

**République Algérienne Démocratique Et Populaire**  
**Ministère De L'enseignement Supérieure Et De La Recherche**  
**Scientifique**

**Université de SAAD DAHLEB –BLIDA-**

**Faculté d'aéronautique**  
**Département d'aéronautique**



**Projet de fin d'étude pour l'obtention d'un**  
**diplôme d'ingénieur d'état en Aéronautique**

**Option : structure**

**Thème**

**Résolution numérique du problème**  
**de PRANDTL pour la torsion des**  
**poutres de sections non circulaires**  
**par la méthode des éléments finis**  
**appliquée au profil d'aile**

**Encadré par :**

- Mr Toufik ZEBBICHE
- Mr Mouloud AISSANI

**Réalisé par:**

- Mr Redha BENALI
- Mr Messaoud ZAZOUA

**Année universitaire 2002/2003**

## *RESUME :*

La présente étude consiste à résoudre numériquement le problème de PRANDTL pour la torsion des poutres de section non circulaires par la méthode des éléments finis appliquée au profil d'aile, afin de déterminer et de localiser la contrainte de torsion maximale.

Pour cela, on a réalisé un programme traitant plusieurs sections complexes avec différents types d'éléments finis, en résolvant des systèmes d'équations à grande dimension. La validation des résultats est faite avec quelques exemples typiques analytiques.

## *ABSTRACT :*

The present study consists in numerically solving the problem of PRANDTL for the torsion of the noncircular beams of section by the finite element method applied to the profile of wing, in order to determine and to locate the maximum torsional stress.

For that, one carried out a program treating several complex sections with various types of finite elements, by solving systems of equations to great dimension. The validation of the results is made with some typical examples analytical.



# Sommaire

## CHAPITRE I : TORSION DES POUTRES A SECTIONS SOLIDES NON CIRCULAIRES

I.1. Introduction .....	3
I.2. La torsion .....	3
I.2.1. Définition .....	3
I.2.2. Torsion des poutres à sections circulaires.....	3
I.2.2.1. Etude du mode de déformation .....	3
I.2.2.2. Relation entre la contrainte et la déformation .....	5
I.2.2.3. Contraintes et déformation en fonction du moment de torsion appliqué .....	5
I.2.3. Torsion des poutres à sections non circulaires.....	5
I.2.3.1. La solution de la fonction de contrainte de <i>Prandtl</i> .....	6
I.2.3.2. Introduction de la fonction de contrainte .....	7
I.3. La solution de la fonction de gauchissement de <i>Saint Venant</i> .....	15
I.4. Analogie de la membrane .....	17

## CHAPITRE II : CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES D'UNE SECTION DROITE

II.1. Introduction .....	21
II.2. L'aire d'une surface plane .....	21
II.3. Centre de gravité .....	22
II.4. Moment statique par rapport à une droite .....	22
II.5. Moment d'inertie d'une surface plane .....	23
II.6. Moment d'inertie polaire .....	24
II.7. Produit d'inertie .....	24
II.8. Moment d'un triangle quelconque .....	24
II.9. Modélisation d'une surface quelconque par des triangles .....	26
II.10. Moments principaux d'inertie .....	27

## **CHAPITRE III : FORMULATION ET ADAPTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

III.1. Introduction.....	28
III.2. Bref historique de la méthode des éléments finis .....	28
III.3. Démarches de la méthode des éléments finis .....	29
III.4. Formulation variationnelle (intégrale) .....	31
III.5. Formulation en élément fini .....	33
III.6. Fonction d'interpolation .....	35
III.6.1. Séries polynomiales .....	35
III.6.2. Différents types d'éléments finis adaptés .....	37
III.6.3. Fonctions d'interpolations pour un élément triangulaire a trois nœuds .....	37
III.6.4. Fonctions d'interpolations pour un élément quadrilatère a quatre nœuds .....	39
III.6.5. Fonctions d'interpolation pour un élément triangulaire à six nœuds .....	40
III.7. Calcul des matrices d'éléments .....	42
III.7.1 La matrice de rigidité pour un élément triangulaire linéaire .....	43
III.7.2. Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère bilinéaire .....	44
III.7.3. Matrice de rigidité pour un élément triangulaire à six nœuds .....	45
III.8. Assemblage des matrices d'éléments .....	46

## **CHAPITRE IV : GENERATION DE MAILLAGE**

IV.1. Introduction .....	50
IV.2. Aspect de la génération de maillage.....	50
IV.2.1. concept des différents types des domaines .....	50
IV.2.2. Classification des techniques de génération de maillage .....	51
IV.3. Procédures de génération de maillage .....	52
IV.3.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine .....	52
IV.3.2. Génération des nœuds internes pour maillage de type "H" .....	56
IV.3.3. Connexion des nœuds du maillage de type "H" .....	60
IV.3.4 filtrage des nœuds internes .....	63

## CHAPITRE V : RESOLUTION NUMERIQUE ET PROGRAMMATION

V.1. Introduction .....	67
V.2. Méthodes de stockage des matrices bandes dans un vecteur .....	67
V.2.1. Stockage en colonne .....	67
V.2.2. Stockage en diagonal .....	69
V.2.3. Stockage en ligne .....	70
V.2.4. Stockage en ligne de serpent .....	71
V.2.5. Stockage en escalier .....	71
V.3. Résolution numérique du système d'équations linéaires .....	72
V.3.1. Méthode de décomposition de <i>KHALESTKI</i> .....	72
V.3.1.1. Matrice carrée pleine et quelconque .....	73
V.3.1.2. Matrice carrée symétrique et bande .....	74
V.3.2. Détermination des formules des contraintes .....	75
V.3.3. Détermination de la formule de l'angle de torsion unitaire .....	78

## CHAPITRE VI : RESULTATS ET COMMENTAIRE

VI.1. Introduction .....	83
VI.2. Procédure de calcul .....	83
VI.3. Interprétation des résultats.....	101
Conclusion .....	102
Annexes	
Bibliographie	

# Nomenclature des symboles

$A, A^{(e)}$  : Surface de la section d'une poutre, et la section d'un élément fini  $m^2$ .

$A, B, C, \dots, H$  : Points spécifiés sur la frontière du domaine.

$B$  : largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité.

$c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$  : Constantes pour l'approximation de la fonction  $N(x,y)$ .

$f_i^{(e)}$  : Élément du vecteur de sollicitation d'un élément fini ( $e$ ).

$G$  : Module de cisaillement.

$g$  : Vecteur des polynômes de la fonction  $N_j$ .

$H, h$  : Hauteur  $m$ . Type de maillage.

$I_p$  : Moment polaire  $m^4$ .

$I_{xx}, I_{yy}$  : Moment d'inertie par rapport à  $x$  et  $y$  respectivement  $m^4$ .

$I_{xy}$  : Produit d'inertie  $m^4$ .

$I_s$  : Moment statique  $m^3$ .

$I_{m,n}$  : Intégrales d'une fonction à deux variables ou la puissance  $m$  pour la variable  $x$  et de puissance  $n$  pour la variable  $y$ , dans un élément typique.

$I_{00}$  : Aire de la surface d'un élément triangulaire ou quadrilatère ( $m = n = 0$ ).

$k_{ij}, a_{ij}$  : Les éléments de la matrice de rigidité globale.

$L, l$  : Longueur de la poutre. Position d'une case dans un vecteur.

$M_t$  : Moment de torsion.

$m,n$  : Degré du polynôme de la fonction d'interpolation.

$N_j, N$  : Fonction d'interpolation d'un élément fini. Le rang de la matrice  $[k]$ .

$N_x, N_y$  : Nombres des nœuds suivant l'axes  $x$  et  $y$  respectivement.

$\vec{n}, \vec{n}^*$  : Nombres de termes de la fonction d'interpolation. Vecteur unité.

$n_x, n_y$  : Composantes du vecteur unité.

$P$  : Pression transversale uniforme.

$P, Q$  : Paramètres pour le contrôle des points du maillage.

$q_n$  : Flux de la variable secondaire.

$S$  : Section droite d'une poutre. Aire  $m^2$ .

$S_x, S_y$  : Force de cisaillement.

$T$  : Force de traction.

$u, v, w$  : Déplacements suivant  $x,y,z$  respectivement  $m$ .

$x, y, z$  : Système d'axes locale.

$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  : Coordonnées du centre de gravité.

$\{Vk\}$  : Vecteur remplaçant la matrice de rigidité  $[k]$  selon la méthode de stockage.

$[k], [k^e]$  : Matrice de rigidité globale. Matrice de rigidité élémentaire.

$[F], [F^e]$  : Vecteur de sollicitation (ou force) globale. Vecteur de sollicitation élémentaire.

$[H], [L]$  : Matrices triangulaires déterminées par la décomposition de la matrice de rigidité.

Matrices du système créant les fonctions d'interpolations  $N_p$ , tel que  $L$  est l'inverse de  $H$ .

$[S^i]$  : Matrices de base constitutives de la matrice rigidité  $[k]$ , ( $i = 1$  ou  $2$ ).

### *Symboles Grec :*

$\alpha, \beta, \gamma$  : Coefficients des fonctions d'interpolation d'un triangle à trois nœuds.

$\theta$  : Angle de torsion unitaire rad ou  $^\circ/m$ .

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  : Déformation directe.

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{zy}$  : Déformation de cisaillement dans les plans  $xy, zx$  et  $zy$  respectivement.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  : contraintes directes suivant  $x, y, z$  respectivement  $N/m^2$ .

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{zy}$  : Contraintes de cisaillement dans les plans  $xy, zx$  et  $zy$  respectivement  $N/m^2$ .

$\phi$  : Fonction de contrainte.

$\mathcal{N}$  : Fonction d'interpolation ou test.

$\psi(x, y)$  : Fonction de gauchissement.

$\varphi$  : Angle de déformation rad ou  $^\circ$ .

$\omega$  : Facteur de sur-relaxation utilisé dans l'algorithme de filtrage des nœuds,  $\in ]1, 2[$ .

$\Gamma$  : Frontière du domaine.

$\Omega, \Omega^e$  : Domaine globale arbitraire d'étude. Domaine de l'élément fini.

### *Indices et exposants :*

$i, j$  : Compteur sur les nœuds ou les cases d'un vecteur.

$T$  : transposé d'un vecteur ou matrice.

$m, n$  : Puissances des polynômes de  $x$  et  $y$  respectivement pour le calcul de l'intégral..

$(e)$  : Indique l'élément fini  $e$ .

# LISTE DES FIGURES

Fig.I.1 : Torsion d'une poutre.....	2
Fig.I.2 : Mesure de la déformation d'un élément d'une poutre de section circulaire en torsion.....	4
Fig.I.3.a.b : Déformation apparente d'une poutre en caoutchouc de section circulaire.....	4
Fig.I.4 : La torsion d'une poutre de section arbitraire.....	6
Fig.I.5 : Formation de la direction cosinus l et m de la normale à la surface de la poutre.....	8
Fig.I.6 : Déplacement d'un corps rigide d'un point dans la section de la poutre.....	10
Fig.I.7 : Lignes des contraintes de cisaillement.....	12
Fig.I.8 : Torsion d'une poutre de section elliptique.....	13
Fig.I.9 : Analogie de la membrane sur un chargement transversal.....	17
Fig.I.10 : L'équilibre de l'élément membrane.....	18
Fig.I.11 : Section en forme de triangle soumis à une torsion.....	20
a) Géométrie	
b) Répartition de $\tau_{zx}$ le long de l'axe y ( $Mt > 0$ )	
Fig.II.1 : Différentes surfaces élémentaires d'une section A.....	22
Fig.II.2 : Centre de gravité d'une section droite .....	22
Fig.II.3 : Moment statique d'une section droite par rapport à la droite $\delta$ .....	23
Fig.II.4 : Moment statique par rapport au repère GXY.....	23
Fig.II.5 : Moment polaire par rapport au point O.....	24
Fig.II.6 : coordonnées des nœuds d'un triangle.....	25
Fig.II.7 : Section arbitraire formée de triangles.....	26
Fig.III.1.a: Discrétisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.....	30
Fig.III.1.b : Élément typique triangulaire.....	32
Fig.III.2.a,b : Equilibre interne entre les différents éléments du domaine.....	34
Fig.III.3.(a, b, c, d, e et f ) : Éléments finis en bidimensionnelle 3,4,5,6 et 8 nœuds.....	37
Fig.III.4 : Représentation de la fonction continue $W(x, y)$ par une fonction d'interpolation	
Linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds.....	39
Fig.III.5 : Élément fini $\Omega^{(e)}$ de six nœuds.....	40
Fig.III.6 : Élément quadrilatère à 4 nœuds en décomposition.....	44
Fig.III.7 : Assemblage de deux éléments triangulaires à trois nœuds.....	47
Fig.III.8 : Assemblage de deux éléments quadrilatères à huit nœuds.....	49



<b>Fig.IV.1 : Connexité d'un domaine quelconque.....</b>	<b>51</b>
a) Domaine simplement connexe	
b) Domaine multi-connexes	
<b>Fig.IV.2 : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle.....</b>	<b>52</b>
<b>Fig.IV.3 : Courbe d'une fonction multivoque.....</b>	<b>53</b>
<b>Fig.IV.4 : Discrétisation sur le coté AB.....</b>	<b>54</b>
<b>Fig.IV.5.a,b : Discrétisation sur le coté AD.....</b>	<b>55</b>
<b>Fig.IV.6 : Génération des nœuds sur la frontière du domaine (10x6).....</b>	<b>55</b>
<b>Fig.IV.7.a,b : Illustration de la procédure de détermination des abscisses.....</b>	<b>57</b>
<b>Fig.IV.8.a,b : Illustration de la procédure de détermination des ordonnées.....</b>	<b>58</b>
<b>Fig.IV.9 : a) Discrétisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds.....</b>	<b>60</b>
b) Numérotation des éléments.	
<b>Fig.IV.10.(a,b,c,d,e,f) : Connexion type H.....</b>	<b>61</b>
<b>Fig.IV.11.a,b,c : les indices des formules de filtrage pour les nœudsinternes</b>	
des éléments triangulaire.....	<b>65</b>
<b>Fig.IV.12.a,b,c : Les indices des formules de filtrage pour les nœudsinternes des</b>	
éléments quadrilatères.....	<b>66</b>
<b>Fig.V.1 : Illustration de stockage en colonne.....</b>	<b>68</b>
<b>Fig.V.2 : Illustration de stockage en diagonal.....</b>	<b>69</b>
<b>Fig.V.3 : Illustration de stockage en ligne.....</b>	<b>70</b>
<b>Fig.V.4 : Illustration de stockage en serpent.....</b>	<b>71</b>
<b>Fig.V.5 : Illustration de stockage en escalier.....</b>	<b>72</b>
<b>Fig.V.6 : Exemple d'une matrice bande de l'équation (V.17).....</b>	<b>75</b>
<b>Fig.VI.1 : Maillage quadrilatère d'un cercle.....</b>	<b>90</b>
<b>Fig.VI.3 : Maillage triangulaire d'un carré.....</b>	<b>90</b>
<b>Fig.VI.4 : Maillage triangulaire d'une ellipse .....</b>	<b>91</b>
<b>Fig.V.5 : maillage triangulaire d'un rectangle.....</b>	<b>92</b>
<b>Fig.VI.6 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0012 .....</b>	<b>92</b>
<b>Fig.VI.7 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0009.....</b>	<b>93</b>
<b>Fig.VI.8 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0018.....</b>	<b>84</b>
<b>Fig.VI.9 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0024.....</b>	<b>94</b>
<b>Fig.VI.10 : Maillage triangulaire du profil NACA23012.....</b>	<b>95</b>
<b>Fig. VI.11 :Maillage quadrilatère du profil NACA23012.....</b>	<b>95</b>
<b>Fig.VI.12 : Maillage quadrilatère du profil NACA23015.....</b>	<b>96</b>

<b>Fig. VI.13</b> : Maillage triangulaire du profil NACA23015.....	96
<b>Fig.VI.14</b> :Maillage quadrilatère du profil NACA23018.....	97
<b>Fig.VI.15</b> : Maillage triangulaire du profil NACA23018.....	97
<b>Fig.VI.16</b> : Maillage quadrilatère du profil NACA2324.....	98
<b>Fig.VI.17</b> : Maillage triangulaire du profil NACA2324.....	<del>98</del>
<b>Fig.VI.18</b> : Maillage quadrilatère du profil NACA2412.....	99
<b>Fig.VI.19</b> : Maillage triangulaire du profil NACA2412.....	99
<b>Fig.VI.20</b> : Maillage quadrilatère du profil NACA4412.....	100
<b>Fig.VI.21</b> : Maillage triangulaire du profil NACA4412.....	100

# *Introduction*

## *Introduction*

Les sciences de l'ingénieur sont des domaines où la recherche est omniprésente, c'est pour cette raison que les chercheurs ont établi des axes principaux sur lesquels doivent mener leurs investigations, afin d'éviter la déperdition de leurs efforts. Ces axes sont orientés comme suit :

- Détecter les points ou zones de faiblesse des matériaux qui puissent être les causes directes des ruptures.
- Trouver les solutions qui puissent nous amener à un compromis entre le facteur économique et le facteur d'optimisation.
- Dégager une analyse théorique donnant le plus fidèlement possible des résultats conformes à la réalité, vu que les solutions mathématiques exactes n'existent pas à cause, par exemple, de la complexité des conditions aux limites ou de l'anisotropie du matériau.
- Mener plusieurs tests afin de vérifier le degré de précision des analyses mathématiques.

Dans un avion, la plus part de ses structures sont non circulaires (aile, fuselage, dérive, longerons, ...), ce qui induit que la solution analytique (exacte) du problème de torsion n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche de solutions numériques approchées.

La présente étude consiste à résoudre numériquement le problème de PRANDTL pour la torsion des poutres de sections non circulaires par la méthode des éléments finis appliquée au profil d'aile, afin de déterminer et localiser la contrainte de torsion maximale.

La modélisation et la discrétisation des équations régissant le phénomène physique seront donc fondées sur l'utilisation des éléments finis bidimensionnel (2D). Les éléments utilisés sont : un triangle à trois nœuds, un triangle à six nœuds et un quadrilatère à quatre nœuds.

Cependant deux difficultés principales se rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée. La première difficulté majeure c'est la manière optimale de génération de maillage, ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution; l'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équations algébriques vu le nombre important de degrés de liberté alloués. Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petits sous-domaines de géométrie simple connue telle que la géométrie triangulaire et quadrilatère par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation. Un nombre important d'éléments finis sera établi et appliqué pour le développement d'un programme numérique afin d'avoir une convergence vers la solution exacte.

## INTRODUCTION

---

Vu la dimension importante de la matrice du système, le stockage dans la mémoire de l'ordinateur sera réalisé en utilisant la technique des matrices bandes afin d'éviter le stockage des cases nulles. Pour avoir un nombre important de zéros, il faut faire une numérotation des nœuds de maillage. De même, la résolution du système d'équations sera faite par une méthode directe en utilisant l'algorithme de KHALESKI, qui sera modifié spécialement pour des matrices bandes et symétriques.

Pour une bonne assimilation et compréhension de notre étude, nous avons structuré notre travail en six chapitres :

Le premier chapitre faisant une synthèse bibliographique sur la torsion, ainsi qu'il expose le problème de PRANDTL.

Dans le deuxième chapitre, nous donnerons les caractéristiques géométriques de la poutre, ainsi que leurs méthodes de calcul.

Nous présenterons par la suite dans le troisième et quatrième chapitre le modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis avec la procédure de remplissage et d'assemblage des matrices élémentaires selon leurs types, ainsi que les techniques de discrétisation nécessaires pour le maillage.

Puis, en cinquième chapitre, les différents procédés de stockage des matrices bandes des vecteurs unis colonne et la résolution des systèmes d'équations (obtenus) par la méthode numérique directe de KHALETSKI.

Enfin dans le dernier chapitre, on présente les différents résultats mathématiques calculés pour les différentes sections, commençant par la plus simple afin de justifier et de valider le programme réalisé, ensuite vers quelques autres sections complexes (profils d'ailes) qui présente un intérêt physique où la solution exacte est absente.

Enfin une conclusion générale clôturera notre étude.

# *CHAPITRE I*

## *Torsion des poutres à sections solides non circulaires*

## CHAPITRE I

## Torsion des poutres à sections solides non circulaires

## I.1. Introduction :

La torsion des poutres de sections non circulaires, se base généralement sur des méthodes découlant de la théorie d'élasticité. Or, les principes de symétrie utilisés pour la résolution des problèmes de torsion des sections circulaires ne sont pas applicables à des sections non circulaires.

Dans ce chapitre, nous résoudrons notre problème par la méthode de *Prandtl* et une aperçue sur la méthode de *Saint-Venant*.

## I.2. La torsion :

## I.2.1. Définition :

Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des actions mécaniques dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés dont les moments sont parallèles à la ligne moyenne. (Fig.I.1)

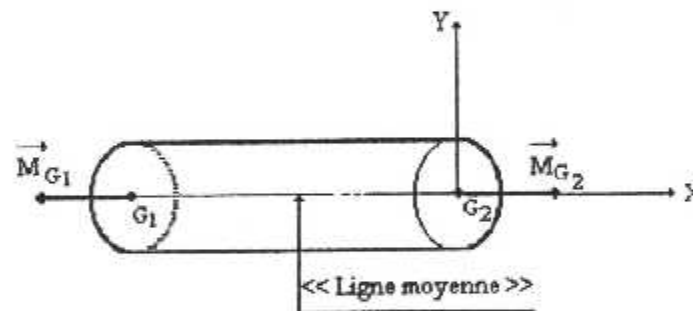


Fig.I.1 : Torsion d'une poutre

\*  $\vec{M}_{G1}$  et  $\vec{M}_{G2}$  ont pour support la ligne moyenne et sont tels que :  $\vec{M}_{G1} + \vec{M}_{G2} = \vec{0}$

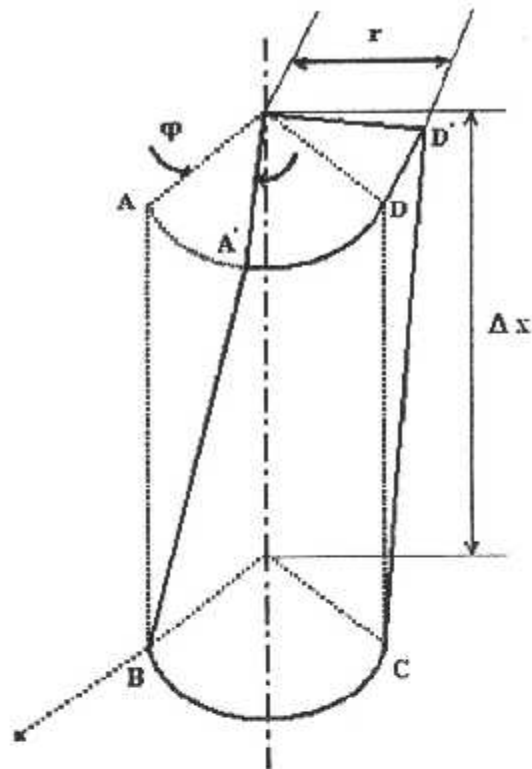
Avec :  $\vec{M}_G = M_t \cdot \vec{x}$

## I.2.2. Torsion des poutres à sections circulaires :

La section circulaire est non seulement géométriquement simple, mais en plus, la symétrie de cette section par rapport à l'axe longitudinal de la poutre, facilite la résolution du problème de torsion. La solution analytique est relativement simple, on la déduit entièrement des deux grands principes de la mécanique des solides : l'équilibre et la compatibilité des déformations.

## I.2.2.1. Etude du mode de déformation :

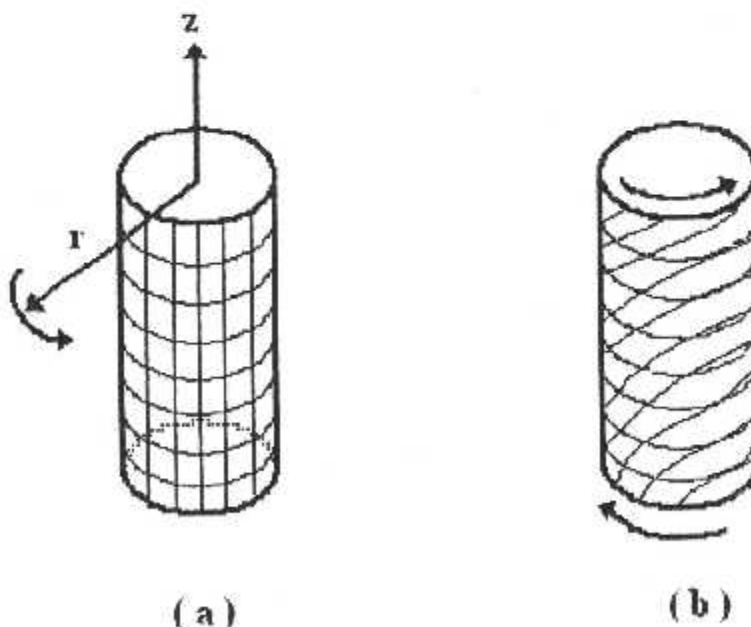
Considérons un tronçon de poutre soumis à un moment de torsion, et isolons un élément située à une distance  $r$  de l'axe  $z$  (figure I.2).



**Fig.I.2 :** *Mesure de la déformation d'un élément d'une poutre de section circulaire en torsion*

Pour déterminer la valeur de la déformation, nous allons utiliser des arguments basés sur la symétrie et nous poserons les deux hypothèses suivantes :

- \* Un diamètre se déforme en prenant la forme d'une courbe.
- \* Une section transversale plane, se déforme en se déplaçant longitudinalement. (fig.I.3.a.b)



**Fig.I.3.a.b :** *Déformation apparente d'une poutre en caoutchouc de section circulaire*



L'élément a subi une déformation de cisaillement  $\gamma_{z0}$ ; elle est donnée comme suit :

$$\gamma_{z0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} r \frac{\Delta \phi}{\Delta z}$$

$$\gamma_{z0} = r \frac{d\phi}{dz} \quad (1.1)$$

Le rapport  $\frac{d\phi}{dz}$  est l'angle de torsion unitaire, dorénavant, il est noté par  $\theta$ .

### 1.2.2.2. Relation entre la contrainte et la déformation :

Il existe une relation linéaire entre la contrainte de cisaillement et la déformation de cisaillement, et elle est donnée comme suit :

$$\tau = G \gamma \quad (1.2)$$

$\tau$  : Contrainte de cisaillement.

$G$  : Module d'élasticité.

