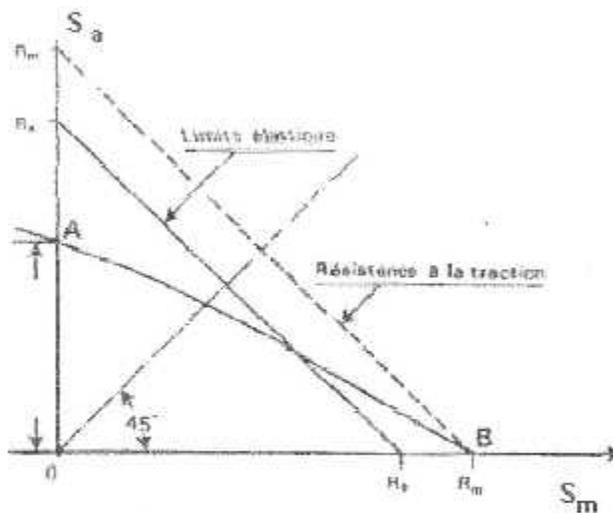


FIG 1.13  
Diagramme de HAIGH

Différentes représentations de la courbe AB sont possibles (Figure 1.13) La relation empirique de Goodman [3] est la plus connue .

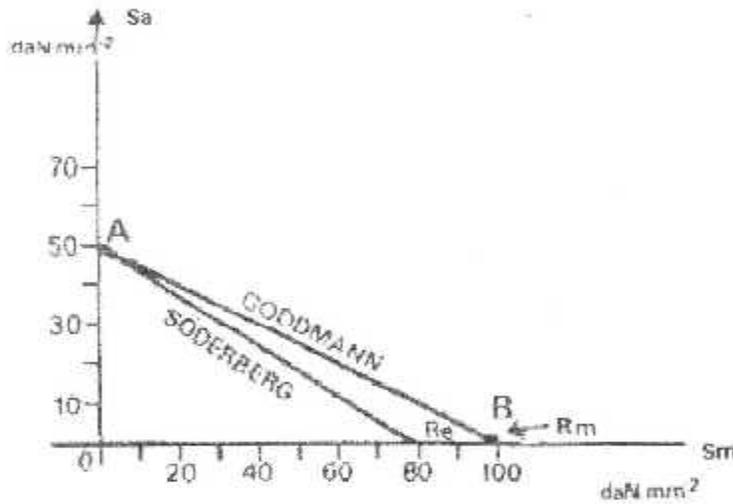
$$\frac{S_a}{S_D} + \frac{S_m}{R_m} = 1 \dots\dots\dots(1.15)$$

Ou :

- $S_a$  : amplitude de la contrainte sinusoïdale imposée.
- $S_m$  : contrainte statique moyenne.
- $S_D$  : limite d'endurance.
- $R_m$  : résistance à la traction du matériau.

Soderberg [4] a proposé une relation semblable à l'équation (1.13), mais plus sécurisée, puisque la valeur de  $S_m$  est limité à la limite d'élasticité du matériau  $R_e$ .

$$\frac{S_a}{S_D} + \frac{S_m}{R_e} = 1 \dots\dots\dots(1.16)$$



**FIG1.14**  
**Diagramme de HAIG. Représentation de GOODMAN et SORDEBERG**

La durée de vie diminue lorsque  $S_m$  augmente, car cela se traduit par un niveau de  $S_{max}$  plus élevé. On utilise souvent le rapport  $R$  pour repérer cet effet

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} = \frac{S_m - S_a}{S_m + S_a} \dots\dots\dots(1.17)$$

Les essais permettant de déterminer la famille de courbes  $N(S_a, S_m)$  différentes présentations sont possibles :

- 1- Courbe de WÖHLER ( $S_a$  ou  $S_{max}$ ,  $N$ ), paramétrées en  $S_m$ .
- 2- Diagramme de SMITH ( $S_a$ ,  $S_m$ ), paramétrées en  $N$ .
- 3- Diagramme de GOODMAN ( $S_{max}$ ,  $S_m$ ), paramétrées en  $N$ .

## 1.9 Les facteurs d'influence

L'endurance d'une pièce ou d'un élément de structure est la résultante de plusieurs phénomènes compétitifs.

D'une part l'endommagement progressive du métal par suite de l'existence des concentrations locales de contraintes, qui entraînent des déformations plastiques, et de l'irréversibilité des glissements au cours des cycles successifs (interaction de dislocation, rôle de l'environnement) : ces phénomènes entraînent la fissuration du métal [3,4].

D'autre part ; l'adaptation, c'est à dire la modification des propriétés du métal, qui le rend plus apte à supporter des effets cyclique par la consolidation liée à l'écroutissage et par le durcissement qu'entraîne le vieillissement du métal écroui. Alors il en résulte que tout les facteurs qui agissent sur ces différents phénomènes joueront un rôle vis à vis de l'endurance des pièces mécanique. Ces facteurs sont très nombreux et n'ont pas toujours un aspect compétitif mais on doit les prendre en considération à cause de leurs importance dans le domaine de la fatigue des structures, on peut les ranger, pour schématiser, en deux catégories que nous examinerons successivement : les facteurs métallurgiques, les facteurs géométriques.

### 1.9.1 Paramètres d'ordre métallurgique

#### a/ Taille des grains

Les structures a grains fins présentent une meilleure tenue en fatigue que les structures a gros grains.

**b/ Orientation du fibrage par rapport a la direction des efforts**

L'orientation générale des grains ( fibrage ) confère au matériau une anisotropie plus au moins marquée. Les caractéristiques statiques et la tenue en fatigue seront meilleures dans le sens long du fibrage que dans les autres sens.

**c/ Taux d'érouissage**

L'érouissage résultant des opérations de formage a pour effet de consolider le matériau (augmentation de la limite d'élasticité), et par suite, améliore la tenue en fatigue.

**d/ Traitement thermique**

Suivant que le traitement thermique provoque un adoucissement ou un durcissement du matériau , la tenue en fatigue sera diminuée ou augmentée. De plus, le traitement thermique peut modifier la taille des grains.

**e/ Santé métallurgique de l'alliage**

Les défauts métallurgiques ( lacunes ; défauts interstitiels, précipites, inclusions), peuvent être a l'origine de l'endommagement par fatigue. Par incompatibilité des déformations, ils provoquent des concentrations de contraintes locales. L'abattement de durée de vie dépendras de leur quantité, taille, nature, répartition, orientation par rapport aux efforts.

**1.9.2 Paramètres d'ordre mécanique et géométrique****a/ Nature de chargement**

Le chargement peut être monotone ou variable ( et même aléatoire, spectre). Dans le cas des chargements monotones les paramètres prépondérants sont :

- La forme du signal : un signal de type carré est plus pénalisant que celui du type sinusoïdal.
- Le rapport R ( rapport entre la valeur minimale et la valeur maximale du chargement ) : à contrainte maximale constante, si R augmente, la durée de vie augmente .
- La contrainte moyenne à amplitude de chargement constante , si  $S_m$  augmente, la durée de vie diminue.

La période du signal a en général peut d'influence sur la durée de vie. Cette règle est infirmée quand le phénomène de fatigue est associé a d'autres modes d'endommagements fonction du temps : fatigue-corrosion, fatigue-fluage, ou lorsque la rapidité des sollicitations produit un échauffement.

Dans le cas des chargements variables, les paramètres prépondérants sont :

- La présence de surcharges : la répétition périodique d'une surcharge peut retardé la propagation de fissure .
- L'ordre d'apparition des cycles.

#### **b/ Facteurs de concentration des contraintes**

L'influence de ces facteurs intervient par la dimension des pièces ( effet d'échelle ) et surtout par leurs formes ( effet d'entaille ).

Des essais de fatigue, effectués sur des éprouvettes entaillées ou rainurées, permettent de déterminer expérimentalement l'effet de l'entaille sur la résistance à la fatigue.

On peut ainsi définir le facteur  $K_f$  ( facteur d'entaille )

$$K_f = \frac{S_a \text{ avec entaille}}{S_a \text{ sans entaille}} \dots \dots \dots (1.18)$$

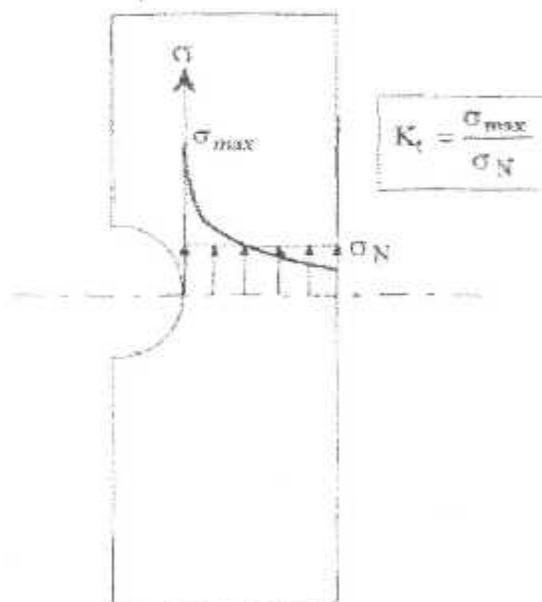
Ce coefficient est toujours inférieur à  $K_t$ , (coefficient de concentration de contrainte théorique élastique qui est défini comme étant le rapport entre la contrainte locale maximale et la contrainte nominale) ( $K_t = \frac{\sigma_{max}}{S}$ ).

Il en résulte qu'une augmentation de résistance statique n'entraîne pas nécessairement une augmentation de résistance à la fatigue en présence d'entaille.

La sensibilité à l'effet d'entaille du matériau considéré est représentée par

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \dots \dots \dots (1.19)$$

$q$  : varié de 0 à 1 si le matériau est insensible ou non à l'entree.



**FIG 1.15**  
**Définition du coefficient de concentration de contrainte**  
**Sur une éprouvette entaillée**

**c/ Accidents de forme (discontinuité dans la géométrie : entailles, trous, etc...)**

Un accident de forme augmente localement le niveau de contrainte. Cette augmentation peut être traduite par un coefficient de concentration de contrainte élastique  $K_t$  : rapport entre la contrainte locale maximale et la contrainte nominale. Dans le domaine d'endurance limité ( domaine visé par l'industrie aéronautique ), si la valeur de  $K_t$  augmente, la valeur de la durée de vie diminue.

**d/ Effet d'échelle**

A niveau de contrainte égale, deux pièces de même géométrie mais de dimensions différentes n'auront pas la même tenue en fatigue : plus les dimensions d'une pièce croissent, plus sa résistance à la fatigue diminue. Cette observation s'explique principalement par le volume de matière sollicité : plus celui-ci est grand, plus la probabilité d'avoir les défauts métallurgiques est grande.

**e/ Qualité de l'usinage**

Généralement l'endommagement par fatigue apparaît en premier lieu à la surface des pièces. La prise en compte des aspects suivants améliore la tenue en fatigue :

- L'aspect micro-géométrie de la surface : un mauvais usinage en surface provoque des micro-reliefs susceptibles d'augmenter localement le niveau de contrainte ; l'amorçage des fissures en surfaces est donc retardé lorsque la rugosité est faible
- L'aspect contraintes résiduelles : l'usinage peut introduire des contraintes résiduelles de traction en surface ( elles sont équilibrées en profondeur par des contraintes résiduelles de compression) ; ces contraintes se superposent à celle du chargement et accélèrent l'endommagement par fatigue.

### 1.9.3 Environnement

Un milieu agressif (températures élevées, milieux corrosifs...) aggrave le phénomène de fatigue. Il apparaît des phénomènes nouveaux comme le fluage ou la corrosion. Leur action est proportionnelle au temps d'exposition.

### Conclusion

Ce chapitre représente les étapes essentielles de la méthode que nous adopterons pour notre travail. Nous avons ainsi tiré les idées essentielles que nous reviendrons par la suite à développer sur les propriétés cycliques de la matière, les propriétés de la résistance à la fatigue, l'effet de concentration des contraintes, ainsi la comptabilisation du dommage par la formule de MINER nous ait la plus pratique.