$\gamma$  : Déformation de cisaillement

D'après les équations (1.1) et (1.2), on peut écrire :

$$\tau_{z0} = G \gamma_{z0} = G r \theta \quad (1.3)$$

### 1.2.2.3. Contraintes et déformation en fonction du moment de torsion appliqué :

Le moment de torsion ne provoque ni allongement, ni variation de courbure de la ligne moyenne. Il ne provoque que des rotations des points de la ligne moyenne autour de l'axe  $z$  (mouvement de torsion). Il est donné comme suit :

$$M = G \theta J \quad (1.4)$$

Et à partir de l'équation (1.4), on obtient l'expression de l'angle de torsion unitaire en fonction du moment de torsion, soit :

$$\theta = \frac{M}{G J} \quad (1.5)$$

Finalement, en substituant l'équation (1.5) dans l'équation (1.3), on obtient l'expression de la contrainte de cisaillement en fonction du moment de torsion, ce qui donne : [6]

$$\tau_{z0} = \frac{M r}{J} \quad (1.6)$$

### 1.2.3. Torsion des poutres à sections non circulaires :

Pour des problèmes plats, *Prandtl* a conçu une autre approche : au lieu de résoudre pour des déplacements, il a essayé de résoudre pour des efforts. Il a essayé de trouver une manière de représenter des champs de contrainte en termes de potentiels scalaires, choisie afin de satisfaire

automatiquement les équations de l'équilibre. Les équations de compatibilité fournissent des équations régissant pour les potentiels appropriés.

**1.2.3.1. La solution de la fonction de contrainte de Prandtl :**

Considérons une poutre de section arbitraire, soumise à ses deux extrémités à des moments égaux et opposés (fig.I.4). Les deux extrémités sont libres de telle façon que les déplacements normaux à la section et en dehors de leur plan d'origine ne sont pas limités.

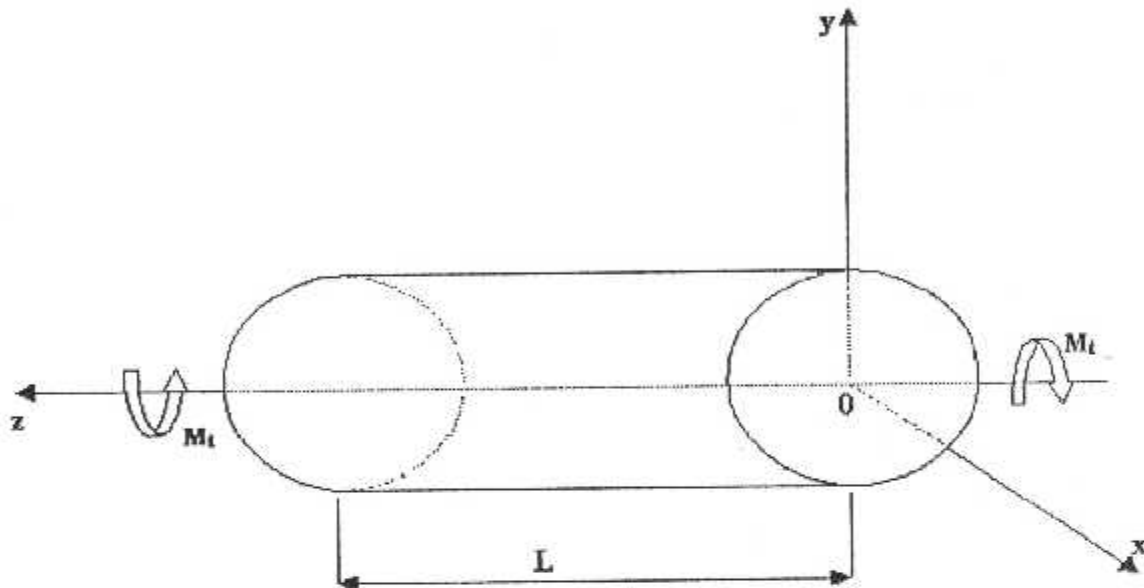


Fig.I.4 : La torsion d'une poutre de section arbitraire.

La poutre ne subit aucune force le long de sa surface, c'est-à-dire :

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \tag{I.7}$$

La contrainte de cisaillement dans le plan de la section due au moment est nulle, c'est-à-dire :

$$\tau_{xy} = 0 \tag{I.8}$$

Et pour vérifier ces suppositions on doit démontrer que les contraintes restantes satisferont les conditions d'équilibres et de compatibilité en tout points de la poutre, et satisfont aussi les conditions aux limites en tous points de la surface de la poutre. Si nous ignorons les forces, les équations d'équilibre (annexe A-1) se réduisent aux résultats suivants :

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \tag{I.9}$$

Les deux premières équations de (I.9) montrent que les contraintes de cisaillement  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  sont en fonction de x et y seulement, elles sont donc constantes en tous points sur la longueur de la poutre avec les mêmes coordonnées (x,y), à ce stade, on se tourne vers la fonction de contraintes pour simplifier la procédure de résolution.

### 1.2.3.2. Introduction de la fonction de contrainte :

*Prandtl* introduit une fonction de contrainte  $\phi$  défini par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\tau_{zy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \tau_{zx} \quad (1.10)$$

Les équations de (1.10) satisfont la troisième des conditions d'équilibre de (1.9) quelque soit la forme que  $\phi$  peut prendre. [21]

Nous devons trouver maintenant les formes possibles de la fonction  $\phi$  qui satisfont les équations de compatibilité et les conditions aux limites; ces dernières sont les facteurs qui distinguent un problème de torsion d'un autre.

D'après l'état de contraintes, on déduit :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0 \quad (1.11)$$

Puisque  $\gamma_{xy}$  et  $\gamma_{yx}$  sont en fonction de  $x$  et  $y$  seulement, les équations de compatibilité (Annexe) (A-4) et (A-5) sont satisfaites. Alors les équations (A-6) et (A-7) sont réduites à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} \right] = 0 \quad (1.12.a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right] = 0 \quad (1.12.b)$$

On substituant les équations (1.10) et (1.12) dans l'équation (A-3), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad , \quad -\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = 0$$

Ou bien :

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \phi = 0 \quad , \quad -\frac{\partial}{\partial y} \Delta \phi = 0 \quad (1.13)$$

Avec  $\Delta$  est Laplacien de deux dimensions.

Le paramètre  $\Delta \phi$  est constant à chaque section de la poutre; alors, la fonction  $\phi$  doit satisfaire l'équation (1.14) en tous points de la poutre :

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] = C^{te} \quad (1.14)$$

Finalement on doit s'assurer que  $\phi$  répond aux conditions aux limites spécifiées dans l'équation (A-9)(annexe).

Sur la surface de la poutre il n'y a aucune force externe appliquée, alors :  $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$  et la direction cosinus  $n$  est également nulle, donc, les deux premières équations de (A-9) sont satisfaites, alors, laissant la troisième comme condition au limite :

$$\tau_{zy} m + \tau_{zx} L = 0 \tag{I.15}$$

D'après la figure (I.5), les directions cosinus  $L$  et  $m$  de la normale ( $N$ ) à chaque point de la surface de la poutre sont :

$$L = \frac{dy}{ds} \quad \text{et} \quad m = -\frac{dx}{ds} \tag{I.16}$$

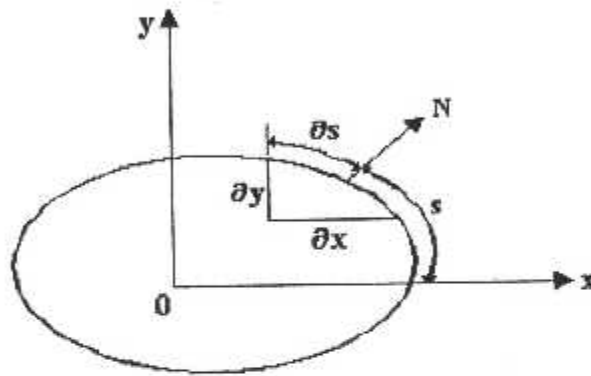


Fig.I.5 : Formation de la direction cosinus  $L$  et  $m$  de la normale à la surface de la poutre.

En remplaçant les équations (I.10) et (I.16) dans l'équation (I.15), on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0$$

Donc  $\phi$  est constante sur la surface de la poutre; et puisque la valeur de cette constante n'affecte pas les contraintes de l'équation (I.10), on peut convenir de donner à cette constante la valeur de zéro, alors, sur la surface de poutre on a la condition au limite suivante :

$$\phi = 0 \tag{I.17}$$

Aux extrémités de la poutre, les directions cosinus de la normale de la surface ont les valeurs  $L = 0$ ,  $m = 0$  et  $n = 1$ .

En remplaçant  $L$ ,  $m$  et  $n$  par leurs valeurs dans l'équation (A-9), on trouve :

$$\bar{X} = \tau_{zx}$$

$$\bar{Y} = \tau_{zy} \tag{I.18}$$

$$\bar{Z} = 0$$

Nous observons maintenant que les forces à chaque extrémité de la poutre sont des forces de cisaillement, ils sont distribués sur les extrémités de la même manière que les contraintes de cisaillement sont distribuées sur la surface.

Les forces de cisaillement  $S_x$  et  $S_y$  dans la direction positif de l'axe  $x$  et  $y$  respectivement, sont :

$$\begin{aligned} S_x &= \iint \bar{X} \, dx dy \\ S_y &= \iint \bar{Y} \, dx dy \end{aligned} \quad (1.19)$$

En remplaçant les équations de (1.18) dans l'équation (1.19), on trouve :

$$\begin{aligned} S_x &= \iint \tau_{zx} \, dx dy \\ S_y &= \iint \tau_{zy} \, dx dy \end{aligned} \quad (1.20)$$

Substituant l'équation (1.10) dans l'équation (1.20), on trouve :

$$\begin{aligned} S_x &= \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dx dy \\ S_y &= - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} \, dx dy \end{aligned} \quad (1.21)$$

Puisque  $\phi = 0$ , l'équation (1.20) devient :

$$\begin{aligned} S_x &= 0 \\ S_y &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

De l'équation (1.22) s'en suit qu'il n'y a pas de force de cisaillement résultante aux extrémités, d'où, la seule force en présence est un moment de valeur :

$$M_t = \iint (\tau_{zx} x - \tau_{zy} y) \, dx dy \quad (1.23)$$

Où le sens positif du moment est pris dans le sens contraire de l'aiguille d'une montre.

Réécrivant l'équation (1.23) en termes de la fonction de contrainte  $\phi$ , on obtient :

$$M_t = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x \, dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y \, dx dy \quad (1.24)$$

En intégrant par partie chaque terme du côté droit de l'équation (1.24) et en notant que  $\phi = 0$  à chaque point de la limite, on obtient :

$$M_t = 2 \iint \phi \, dx dy \quad (1.25)$$

On est donc maintenant en position d'obtenir une solution exacte à un problème de torsion, de telle sorte qu'elle satisfait l'équation (1.14) en tous points à l'intérieur de la poutre et disparaît à sa surface et pourvu que les moments extérieurs sont distribués sur les extrémités de la même manière que les contraintes intérieures sur la section.

Bien que la dernière prévision soit généralement impraticable, nous savons du principe de Saint Venant que seulement les contraintes dans les régions extrêmes sont affectées; donc la solution est applicable aux sections dont les distances des extrémités sont généralement supérieures à la dimension de la plus grande section.

Nous avons de l'équation (I.11) :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

Remplaçant (I.11) dans les équations de (A-10) et dans la seconde de (A-11), on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

On conclut que chaque section tourne comme un corps rigide sur son propre plan autour du centre de rotation, et que malgré les sections souffrent du gauchissement normal à leur plan, les valeurs de ce déplacement aux points ayant les mêmes coordonnées sur la longueur sont égaux.

Supposons qu'une section de la poutre tourne d'un petit angle  $\phi$  par rapport à son centre de rotation qui coïncide avec l'origine  $o$  (voir Fig.I.6).

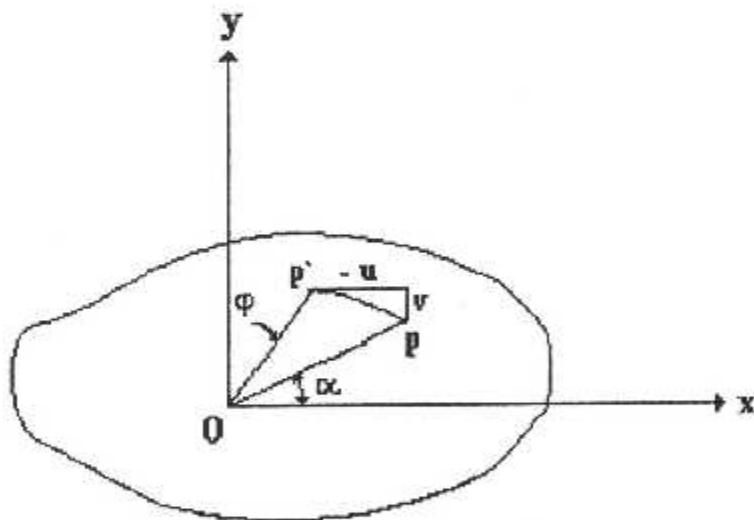


Fig.I.6 : Déplacement d'un corps rigide d'un point dans la section de la poutre.

Un point  $p(r,\alpha)$  se déplace vers le point  $p'(r,\alpha + \phi)$ , alors les composantes du déplacement sont :

$$u = -r \phi \sin \alpha \quad , \quad v = r \phi \cos \alpha$$

$$\text{D'où :} \quad u = -\phi y \quad , \quad v = \phi x \quad (I.26)$$

Se référant aux équations (annexe) (A-11) et (A-3), on déduit que :

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (1.27)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{zy}}{G}$$

En substituant l'équation (1.26) dans (1.27), et après un réarrangement, on trouve :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{zx}}{G} + \frac{d\phi}{dz} y \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{zy}}{G} - \frac{d\phi}{dz} x$$

Pour un point particulier de torsion, l'équation (1.28) permet de calculer les déplacements latéraux  $w$  de la section plane d'origine. On peut noter que chaque section tourne comme un corps rigide de  $\phi$  qui est en fonction de  $z$  seulement.

En dérivant la première l'équation (1.28) par rapport à  $y$  et la deuxième par rapport à  $x$ , et en sommant, on trouve :

$$\frac{1}{G} \left[ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} \right] + 2 \frac{d\phi}{dz} = 0$$

Ecrivant  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  en termes de  $\phi$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -2 \frac{d\phi}{dz} \quad (1.29)$$

On peut écrire (1.29) sous la forme suivante :

$$\Delta \phi = -2 G \frac{d\phi}{dz} = C^{te} \quad (1.30)$$

Il est pratique d'introduire une constante de torsion  $J$  définie par l'équation générale de torsion :

$$M_t = G J \frac{d\phi}{dz} \quad (1.31)$$

Le produit  $G.J$  est connu par la rigidité de torsion de la poutre et peut être écrit à partir des équations (1.25) et (1.30) :

$$G J = - \frac{4G}{\Delta \phi} \iint \phi \, dx dy \quad (1.32)$$

Considérons maintenant la ligne de la constante  $\phi$  (Fig.1.7).

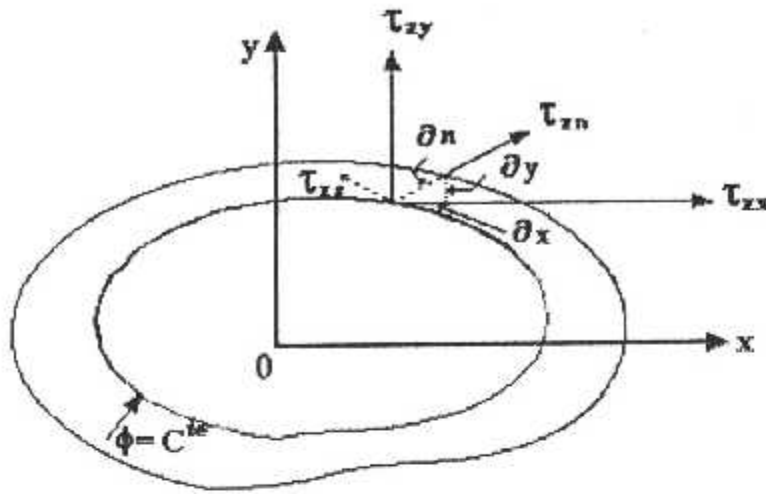


Fig.1.7 : Lignes de contraintes de cisaillement.

Si (s) est la distance mesurée le long de cette ligne à partir d'un point arbitraire, nous avons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0$$

Utilisant l'équation (I.10) et (I.16) pour réécrire l'équation ci-dessous comme suit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \tau_{xz} \cdot L + \tau_{zy} \cdot m = 0 \tag{I.33}$$

De la figure (I.7), les composantes normales et longitudinales des contraintes de cisaillement sont :

$$\begin{aligned} \tau_{zn} &= \tau_{xz} L + \tau_{zy} m \\ \tau_{zn} &= \tau_{xz} L - \tau_{zy} m \end{aligned} \tag{I.34}$$

En comparant la première équation de (I.34) avec l'équation (I.33), nous constatons que la contrainte de cisaillement normale est nulle, et que la résultante de la contrainte cisaillement en tous points est tangentielle à la ligne de  $\phi = \text{constante}$ . Ces lignes sont connues comme des lignes de contraintes de cisaillement ou tout simplement lignes de cisaillement.

En remplaçant  $\phi$  dans la deuxième équation de (I.34), on trouve :

$$\tau_{zn} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} L - \frac{\partial \phi}{\partial y} m \tag{I.35}$$

D'après la figure (I.7), on réécrire l'équation (I.35) comme suit :

$$\tau_{zn} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn}$$

D'où :

$$\tau_{zn} = - \frac{\partial \phi}{\partial n} \tag{I.36}$$

Dans ce cas, la direction cosinus L et m sont définis en terme d'élément normal de longueur  $\partial n$ .



D'où nous avons démontré que la résultante de contrainte de cisaillement en tous points est tangentielle à la ligne de contrainte de cisaillement à travers le point et elle a une valeur qui est égale à moins la dérivé de  $\phi$  dans la direction normale de la ligne.

### Exemple 1 :

Pour illustrer la méthode de *Prandtl*, on utilise sa fonction de contrainte pour résoudre le problème posé dans cet exemple.

Supposons un tronçon de poutre de section elliptique (d'axes mineur « a » et majeur « b »), dont il est soumis à un moment de torsion (Fig.1.8). Nous devons trouver une fonction qui satisfait :

$$\Delta\phi = -2G\theta$$

$$\phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

L'équation de l'ellipse est :

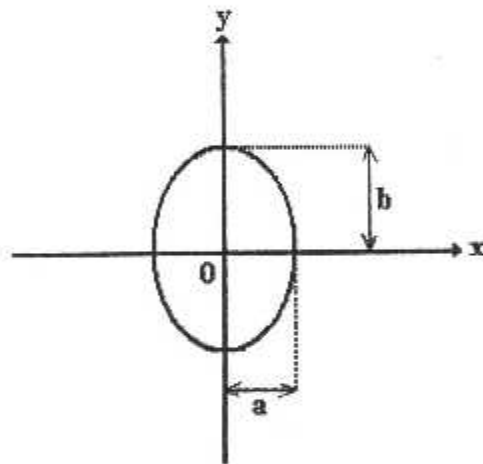
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$


Fig.1.8 : Torsion d'une poutre de section elliptique

Considérons la fonction de contrainte suivante :

$$\phi = C \left[ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \quad (i)$$

$\phi$  : satisfait clairement les conditions aux limites. Et on doit choisir C (constante) de telle sorte que les exigences de compatibilité seront satisfaites.

Substituant l'équation (i) dans l'équation (1.30), on trouve :

$$2C \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right] = -2G\theta$$

D'où :

$$C = -G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (ii)$$

Finalement :

$$\phi = -G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \quad (\text{iii})$$

\* En remplaçant l'expression de  $\phi$  dans l'équation (I.25), nous obtenons la relation suivante : (la relation entre le moment et le taux de rotation) :

$$M_t = -2G\theta \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ \frac{1}{a^2} \iint_{\Lambda} x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint_{\Lambda} y^2 dx dy - \iint_{\Lambda} dx dy \right]$$

Avec :

$$I_{xx} = \iint_{\Lambda} y^2 dx dy \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = \frac{\pi a b^3}{4}$$

$$I_{yy} = \iint_{\Lambda} x^2 dx dy \quad \Rightarrow \quad I_{yy} = \frac{\pi b a^3}{4}$$

$$A = \iint_{\Lambda} dx dy \quad \Rightarrow \quad A = \pi ab$$

En remplaçant les intégrales par leurs valeurs respectives, nous obtenons :

$$M_t = G\theta \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (\text{iv})$$

\* En comparant (iv) avec (I.31), nous déduisons que le moment polaire est :

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (\text{v})$$

\* En remplaçant le produit  $G\theta$  de l'équation (iv) dans l'équation (iii) et en dérivant comme indiqué dans la relation (I.10), on trouve la distribution de la contrainte de cisaillement suivante :

$$\tau_{xz} = -2 \frac{M_t y}{\pi a b^3} \quad ; \quad \tau_{yz} = 2 \frac{M_t x}{\pi b a^3} \quad (\text{vi})$$

\* Pour déterminer la distribution et le déplacement latéral  $w$  à travers la section, nous substituons  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  et  $\theta$  des équations (iv) et (vi) respectivement dans l'équation (I.28), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -2 \frac{M_t y}{\pi G a b^3} + \frac{M_t (a^2 + b^2) y}{\pi G a^3 b^3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2 \frac{M_t x}{\pi G b a^3} - \frac{M_t (a^2 + b^2) x}{\pi G a^3 b^3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{M_t (b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} y$$

D'où :

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{M_t (b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} x$$

$$w = \frac{M_t (b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} yx + f_1(y)$$

$$w = \frac{M_t (b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} xy + f_2(x)$$

Puisque  $w$  doit avoir la même valeur au point  $(x,y)$ , alors :

$$f_1(y) = f_2(x) = 0$$

$$w = \frac{M_t (b^2 - a^2)}{\pi G a^3 b^3} xy$$

D'où :

On remarque que le gauchissement  $w$  est négatif dans le premier et troisième cadran, par contre il est positif dans le deuxième et le quatrième cadran.

### 1.3. La solution de la fonction de gauchissement de *Saint Venant* :

*Prandtl* a résolvait le problème de la torsion en introduisant une fonction de contrainte, par contre, *Saint Venant* a introduit une fonction de déplacement

Supposons qu'une section de la poutre tourne comme un corps rigide par rapport au centre de rotation (ou torsion) qui coïncide avec l'origine  $o$  (voir Fig.I.6).

Les composantes de déplacement du point  $p$  dans les directions  $x$  et  $y$  sont :

$$u = -\varphi y \quad , \quad v = \varphi x$$

Il est également raisonnable de s'assurer que le déplacement du gauchissement  $W$  est proportionnel à la rotation de torsion ; donc constant le long de la poutre.

D'où on peut définir  $W$  par l'équation suivante : [21]

$$W = \theta \psi (x,y) \tag{1.37}$$

Quand  $\psi (x,y)$  est la fonction de gauchissement, les conditions des forces et d'équilibre de la poutre sont satisfaites est cela grâce à la supposition sur les déplacements. On constate qu'il est inutile de rechercher la compatibilité, car les déplacements ont une seule valeur, donc il satisfait automatiquement la compatibilité.

Les composantes d'efforts correspondent aux déplacements supposés, ils sont obtenus par les équations (annexe) (A-10) et (A-11) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} &= 0 \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dz} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d\varphi}{dz} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right]\end{aligned}\quad (I.38)$$

Les composantes des contraintes correspondantes sont données à partir des équations (A-2) et (A-3) :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_z = \tau_{xy} &= 0 \\ \tau_{zx} &= G \frac{d\varphi}{dz} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] \\ \tau_{zy} &= G \frac{d\varphi}{dz} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right]\end{aligned}\quad (I.39)$$

En ignorant les forces de masses, on constate que les deux premières équations d'équilibre sont satisfaites et que la troisième le sera si la fonction de gauchissement satisfait l'équation (I.30) :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \Delta \psi = 0 \quad (I.40)$$

La direction des cosinus est nulle sur la surface de la poutre, alors les deux premières conditions aux limites de l'équations (A-7) sont satisfaites et la troisième aura la forme suivante :

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right] \cdot m + \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] \cdot l = 0 \quad (I.41)$$

Nous savons qu'il n'y a pas de force de cisaillement résultante aux extrémités de la poutre, mais la seule force en présence est un moment de valeur :

$$M_t = \iint (\tau_{zx} x - \tau_{zy} y) dx dy \quad (I.42)$$

Substituant l'équation (I.39) dans l'équation (I.42), on obtient :

$$M_t = G \frac{d\varphi}{dz} \iint \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right] x - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] y dx dy \quad (I.43)$$

En comparant (I.32) avec l'équation (I.31) on trouve la constante de torsion  $J$  en fonction de  $\psi$  :

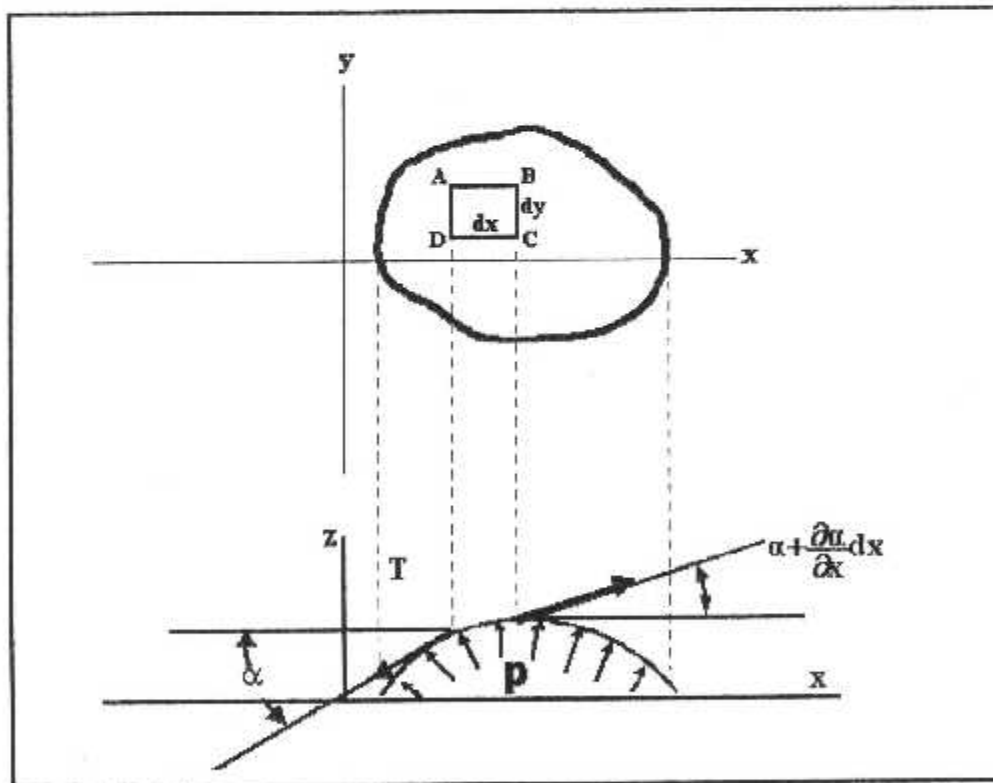
$$J = \iint \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right] x - \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right] y \, dx dy \tag{I.44}$$

La solution du problème de torsion se réduit à la détermination de la fonction du gauchissement  $\psi$  qui satisfait les équations (I.40) et (I.41), la constante de torsion et les taux de torsion résultent des équations (I.44) et (I.43), les contraintes et les efforts à partir de l'équation (I.39) et (I.38) et finalement la distributions du gauchissement par l'équation (I.37)

**I.4. Analogie de la membrane :**

*Prandtl* a suggéré une analogie très utile et pratique ; elle associe la torsion d'une poutre de section arbitraire à une membrane déformée (présentant une petite déformation).

Une membrane est un milieu élastique ne résistant pas à la flexion. Nous savons d'après la théorie des milieux surfaciques, que si une membrane plate est tendue de manière isotrope avec une tension initiale  $T$ , et si elle est soumise sur l'une de ses faces à une pression uniforme  $p$ , alors son déplacement  $w$  est perpendiculaire à son plan.(Fig.I.)



**Fig.I.9 :** Analogie de la membrane sur un chargement transversal.

Considérons l'équilibre d'un l'élément  $(dx,dy)$  de la membrane (voir Fig.I.10 ),et en additionnant les forces dans la direction  $z$ , on aura :

$$\sum F_z = 0$$

$$-T dx \frac{\partial w}{\partial y} + T dx \frac{\partial}{\partial y} \left( w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) - T dy \frac{\partial w}{\partial x} + T dy \frac{\partial}{\partial x} \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right) + p dx dy = 0$$

$$T dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + T dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + p dx dy = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{T} \tag{I.45}$$

Sachant que :

- \* la force agissant sur le coté AB est :

$$F_1 = -T dx \frac{\partial w}{\partial y}$$

- \* la force agissant sur le coté BC est :

$$F_2 = T dy \tan \left( \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right) = T dy \frac{\partial}{\partial x} \left( w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)$$

- \* la force agissant sur le coté DC est :

$$F_3 = T dx \frac{\partial}{\partial y} \left( w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right)$$

- \* la force agissant sur le coté AD est :

$$F_4 = -T dy \sin \alpha \approx -T dy \tan \alpha = -T dy \frac{\partial w}{\partial x}$$

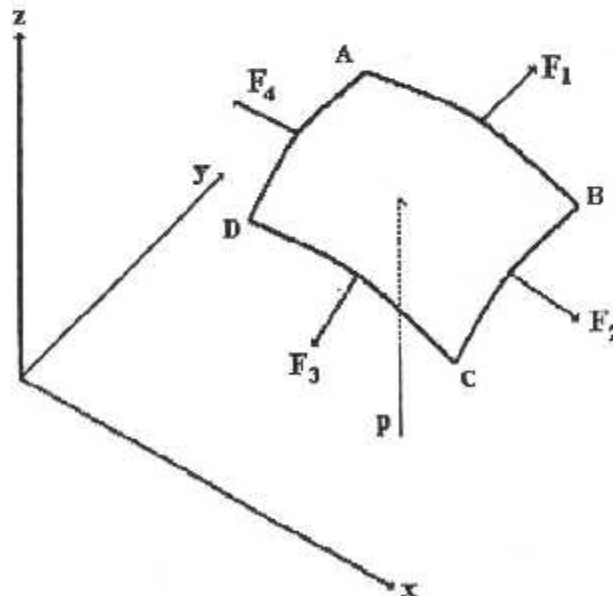


Fig.I.10 : L'équilibre de l'élément membrane

On constate que l'équation (I.46) satisfait les conditions aux limites, c'est à dire qu'en tout point du bord de la membrane :

$$w = 0 \quad (\text{I.46})$$

En comparant les équations (I.45), (I.46) avec (I.30) et (I.17), on constate que  $w$  est analogue à  $\phi$ .

Et si la membrane a la même forme extérieure que la section de la poutre, alors :

$$w = c \phi$$

D'où :

$$\frac{P}{T} = 2 c G \theta$$

Donc :

$$\phi = \frac{2 G \theta T}{P} w \quad (\text{I.47})$$

Pratiquement, on perce dans une plaque rigide un trou de la forme de la section droite, puis on rebouche avec une membrane tendue de manière isotrope. La plaque étant considérée comme rigide, la condition  $w=0$  sur le bord est bien respectée. On applique une pression  $p$  sur une des faces. En relevant la forme de la membrane déformée, on connaît  $w$  et donc  $\phi$ .

### Exemple 2 :

Considérons un triangle équilatéral, tel que, l'origine 0 du système des coordonnées est située au centre du triangle. (Fig.1.11)

Les équations qui définissent les cotées AB, AC, et BC sont respectivement :

$$y - \sqrt{3} x - \frac{2}{3} h = 0 \quad (\text{a})$$

$$y + \sqrt{3} x - \frac{2}{3} h = 0 \quad (\text{b})$$

$$y + \frac{1}{3} h = 0 \quad (\text{c})$$

$h$  : est la hauteur du triangle.

\* Considérons la fonction de contrainte suivante :

$$\phi = C \left[ (y - \sqrt{3} x - \frac{2}{3} h)(y + \sqrt{3} x - \frac{2}{3} h)(y + \frac{1}{3} h) \right] \quad (\text{d})$$

$\phi$  : satisfait clairement les conditions aux limites. Et on doit choisir  $C$  (constante) de telle sorte que les exigences de compatibilité seront satisfaites.

Substituant l'équation (d) dans l'équation (I.30), on trouve :

$$-4 h C = -2 G \theta$$

D'où : 
$$C = \frac{G\theta}{2h} \tag{e}$$

Finalement : 
$$\phi = G\theta \left[ \frac{1}{2h}(y^3 - 3x^2y) - \frac{1}{2}(y^2 + x^2) + \frac{2}{27}h^2 \right] \tag{f}$$

\* pour déterminer les contraintes de cisaillement, nous substituons l'équation (f) dans l'équation (1.10), on obtient :

$$\tau_{zx} = G\theta \left[ \frac{3}{2h}(y^2 - x^2) - y \right] \quad ; \quad \tau_{zy} = G\theta \left[ \frac{3}{h}xy + x \right] \tag{g}$$

On constate que :

- Aux trois sommets et au centre de la section, les deux contraintes de cisaillement  $\tau_{zx}$  et  $\tau_{zy}$  sont nulles.
- Sur l'axe des y, la contrainte de cisaillement  $\tau_{zy}$  est nulle, alors, la répartition de  $\tau_{zx}$  est illustrée par la figure (1.11.b)
- La contrainte de cisaillement maximale est exercée en un point situé sur le contour.

Si nous examinons la répartition de  $\tau_{zx}$  le long de l'arête BC, on trouve que la contrainte de cisaillement maximale due à la torsion s'exerce au point située au milieu de cette arête. Nous pouvons donc écrire la valeur de la contraintes de cisaillement maximale, soit :

$$\tau_{zx} = \frac{2}{3}G\theta h \tag{h}$$

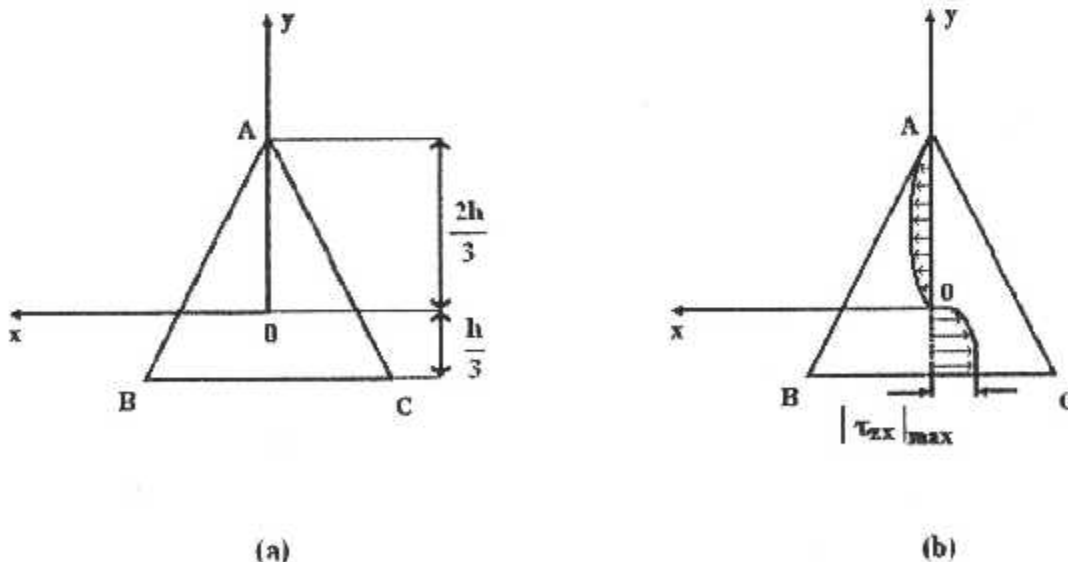


Fig.1.11 : Section en forme de triangle soumise à une torsion

a) Géométrie

b) Répartition de  $\tau_{zx}$  le long de l'axe y ( $M_t > 0$ )



## *CHAPITRE II*

### *Caractéristiques géométriques d'une section droite*

## CHAPITRE II :

## Caractéristiques géométriques d'une section droite

## II.1. Introduction :

Le matériau et les dimensions d'une pièce mécanique sont choisis en fonction des conditions de déformation et de résistance requises; pour l'étude qui nous intéresse le matériau doit être:

- Continu : la matière est supposée continue car son aspect moléculaire est trop "fin".
- Homogène : tous les éléments de la matière, aussi petits soient ils, sont identiques. (hypothèse non applicable pour le béton ou le bois).
- Isotrope : en tout point et dans toutes les directions, la matière a les mêmes propriétés mécaniques. (hypothèse non applicable pour le bois ou les matériaux composites).

La Résistance Des Matériaux étudie des pièces dont les formes sont relativement simples. Ces pièces sont désignées sous le terme de « poutres ».

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont :

- L'aire
- Le moment statique
- Les coordonnées du centre de gravité
- Le moment d'inertie
- Le produit d'inertie

## II.2. L'aire d'une surface plane :

Le calcul des aires des surfaces se base sur l'intégrale définie en considérant une section droite plane A délimitée par une courbe ; découpant cette section en petites surfaces élémentaires simples :  $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, \dots, \Delta A_n$  ; telles que des rectangles, triangles, ou autre équivalents dont on connaît leurs valeurs (figure II.1).

L'aire totale de la surface est donnée par :

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \dots + \Delta A_n$$

Si  $n \rightarrow \infty$

$$A = \int dA \quad (II.1)$$

L'intégrale II.1 est une intégrale double, on intègre suivant une direction, en suite suivant l'autre, selon la disposition du problème

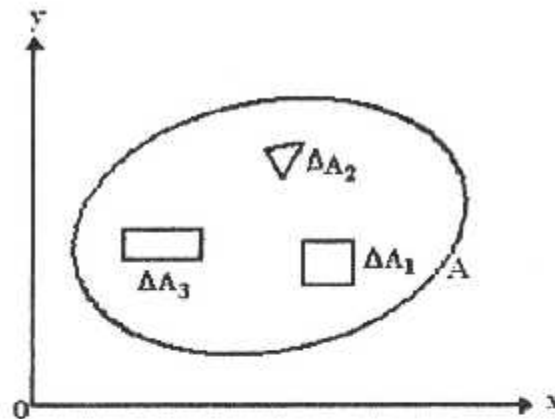


Fig.II.1 : Différentes surfaces élémentaires d'une section A

**II.3. Centre de gravité :**

Soit S une section droite, de point courant N et soit P un point fixe du plan normal. Le centre de gravité (géométrique) est défini par :

$$PG = \frac{1}{S} \int_S PN \, ds \tag{II.2}$$

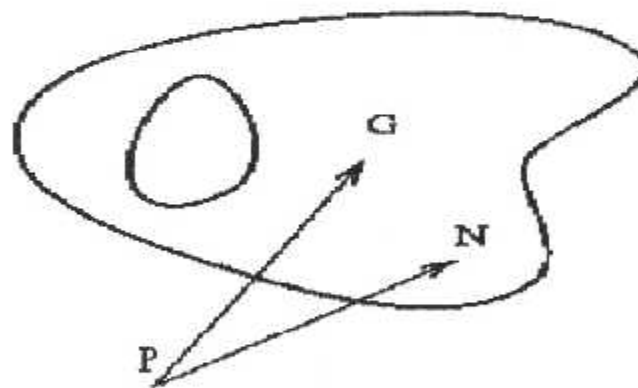


Fig.II.2 : Centre de gravité d'une section droite

Il est facile de voir que le centre de gravité G est indépendant du choix de P et qu'on a la relation :

$$\int_S GN \, ds = 0$$

**II.4. Moment statique par rapport à une droite :**

Soit S une section droite, de point courant N et soit δ une droite du plan de la section droite. Soit K la projection de N sur δ (figure .II.3). Le moment statique de S par rapport à δ est défini par :

$$I_s(S, \delta) = \int_S KN \, ds \tag{II.3}$$

$I_s$  est évidemment un vecteur perpendiculaire à δ.

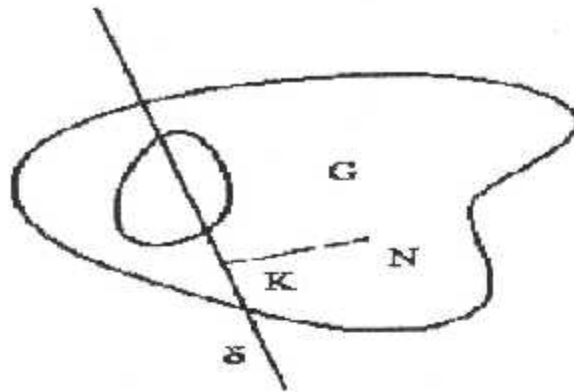


Fig.II.3 : Moment statique d'une section droite par rapport à la droite  $\delta$ .

Il est facile de voir que si  $G \in \delta$  alors  $I_s(S, \delta) = 0$ . Les droites  $\delta$  qui passent par G sont appelées droites centrales.

\* Si on définit un repère central orthonormé  $\{G, X, Y\}$  dans le plan normal, on définit les nombres:

$$I_{s_x} = I_s(S, x).y = \int_S y \, ds \tag{II.4.a}$$

$$I_{s_y} = I_s(S, y).x = \int_S x \, ds \tag{II.4.b}$$

Qu'on appelle respectivement moment statique de S par rapport à X et moment statique de S par rapport à Y.

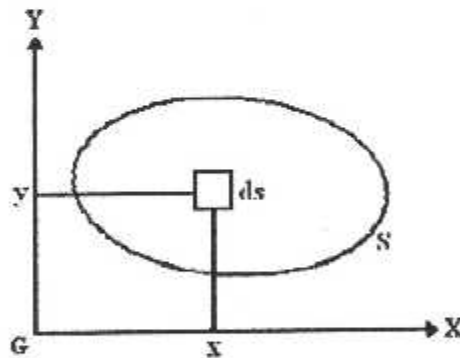


Fig.II.4 : Moment statique par rapport au repère GXY.

**II.5. Moment d'inertie d'une surface plane :**

Le moment d'inertie par rapport à l'axe x ou y dans le plan de la surface est donné par la sommation des produits de tous les éléments de surface contenus dans la surface finie par le carré des distances respectives de ces éléments par rapport à l'axe x ou y . Ainsi :

$$I_x = \int_S y^2 \, ds \tag{II.5.a}$$

$$I_y = \int_S x^2 \, ds \tag{II.5.b}$$

**II.6. Moment d'inertie polaire :**

Soit une surface plane S, tel que r est la distance de l'élément ds par rapport à l'origine des coordonnées (Fig.II.5). Alors, le moment d'inertie polaire  $J_0$  de la surface plane S par rapport au point O est la somme des produits de tous les éléments de cette surface par le carré de leurs distances aux points considérés. Ainsi :

$$J_0 = \int_S r^2 ds \tag{II.6}$$

Comme :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_0 = \int_S (x^2 + y^2) ds = \int_S x^2 ds + \int_S y^2 ds$$

D'où :

$$J_0 = I_x + I_y \tag{II.7}$$

\* Le moment polaire est toujours positif

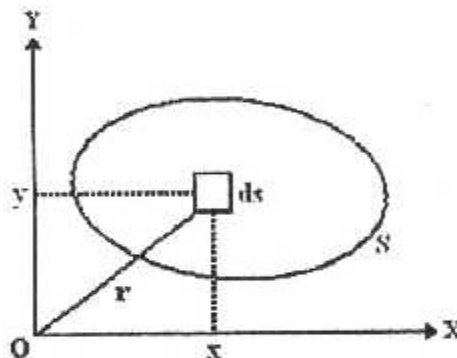


Fig.II.5 : Moment polaire par rapport au point O.

**II.7. Produit d'inertie :**

Le produit d'inertie par rapport aux axes x, y dans le plan de la surface est donné par la sommation des produits d'inertie autour de ces mêmes axes de tous les éléments de surface contenus dans la surface finie. Ainsi :

$$I_{xy} = \int_S xy ds \tag{II.8}$$

D'après cette formule, il est évidant que  $I_{xy}$  peut être négatif, positif ou nul.

**II.8. Moment d'un triangle quelconque :**

Considérant un triangle quelconque de nœud  $i=1,2,3$  et de coordonnées  $(x_1,y_1)$ ,  $(x_2,y_2)$ ,  $(x_3,y_3)$  par rapport au repère d'axe XOY quelconque (figure II.6).

Le moment d'un triangle est donné par l'intégrale suivante :

$$I_{mn} = \int_S x^m y^n dx dy \tag{II.9}$$

Où m et n sont des entiers positifs.

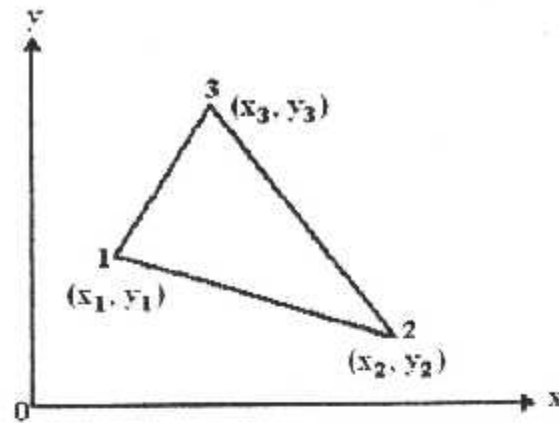


Fig.II.6 : coordonnées des nœuds d'un triangle

Pour évaluer cette intégrale, il est commode d'utiliser la transformation de **GREEN** pour passer d'une intégrale de surface à une intégrale simple curviligne le long du contour du triangle dans le sens anti-horaire.

**1<sup>er</sup> cas** :  $m = 0, n = 0$

Cette intégrale nous donne dans le cas  $m=0$  et  $n=0$ , l'aire de la surface du triangle

$$I_{00} = \int_S dx dy = A \tag{II.10}$$

Le résultat de l'intégrale (II.10) donne :

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$A = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \} \tag{II.11}$$

**2<sup>ème</sup> cas** :  $(m = 1, n = 0)$  et  $(m = 0, n = 1)$

Nous aurons à partir de l'intégrale (II.9) les moments statiques avec le centre de gravité du triangle.

$$I_{10} = \int_A x dx dy = AX_G \tag{II.12}$$

$$I_{01} = \int_A y dx dy = AY_G \tag{II.13}$$

Tel que:

$$\begin{cases} X_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3) \\ Y_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) \end{cases} \tag{II.14}$$

**3<sup>ème</sup> cas** :  $m = 1, n = 1$

Nous aurons à partir de l'intégrale (II.9) le produit d'inertie d'un triangle :

$$I_{11} = \int_A xy dx dy = \frac{A}{12} \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i y_i) + 9 X_G Y_G \right]$$

$$I_{11} = I_{yy} = \frac{A}{12} \left[ \sum_{i=1}^3 (x_i y_i) + 9 X_G Y_G \right] \tag{II.15}$$

4<sup>ème</sup> cas : (m=2, n=0) et (m=0, n=2)

Nous aurons à partir de l'intégrale (II.9) les moments d'inertie d'un triangle :

$$I_{02} = \int_S x^2 dx dy = \frac{A}{12} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) + 9 X_G^2 \right] \tag{II.16}$$

$$I_{20} = \int_S y^2 dx dy = \frac{A}{12} \left[ \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) + 9 Y_G^2 \right] \tag{II.17}$$

**II.9. Modélisation d'une surface quelconque par des triangles :**

On considère une surface arbitraire composée de N triangles ; l'aire est donné par la somme des surfaces (figure II.7).

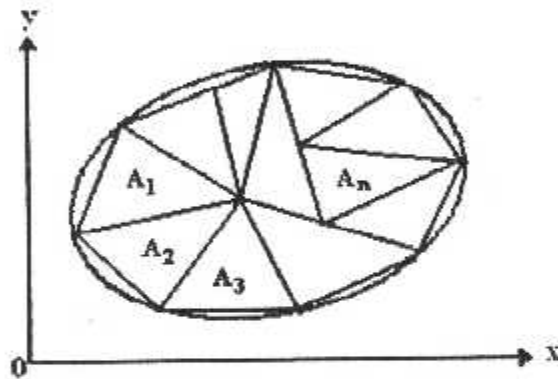


Fig.II.7 : Section arbitraire formée de triangles

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \tag{II.18}$$

Et le centre de gravité de cette surface :

$$\begin{cases} X_G = \frac{X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3 + \dots + X_N A_N}{A} \\ Y_G = \frac{Y_1 A_1 + Y_2 A_2 + Y_3 A_3 + \dots + Y_N A_N}{A} \end{cases} \tag{II.19}$$

Avec : (X<sub>i</sub>, Y<sub>i</sub>) les coordonnées de chaque triangle i (i = 1, 2, 3, ..., N)

A<sub>i</sub> : surface du triangle i

Et pour avoir le moment d'inertie nous sommes tous les moments d'inerties des triangles d'ou, on aura :

$$I_x = \sum_{i=1}^N (I_x)_i \tag{II.20}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^N (I_y)_i \tag{II.21}$$

Avec  $(I_x)_i$ ,  $(I_y)_i$  moment d'inertie de chaque triangle suite à ce moment nous aurons aussi le produit d'inertie qui est la somme de tous les produits d'inerties des triangles considérés :

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^N (I_{xy})_i \quad (II.22)$$

À partir des équations (II.20) et (II.21) on utilise la théorie des axes parallèles dont on aura les moments et le produit d'inertie par rapport au centre de gravité d'une seule figure :

$$I_{xG_i} = I_{x_i} - A_i y_i^2 \quad (II.23)$$

$$I_{yG_i} = I_{y_i} - A_i x_i^2 \quad (II.24)$$

$$(I_{xy})_{G_i} = (I_{xy})_i - A_i x_i y_i \quad (II.25)$$

Et pour toutes les figures, les moments et le produit d'inertie par rapport au centre de gravité seront données :

$$(I_x)_G = \sum_{i=1}^n (I_x)_{G_i} \quad (II.26)$$

$$(I_y)_G = \sum_{i=1}^n (I_y)_{G_i} \quad (II.27)$$

$$(I_{xy})_G = \sum_{i=1}^n (I_{xy})_{G_i} \quad (II.28)$$

La somme de ces deux moments d'inerties par rapport au centre de gravité est le moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité :

$$I_p = (I_x)_G + (I_y)_G \quad (II.29)$$

### II.10. Moments principaux d'inertie :

En tout point du plan d'une surface, il existe deux axes perpendiculaires autour desquels les moments d'inertie de la surface sont maximaux et minimaux en ce point, ces valeurs maximales et minimales du moment d'inertie dénommées moments principaux d'inertie et sont données par :

$$I_{\text{Max}}^{\text{Min}} = \left( \frac{I_x + I_y}{2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + (I_{xy})^2} \quad (II.30)$$

Le produit d'inertie disparaît si les axes sont des axes principaux d'après l'intégrale définissant le produit d'inertie d'une surface finie, il est évident que lorsque l'axe des X ou des Y ou bien les deux sont des axes de symétrie, le produit disparaît ; les axes de symétrie sont alors les axes principaux.

Il existe un angle  $\alpha$  pour lequel l'un des moments est maximum, l'autre est minimum.

$$\text{tg } \alpha = \frac{I_{xy}}{\left( \frac{I_x - I_y}{2} \right)} \quad (II.31)$$



## *CHAPITRE III*

### *Formulation et adaptation de la méthode des éléments finis*

## CHAPITRE III

### Formulation et adaptation de la méthode des éléments finis

#### III.1. Introduction :

Depuis l'évolution de l'aérodynamique et l'outil informatique, ainsi que par les nouvelles approches numériques appliquées à la mécanique des structures, les techniques de calcul des structures ont connu un développement très considérable dans ces dernières décennies.

Parmi ces approches, nous optons pour la technique des éléments finis pour résoudre notre problème, vu qu'elle a deux caractéristiques fondamentales qui expliquent sa supériorité sur les autres méthodes compétitives. Premièrement, un domaine géométrique complexe du problème est représenté comme une collection de sous domaines géométriques simples, appelés les éléments finis. Deuxièmement, sur chaque élément fini les fonctions d'approximations sont dérivées en utilisant l'idée fondamentale que n'importe quelle fonction continue puisse être représentée par une combinaison linéaire, algébrique et polynomiale. Les fonctions d'approximations sont dérivées en utilisant des concepts de la théorie d'interpolation et sont appelées les fonctions d'interpolation.

Dans la suite, nous allons introduire les notions de bases nécessaires à la compréhension de la M.E.F, ainsi qu'un bref historique. Et puis nous entamons la formulation de cette technique en traitant plusieurs types d'éléments finis, afin de comparer et de valider les résultats obtenus avec ceux de l'analytique pour les géométries simples disponibles.