## CHAPITRE 2

### Contraintes multi axiales et critère de calcul de la contrainte équivalente

#### 2.1 Introduction

Depuis plusieurs dizaines d'années, des investigations sur le comportement en fatigue des matériaux sont effectuées.

Au départ, ils effectuaient des sollicitations uni-axial d'amplitude constante qui ont donné lieu aux premières courbes S-N, puis les études se sont orientées soit vers l'aspect amplitude variable des sollicitations uni-axial, soit vers le comportement en fatigue sous sollicitations multi-axial.

Dans ce qui va suivre nous allons citer les différents critères de calcul de contraintes équivalentes des sollicitations multi axiales.

#### 2.2 Etat de contrainte

Sous l'action des forces extérieurs, la pièce est déformée et la matière cherche, en créant des forces intérieures, à résister à ces déformations forcées. Ce sont ces forces intérieures qui, rapportées à l'unité de surface, sont appelées "contraintes" [7].

Deux approches peuvent donc être envisagées :

- La première très peu utilisée, par l'étude de l'état de déformation.
- La deuxième, et de loin la plus utilisée, par l'étude de l'état des contraintes.

### 2.2.1 État de contraintes tri axiales

Considérons dans la pièce contrainte un élément de volume unitaire et un système de coordonnées rectangulaires  $(x,y,z)$  ; chaque contrainte agissant sur chaque surface unitaire peut être décomposée en trois composantes voir figure (2.1) :

- La composante orientée perpendiculairement à la surface est appelée contrainte normale et notée  $\sigma$
- Les composantes situées dans le plan sont appelées contraintes de cisaillement et notées  $\tau$ .

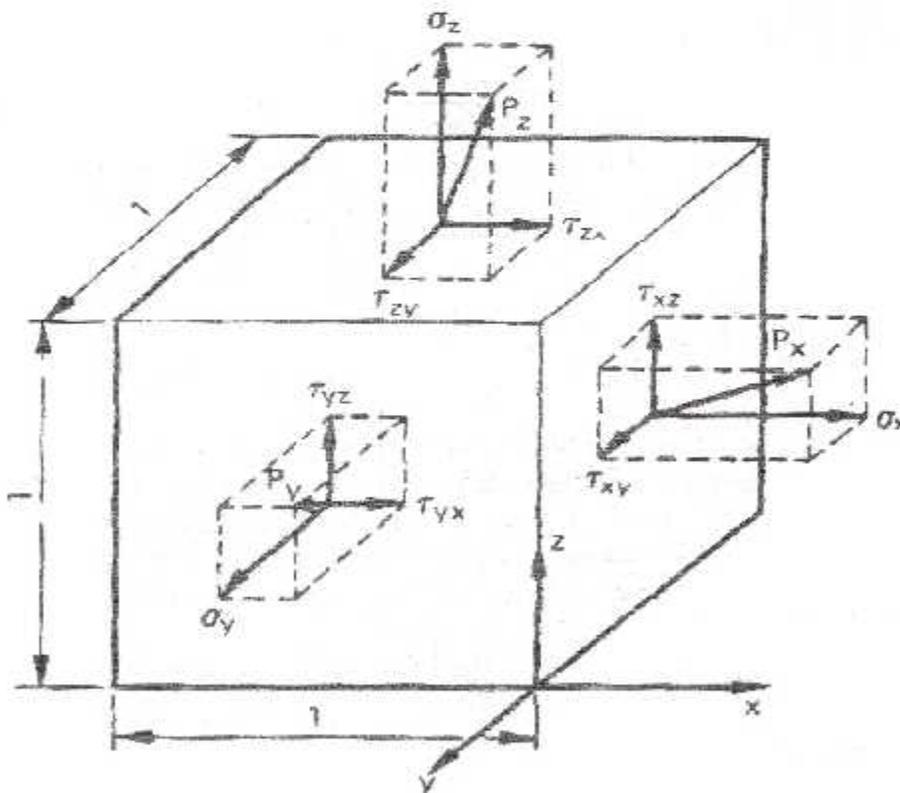


FIG-2.1

Notation des contraintes.

L'équilibre vis-à-vis de la rotation, exige que :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} \end{cases}$$

L'état de contraintes triaxial est donc entièrement défini par les six composantes :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz} \text{ et } \tau_{zx}$$

La fatigue étant essentiellement un phénomène de surface correspondant donc à un état de contrainte bi axial ou mono axial, il n'apparaît pas nécessaire de développer plus avant cet état de contraintes tri axial.

### 2.2.2 Etat de contraintes bi axial

Dans un état des contraintes bi axial ou état plan des contraintes, comme cela est souvent le cas sur la surface de la pièce, les seules composantes restantes sont :

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau$$

Sans entrer dans le détail du cercle des contraintes de MOHR, il est intéressant de rappeler que les contraintes normales prennent alors des valeurs minimales et maximales respectivement égales à [7] :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \left[ \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2 \right]^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots (2.2)$$

Cas particulier important, en théorie des poutres, vient :

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right) \dots \dots \dots (2.3)$$

Lorsque la contrainte de cisaillement devient nulle,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont appelées contraintes principales

Dans ce cas particulier :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_x \\ \sigma_2 = \sigma_y \end{cases}$$

### 2.3 Le formalisme général des critères

Le rôle d'un critère de fatigue multiaxial est de situer tout cycle multiaxial de contraintes par rapport à la limite d'endurance du matériau.

La notion généralement retenue de limite d'endurance concerne le niveau de contrainte qui conduit à l'amorçage d'une fissure dite « longue », observable à l'échelle macroscopique, après un nombre donné de cycles généralement grand ( souvent  $10^7$  cycles ) est appelé seuil de l'endurance illimitée.

Un critère se présente généralement sous forme d'une fonction de fatigue F de certaines composantes du cycle de contraintes dont il évalue la sévérité, des limites d'endurances du matériau ( comme par exemple, traction alternée  $S_0$  symétrique, traction répétée  $S_{-1}$ , torsion répétée  $T_{-1}$  ), voir de certains de ses caractéristiques statiques ( résistance maximale en traction  $S_u$  ).

Les critères de fatigue sont généralement répertoriés en trois grandes catégories selon leur approche.

### 2.3.1 Modèles empiriques

Premiers critères multi-axial proposés, les modèles sont construits à partir des composantes alternées et moyennes du tenseur des contraintes et sont destinés à rendre compte de sollicitations particulières de flexion-torsion ou de traction-torsion.

La particularité de leurs formalisme ne leur permet pas en général d'être étendu à des sollicitations de natures différentes de celles pour lesquelles ils ont été élaboré [4].

### 2.3.2 Les critères d'approche globale

Cette catégorie de critère peut elle-même être divisée en trois groupes distincts.

- Les critères utilisant des invariants ( $I_1, J_2$ ) du tenseur de contraintes ou de son déviateur [4].
- Les critères dont la fonction de fatigue est obtenue à l'aide d'une moyenne quadratique d'un indicateur d'endommagement sur l'ensemble des plans possibles passant par le point
- Matériel ou l'analyse en fatigue est réalisé, le caractère global de l'approche provient de la contribution de tous les plans à la fonction de fatigue du critère.
- Les critères basés sur une approche énergétique, la fonction fatigue combine les énergies de volume et de chargements de forme développés par les contraintes au cours du cycle.

### 2.4 Les critères d'approche plan critique

Ces critères, plus récents, sont basés sur le principe suivant :

Le comportement en fatigue du matériau en un point de la structure est imposé par le plan matériel le plus sollicité passant par ce point.

Différentes composantes des contraintes normales et tangentielles agissant sur un plan sont en général utilisées pour traduire le caractère plus au moins sévère du cycle des contraintes sur le plan.

Ce concept a été mis au point pour traduire certaines observations métallurgiques montrant que des bandes de glissement persistantes apparaissent à la suite de sollicitations appliquées de façon cyclique, marquant le site privilégié de l'amorçage et des fissures.

Plusieurs critères intéressants s'offrant à nous citant par exemple ; le critère de DANG VAN, STULEN et CUMMINGS, FINDLEY, YOKOBORI, McDIARMID, mais notre intérêt s'est penché plus particulièrement sur les critères d'approche plan critique à savoir ; critère de TORRE-STASSI et critère de VON-MISES à cause de la disponibilité de la documentation ainsi qu'à la non-complexité de la programmation.

#### 2.4.1 Critère de VON MISES (hypothèse de l'énergie de déformation)

Il se produit une défaillance lorsque la scission octaédrique atteint une valeur limite  $K$  [7].

La contrainte tangentielle octaédrique est, par définition, la contrainte tangentielle qui s'exerce sur une facette dont la normale est également inclinée sur les axes principaux (trisectrice).

Sa valeur est :

$$T_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2} \dots\dots\dots(2.4)$$

Le critère s'écrit donc :

$$T_{oct} = K$$

Si la valeur de résistance limite admise par essai de traction ( $S_2 = S_3 = 0$ ) est  $R_e$  ( $S_1 = R_e$ ), il vient donc :

$$T_{\text{oct}} = \frac{1}{3} \sqrt{|S_1^2 + S_2^2|} = \frac{\sqrt{2}}{3} S_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} R_e = K \dots\dots\dots (2.5)$$

Dans ces conditions, le critère général s'écrit :

$$\frac{1}{3} \sqrt{|(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2|} = \frac{\sqrt{2}}{3} R_e \dots\dots\dots (2.6)$$

en état plan de contraintes ( $S_3 = 0$ ), il vient alors :

$$\frac{1}{3} \sqrt{|(S_1 - S_2)^2 + S_1^2 + S_2^2|} = \frac{\sqrt{2}}{3} R_e \dots\dots\dots (2.7)$$

$$\Rightarrow S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2 = R_e^2 \dots\dots\dots (2.8)$$

L'image de ce critère est donc l'ellipse de Von Mises (fig 2.2) circonscrite à l'hexagone de coulomb.

On suppose que  $R_e = R_c$ .

En cisaillement pur ( $S_1 = -S_2 = T$ ), la valeur limite est égale à :

$$T_e = \frac{1}{\sqrt{3}} R_e \quad (\text{OH sur fig 2.2})$$

L'expérience montre que ce critère s'applique bien aux matériaux ductiles.

Dans une section droite et en théorie des poutres, la contrainte tangentielle octaédrique s'écrit :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{S^2 + 3T^2} \dots\dots\dots (2.9)$$

La valeur limite admise d'après le critère est donc :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{S^2 + 3T^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} R_e \dots \dots \dots (2.10)$$

Soit

$$\sqrt{S^2 + 3T^2} = R_e \dots \dots \dots (2.11)$$

La contrainte équivalente est donc égale à :

$$S_{eq} = \sqrt{S^2 + 3T^2} \dots \dots \dots (2.13)$$

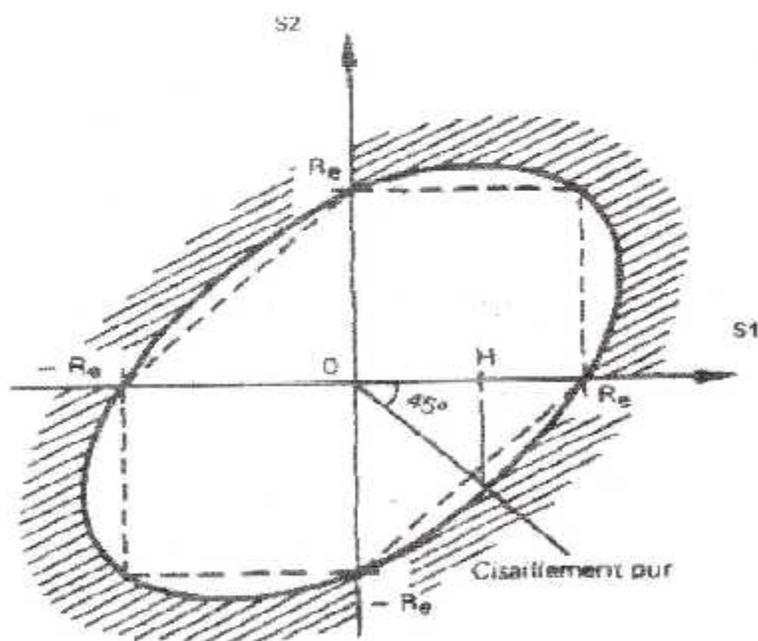


FIG 2.2  
Image dans le plan S3 du critère de VON MISES

### 2.4.2 Critère de TORRE STASSI

Il se produit une défaillance lorsque la scission octaédrique ( $T_{oct}$ ) atteint une valeur fonction de la contrainte normale octaédrique [7].

Par rapport au critère précédent, il tente de tenir compte de différences réelles existant entre les limites d'élasticité en traction et compression de certains métaux.

$$T_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2} \dots\dots\dots (2.14)$$

$$S_{oct} = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3) \dots\dots\dots (2.15)$$

La fonction choisie est telle que :

$$T_{oct}^2 = a + b S_{oct} \dots\dots\dots (2.16)$$

Les contraintes sont déterminées en appliquant le critère aux essais de traction et de compression ( $S_1, S_2 = S_3 = 0$ )

Si la valeur de résistance limite admise est  $R_e$  en traction et  $R'_c$  en compression, la formulation de l'équation précédente permet d'obtenir le système suivant :

$$\frac{2}{9} R_e^2 = a + b \frac{R_e}{3} \dots\dots\dots (2.17)$$

en traction ( $S_1 = R_e$ )

$$\frac{2}{9} R_c'^2 = a - b \frac{R_c'}{3} \dots\dots\dots (2.18)$$

en compression ( $S_1 = R_c'$ )

La résolution de ce système donne :

$$a = \frac{2}{9} R'_e R_e \dots \dots \dots (2.19)$$

$$b = \frac{2}{3} (R'_e - R_e) \dots \dots \dots (2.20)$$

Le critère s'écrit alors :

$$(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2 + 2(R'_e - R_e)(S_1 + S_2 + S_3) - 2R'_e R_e \dots \dots \dots (2.21)$$

où

$$9T_{\text{cut}}^2 + 2(R'_e - R_e)3S_{\text{cut}} = 2R'_e R_e \dots \dots \dots (2.22)$$

En état plan de contraintes ( $S_3 = 0$ ), il vient :

$$S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2 + (R'_e - R_e)(S_1 + S_2) = R'_e R_e \dots \dots \dots (2.23)$$

L'image de ce critère est donc également une ellipse, mais de centre  $\omega [-(R'_e - R_e), -(R'_e - R_e)]$  ; le grand axe est la première bissectrice .

En cisaillement pur ( $S_1 = -S_2 = T$ )

La valeur limite est donc :

$$T_e = \frac{\sqrt{R'_e R_e}}{3} \dots \dots \dots (2.24)$$

Ce critère est considéré comme tout à fait général ; lorsque  $R'_e \rightarrow R_e$  , on retrouve le critère de VON MISSES.

En ce qui concerne la détermination de la contrainte équivalente dans le cas des poutres, elle ne peut être déterminée comme dans le cas précédent directement, elle nécessite l'introduction de la notion de coefficient de sécurité.

Sa formulation est alors la suivante :

$$S_{eq} = \frac{1}{2\rho} \left[ (\rho - 1)S + \sqrt{(\rho - 1)^2 S^2 + 4\rho(S^2 + 3T^2)} \right] \dots\dots\dots (2.25)$$

avec  $\rho = \frac{R'_c}{R_c}$

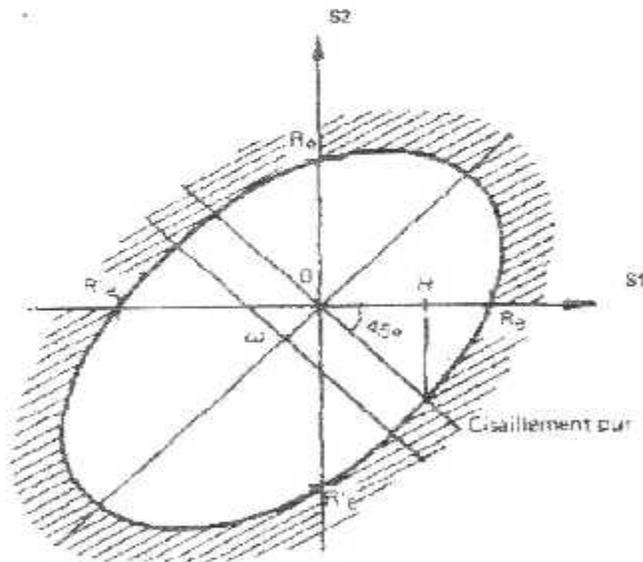


FIG 2.3  
Image dans le plan S3 du critère de TORRE-STASSI

## 2.5 Conclusion

contrairement au précédente, la formulation comprend donc les caractéristiques mécaniques élastiques en traction et en compression, ce qui rend son utilisation très délicate. Il est difficile, en effet, de mesurer la résistance à rupture à la compression des aciers.

## CHAPITRE 3

### Décomposition des cycles par la méthode de RAIN-FLOW

#### 3.1 Introduction

Pour avoir une superposition de cycles simples nous devons décomposer notre historique de charges complexes en des événements simples. Pour ce faire nous avons adopté la méthode de RAIN-FLOW, ainsi l'effet de fatigue est considéré pour chaque changement de direction et pour tous les sous cycles. Pour chaque cycle singulier retrouvé nous définissons la contrainte équivalente par Goodman si la contrainte moyenne est non nulle [8].

#### 3.2 Différents types de chargements

Nous distinguons deux grandes classes de chargements : les chargements radiaux (ou à un paramètre) et les chargements non radiaux (ou à plusieurs paramètres). Toutes deux induisent en général un état de contrainte multi axial au niveau de la structure.

Ces chargements sont dans le cas général à amplitude variable ou aléatoire. Ils ne sont pas toujours composés de pics uniques entre deux passages par zéro. Bien souvent au contraire, plusieurs extremums apparaissent, ce qui rend difficile la détermination du nombre de cycles.

Des méthodes de comptage de cycles permettent de constituer un histogramme des pics du signal, puis un collectif de charge (nombre d'événements dénombrés en abscisse dont l'amplitude est portée en ordonnée). Ces méthodes sont adaptées dans le cas des chargements radiaux où la définition d'un cycle « multiaxial » est plus facile.

### 3.3 Représentation des chargements

#### 3.3.1 Pic-vallée

Différents groupes de chargements à amplitude constante. Chaque groupe est défini par la valeur maximale et moyenne du cycle, et du nombre de cycles le composant.

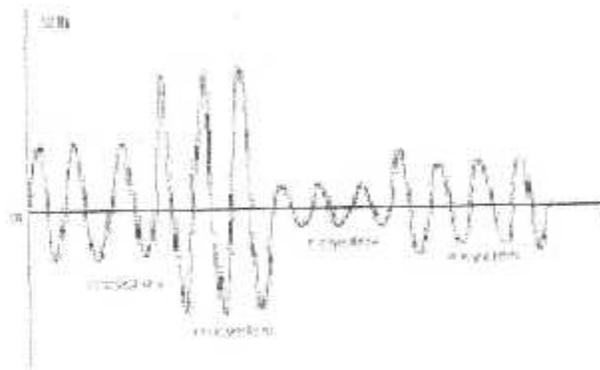


FIG 3.1  
Chargement Pic-vallée

#### 3.3.2 Séquence d'amplitude variable

Seuls les pics du chargement brut sont conservés. Une méthode de comptage est nécessaire pour extraire les cycles susceptibles de créer un dommage.



FIG 3.2  
Chargement séquentiel

### 3.4 Méthode de comptage

Beaucoup de méthodes de comptage ont été mises au point par les experts. Elles conduisent toutes à des résultats différents et donc, pour certaines, à des erreurs dans le calcul de la durée de vie. Parmi les plus connues, nous pouvons citer [1,4,6]:

- 1/ Comptage des pics (Peak count method)
- 2/ Comptage des pics avec élimination des petites variations (Level-restricted peak count method)
- 3/ Comptages des extremum entre deux passages par la valeur moyenne (Mean-crossing peak count method)
- 4/ Comptage des domaines par paire (Range-pair count method)
- 5/ Méthode de franchissement de seuils (Level crossing count method)
- 6/ Méthode PVP (Peak Valley Pair)
- 7/ Méthode du Rainflow

Dans toutes ces méthodes, il est nécessaire de savoir éliminer les petites variations. Cette correction, destinée à l'origine à supprimer le bruit, a pour objectif la transformation des signaux de longue durée en des signaux plus faciles à utiliser.

Le choix d'une méthode dépend de la façon dont sont définis les cycles de contrainte. Chaque méthode procède, à partir d'une définition de la notion de cycle qui lui est propre, à l'évaluation du nombre de cycles et de leur étendue  $S$ , pour une durée  $t$  de la trajectoire étudiée.

Lorsqu'il y a pratiquement autant de passages par la valeur moyenne que d'extrema, les méthodes 3 à 5 sont les mieux adaptées au comptage. Dans le cas contraire (lorsqu'il y a beaucoup d'extrema locaux), il est préférable d'utiliser la méthode RAIN-FLOW.

Il est à noter que les méthodes de comptage de cycles ne peuvent être appliquées qu'à des signaux radiaux.

Celle qui retient notre attention est la méthode de RAIN-FLOW, qui est de loin, la plus utilisée dans l'industrie.

### 3.4.1 La méthode de RAIN-FLOW

Cette méthode de la « goutte d'eau » doit son nom à la présentation poétique de l'algorithme qui la décrit qu'en avait fait son inventeur japonais le professeur ENDO, fondée sur l'analogie d'une goutte d'eau roulant sur les toits multiples d'une pagode, chassée par le vent et se mêlant aux filets d'eau [4,6].

L'étendue est tout d'abord découpée en classes d'intervalles de largeur constante. Les extrema locaux composant le signal sont ensuite ramenés à la valeur représentative de la classe dont ils appartiennent (sa valeur moyenne en général). La procédure de RAIN-FLOW est ensuite appliquée sur le signal quantifié.

### 3.4.2 Procédure générale

- Un chemin démarre à chaque extremum local de la fonction des contraintes enregistrées.
- Lorsqu'un chemin ayant démarré à un minimum local passe au niveau d'un maximum local, tel que le prochain minimum local soit plus petit que le minimum situé à l'origine du chemin, le chemin est stoppé au niveau du maximum local.
- Pour un chemin qui a démarré à un maximum local, ce chemin est stoppé par un maximum local plus grand que celui qui est situé à l'origine du chemin.
- Si un chemin coupe un chemin précédemment déterminé, il est stoppé.
- Un nouveau chemin n'est jamais démarré tant que le précédent n'est pas stoppé.

La méthode RAIN-FLOW repose sur l'obtention de boucles d'hystérésis fermées dans le plan  $(\varepsilon, S)$  (voir Figure ci-dessous). Cette procédure d'identification des cycles est indépendante du type de comportement de la structure. Pour le comportement élastique, l'aire de la boucle d'hystérésis a alors simplement la particularité d'être nulle.

La méthode de RAIN-FLOW conduit alors à la création d'un tableau à double entrée (classe de départ, classe d'arrivée) appelé matrice de transition. Chaque élément  $(i, j)$  de ce tableau donne le nombre de cycles dont les valeurs minimale et maximale correspondent respectivement aux classes  $i, j$ .