#### III.2. Bref historique de la méthode des éléments finis :

L'idée de la représentation d'un domaine donné comme une collection d'éléments séparés n'est pas nouvelle. Il a été enregistré que les anciens mathématiciens estimaient la valeur  $\pi$  en notant que le périmètre d'un polygone inscrit dans un cercle est approximatif à la circonférence du cercle. Ils ont prédit la valeur de  $\pi$  pour préciser presque 40 chiffres importants par la représentation du cercle comme étant un polygone d'un nombre de cotés large et limité. Dans les temps modernes l'idée a trouvé refuge dans l'analyse structurelle des avions où par exemple les ailes et fuselages sont considérés comme des assemblages de Stringers, peaux et panneaux tondus. [27]

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie et de l'aéronautique a provoqué un développement rapide de la mécanique entre les années 1950-1960 :

TURNER, CLOUGH, MARTIN ET TOPP [32] introduisaient en 1956 le concept d'élément fini. Ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires sur lesquels les déplacements sont supposés variables linéairement, à partir de ce

concept, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution, c'est-à-dire aux déplacements en tout point du milieu continu. [15]

Dès 1960 la méthode des éléments finis a connu un nouvel essor, tel que :

- La méthode a été reformulée, à partir des considérations énergétiques et variationnelle, sous la forme générale des résidus pondérés.[9], [33]
- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments à côtés curvilignes ou iso-paramétriques.[17]
- La méthode des éléments finis surmonte la difficulté des méthodes variationnelles parce qu'elle procure une procédure systématique de résolution d'équations aux dérivées partielles. Elle est donc utilisée pour résoudre des problèmes non linéaires et non stationnaires dans le domaine des structures ainsi que dans d'autres domaines : *mécanique des fluides, nucléaire, thermique, etc.* [27], [12]
- Une base mathématique de la méthode des éléments finis est construite à partir de l'analyse fonctionnelle. [20]

A partir de 1967, de nombreux livres sont publiés sur la méthode des éléments finis. [33, 18 et 26] Elle est maintenant très répandue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire.

Elle se développe en ce moment dans les applications de la mécanique des fluides, étude des phénomènes de pollution thermique ou chimique, des interactions fluide-structure.

Dans la suite, nous citerons les principales démarches de cette méthode.

### III.3. Démarches de la méthode des éléments finis :

Les démarches suivies dans l'analyse d'élément fini pour un problème typique sont :

- 1/- Discrétisation (ou représentation) du domaine donné dans une collection en choisissant l'E.F.
  - a) Construire la maille d'élément fini en choisissant l'élément (voir Fig. III-1a).
  - b) Numéroté les nœuds et les éléments.
  - c) Engendrer les propriétés de la géométrie (coordonnées, l'aire de la section, ...) d'avoir besoin pour le calcul du problème.
- 2/- Dérivation de l'équation d'élément pour tous les éléments de la maille.
  - a) Construire la formulation variationnelle de l'équation différentielle donnée sur l'élément typique.
  - b) Supposer que la variable dépendant typique ( $\mathbf{W}$ ) est de la forme :

$$\mathbf{W} = \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_j \Psi_j$$

Tel que  $n$  est le nombre de nœuds du domaine.

En lui substituant dans la démarche (2a), on obtient l'équation d'élément (e) sous la forme :

$$[K^e] \cdot W^e = F^e$$

c) Dériver les fonctions d'interpolations  $\Psi_I$  de l'élément et calculer les matrices d'élément

3/- Assembler les équations pour obtenir un système d'équations global du problème.

a) Identifier les conditions de continuité de l'inter élément parmi les variables principales (relié entre les degrés de liberté locaux et les degrés de libertés globaux ).

b) Assembler les équations d'éléments en utilisant (3a) et la propriété de superposition.

4/- Imposer les conditions aux limites du problème.

a) Identifier les degrés de liberté principale globale.

b) Identifier les degrés de liberté secondaires globale.

5/- Solution de l'équation d'assemblage (le système algébrique) et autres paramètres.

a) Résoudre le système d'équations pour la variable dépendant inconnu ( $W$ ).

b) Calculer le gradient de la solution ou autres quantités désirées à partir de degrés de liberté principaux ( $W$ ) calculé à la démarche (5a).

#### Remarque :

Dans les problèmes à deux dimensions, nous ne cherchons pas seulement une solution approximative du système d'équations différentielles partielles mais, nous avons aussi des approximations sur le domaine donné par un maillage approprié d'élément fini. Par conséquent, nous aurons des erreurs dues à l'approximation de la solution et aussi les erreurs de discrétisation dues à l'approximation du domaine par des éléments finis (2D).

La maille d'élément fini est constituée par des éléments simples à deux dimensions tel qu'un triangle, rectangle et quadrilatérale.... etc., qui sont collectés les uns aux autres par des nœuds sur leurs périphériques (voir figure III-1a).

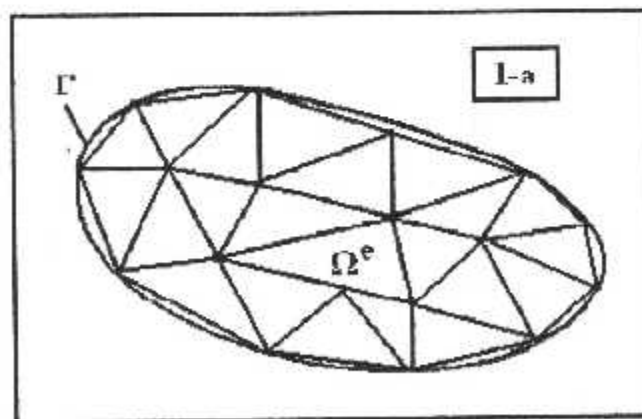


Fig. III.1.a : Discretisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.

L'habilité de représenter le domaine de forme irrégulière, par collection d'éléments finis fait de la méthode un outil pratique très valable pour la résolution des problèmes de conditions aux limites de valeur limitée, qui sont rencontrés dans plusieurs domaines de l'ingénieur.

Maintenant, dans la suite nous traiterons le concept de la méthode des éléments finis par ces formulations théoriques.

#### III.4. Formulation variationnelle (intégrale) :

*PRANDTL* a établi une équation différentielle aux dérivées partielles pour la torsion des sections cylindriques non circulaires comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (III.1)$$

avec condition aux limites  $\varphi = 0$  sur  $\Gamma$

Si on pose  $\varphi = -2G\theta W$  alors l'équation (3.5) devient sous forme suivante :

$$\frac{\partial^2(-2G\theta)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(-2G\theta)}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (III.2)$$

Alors on aura :

$$-2G\theta \left[ \frac{\partial^2(W)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(W)}{\partial y^2} \right] = -2G\theta \quad (III.3)$$

Enfin :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 1 \quad (III.4)$$

Le problème que nous allons considérer, dans cette formulation après l'étude mathématique effectuée, c'est la résolution d'une équation différentielle partielle de second ordre de type elliptique, connue sous le nom de l'équation de *POISSON*, associée avec des conditions aux limites du 1<sup>er</sup> type dites de *DIRICHLET* dans un domaine arbitraire plan  $\Omega(x, y)$  de frontière quelconque ( $\Gamma$ ).

Alors, le problème est comme suit :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 1$$

Ou sous la forme compacte :

$$\Delta W = 1$$

Avec :

$$W = 0 \quad \text{sur } (\Gamma) \quad (III.5)$$

On développe la forme variationnelle de l'équation (III.4) pour un élément typique en multipliant cette équation par une fonction test  $\Psi(x, y)$ , qu'on suppose dérivable une fois par rapport à  $x$  et  $y$ , et puis on intègre dans le domaine de l'élément ( $\Omega^e$ ) :

$$\iint_{\Omega^e} \Psi \left[ \frac{\partial(F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2)}{\partial y} - 1 \right] dx.dy = 0 \quad (III.6)$$

Avec :

$$F_1 = \frac{\partial(W)}{\partial x} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial(W)}{\partial y}$$

Nous intégrons les deux premiers termes de l'équation (III-6) par partie.

Premièrement on note les identités :

$$\begin{cases} \Psi \frac{\partial(F_1)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot F_1 \\ \Psi \frac{\partial(F_2)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot F_2 \end{cases} \quad (III.7)$$

Puis nous rappelons la forme des composantes de l'opérateur gradient (ou divergence) pour un contour fermé avec le théorème de « GREEN » :

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) dx.dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_1 \cdot n_x ds \quad (III.8a)$$

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) dx.dy = \oint_{\Gamma^e} \Psi F_2 \cdot n_y ds \quad (III.8b)$$

Tel que : «  $ds$  » est la longueur d'arc infinitésimale de l'élément le long de son contour  $\Gamma^e$ , et  $n_x, n_y$  sont les composantes du vecteur unité normale  $\vec{n}$  sur la frontière  $\Gamma^e$ . (voir Fig.III-1b)

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos(\alpha) \vec{i} + \sin(\alpha) \vec{j} \quad (III.9)$$

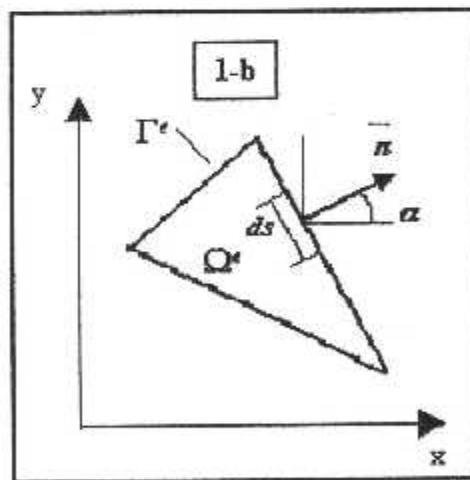


Fig. III.1.b : Élément typique triangulaire.

En suite, en substituant l'équation (III.6) et (III.7) dans l'équation (III.4) on obtient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \Psi \right] dx.dy - \oint_{\Gamma^e} \Psi \left[ n_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + n_y \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] ds = 0 \quad (III.10)$$

A partir d'une inspection du terme de la frontière de cette équation, nous montrons que la spécification de  $(W)$  constitue la condition essentielle aux limites (d'où  $W$  est la variable principale), et la spécification de  $q_n$  constitue la condition au limite naturelle de la formulation (d'où  $q_n$  est la variable secondaire) [27] :

$$q_n = n_x \frac{\partial W}{\partial x} + n_y \frac{\partial W}{\partial y} \tag{III.11}$$

La forme variationnelle devient :

$$\iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \Psi \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} \Psi q_n ds = 0 \tag{III.12}$$

Cette équation variationnelle (intégrale) forme la base du modèle de l'élément fini de l'équation (III-4).

**III.5. Formulation en élément fini :**

La forme variationnelle donnée par l'équation (III.12) montre que l'approximation choisie de  $(W)$  doit être au moins bilinéaire dans  $x$  et  $y$  d'une manière que les deux premiers termes de l'équation (III.12) et  $q_n$  dans l'équation (III.11) sont non nuls [27].

Supposant que  $(W)$  est approximée par l'expression :

$$W = \sum_{j=1}^n W_j \cdot N_j \tag{III.13}$$

où  $W_j$  sont les valeurs de  $(W)$  au point  $(x_j, y_j)$  et  $N_j$  est la fonction d'interpolation avec la propriété :

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}$$

Avec :  $\delta_{ij}$  est le symbole de *Kronecker*.

La forme spécifique de  $N_i$  sera dérivée pour des éléments triangulaires et quadrilatères à différent nombre de nœuds dans le paragraphe III-6.

Substituant l'équation (III.13) dans la forme variationnelle (III.12), nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} W_i + \iint_{\Omega^e} N_i dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i q_n ds = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{III.14}$$

Autrement :

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} W_j^{(e)} = F_i^{(e)}$$

Tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} N_i dx dy + \int_{\Gamma^e} N_i q_n ds \end{cases} \quad (III.15)$$

On note que  $\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \mathbf{K}_{ji}^{(e)}$  (c.à.d  $[\mathbf{K}]$  est symétrique).

Le second terme de  $F_i^{(e)}$  dans l'équation (III.15) qui représente l'intégrale sur la frontière  $\Gamma^{(e)}$ , peut être écrit sous différentes formes en utilisant la dérivation directionnelle (Fig.III-1b) :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^e} N_i q_n ds &= \int_{\Gamma^e} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) N_i ds \\ &= \int_{\Gamma^e} (\vec{\nabla} W \cdot \vec{n}) N_i ds \\ &= \int_{\Gamma^e} \frac{\partial W}{\partial n} N_i ds \end{aligned}$$

Tel que  $\partial/\partial n$  représente la différentiation dans la direction normale sortante à la frontière  $\Gamma^{(e)}$ . De la, si une portion de  $\Gamma^{(e)}$  se trouve à l'intérieure du domaine global  $\Omega$  (voir Fig.III-2a, 2b), alors la quantité  $q_n^{(e)}$  de l'élément (e) s'annule avec  $q_n^{(f)}$  de l'élément (f) qui se coïncide sur la même portion  $\Gamma^{(e)}$  de cet élément (e). Ceci peut être vu comme étant un équilibre interne entre les différents éléments du domaine (forces internes).

Si une autre portion de  $\Gamma^{(e)}$  se coïncide avec la frontière globale  $\Gamma$  du domaine, alors l'évaluation de l'intégrale de frontière est basée sur le calcul de  $q_n$  et de la valeur de la fonction d'interpolation  $N_i$  sur cette frontière.

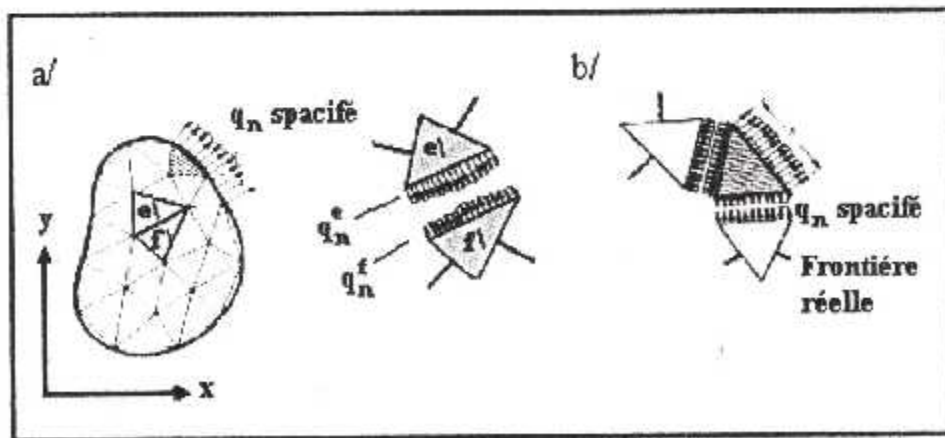


Fig.III.2.a,b : Equilibre interne entre les différents éléments du domaine.



Cependant, dans notre formulation les fonctions d'interpolations vérifient la propriété suivante :

$$N_i(x,y) = 0 \quad \text{si } (x,y) \in (\Gamma)$$

Implicitement, elles vérifient donc la condition aux limites  $W = 0$  sur  $(\Gamma)$ .

Ainsi, le système (III.15) devient :

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} N_i dx dy \end{cases} \quad (III.16)$$

Substituant cette équation dans celle de (III.14), on obtient la forme dite : « *Weak form* » dans l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx dy \right\} W_j = - \iint_{\Omega^e} N_i dx dy \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (III.17)$$

Finalement l'équation (III.17) représente le modèle de l'élément fini de l'équation (III.4).

Dans la suite, nous traiterons la dérivation des fonctions d'interpolations.

### III.6. Fonction d'interpolation :

#### III.6.1. Séries polynomiales :

Le comportement de la variable dépendante ( $W$ ) dans un élément est décrit par l'approche la plus simple, cela consiste à approximer son champ de variation par des séries de polynôme dont les coefficients  $C_j$  sont les coordonnées généralisées de l'approximation [27].

Dans le cas bi-dimensionnel, pour chaque variable dépendante on a :

$$W_i(x,y) = \sum_{j=1}^n C_j x^j y^j \quad i = 1, 2, 3 \dots m \quad (III.18)$$

Ceci permet d'écrire l'approximation sous la forme matricielle suivante :

$$W(x,y) = [H_m(x,y)] \cdot \{C\}$$

Avec ' $m$ ' nombre de degré de liberté et  $\{c\}$  vecteurs des coefficients  $C_j$ .

Pour cela, il est utile d'utiliser le triangle de *PASCAL* pour mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation. Soit :

			1				constant $m=0, n=1$		
			x		y		linéaire $m=1, n=3$		
		x <sup>2</sup>		xy		y <sup>2</sup>	quadratique $m=2, n=6$		
	x <sup>3</sup>		x <sup>2</sup> y		xy <sup>2</sup>		y <sup>3</sup>	cubique $m=3, n=10$	
x <sup>4</sup>		x <sup>3</sup> y		x <sup>2</sup> y <sup>2</sup>		xy <sup>3</sup>		y <sup>4</sup>	4 <sup>ème</sup> degré $m=4, n=15$

Le nombre total de coordonnées de l'approximation doit être égal au nombre total de variables nodaux de l'élément.

Si on choisit une approximation d'ordre élevé, on est donc amené à adopter des nœuds supplémentaires qui correspondent aux termes supplémentaires d'approximation.

Ainsi, on définit des nœuds additionnels soit aux interfaces, soit à l'intérieur de l'élément.

Dans notre problème, l'examen de l'équation formant le modèle de l'élément fini (III.17) et les matrices d'éléments finis (III.16), montre que  $N_j$  doit être au moins une fonction bilinéaire en  $x$  et  $y$ .

Comme cité auparavant, il y a une correspondance entre le nombre des nœuds et le nombre des termes utilisés dans l'approximation polynomiale d'une variable dépendante dans l'élément.

Alors, dans le problème unidimensionnel avec une équation différentielle de 2<sup>ème</sup> degré, le nombre de nœuds ( $n$ ) dans un élément a défini uniquement le degré ( $r$ ) du polynôme, tel que la correspondance entre ( $n$ ) et ( $r$ ) étant ( $n = r+1$ ).

Tandis que dans les problèmes à deux dimensions, la correspondance entre le nombre de nœuds (qui est égal au nombre de termes d'approximations polynomiales) et le degré de polynôme n'est pas unique. Par exemple, le polynôme :

$$W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y \quad (III.19)$$

contient trois termes (linéairement indépendants) et il est linéaire dans  $x$  et  $y$ , d'un autre côté le polynôme :

$$W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy \quad (III.20)$$

contient quatre termes (linéairement indépendants) est également linéaire dans  $x$  et  $y$ .

La première forme nécessite un élément avec trois nœuds (avec un inconnu primaire par nœud). Or, la deuxième nécessite un élément avec quatre nœuds. Quand le nombre de nœuds égale à quatre, on peut choisir un triangle avec quatre nœuds et on met le quatrième nœud au centre de ce dernier, où on choisit un rectangle (quadrilatérale) avec les nœuds à ses sommets.

Le polynôme avec cinq constantes (voir l'équation III.21) est un polynôme quadratique (incomplet) :

$$W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 (x^2 + y^2) \quad (III.21)$$

Le polynôme peut être utilisé pour construire un élément avec cinq nœuds (rectangle avec un nœud à chaque sommet et l'autre est situé au centre du rectangle). On fait la même chose avec six nœuds et sept nœuds, ...etc.

**III.6.2. Différents types d'éléments finis adaptés :**

La discrétisation du domaine d'étude se fait par des éléments finis d'un seul type ou bien mixte. Dans l'analyse numérique abordée, on a opté à faire le calcul de maillage par les éléments suivants :

- Triangles ayant 3, 4 ou 6 nœuds (voir la figure III-3.a, b et c).
- Quadrilatères ayant 4, 5 ou 8 nœuds (voir la figure III-3.d, e et f).

Afin de mener à bien le calcul et pouvoir comparer les résultats avec une suffisance et avoir une discussion vaste, on a choisi et adapté ces éléments pour les différentes étapes de calcul du programme.

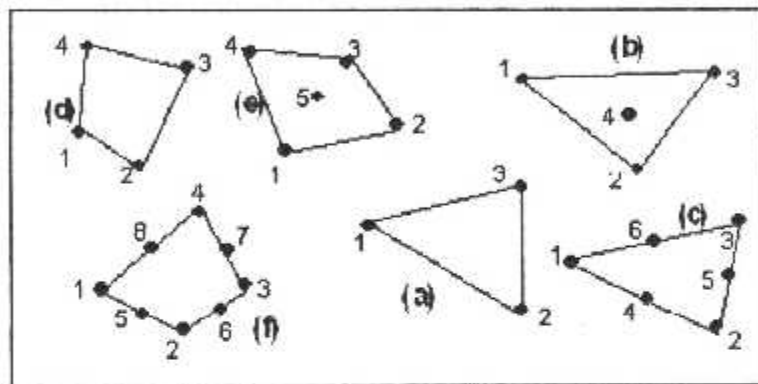


Fig III.3.(a, b, c, d, e et f) : Eléments finis en bidimensionnelle 3,4,5,6 et 8 nœuds.

**III.6.3. Fonctions d'interpolations pour un élément triangulaire a trois nœuds :**

Nous considérons l'approximation linéaire (III.19). La donnée  $\{1,x,y\}$  est linéairement indépendante et aussi complète. Nous devons réécrire par suite l'approximation (III-16) tel qu'elle satisfait les conditions :

$$W(x_i, y_i) = W_i \quad i = 1,2,3 \tag{III.22}$$

Où  $(x_i, y_i)$  avec  $(i=1,2,3)$  sont les coordonnées des trois nœuds du triangle (voir figure III-3a.)

Autrement dit, nous déterminons les trois constants  $c_i$  dans l'équation (III.19) en fonction de  $W_i$  à partir de l'équation (III.22), donc :

$$\begin{aligned} W_1 &= W(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \\ W_2 &= W(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \\ W_3 &= W(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Sous la forme matricielle on aura :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \tag{III.24}$$

Notons que les nœuds sont numérotés dans le sens anti-horaire, et en résolvant l'équation (III.23) par rapport à  $c_i$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2A} [ W_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + W_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + W_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) ] \\
 C_2 &= \frac{1}{2A} [ W_1 (y_2 - y_3) + W_2 (y_3 - y_1) + W_3 (y_1 - y_2) ] \\
 C_3 &= \frac{1}{2A} [ W_1 (x_3 - x_2) + W_2 (x_1 - x_3) + W_3 (x_2 - x_1) ]
 \end{aligned} \tag{III.25}$$

Avec :  $A$  est l'aire du triangle, tel que :

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = [ (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) ] \tag{III.26}$$

### Remarque :

Le déterminant doit avoir un signe opposé lorsque les nœuds sont numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre.

Substituant les expressions de  $C_i$  d'après l'équation (III.25) dans l'équation (III.19), on obtient :

$$\begin{aligned}
 W(x,y) &= W_1 N_1(x,y) + W_2 N_2(x,y) + W_3 N_3(x,y) \\
 &= \sum_{i=1}^m W_i N_i, \quad m=3
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

Où  $N_i$  sont les fonctions d'interpolations d'un élément triangulaire.

$$\text{Et} \quad N_i = \frac{1}{2A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i=1,2,3 \tag{III.28a}$$

Avec  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  sont des constantes : Tel que  $i, j, k$  permute dans un ordre naturel.

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\
 \beta_i &= y_j - y_k \\
 \gamma_i &= x_k - x_j
 \end{aligned} \quad i \neq j \neq k \tag{III.28b}$$

Par exemple,  $\alpha_2$  est donné en posant  $i=2, \rightarrow j=3$  et  $K=1$  dans l'équation (III.28b) :

$$\alpha_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$$

Notons que les fonctions  $N_i$  ont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 * \quad N_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \\
 * \quad \sum_{i=1}^3 N_i &= 1
 \end{aligned} \tag{III.29}$$

Avec :  $\delta_{ij}$  est le symbole de *Kronecker*.

On note également que l'équation (III.27) détermine la surface plane actuelle à travers  $W_1, W_2, W_3$ . De la, l'utilisation de l'interpolation linéaire  $N_i$  résulte une approximation d'une surface courbée  $W(x, y)$  par une fonction plane (équation III.27), voir la figure III-4.

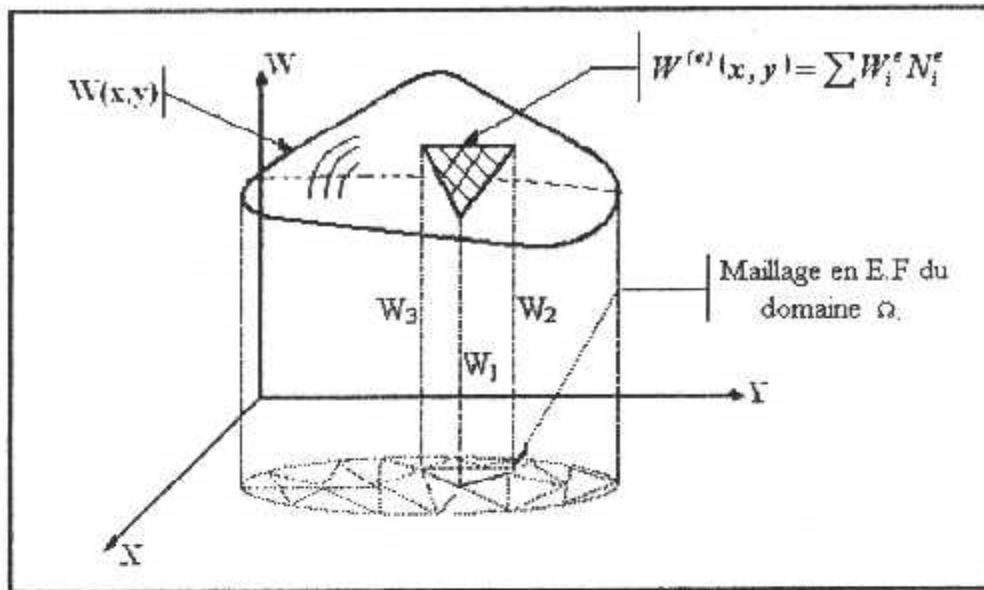


Fig. III.4 : Représentation de la fonction continue  $W(x, y)$  par une fonction d'interpolation linéaire pour un exemple de triangle à 3 nœuds.