L'utilisation d'un algorithme de tirage aléatoire des cycles contenus dans la matrice de transition, obtenue par la méthode RAIN-FLOW, permet de construire un chargement aléatoire programmé

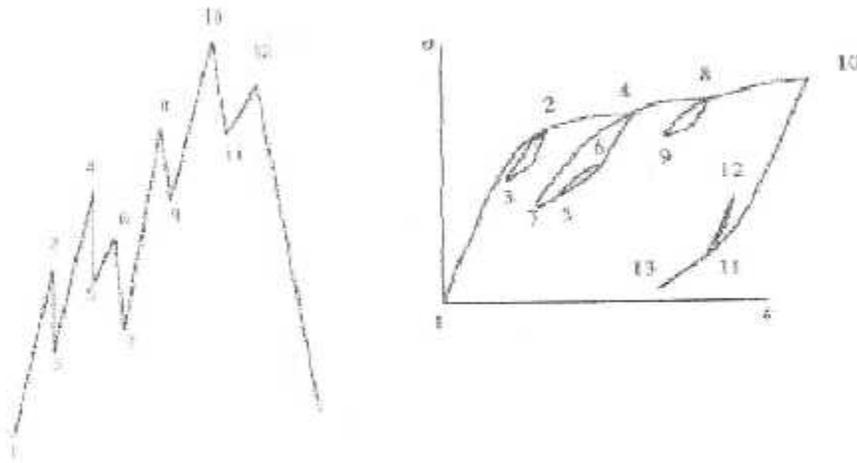


FIG 3.3

Boucles d'hystérésis issues de la méthode de RAIN-FLOW

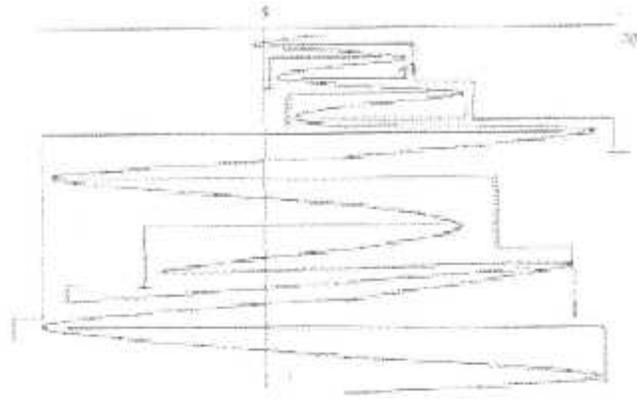


FIG 3.4  
Méthode de RAIN-FLOW

### Conclusion

Il est important de souligner que la majorité des méthodes d'identification de cycles et de comptage sont basées sur des aspects purement mathématiques et sont indépendantes du comportement réel du matériau et de la structure. Même si elles semblent fournir des résultats satisfaisants dans beaucoup de problèmes industriels, elles restent infondées et dépourvues de signification physique pertinente.

## CHAPITRE 4

### Calcul de la vie par l'approche local

#### 4.1 Introduction

Ces dernières années il a été identifié que le procédé de défaillance de fatigue implique trois phases. Une phase de déclenchement de fente se produit d'abord (l'amorçage), suivi d'une phase de propagation de fissure, en conclusion, quand la fente atteint une taille critique, la phase finale de la progression de la fissure rapide instable à la rupture complète le procédé d'échec [6].

Maîtriser chacune de ces phases a été fait sous une intense observation et le grand progrès a été accompli ces dernières années, particulièrement dans l'étude de la propagation de fissure et la phase de rupture finale.

Bien que le progrès ait été beaucoup plus lent à la maîtrise de la phase de déclenchement de fissure, l'approche la plus prometteuse à la prévision du déclenchement de fissure semble être le concept local de contrainte. Les lieux de base de l'approche locale de contrainte sont que la réponse locale de la fatigue du matériel est au point critique.

Dans l'approche locale, nous exprimons la durée de vie en fatigue  $N$  à partir de paramètres locaux. L'amorçage des fissures a lieu en surface dans des zones de forte concentration de contraintes (accidents de forme). Ces zones sont principalement caractérisées par :

Le coefficient  $K_f$ ,

Un état local de contrainte et de déformation.

Le coefficient de concentration des contraintes  $K_t$  peut facilement être connu (abaques). Cependant, contraintes et déformations locales sont plus quantifiables (présence de plasticité due à la sur contrainte).

### 4.2 Calcul des valeurs locales

NEUBER [1,4,6,8] a proposé une règle simple permettant d'approcher contraintes et déformations locales à partir de la contrainte et de la déformation à l'infini ou nominale (loin de l'accident de forme (entaille)) :

$$K_t^2 = K_\sigma K_\epsilon \dots\dots\dots(4.1)$$

$$K_\sigma = \frac{\Delta\sigma}{\Delta S} \dots\dots\dots(4.2)$$

$$K_\epsilon = \frac{\Delta\epsilon}{\Delta e} \dots\dots\dots(4.3)$$

Avec :

- $\Delta\sigma$  : intervalle de contrainte locale.
- $\Delta\epsilon$  : intervalle de déformation locale.
- $\Delta S$  : intervalle de contrainte nominale.
- $\Delta e$  : intervalle de déformation nominale.

En utilisant la valeur du coefficient de sur contrainte élastique  $K_t$  et le module d'élasticité  $E$  du matériau, la relation (4.1) devient :

$$\frac{K_t^2 \Delta S^2}{E} = \Delta\sigma \Delta\epsilon \dots\dots\dots(4.4)$$

En manipulant la règle de NEUBER, la lois de RANBERG OSGOOD et les équations des propriétés de la fatigue on obtient les équations suivantes :

$$\frac{K_I^2 \Delta S^2}{E} = \Delta \sigma \Delta \varepsilon \dots\dots\dots (4.5)$$

Si le chargement nominal est élastique, on a :

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + \left( \frac{\Delta \sigma}{K'} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (4.6)$$

La division de la relation (4.5) Par  $\Delta \sigma$  donne :

$$\frac{\Delta \sigma \Delta \varepsilon}{\Delta \sigma} = \frac{K_I^2 \Delta S^2}{E \Delta \sigma} \Rightarrow \Delta \varepsilon = \frac{K_I^2 \Delta S^2}{E \Delta \sigma} \dots\dots\dots (4.7)$$

On remplaçant cette valeur dans la relation (4.6) :

$$\frac{K_I^2 \Delta S^2}{E \Delta \sigma} = \frac{\Delta \sigma}{E} + \left( \frac{\Delta \sigma}{K'} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (4.8)$$

d'où :

$$\frac{1}{\Delta \sigma} = \frac{\Delta \sigma}{K_I^2 \Delta S^2} + \frac{E}{K_I^2 \Delta S^2} \left( \frac{\Delta \sigma}{K'} \right)^{1/n} \dots\dots\dots (4.9)$$

L'état local est parfaitement défini par l'équation :

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\frac{1}{K_f^2 \Delta S^2} \left[ \Delta\sigma + E \left( \frac{\Delta\sigma}{K_f} \right)^{1/n'} \right]} \dots\dots\dots(4.10)$$

L'équation (4.10) est une équation non linéaire sous la forme :  $\Delta\sigma = f(\Delta\sigma)$ , qu'on propose pour sa résolution la méthode de la sécante ( voir Annexe E ).

**4.3 Procédure de calcul de la vie ou nombre de cycle à l'amorçage**

La déformation totale imposée  $\Delta\epsilon$ , se décompose en une partie plastique  $\Delta\epsilon_p$  et une partie élastique  $\Delta\epsilon_e$ . Dans le domaine des faibles déformations plastiques, il existe une relation entre la durée de vie de l'éprouvette  $N$  et la déformation plastique ( MANSON- COFFIN) ainsi que la déformation élastique  $\Delta\epsilon_e$  (loi de BASQUIN) .

$$\frac{\Delta\epsilon_e}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2.N)^b \dots\dots\dots(4.11)$$

De plus, dans le domaine des fortes déformations plastiques, MANSON et COFFIN [5] donnent la relation suivante entre  $N$  et  $\Delta\epsilon_p$  :

$$\frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \epsilon_f (2.N)^c \dots\dots\dots(4.12)$$

Avec  $\epsilon_f$  paramètre matériau ( coefficient de ductilité ).

En associant les deux dernières expressions (4.11) et (4.12) nous obtenons une expression liant  $N$  et la déformation totale :

$$\frac{\Delta\epsilon_t}{2} = \frac{\Delta\epsilon_e}{2} + \frac{\Delta\epsilon_p}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2.N)^b + \epsilon_f (2.N)^c \dots\dots\dots(4.13)$$

$\frac{\Delta \varepsilon_f}{2}$  : amplitude de déformation totale

L'équation (4.13) implique :

$$\frac{\Delta \varepsilon_f}{2(2.N)} = \frac{\sigma_f'}{E} (2.N)^{b-1} + \varepsilon_f' (2.N)^{c-1} \dots\dots\dots(4.14)$$

d'où

$$\frac{1}{2.N} = \frac{2}{\Delta \varepsilon_f} \left[ \frac{\sigma_f'}{E} (2.N)^{b-1} + \varepsilon_f' (2.N)^{c-1} \right] \dots\dots\dots(4.15)$$

d'où

$$2.N = \frac{1}{\frac{2}{\Delta \varepsilon_f} \left[ \frac{\sigma_f'}{E} (2.N)^{b-1} + \varepsilon_f' (2.N)^{c-1} \right]} \dots\dots\dots(4.16)$$

la relation (4.16) est une équation non linéaire sous la forme  $2.N = f(2.N)$ , et qui va être résolu par la méthode numérique la sécante ( voir Annexe E ).

Cette relation (4.16) est valable pour  $R = -1 \begin{pmatrix} \varepsilon_{min} \\ \varepsilon_{max} \end{pmatrix}$

## 4.4 Conclusion

Bien que l'approche locale soit développée pour le calcul de la durée de vie des pièces et des structures en alliages légers, elle est aussi applicable aux alliages ferreux, ce qui fait son avantage et son universalité. Reste à choisir une méthode numérique adéquate pour la résolution des équations non linéaires.

La méthode locale permet de tenir compte des propriétés non-linéaires du matériau c'est à dire de son comportement élastoplastique.

## Chapitre 5

### Application et calcul

#### 5.1 Introduction

Nous avons vu dans les quatre chapitres précédents les notions nécessaires pour l'établissement de la méthode du calcul de la vie au phénomène de fatigue. Celles-ci sont les différentes méthodes du calcul de la vie ; les critères de la contrainte tangentielle maximale, les méthodes de décomposition d'un chargement complexe, l'effet d'entaille par la méthode locale et les règles du calcul du dommage.

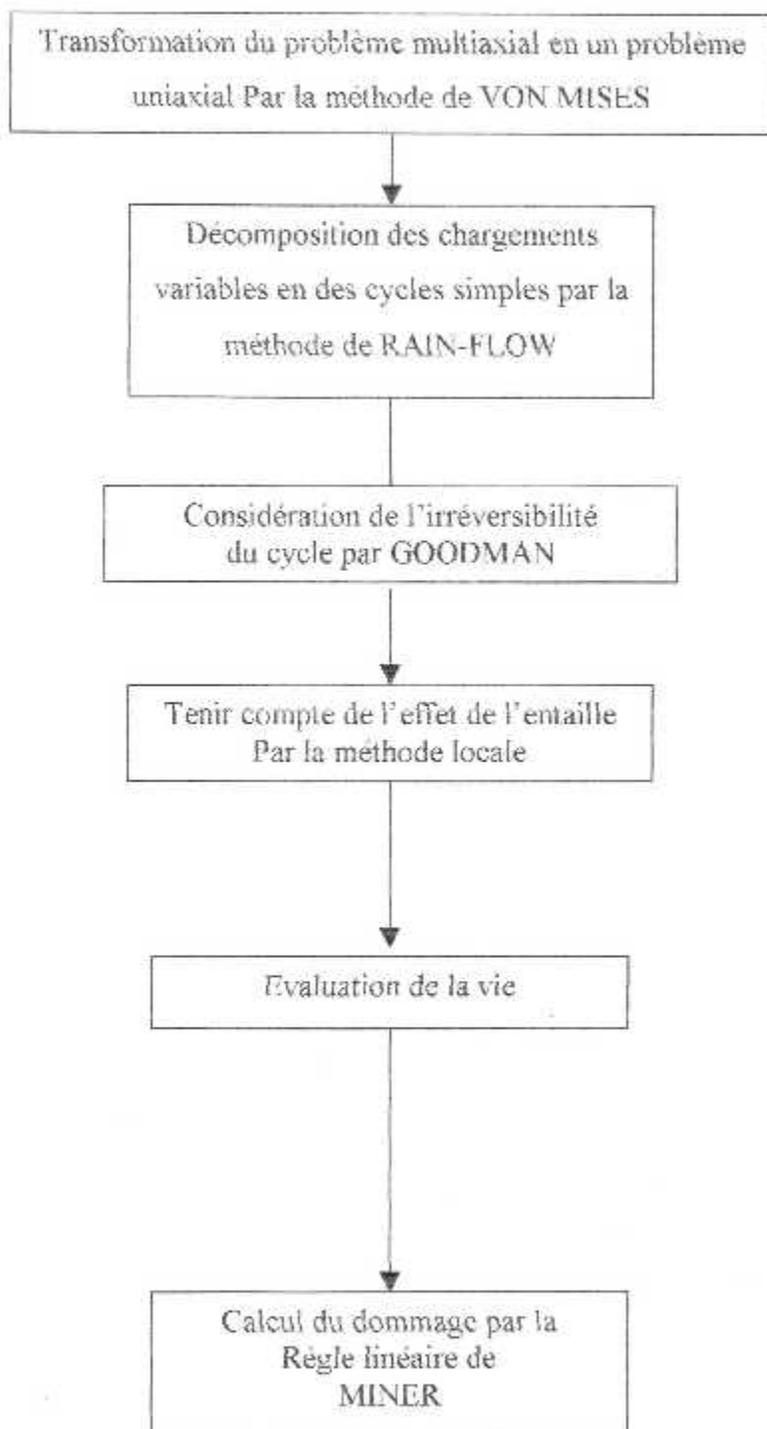
Dans ce chapitre nous développerons la méthode proposée pour l'évaluations de la vie au phénomène de fatigue pour un chargement multiaxial variable, et sa programmation.