**III.6.4. Fonctions d'interpolations pour un élément quadrilatère à quatre nœuds :**

En utilisant l'approximation polynomiale bilinéaire (III.20) pour la variable  $W$ , on obtient le système suivant (III.30) pour un élément quadrilatère à quatre nœuds (figure III-3 d). Les fonctions d'interpolations de cet élément sont déduites à partir de ce système par la procédure suivante :

$$\begin{aligned}
 W_1 &= W(x_1, y_1) = C_1 + C_2x_1 + C_3y_1 + C_4 x_1 y_1 \\
 W_2 &= W(x_2, y_2) = C_1 + C_2x_2 + C_3y_2 + C_4 x_2 y_2 \\
 W_3 &= W(x_3, y_3) = C_1 + C_2x_3 + C_3y_3 + C_4 x_3 y_3 \\
 W_4 &= W(x_4, y_4) = C_1 + C_2x_4 + C_3y_4 + C_4 x_4 y_4
 \end{aligned}
 \tag{III.30}$$

On a

En posant :

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{Bmatrix} ; \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} ; [H] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix}$$

On aura :

$$\{w\} = [H] \{C\}
 \tag{III.31}$$

Alors :

$$\{C\} = [H]^{-1} \{w\}$$

Ainsi qu'en posant :  $[L] = [H]^{-1}$ , tel que :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

On aura :

$$\{C\} = [L] \{w\}$$

Alors, l'équation (III.30) dans la forme générale  $(x, y)$  sera :

$$W(x,y) = [g] \cdot [L] \{w\} \quad \text{Tel que, on note : } [1 \ x \ y \ xy]^t = [g] \quad (III.32)$$

De la, en utilisant l'équation (III.13) et (III.30) on obtient les fonctions d'interpolations  $N_i$  :

$$[N] = [g] [L]$$

Elles peuvent s'écrire donc sous la forme :

$$[N(x,y)] = [1 \ x \ y \ xy] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \quad (III.33)$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy \end{Bmatrix} \quad (III.34)$$

**III.6.5. Fonctions d'interpolation pour un élément triangulaire à six nœuds :**

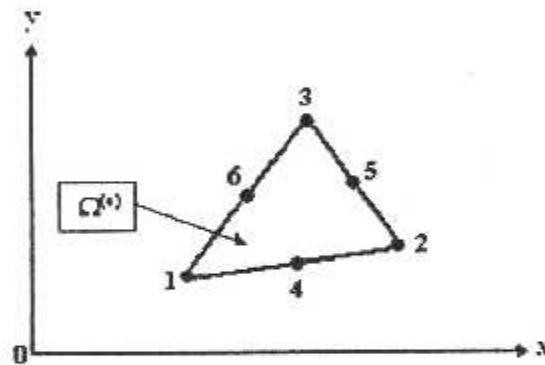


Fig. III.5 : Élément fini  $\Omega^e$  de six nœuds.

L'élément fini ( $\Omega^e$ ) est un triangle de six nœuds (Fig. III.5) . Tel que, pour aborder le calcul des coefficients des fonctions  $N_i$ , on commence la numérotation des nœuds des sommets de l'élément fini dans le sens anti-horaire, en suite les nœuds des arêtes.

Les coordonnées des nœuds  $(x_i, y_i) \ i=1,2,\dots,6$  sont calculées comme suit :

- On calcul en premier lieu les  $(x_i, y_i) \ i=1,2,\dots,3$  des sommets à partir des sousroutines de génération de maillage du domaine étudié (Voir le chapitre IV), tel que  $m=3$  pour un triangle.
- Puis on calcul les coordonnées des nœuds des arêtes à partir des coordonnées des sommets qui délimitent l'arête, par exemple :

$$x_{milieu} = \frac{x_{sommets\ 1} + x_{sommets\ 2}}{2} \quad ; \quad y_{milieu} = \frac{y_{sommets\ 1} + y_{sommets\ 2}}{2}$$

- On choisi les coordonnées des nœuds de la surface et on calcul celles du centre de l'élément par les coordonnées des sommets (Voir le chapitre IV).

la fonction  $W(x, y)$  est approximée par :

$$W(x,y) = C_1g_1(x,y) + C_2g_2(x,y) + C_3g_3(x,y) + \dots + C_6g_6(x,y)$$

$$= [g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y), \dots, g_6(x,y)] \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_6 \end{Bmatrix} = [G(x,y)] \cdot \{C\} \quad (III.35)$$

Les fonctions d'interpolation de l'élément sont déduites à partir du système (III.36) par la procédure suivante. On a :

$$W_i = W(x_i, y_i) = C_1g_1(x_i, y_i) + C_2g_2(x_i, y_i) + \dots + C_6g_6(x_i, y_i) \quad i=1,2,\dots,6$$

Sous la forme explicite et matricielle :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), & g_2(x_1, y_1), & \dots, & g_6(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), & g_2(x_2, y_2), & \dots, & g_6(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), & g_2(x_3, y_3), & \dots, & g_6(x_3, y_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_6, y_6), & g_2(x_6, y_6), & \dots, & g_6(x_6, y_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad (III.36)$$

$$\text{En posant : } \{w\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_6 \end{Bmatrix} ; \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_6 \end{Bmatrix} ; [H] = \begin{bmatrix} g_1(x_1, y_1), & g_2(x_1, y_1), & \dots, & g_6(x_1, y_1) \\ g_1(x_2, y_2), & g_2(x_2, y_2), & \dots, & g_6(x_2, y_2) \\ g_1(x_3, y_3), & g_2(x_3, y_3), & \dots, & g_6(x_3, y_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_6, y_6), & g_2(x_6, y_6), & \dots, & g_6(x_6, y_6) \end{bmatrix}$$

$$\text{On aura : } \{w\} = [H]\{C\}$$

$$\text{Donc : } \{C\} = [H]^{-1}\{w\}$$

Tel que les éléments  $H_{ij}$  de la matrice  $[H]$  sont calculés par :

$$H_{ij} = g_j(x_i, y_i) \quad \text{et} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,6 \\ j=1,2,\dots,6 \end{matrix}$$

$$\text{Posant : } [L] = [H]^{-1}, \quad \text{tel que : } [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & \dots & L_{66} \end{bmatrix}$$

$$\text{On aura : } \{C\} = [L]\{w\}$$

Substituant cette équation (III.37) dans l'équation (III.35),  $W(x, y)$  sera :

$$W(x,y) = [g(x,y)][L]\{w\} \quad (III.37)$$

De la, en utilisant l'équation (III.13) et (III.37) on obtient les fonctions d'interpolations  $N_i$  :

$$[N(x,y)] = [g(x,y)][L]$$

Elles peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & \dots & x^m y^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & \dots & L_{66} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ \vdots \\ N_6(x,y) \end{cases} = \begin{cases} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy + \dots + L_{16} x^m y^n \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy + \dots + L_{26} x^m y^n \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy + \dots + L_{36} x^m y^n \\ \vdots \\ L_{61} + L_{62}x + L_{63}y + L_{64}xy + \dots + L_{66} x^m y^n \end{cases} \quad (III.38)$$

Ou bien :

$$N_i(x,y) = \sum_{j=1}^{j=6} L_{ji} g_j(x,y) \quad i=1,2,3, \dots, 6 \quad (III.39)$$

**Remarque :**

Il est parfois très utile d'utiliser les fonctions  $g_i(x,y)$  comme la somme de plusieurs termes, dont le but est de rendre l'approximation symétrique et complète. Où elles ont la forme :

$$g_i(x,y) = x^{s_1} y^{r_1} + x^{s_2} y^{r_2} + \dots + x^{s_i} y^{r_i} \Rightarrow g_i(x,y) = \sum_{n=1}^{n=i} x^{s_n} y^{r_n}$$

**III.7. Calcul des matrices d'éléments :**

Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément  $[k^{(e)}]$  et le vecteur force  $\{F^{(e)}\}$  dans l'équation (III.16) par la méthode conventionnelle (par l'intégration exacte) est en général difficile.

Cependant, dans notre problème et avec les hypothèses optées, le premier terme de l'équation (III.16) est égal a une constante. Donc, il est possible d'évaluer les intégrales de surface dans les expressions de  $[k^{(e)}]$  et  $\{F^{(e)}\}$ .

Pour une raison de simplicité, nous réécrivons  $[k^{(e)}]$  comme étant la somme de deux matrices de base. :  $[S^{11}]$  et  $[S^{22}]$

c.à.d :

$$[K^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}] \quad (III.40a)$$

Avec :

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \\ S_{ij}^{22} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \end{cases} \quad (III.40b)$$

Ainsi que, nous avons :

$$F_i^{(e)} = - \int_{\Omega^e} N_i dx dy \quad (III.41)$$

Maintenant, nous poursuivons le calcul des matrices dans les équations (III.40) et (III.41) en utilisant les fonctions d'interpolations développées dans la section précédente.



III.7.1 La matrice de rigidité pour un élément triangulaire linéaire [10]

Pour un triangle quelconque, (voir la figure III-3a) les évaluations de la formule des intégrales exactes suivante :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \tag{III.42}$$

l'aire du triangle :  $I_{00} = \Delta = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$

Les coordonnées moyennes :  $\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$  ,  $\bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$

Ainsi :  $I_{10} = \int_{\Delta} x dx dy = A \bar{x}$  ,  $I_{01} = \int_{\Delta} y dx dy = A \bar{y}$

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\Delta} xy dx dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \bar{x} \bar{y} \right) \\ I_{20} &= \int_{\Delta} x^2 dx dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \bar{x}^2 \right) \\ I_{02} &= \int_{\Delta} y^2 dx dy = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \bar{y}^2 \right) \end{aligned} \tag{III.43}$$

En utilisant les fonctions d'interpolations (III.28) dans les équations (III.40b) et (III.41) et notant que :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A} , \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A}$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j \\ S_{ij}^{22} = \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j \end{cases} \tag{III.44a}$$

$$\Rightarrow K_{ij}^{(e)} = \frac{1}{4A} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \quad i, j=1,2,3 \tag{III.44b}$$

Ainsi que, vu l'identité  $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = 2A/3$  [à partir des équations (III.28), (III.41) et (III.43)], nous avons :

$$F_i^{(e)} = \iint_{\Omega^e} N_i dx dy = \frac{-1}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = -\frac{A}{3} \tag{III.45}$$

Et pour ce type de fonction d'interpolation  $N_i$  de trois termes, on a la relation mathématique suivante [1] :

$$\int_{\Delta} N_i^a N_i^b = \frac{a! + b!}{(a+b+2)!} \cdot 2A$$

Une fois les coordonnées des nœuds de l'élément sont connues, on peut calculer  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  par l'équation (III.28b) et les substituer dans les équations (III.44b) et (III.45), pour obtenir les

matrices et les vecteurs d'éléments.

**III.7.2. Matrice de rigidité pour un élément quadrilatère bilinéaire :**

L'élément quadrilatère à quatre nœuds est divisé en deux éléments triangulaires comme l'indique la figure ci-dessous. [Figure (III-6)]

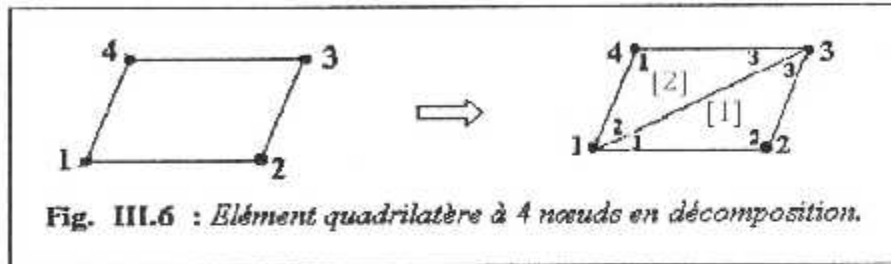


Fig. III.6 : Élément quadrilatère à 4 nœuds en décomposition.

A l'aide de l'équation (III.42) et les formules (III.43) on peut calculer les intégrales concernant l'élément quadrilatère comme suit :

$$\begin{aligned}
 I_{00} &= \int_{\Omega} dx dy = A_{123} + A_{134} \\
 I_{10} &= \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} + A_{134} \bar{x}_{134} \\
 I_{01} &= \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} + A_{134} \bar{y}_{134} \\
 I_{20} &= \int_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9 \bar{x}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (x_1^2 + x_3^2 + x_4^2 + 9 \bar{x}_{134}^2) \\
 I_{02} &= \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9 \bar{y}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (y_1^2 + y_3^2 + y_4^2 + 9 \bar{y}_{134}^2) \\
 I_{11} &= \int_{\Omega} xy dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9 \bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) + \frac{A_{134}}{12} (x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9 \bar{x}_{134} \bar{y}_{134})
 \end{aligned}
 \tag{III.46}$$

Tel que :

\*  $\bar{x}_{123}, \bar{y}_{123}$  : Cordonnées du entre de gravité du triangle 123.

$$\bar{x}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad \bar{y}_{123} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

\*  $\bar{x}_{134}, \bar{y}_{134}$  : Cordonnées du entre de gravité du triangle 134.

$$\bar{x}_{134} = \frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_4), \quad \bar{y}_{134} = \frac{1}{3} (y_1 + y_3 + y_4)$$

\*  $A_{123}, A_{134}$  : Aires de la surface des triangles limités respectivement par les nœuds 1, 2, 3 et 1,3, 4.

$$A_{123} = \frac{1}{2} \{ (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \}$$

$$A_{134} = \frac{1}{2} \{ (x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_1) \}$$

\*  $\Omega$  : surface limité par un quadrilatère.

En appliquant toujours les équations (III.40), (III.41), avec les fonctions d'interpolation (III.34); on obtient:

$$\begin{cases} S_{ij}^{11} = L_{2i} L_{2j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{2i} L_{4j} + L_{2j} L_{4i}) \int_{\Omega} y dx dy + L_{4i} L_{4j} \int_{\Omega} y^2 dx dy \\ S_{ij}^{22} = L_{3i} L_{3j} \int_{\Omega} dx dy + (L_{3i} L_{4j} + L_{3j} L_{4i}) \int_{\Omega} x dx dy + L_{4i} L_{4j} \int_{\Omega} x^2 dx dy \end{cases} \quad (III.47a)$$

Sachant que :  $[K^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{22}]$

Donc :

$$K_{ij} = (L_{2i} L_{2j} + L_{3i} L_{3j}) I_{00} + (L_{2i} L_{4j} + L_{2j} L_{4i}) I_{01} + (L_{3i} L_{4j} + L_{4i} L_{3j}) I_{10} + (L_{4i} L_{4j}) I_{02} + (L_{4i} L_{4j}) I_{20} \quad (III.47b)$$

et : 
$$F_i^{(e)} = - \left[ L_{i1} \int_{\Omega} dx dy + L_{i2} \int_{\Omega} x dx dy + L_{i3} \int_{\Omega} y dx dy + L_{i4} \int_{\Omega} xy dx dy \right]$$

$$= - [L_{i1} I_{00} + L_{i2} I_{10} + L_{i3} I_{01} + L_{i4} I_{11}] \quad (III.47c)$$

### III.7.3. Matrice de rigidité pour un élément triangulaire à six nœuds :

A partir des formules des matrices de rigidité [les équations (III.40) et (III.41)] en utilisant les fonctions d'interpolation (III.39) développées dans la section précédente, on détermine leurs termes comme suit:[34]

- Détermination de la matrice de rigidité [K] :

A partir de la relation (III.39), on a :

$$\left[ \frac{\partial N}{\partial x} \right] = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \dots, \frac{\partial N_6}{\partial x} \right]$$

Avec : 
$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = L_{i1} \frac{\partial g_1}{\partial x} + L_{i2} \frac{\partial g_2}{\partial x} + L_{i3} \frac{\partial g_3}{\partial x} + \dots + L_{i6} \frac{\partial g_6}{\partial x} \quad i=1,2,3,\dots,6$$

Donc : 
$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{j=6} L_{ji} \frac{\partial g_j(x,y)}{\partial x} \quad i=1,2,3,\dots,6 \quad (III.48)$$

De même 
$$\left[ \frac{\partial N}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_2}{\partial y}, \frac{\partial N_3}{\partial y}, \dots, \frac{\partial N_6}{\partial y} \right]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^{j=6} L_{ji} \frac{\partial g_j(x,y)}{\partial y} \quad i=1,2,3,\dots,6 \quad (III.49)$$

Alors : 
$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy$$

Utilisant les relations (III.48 et 49) dans la matrice [K] pour les termes en 'i' et 'j', on trouve :

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} \left[ \sum_{k=1}^{k=6} L_{ki} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} \cdot \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=6} L_{ki} \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \cdot \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \right] dx \cdot dy \\
 \Rightarrow K_{ij}^{(e)} &= \iint_{\Omega^e} \left\{ L_{1i} \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + L_{2i} \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \dots + \right. \\
 &\dots + L_{6i} \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_6(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} \left. \right\} + \left\{ L_{1i} \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_1(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} + \dots + \right. \\
 &\dots + L_{6i} \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_6(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \left. \right\} dx dy
 \end{aligned}$$

Sous la forme compacte, la matrice de rigidité [K<sub>ij</sub>] sera :

$$K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega^e} \left\{ \sum_{k=1}^6 L_{ki} \left( \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x} \right) \right\} + \left\{ \sum_{k=1}^6 L_{ki} \left( \sum_{m=1}^{m=6} L_{mj} \frac{\partial g_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m}{\partial y} \right) \right\} dx \cdot dy$$

Après un réarrangement et un calcul mathématique, cette forme devient :

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{k=1}^{k=6} \sum_{m=1}^{m=6} L_{ki} L_{mj} \left[ \iint_{\Omega^e} \left( \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} \right) dx \cdot dy \right] \tag{III.50}$$

- Détermination du vecteur force F :

Substituant l'équation (III.39) dans la relation (III.41), On aura :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega^e} \left[ \sum_{m=1}^{m=6} L_{mi} g_m(x,y) \right] dx \cdot dy \tag{III.51}$$

Considérons la fonction g<sub>m</sub>(x, y) sous la forme indiquée à la fin du paragraphe III.6.5 comme suit:

$$g_m(x,y) = x^{S1} y^{R1} + x^{S2} y^{R2} + \dots + x^{Sm} y^{Rm} \Rightarrow g_m(x,y) = \sum_{n=1}^{n=m} x^{Sn} y^{Rn} \tag{III.52}$$

D'où les termes de dérivation deviennent :

$$\frac{\partial g_m(x,y)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{n=m} S_n \cdot x^{Sn-1} y^{Rn} , \quad \frac{\partial g_m(x,y)}{\partial y} = \sum_{n=1}^{n=m} R_n \cdot x^{Sn} y^{Rn-1} \tag{III.53}$$

### III.8. Assemblage des matrices d'éléments :

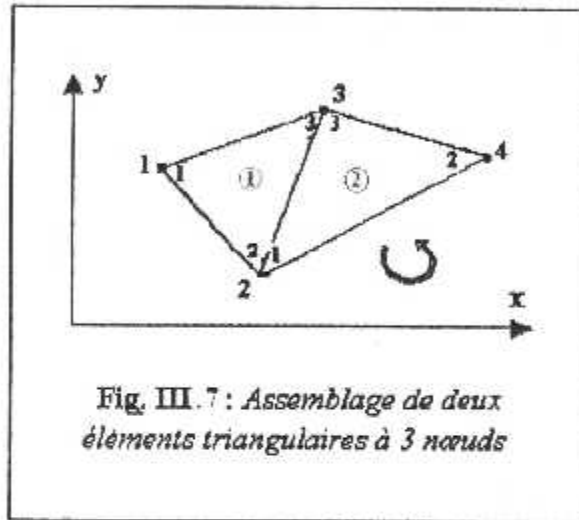
L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale [K] et le vecteur global {F} à partir des matrices élémentaires [K<sup>(e)</sup>] et des vecteurs élémentaires {F<sup>(e)</sup>} des éléments finis du domaine complet.

Pour représenter l'assemblage des matrices d'éléments finis, nous illustrons la procédure en considérant que le maillage est construis par deux éléments triangulaires.

Soient  $K_{ij}^{(1)}$  et  $K_{ij}^{(2)}$  ( $i, j = 1,2,3$ ) les coefficients des matrices de rigidité correspondant à ces éléments. Le maillage d'éléments finis est présenté dans la figure (III.7).

A partir de ce maillage, nous notons la correspondance entre les valeurs globales et les valeurs nodales d'éléments.

$$\begin{aligned} W_1 &= W_1^{(1)} & W_1 &= W_2^{(1)} = W_1^{(2)} \\ W_3 &= W_3^{(1)} = W_3^{(2)} & W_4 &= W_2^{(2)} \end{aligned} \tag{III.54}$$



Pour l'élément (1)

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & k_{23}^{(1)} \\ k_{31}^{(1)} & k_{32}^{(1)} & k_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément (2)

$$[K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & k_{13}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{31}^{(2)} & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

La matrice assemblée sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\ 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2 \end{bmatrix}$$

En suite, nous utilisons les conditions de continuité d'inter éléments (III.54) pour assembler les équations d'éléments finis.

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{e=1}^2 \{\delta W_{(e)}\}^T \left( [K_{(e)}] \{W_{(e)}\} - \{F_{(e)}\} \right) \\
 &= \sum_{e=1}^2 \sum_{i=1}^{n_e} \delta W_i^{(e)} \left[ \sum_{j=1}^{n_e} K_{ij}^{(e)} W_j^{(e)} - F_i^{(e)} \right] \quad n_1=3, n_2=3
 \end{aligned}
 \tag{III.55}$$

Collectant les coefficients de  $\delta W_i^{(e)}$  ( $i = 1,2,3,4$ ), séparément et mettant eux en zéros, nous obtenons après un réarrangement le système sous forme matricielle suivant :

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & 0 \\
 k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{23}^1 + k_{12}^2 & k_{13}^2 \\
 k_{31}^1 & k_{32}^1 + k_{21}^2 & k_{33}^1 + k_{22}^2 & k_{23}^2 \\
 0 & k_{31}^2 & k_{32}^2 & k_{33}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 W_4
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1^1 \\
 F_2^1 + F_1^2 \\
 F_3^1 + F_3^2 \\
 F_2^2
 \end{Bmatrix}
 \tag{III.56}$$

La procédure d'assemblage décrit précédemment, peut nous permet d'éviter l'équation algébrique très lente (III.44), en se rendant directement après l'assemblage donc à l'équation (45).

Un examen final du maillage des éléments finis de la figure (III-8) montre les correspondances suivantes entre les nœuds globaux pairs et les nœuds des éléments pairs.

Numérotation globale	Les nœuds globaux	Les nœuds de l'élément
1	(1, 1)	(1,1) de l'élément 1
.	(1, 2)	(1,2) de l'élément 1
.	(1, 3)	(1,3) de l'élément 1
.	(1, 4)	aucune correspondance
2	(2, 2)	(2,2) de l'élément 1 et (1,1) de l'élément 2
.	(2, 3)	(2,3) de l'élément 1 et (1,3) de l'élément 2
.	(2, 4)	(1,2) de l'élément 2
3	(3, 3)	(3,3) de l'élément 1 et (3,3) de l'élément 2
.	(3, 4)	(3,2) de l'élément 2
4	(4, 4)	(2,2) de l'élément 2

**Tableau III-1 :** Correspondances entre les nœuds globaux et les nœuds des éléments.

Cette correspondance nous donne un chemin facile d'assemblage des matrices des éléments finis pour obtenir les coefficients de la matrice globale avec des entiers convenables.

Alors, la correspondance entre les nœuds globaux et les nœuds d'éléments, nous fournit finalement une méthode d'assemblage des matrices de rigidités adéquate pour obtenir les coefficients globaux de la matrice de rigidité globale (du domaine approprié).

Finalement, La figure (III-9) montre un maillage d'assemblage de deux éléments quadrilatères typique ayant '8' nœuds : sur les sommets et au milieu des arêtes, de chaque élément.

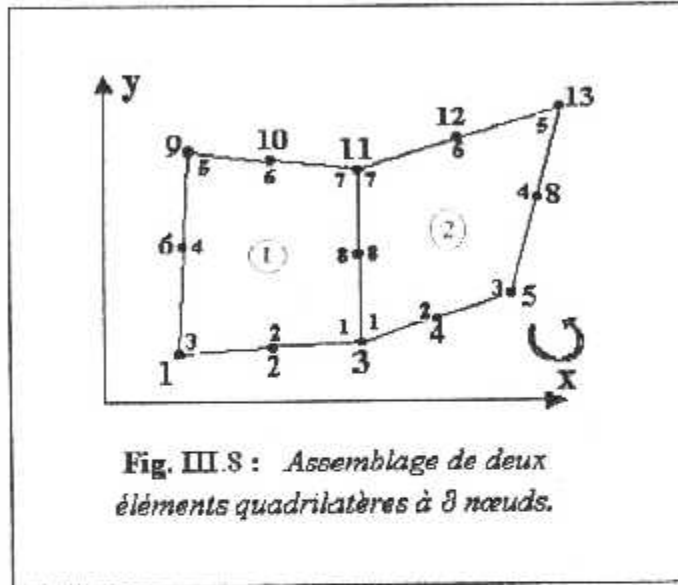


Fig. III.8 : Assemblage de deux éléments quadrilatères à 8 nœuds.

De la même manière que le maillage à deux triangles, le système final déterminé après l'assemblage de ces deux éléments quadrilatères à 8 nœuds est le suivant :

$$\begin{bmatrix}
 k_{11}^1 & k_{15}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & k_{18}^1 & k_{16}^1 & 0 & k_{14}^1 & k_{17}^1 & k_{13}^1 & 0 & 0 & W_1 \\
 k_{55}^1 & k_{52}^1 & 0 & 0 & 0 & k_{58}^1 & k_{56}^1 & 0 & k_{54}^1 & k_{57}^1 & k_{53}^1 & 0 & 0 & W_2 \\
 k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{15}^2 & k_{12}^2 & k_{18}^2 & k_{16}^2 + k_{14}^2 & k_{28}^1 & k_{26}^1 + k_{18}^2 & k_{16}^2 & k_{24}^1 & k_{27}^1 & k_{23}^1 + k_{14}^2 & k_{17}^2 & k_{13}^2 & W_3 \\
 k_{55}^2 & k_{52}^2 & k_{58}^2 & k_{56}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{54}^2 & k_{57}^2 & k_{53}^2 & W_4 \\
 k_{22}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{24}^2 & k_{27}^2 & k_{23}^2 & W_5 \\
 k_{88}^1 & k_{86}^1 & k_{86}^2 & k_{88}^2 & 0 & k_{84}^1 & k_{87}^1 & k_{83}^1 & 0 & 0 & k_{87}^2 & k_{83}^2 & 0 & W_6 \\
 k_{66}^1 + k_{88}^2 & k_{86}^2 & k_{86}^2 & k_{86}^2 & k_{86}^2 & k_{64}^1 & k_{67}^1 & k_{63}^1 + k_{84}^2 & k_{87}^2 & k_{83}^2 & k_{67}^2 & k_{63}^2 & 0 & W_7 \\
 k_{44}^1 & k_{47}^1 & k_{47}^2 & k_{44}^2 & 0 & 0 & 0 & k_{43}^1 & k_{43}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_8 \\
 k_{77}^1 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & 0 & 0 & 0 & k_{73}^1 & k_{73}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_9 \\
 k_{33}^1 + k_{44}^2 & k_{47}^2 & k_{47}^2 & k_{43}^2 & k_{43}^2 & k_{33}^2 & k_{44}^2 & k_{33}^2 + k_{44}^2 & k_{47}^2 & k_{43}^2 & k_{43}^2 & k_{77}^2 & 0 & W_{10} \\
 k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & k_{77}^2 & W_{11} \\
 & & & & & & & & & & & & & W_{12} \\
 & & & & & & & & & & & & & W_{13}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 W_4 \\
 W_5 \\
 W_6 \\
 W_7 \\
 W_8 \\
 W_9 \\
 W_{10} \\
 W_{11} \\
 W_{12} \\
 W_{13}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 F_1^1 \\
 F_5^1 \\
 F_2^1 + F_1^2 \\
 F_2^2 + F_1^1 \\
 F_2^2 \\
 F_8^2 \\
 F_6^1 + F_8^2 \\
 F_6^2 \\
 F_4^1 \\
 F_7^1 \\
 F_3^1 + F_4^2 \\
 F_7^2 \\
 F_3^2
 \end{Bmatrix}$$

Symétrie

## *CHAPITRE IV*

### *Génération de maillage*



## CHAPITRE IV

### Génération de maillage

#### IV.1. Introduction :

La mise en œuvre effective de la méthode des éléments finis décrite dans le chapitre précédent, nécessite l'utilisation des méthodes numériques variées et puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ces équations se résolvent dans un domaine discret, en passant d'un milieu continu à un milieu discrétisé.