Le programme réalisé est structuré en un programme principale et des sous programmes distincts chaque sous programme résout une partie du problème. Chaque partie a été validée et introduit au problème principale .

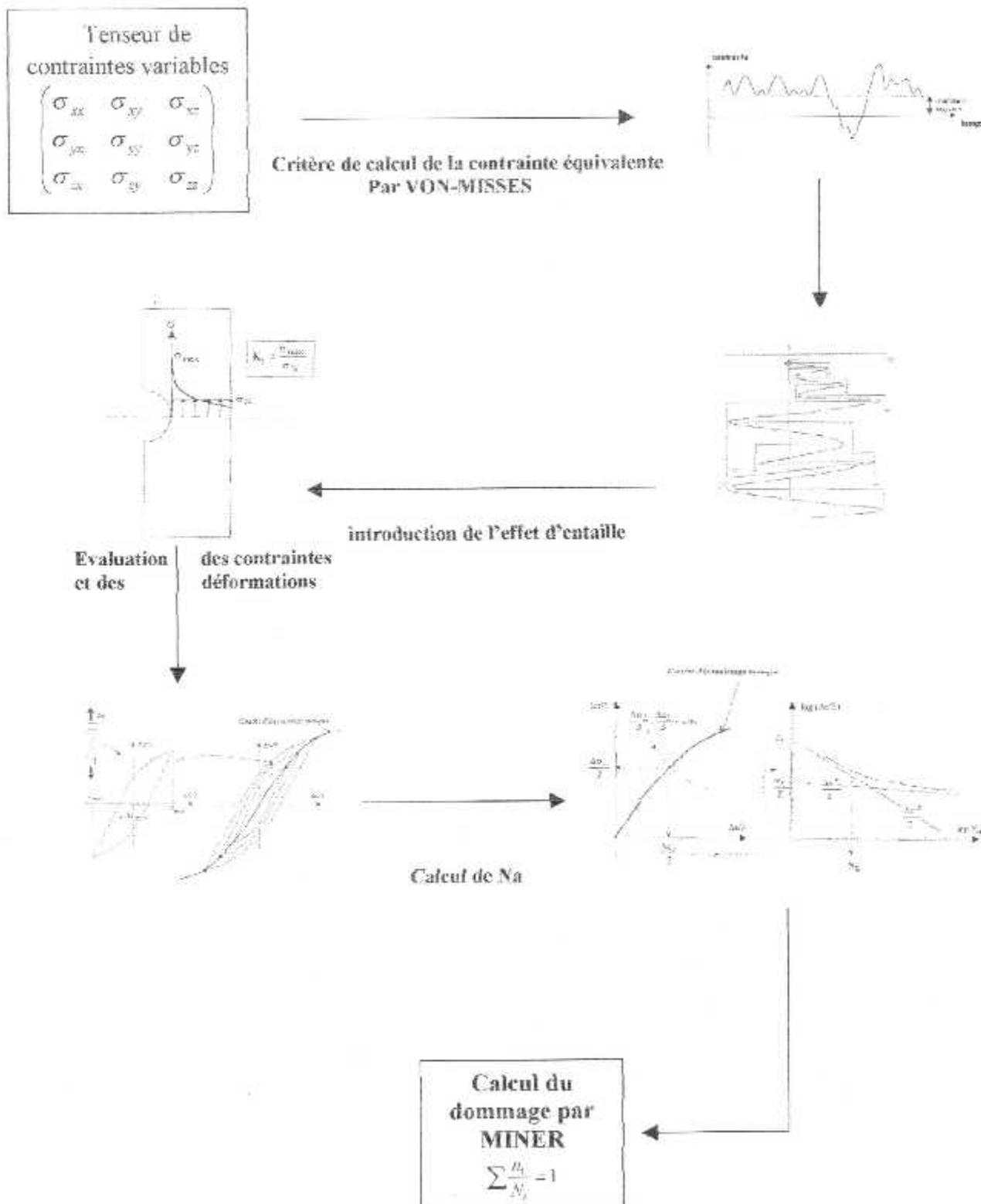
#### 5.2 La méthode de calcul proposée

pour l'évaluation de la vie au problème de fatigue, la méthode que nous proposons consiste à transformer un chargement multiaxial complexe en un chargement uniaxial, pour ce faire, on commence par évaluer la contrainte tangentielle maximale par le critère de VON MISES [7, 9], puis en ayant obtenus un chargement variable on le décompose en événements simples par la méthode de comptage de cycles, tout en prenant compte de l'irréversibilité du cycle par la loi de GOODMAN, et en tenant compte aussi de l'effet d'entaille en introduisant la méthode locale, pour enfin évaluer la vie par la règle linéaire de MINER.

## Schématisation de la méthode de calcul



Représentation schématique de la méthode



## 5.3 APPLICATION

### 5.3.1 Calcul de contraintes équivalentes

L'étude des équations dynamiques d'une structure par la méthode des éléments finis nous permet d'obtenir un chargement complexe et qui se traduit par des tenseurs (contraintes multiaxial) variants dans le temps, ces derniers ont une forme complexe et leur simplification par un critère de calcul de la contrainte équivalente est nécessaire, nous avons adopté le critère de VON MISES le plus utilisé jusqu'à nos jours.

Soit quelques tenseurs de contraintes dans le cas bi axial

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 120 & 90 & 0 \\ 90 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 100 & -75 & 0 \\ -75 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 0 \\ 80 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} -200 & 180 & 0 \\ 180 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} -150 & 110 & 0 \\ 110 & -210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Après l'application de notre programme qui calcul la contrainte équivalente dans le cas bi-axial par le critère de VON MISES nous avons obtenu les résultats suivants :

$$Seq_1 = 191.5724$$

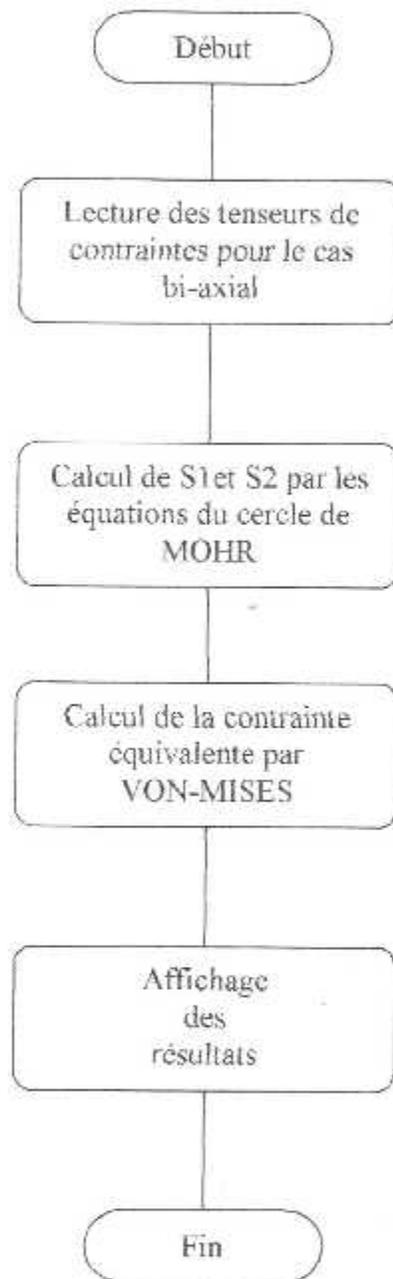
$$Seq_2 = 180.2082$$

$$Seq_3 = 265.1414$$

$$Seq_4 = 319.5309$$

$$Seq_5 = 267.2078$$

Voici l'organigramme qui calcule la contrainte équivalente



### 5.3.2 Décomposition du chargement par RAIN-FLOW

Pour valider notre programme de comptage des cycles, voici un chargement réel que subit une structure aéronautique [6]

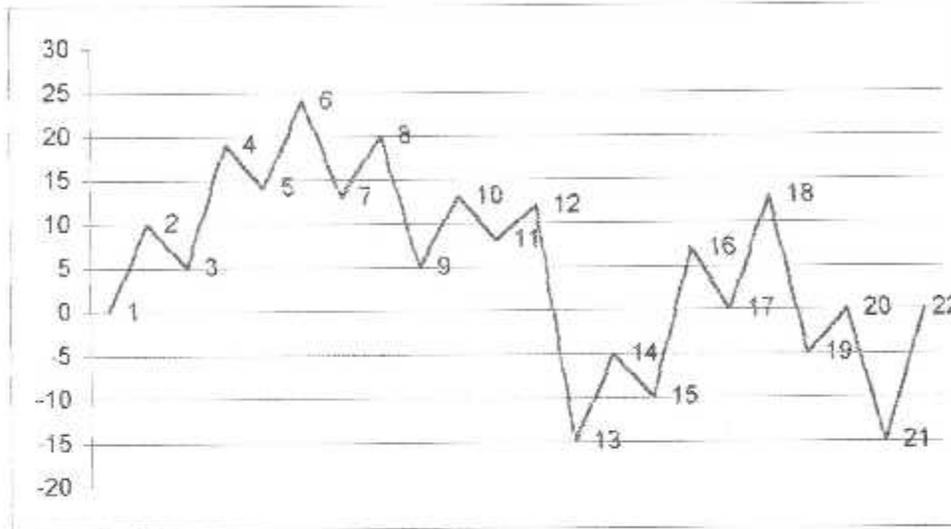
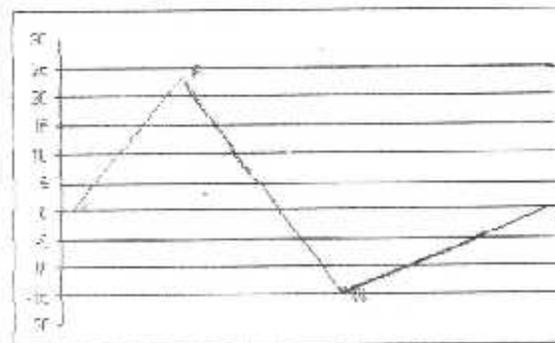
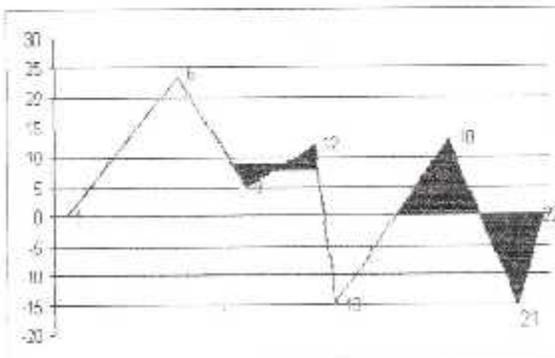


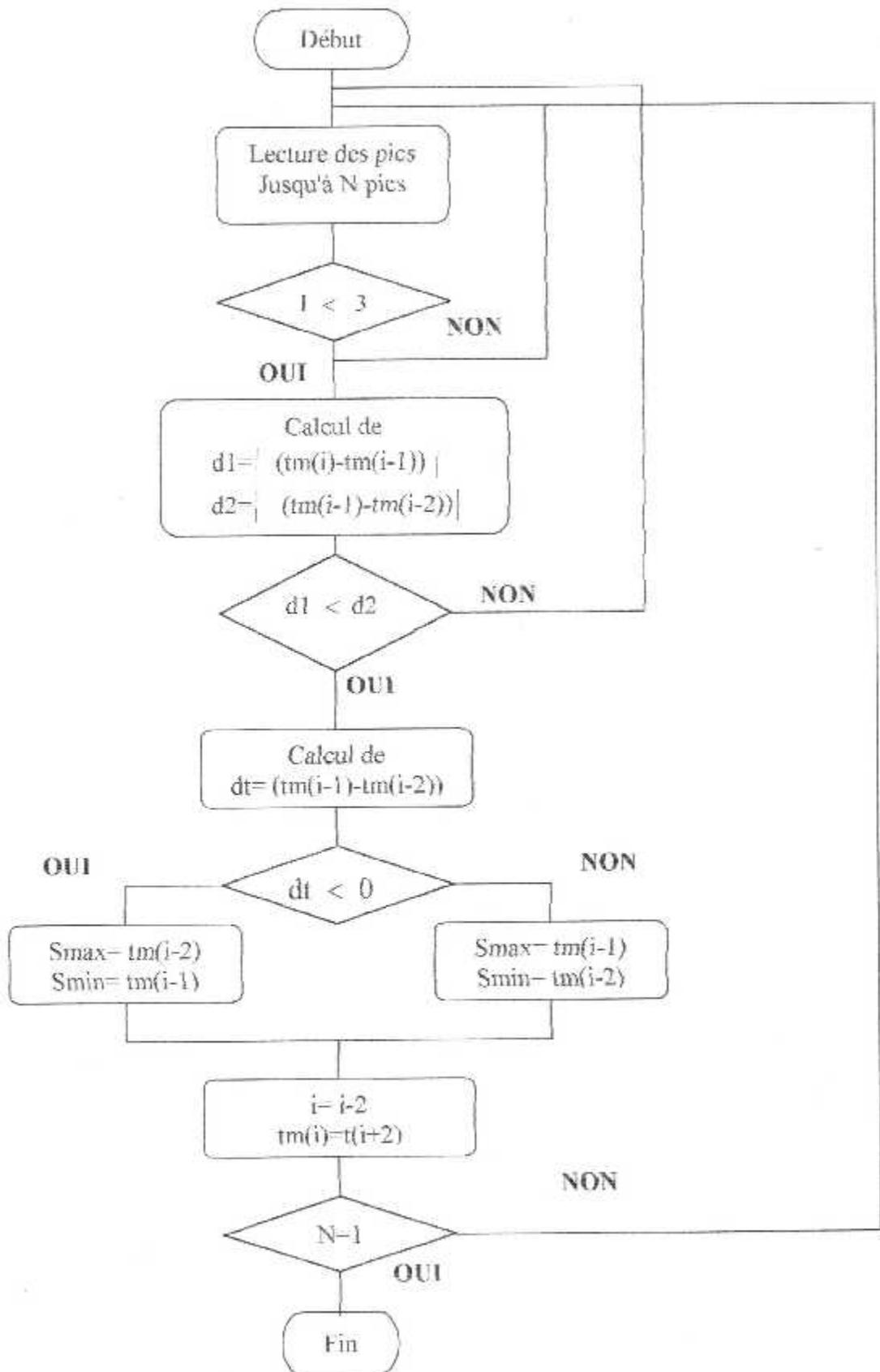
FIG 5.1

Chargement réel d'une structure aéronautique

Les deux schémas suivants traduisent les différentes étapes de l'algorithme de RAIN-FLOW, qui conduit alors à la création d'un tableau à double entrée (classe de départ, classe d'arrivée) appelé matrice de transition. Chaque élément  $(i, j)$  de ce tableau donne le nombre de cycles dont les valeurs minimale et maximale correspondent respectivement aux classes  $i, j$ .



L'application de l'algorithme de RAIN-FLOW ci-dessous schématisé nous a donné 9 cycles. Voici l'organigramme qui nous permet le calcul du nombre de cycles.



### 5.3.3 Calcul de la vie par l'approche local

La méthode local permet de tenir compte du comportement élasto-plastique de la matière soumise à des concentration de contraintes localisées autour des entailles, ainsi on a coupler la méthode de NEUBER et la loi de RANBERG OSGOOD pour obtenir en premier lieu l'intervalle des contraintes et des déformations locales ensuite la déformation va être introduite pour le calcul de la vie et finalement le calcul du dommage par la loi de MINER.

Après l'exécution du programme se trouvant dans l'annexe D sur un alliage portant les propriétés ci-dessous on a eu les résultats (voir tableau)

$S_u=571.870 \text{ Mpa}$  ;  $n'=0.051$  ;  $E=72345$  ;  $K_t=4.7$  ;  $\sigma_f=842 \text{ Mpa}$  ;  
 $\epsilon_f=-0.1212$  ;  $b=-0.103$  ;  $c=-0.564$  ;  $S_e=516.750 \text{ Mpa}$

Smin(Mpa)	Smax(Mpa)	ncy	Saeq(Mpa)	Sa(Mpa)	$\sigma$ (Mpa)	N	D
0	399.63	1	614.23	/	614.23	/	1
-139.91	139.91	1	/	130.91	130.92	$\infty$	0
-72.345	327.275	1	421.44	/	421.144	161	$6.21.10^{-3}$
75.79	251.485	1	297.128	/	311	161	$6.21.10^{-3}$
-58.565	289.38	1	362.540	/	390.540	161	$6.21.10^{-3}$

Tableau des resultants

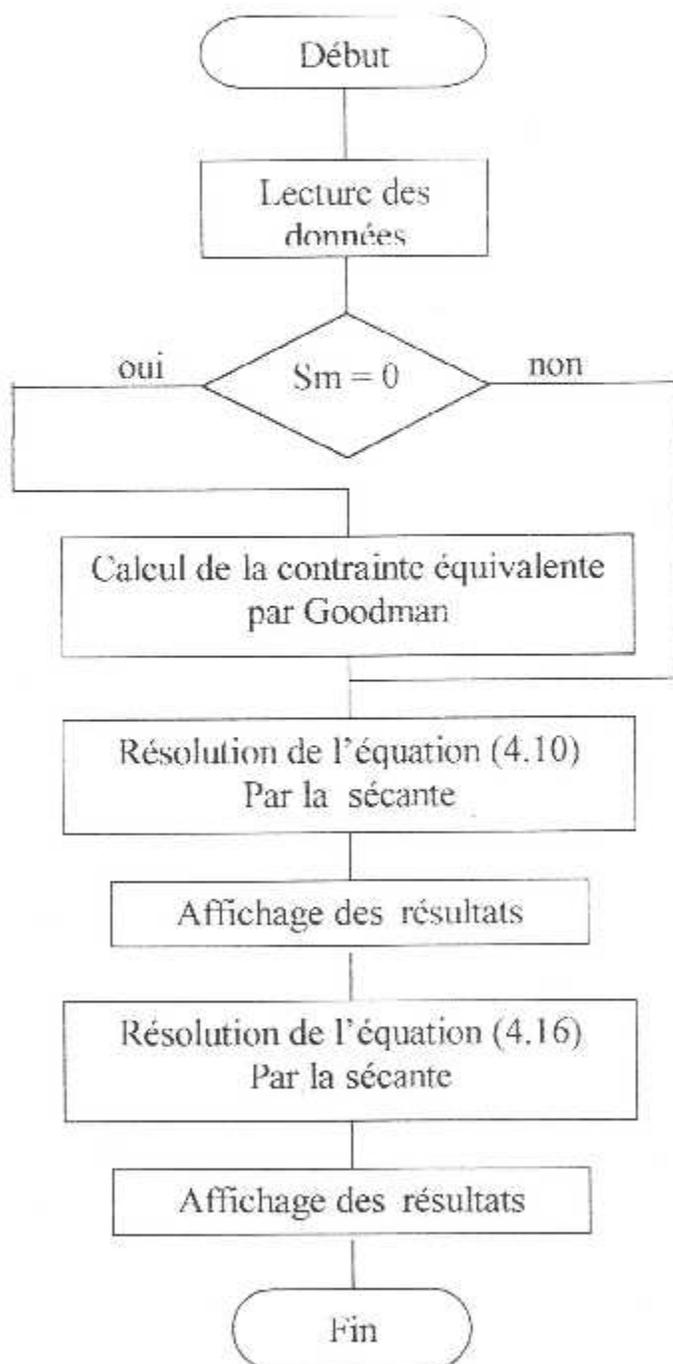
#### Discussion des résultats

D'après les résultats obtenus nous remarquons que le programme calcule la contrainte équivalente par la lois de GOODMAN ainsi que l' amplification de la contrainte locale.

Les résultats obtenus pour la vie sont intéressants mais pas cohérent et cela est due au manque de données concernant l'alliage utilisé pour cette programmation ainsi la sensibilité des résultats est liée directement aux paramètres propres du matériau.

## Organigramme

Cette procédure de calcul de la vie est programmée sous code fortran, dont l'organigramme est le suivant :



## 5.4 Conclusion

Nous avons réalisé un programme pour l'évaluation de la vie du phénomène de la fatigue pour un chargement multiaxial complexe par la méthode locale, les sous programme ont été validé un par un et donne des résultats correctes ; la procédure du calcul de la contrainte équivalente, la méthode de décomposition de cycles de RAIN-FLOW, l'approche locale de NEUBER et à la fin le calcul du dommage par la règle linéaire de MINER.

Bien qu'il semble que les résultats de la vie ne sont pas cohérents, ils sont extrêmement intéressants car la procédure fonctionne mais les expressions utilisées pour l'évaluation du dommage sont très sensibles aux exposants  $n'$ ,  $b$  et  $c$ . Ces derniers sont les propriétés du matériau obtenus par des expériences au laboratoire.

## Conclusion générale

Notre travail nous a conduit à réaliser un programme qui calcul la durée de vie d'un matériau ou d'une structure aéronautique. Ce programme peut être introduit comme une subroutine à l'aval d'une analyse par éléments finis des équations dynamiques générant le comportement d'un aéronef en plein vol soumis à des chargements complexes mutiaux et variables. Les résultats de ce programme peuvent être aussi utilisés comme des données relevées par des bandes d'essais " capteurs".

Le travail réalisé permet d'évaluer le nombre de cycles à l'amorçage pour un problème à chargement mutiaux complexe, il permet en outre l'évaluation de la contrainte tangentielle maximale dans le plan critique ou encore le nombre d'événements que peut avoir un chargement en tenant compte de l'érouissage par fatigue de chaque événement. Nous pouvons aussi calculer l'effet de concentration de contrainte à l'entaille en tenant compte du phénomène dans un domaine élasto plastique, le travail admet aussi la prédiction de répétition des chargements complexes ou des scénarios de chargements complexes.

Ce travail peut être un support pour les expériences sur le comportement des matériaux en fatigue, d'autre part il ouvre la voie à d'autres sujets de fin d'étude à savoir :

- Prédiction de la vie en tenant compte du déphasage des contraintes en adoptant le critère de VAN DANG ou autre comme le critère de PAPADOPOULOS.
- Calcul de la vie en prenant compte d'autres facteurs d'influence (corrosion, traitement thermique, la taille des grains...)