Ce chapitre donne la description de la méthode et les procédures adaptées à la génération de maillage sur les domaines simplement connexes bidimensionnels.

#### IV.2. Aspect de la génération de maillage :

Il existe plusieurs méthodes ou techniques de génération de maillage, selon le degré de complexité du même domaine, mais le maillage doit toujours vérifier les conditions suivantes: [34]

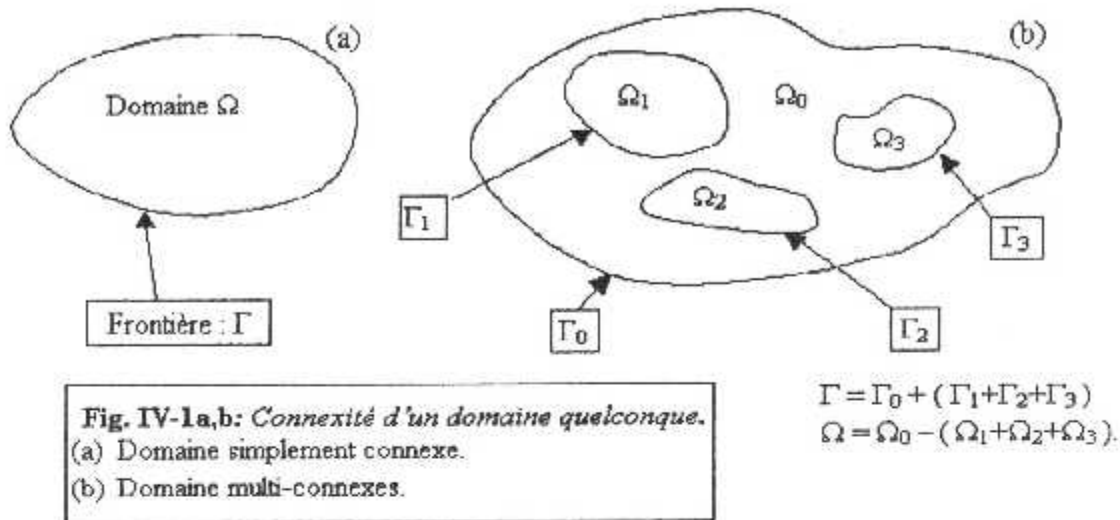
- Une adaptation aux frontières, et aux conditions aux limites.
- Une adaptation aux propriétés des différentes régions du domaine physique.
- Une bonne régularité.

Donc, il est nécessaire de donner un rappel sur ces types de domaines et les techniques de génération de maillage.

##### IV.2.1. concept des différents types des domaines :

Le domaine est une collection de points dans une région de l'espace avec la propriété que si P est un point dans le domaine, alors tous les points qui sont suffisamment près de P appartiennent au domaine. La propriété implique que le domaine se constitue uniquement des points intérieurs. Si deux points quelconques du domaine puissent être reliés par une ligne entièrement étendue à l'intérieur du domaine, alors le domaine se dit d'être convexe (courbé) et simplement connexe. La limite du domaine est un ensemble de points, tel que dans n'importe quel voisinage de chacun de ces points, il y a ceux qui appartiennent au domaine aussi bien et d'autres qui ne le sont pas.

Notons de la définition du domaine que les points dans la frontière n'appartiennent pas au domaine. On doit utiliser le symbole ( $\Omega$ ) pour dénoter un domaine arbitraire et ( $\Gamma$ ) pour dénoter sa frontière [voir figure IV.1].



Dans notre étude, on doit prendre en considération que les domaines de types simplement connexes bidimensionnel. Une région de l'espace est dite simplement connexe si toutes les courbes relient deux points quelconques qui sont conciliables (ou réductibles) par variation continue. Ou bien en d'autre terme, si tout contour fermé dans cette région peut être réduit à un point par déformation continue sans jamais quitter la région (voir Fig.IV-1 a).

#### IV.2.2. Classification des techniques de génération de maillage :

Il existe plusieurs méthodes et techniques de génération de maillage que se soit triangulaires ou quadrilatères. Rappelons que ces méthodes peuvent se classer en deux catégories. La première consiste à générer une grille de nœuds dans le domaine et sa frontière, en discrétisant la géométrie physique continue vers le domaine discret, tout en conservant sa forme et ses frontières. Or l'autre consiste à transformer le domaine discret (la grille de nœuds compliquée) vers un domaine computationnel (de calcul), caractérisé par un maillage simple dans sa forme et ses pas de discrétisation. Citons à titre d'exemple les méthodes suivantes qu'on peut trouver dans la littérature et les références indiquées.

- Maillage algébrique par interpolation linéaire entre deux parois [12].
- Maillage structuré par résolution de l'équation de *Laplace* [12].
- Maillage structuré de type 'O', 'C' et autres par coupure [12].
- Maillage structuré par la technique des transformations conformes [11].
- Maillage structuré par la méthode de variable complexe.
- Maillage structuré par la méthode de *Gilding* [11] et [12].
- Maillage structuré par technique de multi surface.
- Maillage non structuré par la triangulation de *Delaunay*.
- Maillage triangulaire non structuré de *Klenstreuer*.
- Maillage par la méthode de résolution des équations aux dérivées partielles.

La liste des méthodes existantes reste ouverte, il suffit uniquement de consulter les références pour faire le choix de la méthode qui convient pour le domaine considéré. Ici dans notre modeste travail, on va utiliser la technique algébrique qui donne un maillage structuré ; les maillages qu'on va obtenir sont du type 'H'.

### IV.3. Procédures de génération de maillage :

Pour faire la génération de maillage d'un domaine simplement connexe dont la forme générale est donnée par la figure (IV-2), et parmi les plusieurs méthodes et techniques existantes et suivant la méthode de résolution du système algébrique ainsi que la manière de considération de la forme de la matrice de rigidité, il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires.

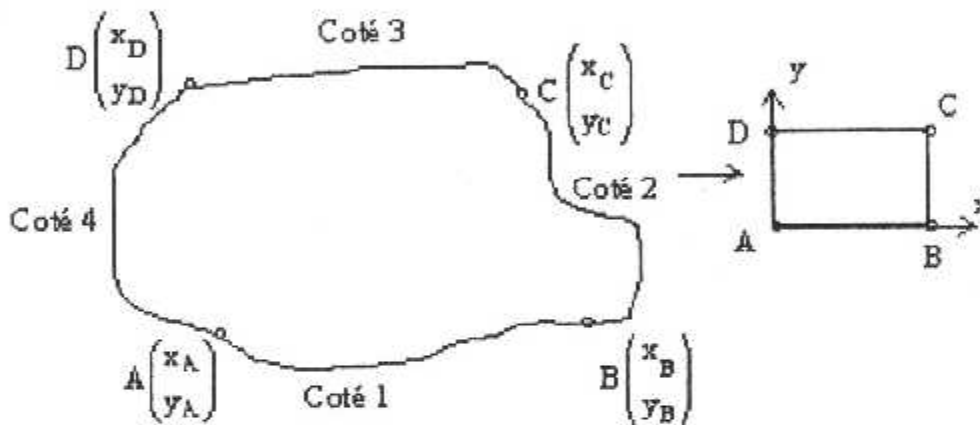


Fig IV.2 : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD, AB, BC et CD. Si on fait des transformations continues à chaque cotés, on peut les rendre des lignes de droites comme le montre la figure précédente. Alors les cotés AB et CD du domaine joueront les rôles respectifs des parties basse et haute du rectangle, et les cotés AD et BC sont les parties gauche et droite de celui-ci.

Pour ce rectangle, considérons les subdivisions  $N_x$  et  $N_y$  nœuds sur les axes horizontal des  $x$  et vertical des  $y$  respectivement. Par analogie, les cotés AB et CD du domaine seront subdivisés en  $N_x$  nœuds et les cotés AD et BC seront subdivisés en  $N_y$  nœuds. Pour cela, on procède à la génération suivant deux étapes principales. La première étape c'est la génération des nœuds de frontière de chaque cotés puis l'étape de génération des nœuds internes.

#### IV.3.1. Génération des nœuds sur le contour du domaine :

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque cotés. Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera applicable pour n'importe quelles courbes, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe

une procédure convenable, sans oublier de dire que le choix des points A, B, C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine.

Parmi les critères de choix des positions des points A, B, C et D est que les fonctions sur les cotés AB, BC, CD et DA doivent être univoques en x ou y, c'est-à-dire, pour chaque valeur de 'x' il y a une image sur les cotés AB et CD. En ce qui concerne les fonctions qui passent par les points AD et BC, elles doivent être aussi univoques mais en y.

Par exemple, la courbe suivante (Fig.IV-3) est multivoque en x et y. Dans ce cas, pour rendre les cotés univoques, il faut faire soit :

- Changer les positions des points A, et B.
  - Subdiviser le domaine en quelques blocs de telle sorte que les cotés soient univoques.
- Ici, il faut respecter la continuité de passage des nœuds entre les blocs.

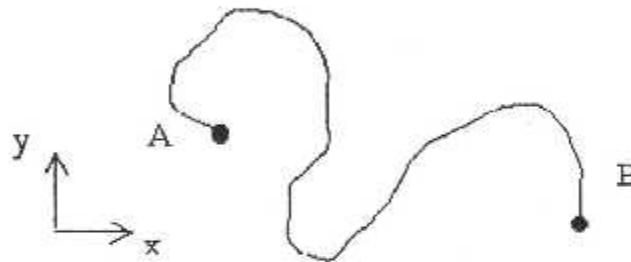


Fig. IV.3 : Courbe d'une fonction multivoque

Dans ce qui suit, on suppose que les fonctions des cotés choisies du domaine sont univoques. Considérons les cotés AB et CD. Les positions des points A, B, C et D sont données. On regarde ensuite est ce qu'on divise le segment  $[x_A, x_B]$  en  $N_x$  nœuds pour déterminer les  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,N_x$ ) correspondantes ou, on divise le segment  $[y_A, y_B]$  en  $N_x$  nœuds pour déterminer les  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,N_x$ ). Pour prendre une décision, on essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$x_{dis} = |x_B - x_A| \quad ; \quad y_{dis} = |y_B - y_A| \quad (IV.1)$$

On calcul la valeur maximale entre  $x_{dis}$  et  $y_{dis}$  par :  $d_{max} = \text{Max}(x_{dis}, y_{dis})$  (IV.2)

Si  $d_{max} = x_{dis}$  : on propose les valeurs des  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,N_x$ ) ensuite on détermine les  $y_i$  en utilisant la fonction qui passe par les points A et B du coté AB. Dans certain cas, pour prendre décision, il est mieux de voir encore si la fonction est donnée par  $y = f_{AB}(x)$  ou  $x = g_{AB}(y)$  pour ne pas calculer la fonction inverse.

On suppose qu'on a fait le choix des  $x_i$ , alors, on calculé les  $y_i$  et puis, on divise le segment  $[x_A, x_B]$  en  $N_x$  nœuds dont les points A et B sont inclus.

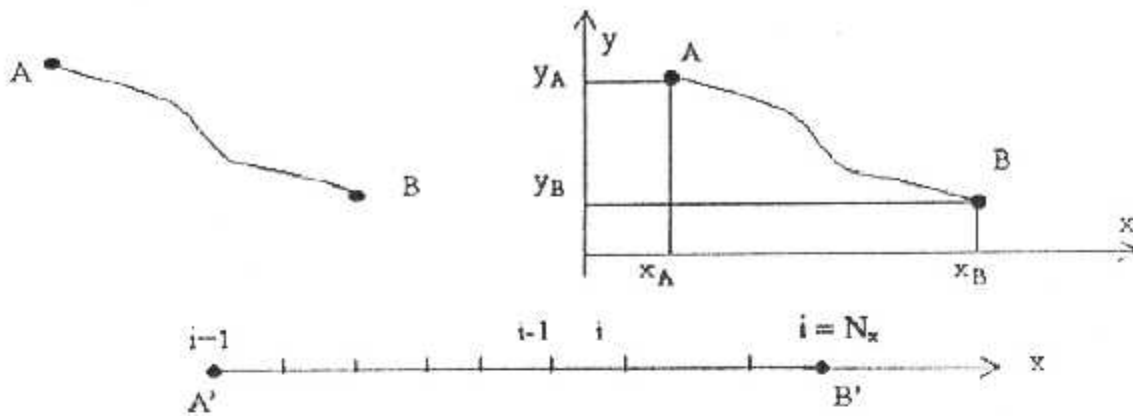


Fig. IV.4 : Discretisation sur le côté AB.

Avec : A' et B' les projections des points A et B respectivement sur l'axe horizontal des x.

Pour simplifier, on choisit un pas constant de subdivision et si le côté est courbé au voisinage du point A ou B ou n'importe quelle région, il est recommandé d'utiliser une procédure de condensation des nœuds, dont on propose sa procédure dans un prochain paragraphe. On obtient, par conséquent  $(N_x - 1)$  sous intervalles. La longueur de chaque intervalle est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(N_x - 1)} \tag{IV.3}$$

Les abscisses des points de ce côté sont données par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i-1)\Delta x_{AB} \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \tag{IV.4}$$

avec :

$$\begin{aligned} i=1 & \quad ; \quad x_{AB}(i=1) = x_A \\ i=N_x & \quad ; \quad x_{AB}(i=N_x) = x_B \end{aligned}$$

Les ordonnées des points sont données par :

$$y_{AB}(i) = f_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \tag{IV.5}$$

Où  $f_{AB}(x)$  : La fonction du côté AB supposée donné en coordonnées cartésiennes.

Concernant maintenant le côté CD et par analogie avec le côté AB, on aura le suivant en changeant uniquement A par D, B par C et  $f_{AB}(x)$  par  $f_{DC}(x)$ .

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des côtés AB et DC. Ici suivant la disposition de ces côtés. Si  $x_A \neq x_D$  et  $x_D \neq x_C$  en plus les deux fonctions sont univoques, on poursuivra exactement la démarche précédente pour les côtés AB et DC. On aura :

$$\Delta x_{AD} = \frac{|x_D - x_A|}{(N_x - 1)}$$

$$\left. \begin{aligned} x_{AD}(j) &= x_A + (j-1)\Delta x_{AD} \\ y_{AD}(j) &= F_{AD}(x_{AD}(j)) \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV.6)$$

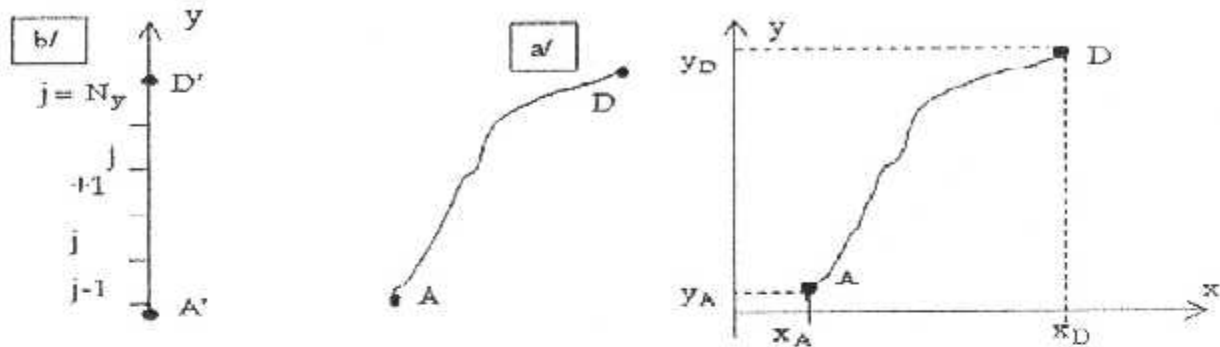


Fig. IV.5 a,b : Discretisation sur le coté AD

Mais si  $x_A = x_D$ , l'algorithme (IV.6) ne marche plus et on procede comme suit :

On divise le segment  $[y_A, y_D]$  en  $N_y$  nœuds dont les points A et D sont inclus comme le montre la figure IV.5b. Avec: A' et D' sont projections des points A et D sur l'axe des ordonnées.

Alors: 
$$\Delta y_{AD} = \frac{|y_D - y_A|}{(N_y - 1)} \quad (IV.7)$$

Les coordonnées des points de ce coté sont données par :

$$\left. \begin{aligned} y_{AD}(j) &= y_A + (j-1)\Delta y_{AD} \\ x_{AD}(j) &= F_{AD}^{-1}(y_{AD}(j)) \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV.8)$$

avec :  $F_{AD}^{-1}(y)$ : la fonction inverse du coté AD.

Pour déterminer la racine de la fonction inverse si  $f_{AD}(y)$  est implicite on utilise l'algorithme de Dichotomie par exemple (ou de Newton).

Après avoir généré les nœuds sur la frontière on obtient le schéma de la figure (IV-6).

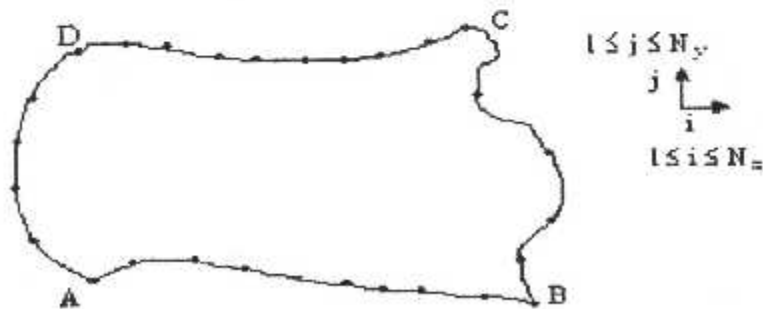


Fig.IV.6 : Génération des nœuds sur la frontière du domaine (10x6)

On note ici que, entre chaque deux nœuds successifs sur un coté on assimile la courbure de la frontière à un segment de droite. L'exemple suivant sur cette figure est pour  $N_x = 10$  et  $N_y = 6$ .

Finalement, Il est à noter aussi qu'on a fait le stockage des positions des nœuds de frontière dans les vecteurs uni-colonnes  $X(NNT)$  et  $Y(NNT)$  par la position 'L'. L'algorithme déterminant ces positions en fonction des vecteurs de quatre cotés est présenté comme suit :

```

DIMENSION nn(6)
C *****
  NX=NNX      ;      NY=NNY
  IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6)THEN
    NX=2*NNX-1      ;      NY=2*NNY-1
  ENDIF
  nn(1)=NX          ;      nn(2)=(3*NX)-2
  nn(3)=(NX)        ;      nn(4)=(NX)
  nn(5)=(2*NX)-1    ;      nn(6)=(NX)
  lpas=1
  IF(NTEF.EQ.3.OR.NTEF.EQ.6) lpas=2 ! le pas de la boucle
C *****
C   REMPLISSAGES DES POSITIONS DES COTES DANS LES VECTEURS X ET Y.
C   LES COTES BASSES ET HAUTES DANS LES COTE1 ET COTE3
DO 123 I=1, NX
  X(I)=XCOTE1(I) ; Y(I)=YCOTE1(I)
  ICL(I)=1
  L=(NY-1)*nn(NTEF)+I
  IF(NTEF.EQ.6) L=(NY-1)*nn(NTEF)-NEL+I
  ICL(L)=1
  X(L)=XCOTE3(I) ; Y(L)=YCOTE3(I)
123 CONTINUE
C   LES COTES GAUCHE ET DROITE DANS COTE2 ET COTE4
DO 124 J=2, NY-1
  L=(J-1)*nn(NTEF)+1
  IF(NTEF.EQ.6) L=(j-1)*nn(NTEF)+1-((NNX-1)*(j+1)/2-1)
  X(L)=XCOTE4(J) ; Y(L)=YCOTE4(J)
  ICL(L)=1
  L=(J-1)*nn(NTEF)+NX
  IF(NTEF.EQ.6) L=(j)*nn(NTEF)-((NNX-1)*(j+2)/2-1)
  X(L)=XCOTE2(J) ; Y(L)=YCOTE2(J)
  ICL(L)=1
124 CONTINUE

```

#### IV.3.2. Génération des nœuds internes pour maillage de type "H" :

Après avoir déterminé les positions des nœuds de la frontière du domaine, on procède maintenant à la présentation de la méthode développée pour la génération des nœuds internes. Le maillage obtenu pour cette partie est de type "H".

On obtient des petites cellules ou domaines de formes quadrilatères. Chaque nœud est caractérisé par deux valeurs  $x$  et  $y$  qui permettent de déterminer sa position dans le domaine. La procédure qu'on présente, est divisée en deux étapes. La première consiste à déterminer les *abscisses*  $x_i$  de tous les points, et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite. Une fois les abscisses sont obtenues, on procède en deuxième étape à la détermination des *ordonnées*  $y_i$  de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine.

En effet, comme le nombre de nœuds sur les cotés gauche et droite égal à  $N_y$ , alors, à chaque nœud d'un côté sera relié avec un nœud de l'autre côté par une courbe qui contient  $N_x$  nœuds, dont les extrémités sont incluses, voir figure (IV-7a)

Pour déterminer les abscisses des nœuds sur la courbe FG on s'intéresse uniquement aux abscisses des nœuds des extrémités gauche et droite qui sont connues. La projection de la courbe reliant les points F et G sur l'axe horizontal donne un segment de droite comme l'illustre la figure suivante (IV-7b) :

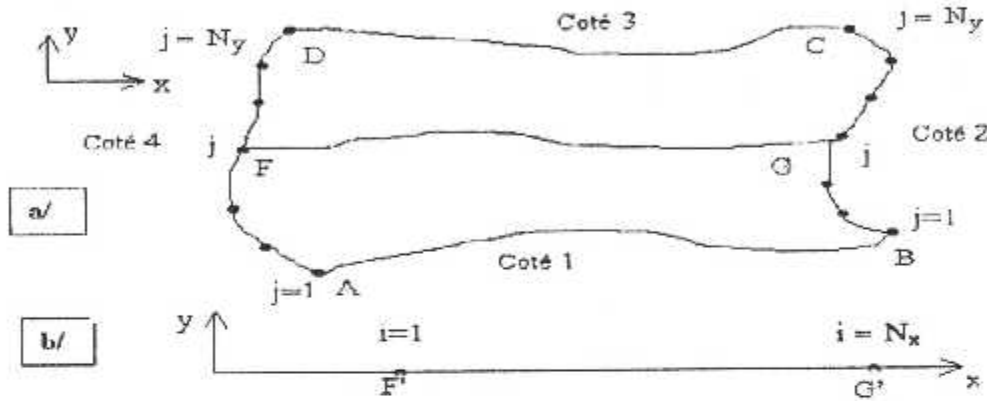


Fig. IV.7 a,b : Illustration de la procédure de détermination des abscisses

En divisant le segment  $F'G'$  en  $N_x$  points dont ceux des extrémités sont inclus, on obtient par conséquent  $(N_x - 1)$  intervalles égaux. L'abscisse de chaque point sur cet intervalle (et par suite sur la courbe FG) est obtenue par :

$$x_i = x_f + (i-1) \cdot \Delta x \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \quad \text{avec :} \quad \Delta x = \frac{x_G - x_F}{(N_x - 1)} \quad (IV.9)$$

En faisant varier le point F sur le côté gauche de point A jusqu'au point D et de même pour le point G du côté droite, on passe du point B jusqu'au point C, on obtient les abscisses des nœuds d'autres courbes en faisant l'extension de la relation (IV-9) par :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(j) &= \frac{x_{\text{côté 2}}(j) - x_{\text{côté 4}}(j)}{(N_x - 1)} \\ x(i) &= x_{\text{côté 4}}(j) + (i-1) \cdot \Delta x(j) \quad i=1, 2, 3, \dots, N_x \end{aligned} \right\} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad (IV.10)$$

La deuxième étape consiste à déterminer les ordonnées des nœuds internes en utilisant par conséquent l'interpolation linéaire entre le côté 3 du haut et le côté 1 du bas (voir figure IV-8a).

La projection de la courbe reliant les points H et R sur l'axe vertical des y donne un segment de droite. Avec R' et H' sont les projections respectivement des points R et H sur l'axe des ordonnées (voir figure IV-8b).



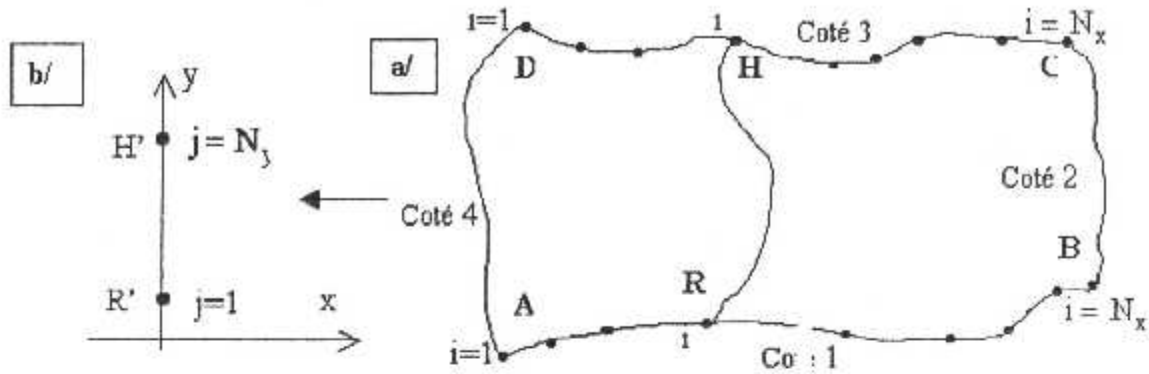


Fig. IV-8 a,b : Illustration de la procédure de détermination des ordonnées

Comme chaque courbe contient  $N_y$  nœuds, alors, chaque segment contient  $N_y$  nœuds. On divise ce dernier en  $(N_y - 1)$  intervalles égaux, l'ordonnée de chaque nœud est donnée par :

$$y_j = y_R + (j-1) \cdot \Delta y \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \quad \text{avec :} \quad \Delta y = \frac{y_H - y_R}{(N_y - 1)} \quad (IV-11)$$

En faisant varier maintenant le point R sur le côté 1 du bas et le point H sur le côté 3 du haut, on obtient des autres courbes dont les ordonnées de ces nœuds sont données par le système suivant par l'extension de la relation (IV-11).