## Bibliographie

- [1] : H.O.FUCHS , R.I.STEPHENS  
"Metal fatigue in engineering " California 1978
- [2] : LAROUSSE  
Numéro de série 10316 France 1981
- [3] : CLAUDE BATHIAS, JEAN-PAUL BAILON  
Fatigue des matériaux et des structures Paris 1980
- [4] : HABIB KARAOUANI  
Evaluation de la vie par la méthode ZAK Montréal 2002
- [5] : DIDIER DUPRAT  
Fatigue et mécanique de la rupture des pièces en alliage léger France 1990
- [6] : A.TEICHMAN  
"The strain range counter" 1955
- [7] : A.BRAND, J .F.FLAVENOT, R.GREGOIRE, C.TOURNIER  
Données technologiques sur la fatigue France 1992
- [8] : M.Maghraoui, A.Kebir, Y.Assoul  
Evaluation de la perte de vie par fatigue pour un arbre de torsion  
Conférence de mécanique Constantine 1995
- [9] : T.LAGODA  
Influence of correlations between stresses on calculated fatigue life of machine elements  
1996

**Aspects réglementaires :**

Les réglementations relatives à la justification des structures des aéronefs, civils ou militaires, ont évolué par étapes successives.

**Avion de transport civil :****U.S.A**

1953 : C.A.R. 4b : pas d'exigences spéciales en fatigue

1956 : C.A.R. 4b : Amendement 3 : exigence SAFE-LIFE ou FAIL-SAFE (charge de vol uniquement).

1962 : C.A.R. 4b : Amendement 12 : fatigue des atterrisseurs.

**Recodification C.A.R. 4b qui est devenue F.A.R 25**

1966 : F.A.R 25 : Amendement 10 : fatigue sonique.

1978 : F.A.R 25 : Amendement 45 : tolérance au dommage SAFE-LIFE exceptionnel seulement

1981 : F.A.R 25 : Amendement 54 : continuing Airworthiness.

**EUROPE:**

1980 : J.A.R 25 Tolérance au dommage

**Avion militaires :****U.S.A :**

Jusqu'en 1974 : MIL 8866 8866 : SAFE-LIFE; FAIL- SAFE possible.

Depuis 1974 : M.I.L.-STD 1530 A-Aircraft.

### Programme d'intégrité structural

#### Spécification militaire

M.I.L.-A 83444 : Conditions de tolérance de dommages d'avion.

M.I.L.-A 8866 B : Conditions de désigne de longévité de l'avion.

M.I.L.-A 8867 B : Essais structural au sol de l'avion.

Trois types de structures sont autorisés :

Progression de la fissure lente (S.C.G).

FAIL-SAFE par redondance.

SAFE-LIFE par arrêt de crique.

#### France :

Jusqu'en 1979 : AIR 2004 D : SAFE-LIFE, FAIL-SAFE possible.

Depuis 1979 : AIR 2004 F : SAFE-LIFE et résistance aux endommagements.

#### Remarque :

F.A.R = Federal aviation regulations.

J.A.R = Joint Airworthinets Requirements.

M.I.L. = Military stantard.

C'est ainsi, notamment, qu'à partir de 1974 ( aux états unis ) et en 1980 ( en Europe ), des exigences SAFE-LIFE ou FAIL-SAFE extraites des principales normes aéronautiques .

**Définition des trois concepts :****a/ SAFE-LIFE : Durée de vie sûre**

La structure doit être exempt des fissures détectables pendant toute sa vie d'utilisation.

Démonstration :

Elle peut être faite par analyse et non par un essai. L'essai de fatigue de l'ensemble constitue en général le moyen principal de justification, qui aboutit à la détermination d'une durée de vie limite (effective)  $N_e$  par application d'un coefficient de sécurité  $K$  tel que  $K.N_e = N$ .

En France [9] ;  $K = 5$  en général

$K = 3$  si les charges sont parfaitement connues.

Exemple :

Les structures SAFE-LIFE courantes sont :

Avions civils : atterrisseurs, attaches moteurs, quelques éléments discrets isolés.

Avions militaires : cellules plus atterrisseurs.

**Limitation :**

Le concept SAFE-LIFE ne prend pas en compte les dommages autre que ceux dues à la Fatigue.

**Avantages :**

Si pourtant les consignes sont respectées ( chargements préventifs ) il n'y'aura jamais de panne. Il n'y'a pas de nécessité de visites de contrôle entre chargement.

Le SAFE-LIFE se fera donc dans les parties visuellement inaccessibles lors des contrôles d'escapes ou les visites prévol.

**Conclusion :**

En aéronautique le SAFE-LIFE supprimera les portes de visites, sources d'affaiblissement Structureaux, mais nécessitera des immobilisations programmées dans la vie de l'avion.

**b/ FILE-SAFE : sûreté intégrée**

Après toute rupture complète d'un élément simple ou toute rupture partielle évidente, la structure doit être capable de tenir un niveau de charges résiduel imposé.

**Démonstration :**

La justification est faite par analyse et quelques essais statiques de résistance résiduelle sur une structure contenant des dommages artificiels.

Aucune vie limite n'est imposée par le règlement européen qui stipule qu'une structure FILE-SAFE doit avoir une durée de vie en fatigue suffisante, et souhaite un essai de fatigue représentatif.

**Remarque :**

La majorité des avions civils en services actuellement ont été certifiés FILE-SAFE.

**Limitation :**

Le règlement américain F A R 25 ne demande pas de justifications en fatigue .

**Avantages :**

La probabilité de rupture est par définition plus grande que dans le FILE-SAFE, mais les risques sont minimisés

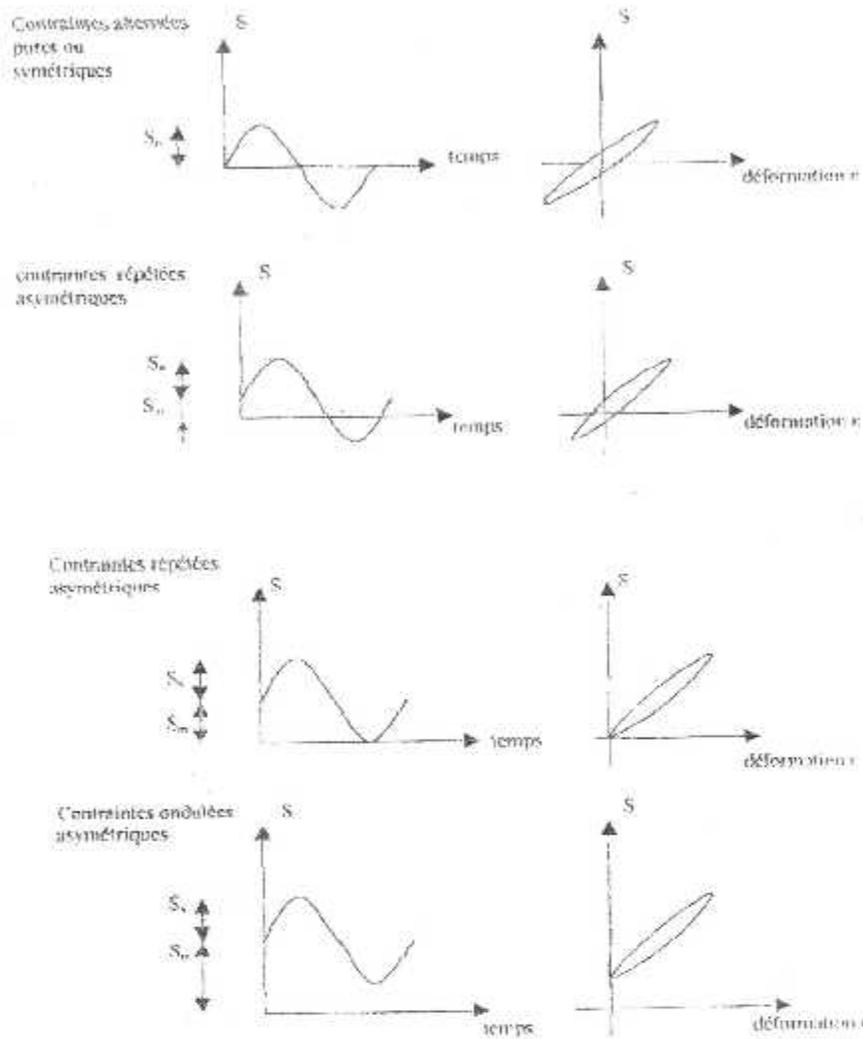
**Conclusion :**

Le critère de sécurité a vue ce systématiser le FILE-SAFE par des multiplications des voies indépendantes les unes des autres : pilote, co-pilote, circuits hydrauliques multiples en parallèles, plusieurs épaisseurs de hublot, multi-moteurs etc ...

**C/ Tolérance aux dommages :**

Cette philosophie ( le critère de dommage toléré tout comme la méthode précédente FILE-SAFF ) a reconnu l'existence de la fissure et utiliser la MDR pour vérifier si cette fissure va se propager , et mené à la rupture avant la prochaine inspection à la limite d'endurance .

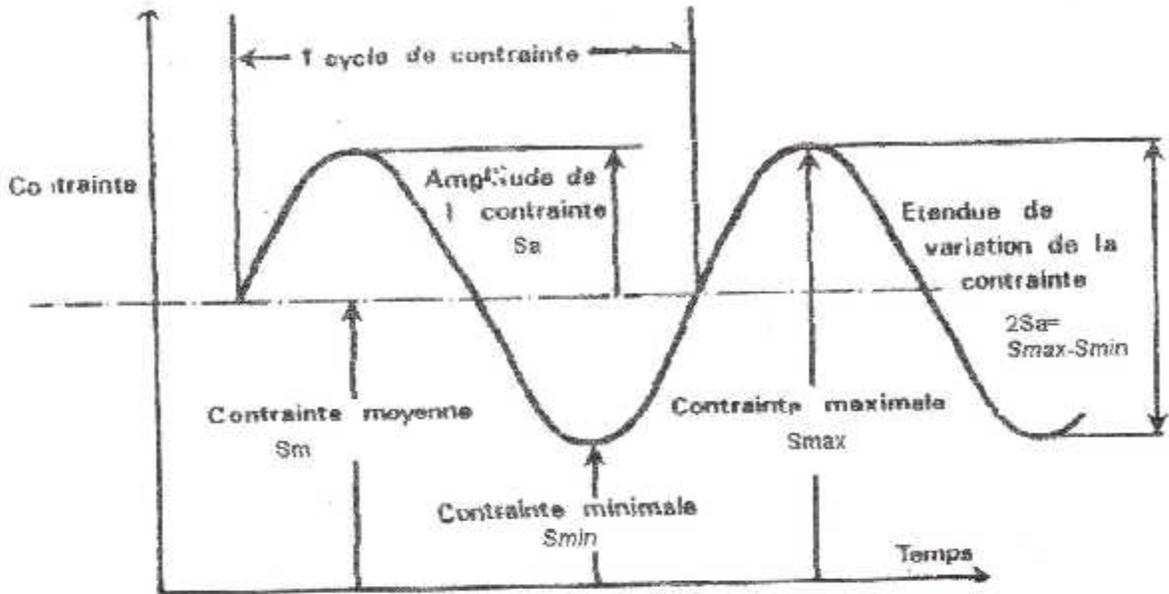
Cette méthode a été spécifiée par les contrats de l'US Air Force.