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(i) &= \frac{x_{\text{coté 3}}(i) - x_{\text{coté 1}}(i)}{(N_y - 1)} \\ y(j) &= y_{\text{coté 1}}(i) + (j-1) \cdot \Delta y(i) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_x \quad (IV-12)$$

Finalement, les relations (IV-10) et (IV-12) déterminent rapidement les positions des nœuds internes du maillage qui représentent les sommets des éléments finis obtenus, or pour les positions des nœuds des milieux des côtés et aux centres des surfaces des éléments finis, on a développé pour le calcul de leurs positions des corrélations en fonction des coordonnées des sommets de chaque élément fini et en fonction de son type qui soit triangulaire à 3, 4... nœuds ou quadrilatère à 4, 5... nœuds. De la, on montrera dans la suite ces relations selon chaque cas (type d'élément fini) avec les affectations directes dans les vecteurs coordonnées X et Y par une partie du programme de la sous-routine SUTGEOM. Tel qu'on a fait le stockage des positions de ces nœuds internes dans les vecteurs unis X(NNT) et Y(NNT) par la position 'L' et non des matrices à deux colonnes, comme indiqué précédemment pour les nœuds de frontières.

```

c DETERMINATION DE COORDONNEES DES NOEUDS DES SOMMETS INTERNES
  GOTO (10,10,10,10,10,200) NTEF
c ***** cas de NTEF=1 ou =3 ou =4 et une partie de 2 et 5 *****
10 DO 30 J=2, NY-1
    DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1) ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)
    DO 30 I=2, NX-1
        DYI=(YCOTE3(I)-YCOTE1(I))/(NY-1)
        L=JJ+I
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ
30 Y(L)=YCOTE1(I)+(J-1)*DYI
    IF(NTEF.EQ.2) GOTO 40
    IF(NTEF.EQ.3) GOTO 250
    IF(NTEF.EQ.5) GOTO 60
    GOTO 500

c DETERMINATION DE COORDONNEES DES NOEUDS INTERNES INTERMEDIAIRES
c ***** cas de NTEF=2 (la suite) *****
40 DO 50 j=1,ny-1
    jj=(j-1)*nn(NTEF)
    DO 50 i=1,nx-1
        I1=i+jj ; I2=I1+nx+i-1
        I3=I2+1 ; I4=I1-1
        X(I)=(X(I1)+X(I2)+X(I3))/3. ; Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3))/3.
        X(I+1)=(X(I1)+X(I3)+X(I4))/3 ; Y(L+1)=(Y(I1)+Y(I4)+Y(I3))/3.
50 CONTINUE
    GOTO 500

c ***** cas de NTEF=5 (la suite) *****
60 DO 120 j=1,ny-1
    jj=(j-1)*nn(NTEF)
    DO 120 i=1,nx-1
        I1=i+(jj) ; I2=I1+1 ; L=I1+nx ; I3=L+nx-1 ; I4=I3+1
        X(L)=(X(I1)+X(I2)+X(I3)+X(I4))/4.
120 Y(L)=(Y(I1)+Y(I2)+Y(I3)+Y(I4))/4.
    GOTO 500

c ***** les sommets --- cas de NTEF=6 *****
200 DO 210 J=3, NY-1, lpas
    DXJ=(XCOTE2(J)-XCOTE4(J))/(NX-1) ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((j+1)/2-1))
    DO 210 I=2, NNX-1
        ii=2*I-1 ; DYI=(YCOTE3(ii)-YCOTE1(ii))/(NY-1)
        L=JJ+ii
        X(L)=XCOTE4(J)+(I-1)*DXJ*2 ; Y(L)=YCOTE1(I1)+(J-1)*DYI
210 CONTINUE

c ***** Les nœuds internes intermédiaires NTEF=6 *****
DO 240 J=2,NY-1
    JJ=(J-1)*nn(NTEF)-((NNX-1)*((j+1)/2-1))
    IF(MOD(j,2).NE.0) GOTO 220
    DO 215 I=2,NNX-1
        ii=2*I-1 ; L=JJ+I ; L1=JJ-NX+ii ; L2=L1+2*nx-(NNX-1)
        X(L)=(X(L1)+X(L2))/2. ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.
215 CONTINUE
    GOTO 240
220 DO 230 I=2,NX-1,lpas
    L=JJ+I
    X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2. ; Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.
230 CONTINUE
240 CONTINUE
    GOTO 500

c ***** cas de NTEF=3 (la suite) *****
c Les nœuds internes intermédiaires
250 DO 300 J=2, NY-1 ; JJ=(J-1)*nn(NTEF)
    IF(MOD(j,2).NE.0) GOTO 280
    DO 260 I=2,NX-1

```

```

L=JJ+1 ; L1=L-NX-1 ; L2=L1+2*nx+2
IF(MOD(i,2).EQ.0) THEN
  X(L)=(X(L1)+X(L2))/2. ; Y(L)=(Y(L1)+Y(L2))/2.
ELSE
  X(L)=(X(L1+1)+X(L2-1))/2. ; Y(L)=(Y(L1+1)+Y(L2-1))/2.
ENDIF
260 CONTINUE
GOTO 300
280 DO 290 I=2, NX-1, Ipas
  L=JJ+1
  X(L)=(X(L-1)+X(L+1))/2. ; Y(L)=(Y(L-1)+Y(L+1))/2.
290 CONTINUE
300 CONTINUE
GOTO 500
    
```

**IV.3.3. Connexion des nœuds du maillage de type "H" :**

Après avoir fait la discrétisation type H du domaine en petits éléments, on obtient un ensemble de nœuds et d'éléments finis quadrilatères. Pour avoir les éléments triangulaires, on procède à la division de chaque élément quadrilatère en deux sous éléments triangulaires comme le montre la figure III.6 du paragraphe III.7.2.

Chaque élément a sa propre matrice de rigidité  $[K^{(e)}]$  et son vecteur force  $\{f^{(e)}\}$ . Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet, où le principe est donné dans le paragraphe § III.8 du chapitre (III). Pour arriver aux résultats, il faut connaître les numéros globaux des nœuds locaux de chaque élément. Pour cela, on déclare une matrice de connexion d'ordre  $(NEL \times NNPE)$  pour les éléments obtenus qui ont NNPE nœuds. On désigne cette matrice par NNE.

On note que la numérotation optée est donnée selon la condition que la largeur de la demi-bande soit minimale pour le stockage type Matrice bande ou une numérotation quelconque pour le stockage type Matrice creuse (complexe). Le problème de l'influence de cette numérotation sera exposé en détaille au prochain chapitre lorsqu'on aborde le problème de stockage.

Dans la suite, on donne un exemple de numérotation d'un maillage rectangulaire de dimension  $Nx \times Ny = 6 \times 4$ , qui a des éléments triangulaires à trois nœuds (T3N). La matrice NNE( $NEL, 3$ ) sera rempli de la façon suivante, tel que la numérotation interne d'élément est de direction anti-horaire :

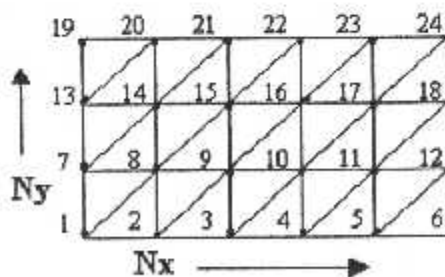


Fig.IV-9 a: Discretisation en éléments triangulaires et numérotation des nœuds

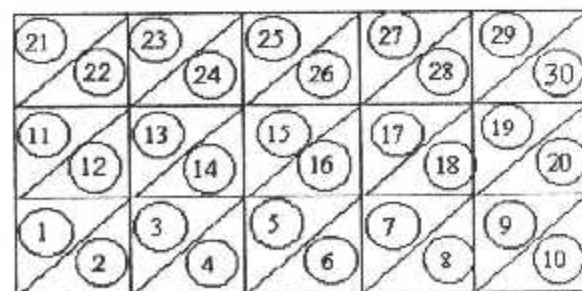


Fig.IV-9 b: Numérotation des éléments

NEL	NNE(NEL,3)		
	1	2	3
1	1	8	7
2	1	2	8
3	2	9	8
4	2	3	9
5	3	10	9
6	3	4	10
7	4	11	10
8	4	5	9
9	5	6	11
10	6	12	11
11	7	14	13
12	7	8	14
13	8	15	14
14	8	9	15
15	9	16	15
16	9	10	16
17	10	17	16
18	10	11	17
19	11	18	17
20	11	12	18
...	...	...	...

Tableau IV.1 : Remplissage de la matrice NNE (NEL,3)

Les trois valeurs de chaque ligne du vecteur NNE(NEL,3) représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'introduction des conditions aux limites. Par exemple pour la ligne 14, on a l'élément triangulaire numéro 14 a les trois nœuds de numéros 8, 9 et 15 dans le sens anti-horaire. Autrement dit, le nœud local 1 de ce triangle est égale à 8 global du domaine. On peut prendre le nœud local 1 égale à 9 ou 15, mais il faut que les trois numéros permutent dans le sens anti-horaire.

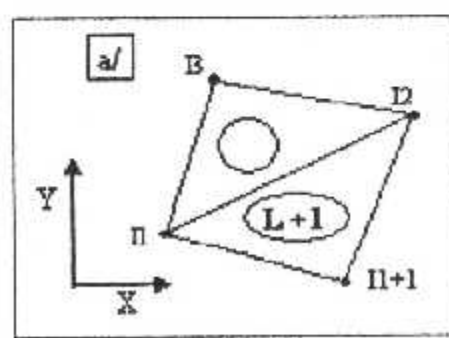
Si la numérotation des nœuds est aléatoire, le remplissage de cette matrice sera d'une façon manuel, vu l'inexistence d'une formule de récurrence.

Dans le cas général pour tous les types d'éléments fini, on propose le programme suivant permettant le remplissage du vecteur NNE(NEL,NNPE), en donnant uniquement le nombre de nœuds  $N_x$  et  $N_y$  (noté par NNX et NNY) et le type NTEF. Pour plus d'illustration, ajoutons les figures correspondantes.

```

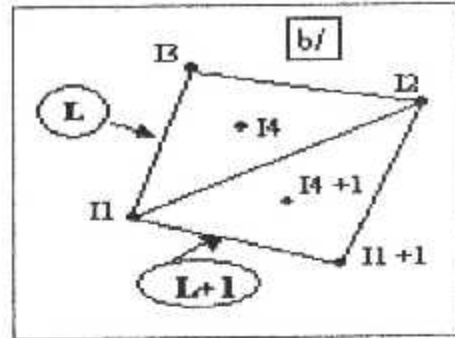
L=1
N1=nnx-1
N2=nnx+1
GOTO (5,15,25,35,45,55), NTEF
c ----- NTEF - 1 ----- (T3N) -----
5 DO 10 J=1,NNY-1
  I1=(J-1)*(N1)+J
  DO 10 I=1,N1
    I2=I1+N2
    I3=I2-1
    NNE(L,1)=I1 ; NNE(L,2)=I2 ; NNE(L,3)=I3
    NNE(L+1,1)=I1 ; NNE(L+1,2)=I1+1 ; NNE(L+1,3)=I2
    L=L+2
10 I1=I1+1
GOTO 700
    
```

Fig. IV-10 (a,b,c,d,e & f) connexion type 'H'



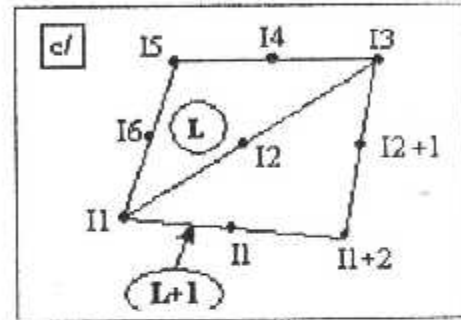
```

c ----- NTEF=2 ----- = (I4N) -----
15 DO 20 J=1,NNY-1
    I1=(J-1)*(N1)*3+J
    DO 20 I=1,N1
        I2=I1+N2+(N1)*2
        I3=I2-1          ;   I4=N1+I1+1
        NNE(L,1)=I1      ;   NNE(L,2)=I2
        NNE(L,3)=I3      ;   NNE(L,4)=I4
        NNE(L+1,1)=I1    ;   NNE(L+1,2)=I1+1
        NNE(L+1,3)=I2    ;   NNE(L+1,4)=I4+1
        L=L+2
    20 I1=I1+1
    GOTO 700
    
```



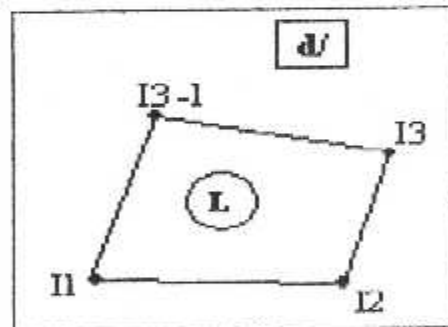
```

c ----- NTEF=3 ----- = (I6N) -----
25 n3=4*NNX-2
    n4=2*NNX
    DO 30 J=1,NNY-1
        I1=(J-1)*(n3)+1
        DO 30 I=1,N1
            I2=I1+n4      ;   I3=I2+n4
            I4=I3-1      ;   I5=I4-1
            I6=I2-1
            NNE(L,1)=I1    ;   NNE(L,2)=I3
            NNE(L,3)=I5    ;   NNE(L,4)=I2
            NNE(L,5)=I4    ;   NNE(L,6)=I6
            NNE(L+1,1)=I1  ;   NNE(L+1,4)=I1+1
            NNE(L+1,2)=I1+2 ;   NNE(L+1,5)=I2+1
            NNE(L+1,3)=I3  ;   NNE(L+1,6)=I2
            L=L+2
        30 I1=I1+2
        GOTO 700
    
```



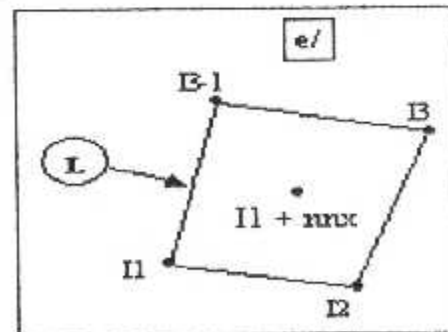
```

c ----- NTEF=4 ----- = (Q4N) -----
35 L=1
    DO 40 J=1,NNY-1
        I1=(J-1)*(N1)+J
        I2=I1+1
        DO 40 I=1,N1
            I3=I1+N2
            NNE(L,1)=I1    ;   NNE(L,2)=I2
            NNE(L,3)=I3    ;   NNE(L,4)=I3-1
            L=L+1          ;   I1=I1+1
        40 I2=I1+1
        GOTO 700
    
```



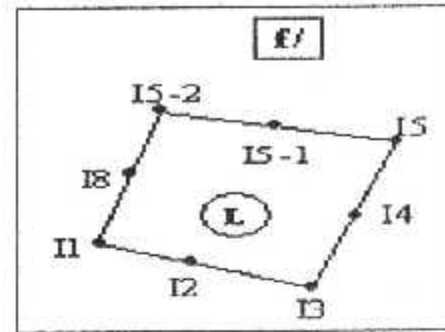
```

c ----- NTEF=5 ----- = (Q5N) -----
45 n3=2*N1
    DO 50 J=1,NNY-1
        DO 50 I=1,N1
            I3=I1+2*NNX
            NNE(L,1)=I1    ;   NNE(L,2)=I2
            NNE(L,3)=I3    ;   NNE(L,4)=I3-1
            NNE(L,5)=I1+NNX
            L=L+1          ;   I1=I1+1
        50 I2=I1+1
        GOTO 700
    
```



```

c ----- NTEF=6 ----- = (Q8N) -----
55 n3=(3*NNX-1)
   DO 60 J=1,NNY-1
     I1=(J-1)*(n3)+1 ; I2=I1+1
     DO 60 I=1,N1
       I3=I1+2 ; I4= I1+2*NNX-(I-1)
       I5=I1+3*NNX+1 ; I8= I1+2*NNX-I-(I-1)
       NNE(L,1)=I1 ; NNE(L,5)=I2
       NNE(L,2)=I3 ; NNE(L,6)=I4
       NNE(L,3)=I5 ; NNE(L,7)=I5-1
       NNE(L,4)=I5-2 ; NNE(L,8)=I8
       L=L+1
       I1=I1+2 ; I2=I1+1
60 CONTINUE
...
    
```



Rappelant que le principe de ces correspondances entre les nœuds locaux et globaux avec un tableau est montré au paragraphe III-8 (tableau N°1).

**IV.3.4 filtrage des nœuds internes :**

Il est parfois très efficace d'utiliser une option appelée filtrage des nœuds. Dans certain cas, la procédure de condensation des nœuds ne permet pas une bonne répartition de ces derniers dans des régions où la solution à recherché demande un grand recombement des nœuds, surtout devant les frontières, au voisinage d'une grande courbure, ou un grand gradient de variation de la solution du problème.

La technique de filtrage utilisée par pas mal d'auteurs est donnée dans le cas général par l'algorithme suivant:

$$\begin{aligned}
 x_i^{nouveau} &= x_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (x_k^{ancien} - x_i^{ancien}) \\
 y_i^{nouveau} &= y_i^{ancien} - \frac{\omega}{m} \sum_{k=1}^{k=m} (y_k^{ancien} - y_i^{ancien})
 \end{aligned}
 \tag{IV.13}$$

- avec m : le nombre de nœuds qui sont reliés par une arête avec le nœud de numéro 'i' à filtrer.
- ω : Facteur de relaxation compris 0 < ω < 1.
- (x<sub>k</sub>, y<sub>k</sub>) : k = 1, 2, 3, ..., m : les positions des 'm' nœuds reliés avec le nœud 'i'

L'algorithme (IV.13), à refaire entre 20 jusqu'à 100 itérations. On peut même aller à 2000 itérations, à savoir la forme finale du maillage obtenu.

Pour le maillage de type 'H' et élément fini triangulaire à trois nœuds, chaque nœuds interne est relié avec six (06) nœuds, donc m=6. Alors la relation (IV.13) sera donc adaptée comme suit :

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}^{\text{nouveau}} &= x_{i,j}^{\text{ancien}} + \frac{\omega}{6} \left( x_{i-1,j-1}^{\text{ancien}} + x_{i,j-1}^{\text{ancien}} + x_{i,j+1}^{\text{ancien}} + \right. \\
 &\quad \left. x_{i+1,j+1}^{\text{ancien}} + x_{i+1,j}^{\text{ancien}} + x_{i-1,j}^{\text{ancien}} - 6 x_{i,j}^{\text{ancien}} \right) \\
 y_{i,j}^{\text{nouveau}} &= y_{i,j}^{\text{ancien}} + \frac{\omega}{6} \left( y_{i-1,j-1}^{\text{ancien}} + y_{i,j-1}^{\text{ancien}} + y_{i,j+1}^{\text{ancien}} + \right. \\
 &\quad \left. y_{i+1,j+1}^{\text{ancien}} + y_{i+1,j}^{\text{ancien}} + y_{i-1,j}^{\text{ancien}} - 6 y_{i,j}^{\text{ancien}} \right)
 \end{aligned}
 \quad \begin{cases} i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{cases}
 \quad (IV.14)$$

Il est à noter que le stockage des positions des nœuds dans des vecteurs uni-colonnes  $x(L)$  et  $y(L)$  est fait par la position 'L' et non par des matrices à deux colonnes 'i, j'. Les indices des systèmes (IV.13, IV.14) sont donnés juste pour illustration. Donc, les expressions qui servent à la programmation sont données selon le type de chaque élément fini dans la suite. Tel que, on note les nouvelles valeurs de  $x(L)$  et  $y(L)$  par les vecteurs  $xn(L)$  et  $yn(L)$ .

Pour T3N, on a (Figure IV.11a) :

$$\begin{aligned}
 xn(L) &= x(L) + \frac{\omega}{6} (XSOM - 6.x(L)) \\
 yn(L) &= y(L) + \frac{\omega}{6} (YSOM - 6.y(L))
 \end{aligned}
 \quad \begin{cases} i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{cases}
 \quad (IV.15)$$

Tel que :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6) \\
 L &= i + N_x(j-1) \\
 I1 &= i - 1 + (j-2)N_x \quad ; \quad I2 = I1 + 1 \quad ; \quad I3 = L - 1 \\
 I4 &= L + 1 \quad ; \quad I5 = i + j.N_x \quad ; \quad I6 = I5 + 1
 \end{aligned}$$

Pour l'élément fini triangulaire à quatre nœuds T4N, on a pour les nœuds des sommets  $m=6$  :

$$\begin{aligned}
 XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\
 YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6)
 \end{aligned}
 \quad (IV.16)$$

$$\begin{aligned}
 L &= i + (3N_x - 2)(j - 1) \\
 I1 &= i - 1 + (j - 2)(3N_x - 2) \quad I2 = I1 + 1 \quad I3 = L - 1 \\
 I4 &= L + 1 \quad I5 = i + j(3N_x - 2) \quad I6 = I5 + 1
 \end{aligned}
 \quad \begin{cases} i = 2, 3, 4, \dots, N_x - 1 \\ j = 2, 3, 4, \dots, N_y - 1 \end{cases}$$

Et pour les nœuds des milieux des triangles, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes de génération des maillages du paragraphe IV.3.2, voir figure (IV.11.b).

Pour l'élément fini triangulaire à six nœuds T6N, on a pour les nœuds des sommets  $m=6$  :

$$\begin{aligned} XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) + x(I5) + x(I6) \\ YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) + y(I5) + y(I6) \end{aligned} \tag{IV.17}$$

$$\begin{aligned} L &= i + (2N_x - 1)(j - 1) \\ I1 &= i - 2 + (j - 3)(2N_x - 1) & I2 &= I1 + 1 & I3 &= L - 1 \\ I4 &= L + 1 & I5 &= i + (j + 1)(2N_x - 1) & I6 &= I5 + 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} i=3,5,7,\dots,2N_x-3 & \text{pas}=2 \\ j=3,5,7,\dots,2N_x-3 & \text{pas}=2 \end{cases}$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes (figure IV.11.c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme le montre les algorithmes de génération des maillages du paragraphe IV.3.2.

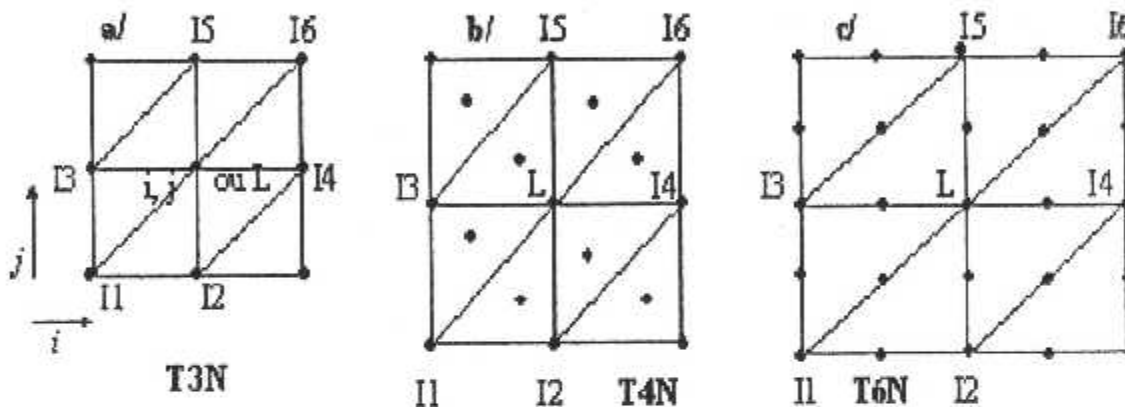


Fig.IV.11. a,b,c : les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments triangulaire

Pour l'élément fini quadrilatère à quatre nœuds Q4N, on a  $m=4$  (voir figure IV.12.a), donc :

$$\begin{aligned} xn(L) &= x(L) + \frac{\omega}{4} (XSOM - 4 \cdot x(L)) \\ yn(L) &= y(L) + \frac{\omega}{4} (YSOM - 4 \cdot y(L)) \end{aligned} \quad \begin{cases} i=2,3,4,\dots,N_x-1 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \end{cases} \tag{IV.18}$$

tel que :

$$\begin{aligned} XSOM &= x(I1) + x(I2) + x(I3) + x(I4) \\ YSOM &= y(I1) + y(I2) + y(I3) + y(I4) \end{aligned}$$

$$L = i + N_x(j - 1) \quad ; \quad I1 = i + (j - 2)N_x \quad ; \quad I2 = L - 1 \quad ; \quad I3 = L + 1 \quad ; \quad I4 = L + N_x$$

Pour l'élément fini quadrilatère à cinq nœuds Q5N, on a pour les nœuds des sommets  $m = 4$  (voir figure IV.12.b), alors :

$$\begin{aligned} L &= i + (2N_x - 1)(j - 1) \\ I1 &= i - 1 + (j - 2)(2N_x - 1) & I2 &= I1 + 1 \\ I3 &= L + 1 & I4 &= L + (2N_x - 1) \end{aligned} \quad \begin{cases} i=2,3,4,\dots,N_x-1 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \end{cases} \tag{IV.19}$$



Pour les nœuds des milieux des quadrilatères, on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets, comme le montre les algorithmes du paragraphe IV.3.2.

Pour l'élément fini quadrilatère à huit nœuds Q8N, on a pour les nœuds des sommets  $m=4$  :

$$\begin{aligned}
 &L = i + (3N_x - 1)(j - 1) \\
 &I1 = i - 2 + (j - 2)(3N_x - 1) \quad I2 = L - 2 \\
 &I3 = L + 2 \quad I4 = i + (j)(3N_x - 1)
 \end{aligned}
 \quad \left\{ \begin{array}{l} i=3,5,7,\dots,2N_x-3 \quad \text{pas}=2 \\ j=2,3,4,\dots,N_y-1 \quad \text{pas}=1 \end{array} \right. \quad (IV.20)$$

Et pour les nœuds des milieux des arêtes (figure IV-12.c), on reprend le calcul des moyennes des coordonnées des nœuds des sommets de chaque arête, comme suit :

$$x_n(k) = (x(I1) + x(I2))/2 \quad , \quad y_n(k) = (y(I1) + y(I2))/2 \quad (IV.21)$$

Tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } (j) \text{ est impaire : } k = i + \frac{(j-1)}{2} \cdot (3 \cdot N_x - 1) \quad i=2,4,6,\dots,2N_x-2 \quad \text{pas}=2 \\ \quad \quad \quad I1=L-1 \quad ; \quad I2=L+1 \\ \text{Si } (j) \text{ est paire : } \quad k = i + \frac{j}{2} \cdot (3 \cdot N_x - 1) - N_x \quad i=2,3,4,\dots,N_x-1 \quad \text{pas}=1 \\ \quad \quad \quad I1=L-2N_x+i \quad ; \quad I2=I1+(3 \cdot N_x - 1) \end{array} \right\} j = 2,3,\dots,2N_y-1$$

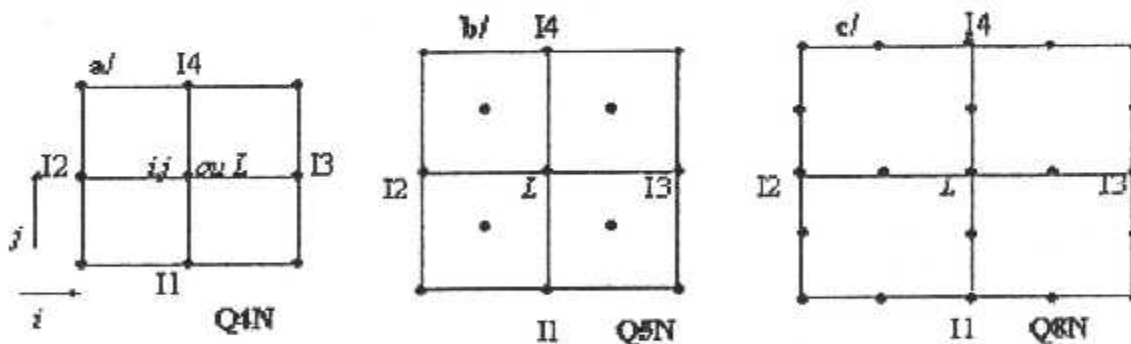


Fig.IV.12.a,b,c : Les indices des formules de filtrage pour les nœuds internes des éléments quadrilatères.