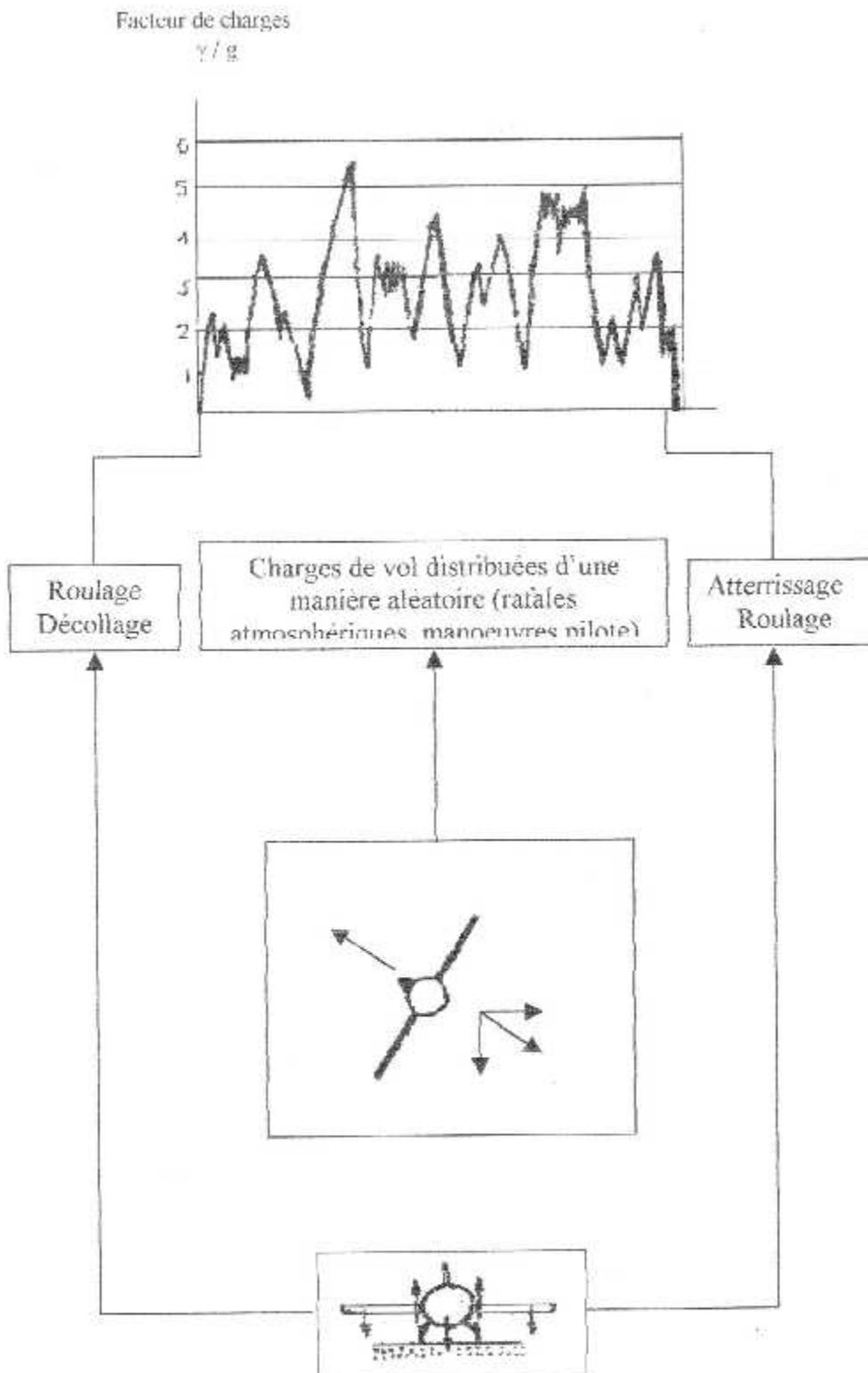
### Différents cas de sollicitation : effort-temps, effort-déformation

Ainsi, selon les valeurs relatives de ces deux composantes, on distingue les essais sous sollicitation :

- Alternée symétrique  $S_m = 0$   $R = -1$
- Alternée dissymétrique  $0 < S_m < S_a$   $-1 < R < 0$
- Répétée  $S_m = S_a$   $R = 0$
- Ondulée  $S_m > S_a$   $0 < R < 1$



Cycle de contrainte de fatigue



Sollicitations de fatigue intrados de voilure d'un avion de combats

## Programme

### Critère de VON MISSES

```

C   Sx, Sy, Sxy composantes du tenseur de contraintes pour le cas biaxial
C   S1, S2, S3 contraintes issues du cercle de MOHR
C   Seqvm contrainte équivalente de VON MISSES
  read(*,*)Sx,Sy,Sxy
  S1-((Sx+Sy)/2)+sqrt((((Sx-Sy)/2)**2)+(Sxy**2))
  S2-((Sx+Sy)/2)-sqrt((((Sx-Sy)/2)**2)+(Sxy**2))
  Seqvm=sqrt(0.5)*(sqrt((((S1-S2)**2)+(S1**2)+(S2**2))))
  write(*,*)Seqvm
  stop
  end

```

### Décomposition des cycles par RAIN-FLOW

```

C   tm valeur des pics
C   sm matrice des couples (Smin, Smax)
C   ncy nombre de cycles
  dimension sm(50,2),tm(50)
  INTEGER i,k,l,m,n,p
  open(unit=1,file='dmomo.doc',status='unknown')
  open(unit=2,file='rmomo.doc',status='unknown')
  read(1,*)p
  do 50 i=1,p
  read(1,*)tm(i)
50  continue
  n=0
  k=0
  i=0
  do 100 j=k,p
  i=i+1
300 if(i.lt.3) GOTO 100

```

```

d1=abs(tm(i)-tm(i-1))
d2=abs(tm(i-1)-tm(i-2))
if(d1.lt.d2) GOTO 100
dt=(tm(i-1)-tm(i-2))
n=n+1
write(*,*)dt,dt,'n',n
c   test pour organiser les cycles ds un fichier max, min
    if(dt.lt.0.) then
        sm(n,2)=tm(i-2)
        sm(n,1)=tm(i-1)
        WRITE(*,*)n
    else
        sm(n,1)=tm(i-2)
        sm(n,2)=tm(i-1)
    endif
    write(2,*)sm(n,1),sm(n,2)
c   nominales smax , smin et on reprend rflow
    m=i
    k=i-2
    i=k
    do 10 l=m,p+1
        tm(l-2)=tm(l)
        write(*,*)tm',tm
10   continue
        write(*,*)'n',n
        if(k.EQ.1)goto 400
400  if(m.EQ.p)goto 500
        goto 30
100  CONTINUE
500  write(*,*) 2 - DANS RAIN-FLOW : ncy='n
        close (2)
        stop
        end

```

### Calcul de la durée de vie

- C pk = paramètre du matériau correspondant à la pente à l'origine de la courbe d'érouissage
- C pn – paramètre du matériau correspondant à l'ordonnée à l'origine de la courbe d'érouissage
- C sigf = coefficient de résistance à la fatigue
- C epsf = coefficient de ductilité
- C Su = résistance à la rupture
- C g = module de YOUNG
- C fk = coefficient de concentration de contrainte
- C b, c = paramètres propres au matériau
- C Sy – limite d'élasticité

d=0.

neg=0

open(10,file='don1.doc',status='unknown')

open(2,file='rmomo.doc',status='unknown')

Read(10,\*)su

c contrainte ultime

Read(10,\*)pn

c le n'

Read(10,\*)g

c module de young

Read(10,\*)fk

c coefficient de concentration de contrainte kt

Read(10,\*)sigf

c sigma f

Read(10,\*)epsf

c epsi f

Read(10,\*)b

Read(10,\*)c

```

read(10,*)sy

c limite d'ecrouissage ou aussi Se( limite d'élasticité)
dx=1 /pn
pk=sigf/(epsf**pn)
write(*,*)' 3 - DANS ESSAIS ncy= ',n
pause
ESP=10e-4
700 do 200 i=1,n
    read(2,*)sm(i,1),sm(i,2)
c recherche de la valeur local
    s1=abs(sm(i,1))
    s2=abs(sm(i,2))
    ta=max(s1,s2)

c test si la contrainte dépasse la contrainte ulime
    iff(ta.gt.su) then
        write(*,*)'essais,' la contrainte depasse Su'

    endif

c    goodman
    def=dabs(sm(i,1)+sm(i,2))
    tm=(def/2)
    iff(def.eq.0) then
        teq=dabs(sm(i,2))
        ta=(sm(i,2)-sm(i,1))/2.
        ind=0
        else

        teq=dabs((su*ta)/(su-(((dabs(sm(i,1)+sm(i,2)))/2)))
    endif
    write(*,*)'essais','smin',sm(i,1),'smax',sm(i,2),'teq',teq
c    problŠme dans la secante

```

```

c  calcul de la valeur locale sigma resolution le l'eq pzar la sécante
  call scanl
  x=teq
  if(x.gt.su) then
  write(*,*)'essais', 'La structure va casser '
  endif
  if(x.lt.sy) then
c  sin la limite d'endurance epxl déformation locale
  sin=su/3
  write(*,*)sin,x
  if(x.le.sin) then
c  cas ou xinférieur à Sl=sin def =epxlest élastique uniquement
  write(*,*)'essais',' Pas de dommage le cycle ',i
  epxl=x/g
  goto 700
  endif
  else
  epxl=x/g+epsf*(x/pk)**dx
  endif
  write(*,*)'essais','epxl =',epxl
  call nscanl(nf)
  d=d+(1/nf)
200 continue
  write(*,*) dommage = ',d
  stop
  end
c  les sousroutines

  subroutine scanl
  IMPLICIT REAL *8 (a-h,o-z)
  common/fc/pk,sigf,epsf,dx,fk,g,teq
  common/sc/xcx
  common/ep/epxl

```

```

dimension xp(501)
write(*,*)'scan1',' teq dans scan1 -',teq
eps=1.e-6
xp(1)=teq
xp(2)=15*teq
do 10 i=2,501
c
xp(i+1)=xp(i)-floc(xp(i))*(xp(i)-xp(i-1))
+/(floc(xp(i))-floc(xp(i-1)))
c
def=dabs(xp(i+1)-xp(i))
if(def.le.eps) then
write(*,*)'scan1',xp(i),i
teq=xp(i)
pause' la valeur local apres scan1 '
return
endif
10 continue
write(*,*)'scan1',' la solution diverge '
return
end

REAL*8 FUNCTION Floc(x)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/fc/pk,sigf,epsf,dx,fk,g,teq
floc=(x*x/g)+(x*((x/pk)**dx))-(fk*teq*fk*teq/g)
return
end

c      nscan1

SUBROUTINE NSCAN1(nf)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension xp(400)

```

```

common/fc/pk,sigf,epsf,dx,fk,g,teq
common/sn/b,c
common/ep/epxl
eps=.01
xp(1)=1.
xp(2)=10.
do 20 i=2,399
c
  xp(i+1)=xp(i)-fnc(xp(i))*(xp(i)-xp(i-1))/
+ (fnc(xp(i))-fnc(xp(i-1)))
c
  write(*,*)'nscan1 xp(i) = ',xp(i)
  def=abs(xp(i+1)-xp(i))
  if(def.le.eps) then
    xx=xp(i)
    nf=int(xx)
    write(*,*)'nscan1 nf',nf
    pause
    return
  endif
20 continue
  return
end

real*8 FUNCTION fnc(xe)
implicit real*8(a-h,o-z)
common/fc/pk,sf,ef,dx,fk,e,teq
common/sn/b,c
common/ep/epxl
fnc=(sf/e)*(xe**b)+ef*((xe)**c)-epxl
return
end

```

## Algorithme de la sécante

**But :** Trouver une solution de  $f(x) = 0$ .

**Entrées :** Deux approximations initiales  $p_0$  et  $p_1$

$\varepsilon$  (la précision désirée)

$N_0$  (le nombre maximum d'itérations)

**Sortie:** valeur approché de  $p$  ou un message d'échec.

**Étape 1:** Poser  $n = 2$

$$q_0 = f(p_0)$$

$$q_1 = f(p_1)$$

**Étape 2:** Tant que  $n \leq N_0 + 1$ , faire les étapes 3 à 6

**Étape 3:** Poser  $p = p_1 - q_1 \frac{(p_1 - p_0)}{q_1 - q_0}$

**Étape 4:** Si  $|p - p_1| \leq \varepsilon$

Alors imprimer  $P$ ;

Fin

**Étape 5:** Poser  $n = n + 1$

**Étape 6:** Poser  $p_0 = p_1$

$$q_0 = q_1$$

$$p_1 = p$$

$$q_1 = f(p)$$

**Étape 7:** Imprimer (la méthode a échoué après  $N_0$  itérations);

**Étape 9:** Fin