# *CHAPITRE V*

## *Résolution numérique et programmation*

## CHAPITRE V

### Résolution numérique et programmation

#### V.1. Introduction :

Cette partie est la plus importante, elle consiste à résoudre le problème numériquement. Pour cela, on applique une méthode de stockage bande dans un vecteur  $\{V\}$  uni-colonne représentant la matrice de rigidité fictive, qui donne l'équivalence de la matrice  $[K]$ , tel qu'on suit une procédure de récurrence la plus efficace. Puisque le travail sur la méthode des éléments finis a abouti sur des matrices  $[K]$  symétrique et bande, ces deux propriétés ont conduit à stocker la partie supérieure (ou inférieure) de la matrice, en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande.

En résumé, à chaque fois qu'on se positionne sur une case de la matrice  $K(i,j)$ , la méthode donne sa position dans le vecteur  $\{V\}$  à base de certaines formules qui varie suivant la méthode de stockage, dont ils seront donner par la suite.

- Si on se trouve au-dessus de la diagonale (partie supérieure) et à l'extérieur de la bande, le calcul sera ignoré puisque cette case est réellement nulle.
- Si on se trouve au-dessous de la diagonale (partie inférieure) il suffit uniquement d'utiliser la propriété de la symétrie ( $K(i,j) = K(j,i)$ ) et le traitement se fait comme étant une case  $K(i,j)$ .

Puis, on passe à la résolution du système d'équation obtenu en utilisant une méthode directe (la méthode de *KHALESTKI* qu'on adapte pour des matrices bandes et symétriques).

#### V.2. Méthodes de stockage des matrices bandes dans un vecteur :

Considérons une matrice  $[K]$  d'ordre  $(N \times N)$  symétrique et bande avec la largeur de la demi-bande est  $B$ . Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur  $\{V_k\}$ . Il est parfois difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice  $[K]$  et la case du vecteur, ce qui a supposé plusieurs formes de stockages sous forme de vecteur. Ces formes de stockages sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence convenable.

Alors, on va proposer cinq (5) formes de stockage en prenant une matrice  $[K]$  d'ordre  $(7 \times 7)$  symétrique et sa bande  $B$  est égale à 4, et cela pour fixer les idées. Ces formes sont : le stockage en colonne, en diagonal, en ligne, en ligne de serpent, en escalier.

##### V.2.1. Stockage en colonne :

La méthode de stockage choisie est représentée par la direction des flèches. C'est-à-dire colonne par colonne, comme le montre la figure (V.1) :

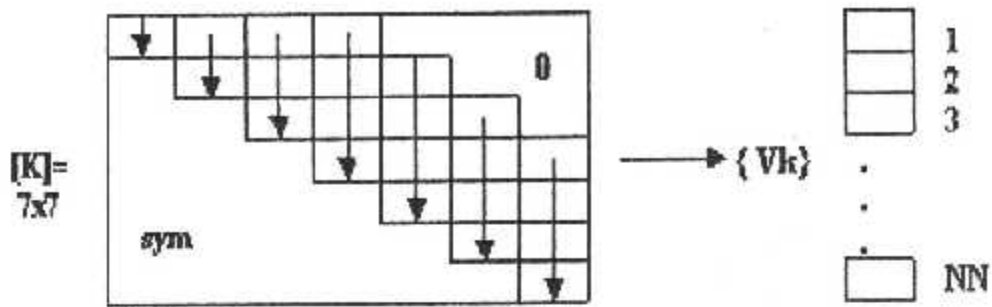


Fig.V.1 : Illustration de stockage en colonne

Tel que :

$V_k(1) = K(1,1)$	$V_k(2) = K(1,2)$	$V_k(3) = K(2,2)$	$V_k(4) = K(1,3)$
$V_k(5) = K(2,3)$	$V_k(6) = K(3,3)$	$V_k(7) = K(1,4)$	$V_k(8) = K(2,4)$
$V_k(9) = K(3,4)$	$V_k(10) = K(4,4)$	$V_k(11) = K(2,5)$	$V_k(12) = K(3,5)$
$V_k(13) = K(4,5)$	$V_k(14) = K(5,5)$	$V_k(15) = K(3,6)$	$V_k(16) = K(4,6)$
$V_k(17) = K(5,6)$	$V_k(18) = K(6,6)$	$V_k(19) = K(4,7)$	$V_k(20) = K(5,7)$
$V_k(21) = K(6,7)$	$V_k(22) = K(7,7)$		

On peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur  $\{V_k\}$  est égale à 22, c'est-à-dire  $NN=22$

Si on veut généraliser à une matrice  $[K]$  d'ordre  $(N \times N)$  symétrique, la dimension du vecteur  $\{V_k\}$  doit être égale à :

$$NN = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (N - B)B = \sum_{i=1}^{i=B} i + B(N - B)$$

Comme  $\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B+1)}{2}$  somme d'une suite arithmétique de raison unité, donc :

$$NN = \frac{B(B+1)}{2} + (N - B)B \Rightarrow NN = \frac{B(2N - B + 1)}{2} \tag{V.1}$$

On peut vérifier cette formule pour l'exemple précédent :

$$\begin{cases} N=7 \\ B=4 \end{cases} \rightarrow NN = \frac{4(2 \times 7 - 4 + 1)}{2} = 22$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de récurrence de stockage des éléments de la matrice  $[K]$  (les éléments de la bande uniquement) dans le vecteur  $\{V_k\}$ .

Pour cela on divise la matrice  $[K]$  en deux blocs.

1- Pour une case  $K(i,j)$  telle que  $j \leq B$ , son équivalence en position dans le vecteur  $V_k(L)$  est :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j - 1) + i = i + \frac{j(j-1)}{2}$$

Alors : 
$$L = i + \frac{j(j-1)}{2} \quad \text{si } j \leq B \quad (V.2)$$

On peu remarquer que le nombre  $(j - 1)j$  est un nombre pair

2- Pour une case  $K(i, j)$  telle que  $j > B$ , son équivalence en position dans le vecteur  $V_k(L)$  est :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (j - B - 1)B + i - (j - B) = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2}$$

Alors : 
$$L = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2} \quad \text{si } j > B \quad (V.3)$$

**Remarques :**

- Pour la formule (V.2), le compteur 'i' varie de  $1 \leq i \leq j$ .
- Pour la formule (V.3), le compteur 'i' varie de  $j - (B - 1) \leq i \leq j$ .
- La fonction  $L(i, j)$  est continue au point  $j = B$ . Donc pour ce point, on peut appliquer n'importe quelles formules (V.2) ou (V.3).
- Pour les formes suivantes, on va seulement donner les formules de récurrence de stockage sans détaillé le calcul [24].

**V.2.2. Stockage en diagonal :**

Les éléments de la bande supérieure de la matrice  $[K]$  seront transférés diagonalement dans le vecteur  $\{V_k\}$  par :

$$V_k(L) = K(i, j)$$

Tel que: 
$$L = \sum_{p=1}^{j-1} (N + 1 - p) + i = \frac{1}{2} [(j-1)(2N - j + i + 1) + i] \quad (V.4)$$

Avec : 
$$\begin{cases} j = 1, 2, 3, \dots, B \\ i = 1, 2, 3, \dots, B \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} j = B + 1, B + 2, \dots, N \\ i = j - B, j - B + 1, \dots, j \end{cases}$$

L'exemple suivant pour une matrice d'ordre  $(7 \times 7)$  illustre schématiquement le transfert des cases entre la matrice et le vecteur correspondant.

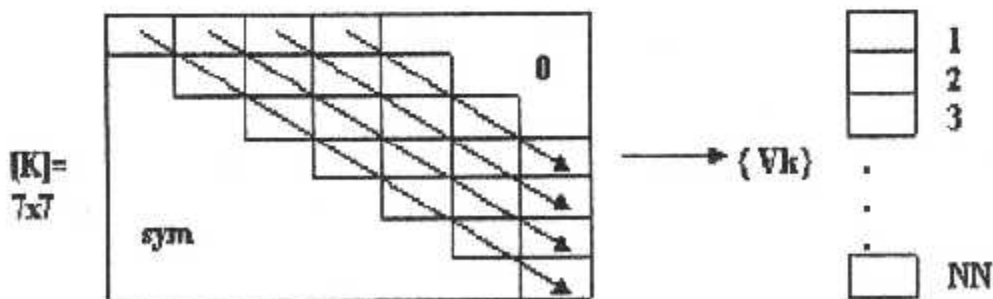


Fig.V.2 : Illustration de stockage en diagonal

La dimension nécessaire de ce vecteur est donnée toujours par la formule (V.1).

Si on applique la formule de récurrence (V.4) à l'exemple précédent c'est-à-dire cette matrice de l'ordre (7x7) et B = 4 pour bien illustrer le procédé de stockage, on trouvera les résultats suivants :

Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(2,2)	Vk(3) = K(3,3)	Vk(4) = K(4,4)
Vk(5) = K(5,5)	Vk(6) = K(6,6)	Vk(7) = K(7,7)	Vk(8) = K(1,4)
Vk(9) = K(2,3)	Vk(10) = K(3,4)	Vk(11) = K(4,5)	Vk(12) = K(5,6)
Vk(13) = K(6,7)	Vk(14) = K(1,3)	Vk(15) = K(2,4)	Vk(16) = K(3,5)
Vk(17) = K(4,6)	Vk(18) = K(5,7)	Vk(19) = K(1,4)	Vk(20) = K(2,5)
Vk(21) = K(3,6)	Vk(22) = K(4,7)		

**V.2.3. Stockage en ligne :**

Les éléments de la bande supérieure de la matrice [K] seront transférés ligne par ligne dans le vecteur {Vk} par :  $Vk(L) = K(i,j)$ , comme le montre la figure (V.3).

Tel que :  $L = (i - 1) \cdot B + j - i + 1$  si  $\begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N - B \\ j = i, i + 1, i + 2, \dots, i + B + 1 \end{cases}$  (V.5)

$$L = \frac{B}{2}(2N - B + 1) - \frac{(N - i)(N - i + 1)}{2} - N + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = N - B + 1, \dots, N \\ j = i, i + 1, \dots, N \end{cases} \quad (V.6)$$

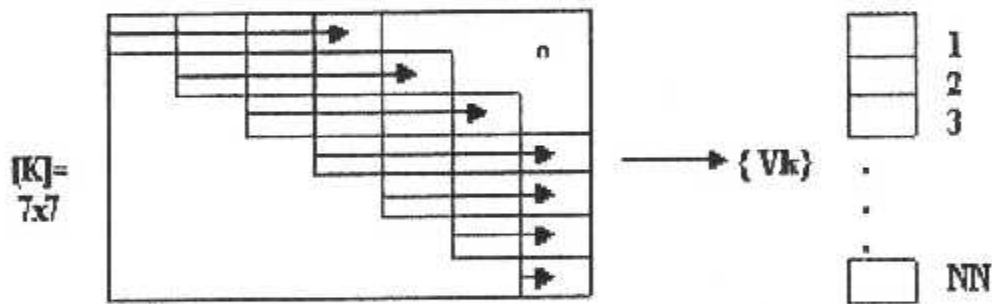


Fig.V.3 : Illustration de stockage en ligne

La dimension nécessaire du vecteur {Vk} est donnée toujours par la formule (V.1)

Si on applique les deux formules (V.5) et (V.6) à cette matrice d'ordre (7x7) et B = 4, pour bien éclaircir le procédé de stockage, on trouve les résultats suivants :

Vk(1) = K(1,1)	Vk(2) = K(1,2)	Vk(3) = K(1,3)	Vk(4) = K(1,4)
Vk(5) = K(2,2)	Vk(6) = K(2,3)	Vk(7) = K(2,4)	Vk(8) = K(2,5)
Vk(9) = K(3,3)	Vk(10) = K(3,4)	Vk(11) = K(3,5)	Vk(12) = K(3,6)
Vk(13) = K(4,4)	Vk(14) = K(4,5)	Vk(15) = K(4,6)	Vk(16) = K(4,7)
Vk(17) = K(5,5)	Vk(18) = K(5,6)	Vk(19) = K(5,7)	Vk(20) = K(6,6)
Vk(21) = K(6,7)	Vk(22) = K(7,7)		

**V.2.4. Stockage en ligne de serpent :**

La matrice [K] (les éléments de la bande supérieure) sera transférée ligne par ligne alternativement dans le vecteur {Vk} par :  $V_k(L) = K(i,j)$ .

Tel que :

$$L = (i-1) \cdot B + (-1)^{i-1} \cdot (j-i+1) + [i-1-2 \text{int}(i/2)] \cdot (B+1) \tag{V.7}$$

$$\text{si } \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N-B \\ j = i, i+1, i+2, \dots, i+B-1 \end{cases}$$

$$L = \frac{B(2N-B+1) - (N-i)(N-i+1)}{2} - N + j + [i+1-2 \text{int}(N/2)](N-2j+i) \tag{V.8}$$

$$\text{si } \begin{cases} i = N-B+1, N-B+2, \dots, N \\ j = i, i+1, i+2, \dots, N \end{cases}$$

De même, la dimension du vecteur {Vk} est donnée par la formule () si on applique les deux formules (V.7) et (V.8) à cet exemple N = 7 et B = 4, on trouve les résultats suivants :

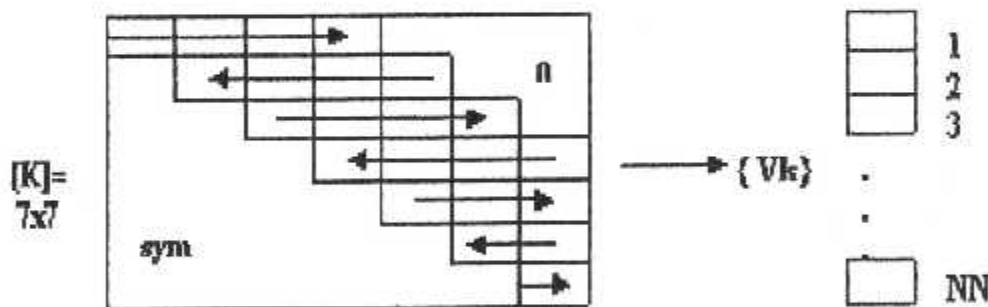


Fig.V.4 : Illustration de stockage en serpent

$V_k(1) = K(1,1)$	$V_k(2) = K(1,2)$	$V_k(3) = K(1,3)$	$V_k(4) = K(1,4)$
$V_k(5) = K(2,5)$	$V_k(6) = K(2,4)$	$V_k(7) = K(2,3)$	$V_k(8) = K(2,2)$
$V_k(9) = K(3,3)$	$V_k(10) = K(3,4)$	$V_k(11) = K(3,5)$	$V_k(12) = K(3,6)$
$V_k(13) = K(4,7)$	$V_k(14) = K(4,6)$	$V_k(15) = K(4,5)$	$V_k(16) = K(4,7)$
$V_k(17) = K(5,5)$	$V_k(18) = K(5,6)$	$V_k(19) = K(5,7)$	$V_k(20) = K(6,7)$
$V_k(21) = K(6,6)$	$V_k(22) = K(7,7)$		

**V.2.5. Stockage en escalier :**

Le schéma de transfert des éléments de la matrice [K] se fait comme l'indique l'exemple suivant pour N = 7 et B = 4. Et pour bien voir le transfert des éléments voici la correspondance :

$V_k(1) = K(1,1)$	$V_k(2) = K(1,2)$	$V_k(3) = K(1,3)$	$V_k(4) = K(1,4)$
$V_k(5) = K(2,5)$	$V_k(6) = K(3,6)$	$V_k(7) = K(4,7)$	$V_k(8) = K(2,2)$
$V_k(9) = K(2,3)$	$V_k(10) = K(2,4)$	$V_k(11) = K(3,5)$	$V_k(12) = K(4,6)$
$V_k(13) = K(5,7)$	$V_k(14) = K(3,3)$	$V_k(15) = K(3,4)$	$V_k(16) = K(4,5)$
$V_k(17) = K(5,6)$	$V_k(18) = K(6,7)$	$V_k(19) = K(4,4)$	$V_k(20) = K(5,5)$
$V_k(21) = K(6,6)$	$V_k(22) = K(7,7)$		

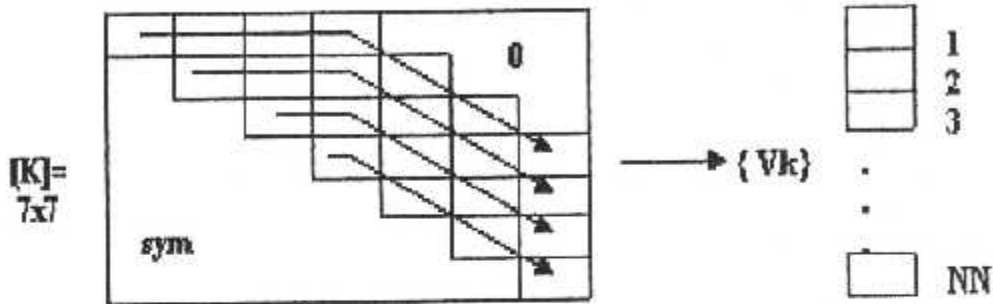


Fig.V.5: Illustration de stockage en escalier

Pour une matrice d'ordre  $(N \times N)$  avec une bande  $B$ , le transfert des éléments se fait par la formule de récurrence suivante :  $V_k(L) = K(i,j)$  or :

$$L = \frac{(i-1)(2N-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, B \\ j = i, i+1, \dots, B \end{cases} \quad (V.9)$$

$$L = \frac{(B-j+i-1)(2N-B+j-i)}{2} + j \quad \text{si} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, \dots, N \\ j = B+1, B+2, \dots, i+B-1 \end{cases} \quad (V.10)$$

**V.3. Résolution numérique du système d'équations linéaires :**

Après avoir remplie et stocké la matrice de rigidité  $[K]$  globale et le vecteur  $\{F\}$ , et afin de déterminer le vecteur solution  $\{W\}$ , on est amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$[K] \{W\} = \{F\} \quad (V.11)$$

On a adapté la méthode de *KHALETSKI* pour la résolution numérique du système (V.11) ; parce qu'elle est directe et caractérisé par un nombre d'opération fini et limité, donc résolvant des systèmes de taille modérée.

**V.3.1. Méthode de décomposition de *KHALETSKI* :**

Supposons dans la première étape que la matrice  $[K]$  est quelconque mais carré et pleine. Nous présenterons l'algorithme de résolution de cette matrice [24], ensuite nous déduirons l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et Bande.



**V.3.1.1. Matrice carrée pleine et quelconque :**

Mettons la matrice  $[K]$  sous la forme d'un produit de deux matrices, l'une triangulaire inférieure  $[L] = [L_{ij}]$  et l'autre triangulaire supérieure  $[H] = [H_{ij}]$  à diagonale unité.

C'est à dire que:  $[K] = [L] [H]$

$$\text{Où : } [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} \text{ et } [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & H_{13} & \dots & H_{1n} \\ & 1 & H_{23} & \dots & H_{2n} \\ & & 1 & \dots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments  $L_{ij}$  et  $H_{ij}$  se calculent par les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= K_{11} & H_{ij} &= \frac{K_{ij}}{L_{11}} & i &= 2, 3, \dots, n \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} H_{kj} & & & j &= 1, 2, 3, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left[ K_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} H_{kj} \right] & & & j &= i+1, i+2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (V.12)$$

Donc, on aura deux systèmes d'équations à matrice triangulaire.

$$[k] \cdot \{W\} = \{F\} \Rightarrow [L] \cdot [H] \cdot \{W\} = \{F\}$$

On pose :  $[H] \cdot \{W\} = \{Y\} \quad (V.13)$

Alors :  $[L] \cdot \{Y\} = \{F\} \quad (V.14)$

La résolution de système (V.13), en suite (V.14) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ Y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left[ F_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} Y_k \right] \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (V.15)$$

Et :  $\begin{cases} W_n = Y_n \\ W_i = Y_i - \sum_{k=i+1}^n H_{ik} W_k \end{cases} \quad i = n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1 \quad (V.16)$



$$\begin{cases} Y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \\ Y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left[ F_i - \sum_{r=1}^{i-1} L_{ir} Y_r \right] & i = 2, 3, \dots, B \\ Y_i = \frac{1}{L_{ii}} \left[ F_i - \sum_{r=B+1}^{i-1} L_{ir} Y_r \right] & i = B+1, \dots, n \end{cases} \quad (V.19)$$

Et :

$$\begin{cases} W_n = Y_n \\ W_i = Y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^n L_{ir} W_r & i = n-1, n-2, \dots, n-B+1 \\ W_i = Y_i - \frac{1}{L_{ii}} \sum_{r=i+1}^{i+B-1} L_{ir} W_r & i = n-B, n-B+1, \dots, 3, 2, 1 \end{cases} \quad (V.20)$$

Pour voir exactement la forme interne de la matrice (V.17), considérant un exemple avec lequel :  $n=12, B=5$  (voir la figure.V.6 ).

K <sub>11</sub>											
K <sub>21</sub>	K <sub>22</sub>										
K <sub>31</sub>	K <sub>32</sub>	K <sub>33</sub>									
K <sub>41</sub>	K <sub>42</sub>	K <sub>43</sub>	K <sub>44</sub>							Sym	
K <sub>51</sub>	K <sub>52</sub>	K <sub>53</sub>	K <sub>54</sub>	K <sub>55</sub>							
	K <sub>62</sub>	K <sub>63</sub>	K <sub>64</sub>	K <sub>65</sub>	K <sub>66</sub>						
		K <sub>73</sub>	K <sub>74</sub>	K <sub>75</sub>	K <sub>76</sub>	K <sub>77</sub>					
			K <sub>84</sub>	K <sub>85</sub>	K <sub>86</sub>	K <sub>87</sub>	K <sub>88</sub>				
				K <sub>95</sub>	K <sub>96</sub>	K <sub>97</sub>	K <sub>98</sub>	K <sub>99</sub>			
	0				K <sub>10,6</sub>	K <sub>10,7</sub>	K <sub>10,8</sub>	K <sub>10,9</sub>	K <sub>10,10</sub>		
						K <sub>11,7</sub>	K <sub>11,8</sub>	K <sub>11,9</sub>	K <sub>11,10</sub>	K <sub>11,11</sub>	
							K <sub>12,8</sub>	K <sub>12,9</sub>	K <sub>12,10</sub>	K <sub>12,11</sub>	K <sub>12,12</sub>

Fig.V.6 : Exemple d'une matrice bande de l'équation (V.17)

**V.3.2. Détermination des formules des contraintes :**

Après la détermination de l'inconnu (W), on peut déterminer les contraintes pour chaque élément fini de la maille par l'utilisation des formules suivantes :

$$\tau_{yx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (V.21)$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (V.22)$$

On a  $\phi = -2G\theta W$ , d'où :

$$\tau_{zx} = -2G\theta \frac{\partial W}{\partial y} \quad (V.23)$$

$$\tau_{zy} = 2G\theta \frac{\partial W}{\partial x} \quad (V.24)$$

On sait d'après l'équation (III.13) que :

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \cdot N_i \quad (V.25)$$

1)- Pour un élément triangulaire à trois nœuds, l'équation (V.25) aura la forme suivante :

$$W = \sum_{i=1}^3 W_i \cdot N_i$$

Ou bien :  $W(x,y) = W_1 N_1(x,y) + W_2 N_2(x,y) + W_3 N_3(x,y) \quad (V.26)$

Alors :

$$\tau_{zx} = -2G\theta \left\{ W_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + W_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + W_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} \right\} \quad (V.27)$$

Et :

$$\tau_{zy} = 2G\theta \left\{ W_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + W_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + W_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} \right\} \quad (V.28)$$

\* On a d'après l'équation (III.28.a) :

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i=1,2,3 \quad (V.29)$$

Alors :

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A_e} \quad i=1,2,3 \quad (V.30)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A_e} \quad i=1,2,3 \quad (V.31)$$

Substituant les équations (V.30) et (V.31) dans les équations (V.28) et (V.27) respectivement, on trouve :

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -2G\theta \left\{ W_1 \frac{\gamma_1}{2A_e} + W_2 \frac{\gamma_2}{2A_e} + W_3 \frac{\gamma_3}{2A_e} \right\} \\ \tau_{zx} &= -\frac{G\theta}{A_e} \{ W_1 \gamma_1 + W_2 \gamma_2 + W_3 \gamma_3 \} \end{aligned} \quad (V.32)$$

Et :

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= 2G\theta \left\{ W_1 \frac{\beta_1}{2A_e} + W_2 \frac{\beta_2}{2A_e} + W_3 \frac{\beta_3}{2A_e} \right\} \\ \tau_{zy} &= \frac{G\theta}{A_e} \{ W_1 \beta_1 + W_2 \beta_2 + W_3 \beta_3 \} \end{aligned} \quad (V.33)$$

\* On déduit d'après les équations (V.32) et (V.33) que  $\tau_{xx}$  et  $\tau_{xy}$  sont constantes pour chaque élément.

2)- Pour un élément quadrilatère à quatre nœuds, l'équation (V.25) aura la forme suivante :

$$W = \sum_{j=1}^4 W_j \cdot N_j$$

Ou bien : 
$$W(x,y) = W_1 N_1(x,y) + W_2 N_2(x,y) + W_3 N_3(x,y) + W_4 N_4(x,y) \quad (V.34)$$

Alors :

$$\tau_{xx} = -2G\theta \left\{ W_1 \frac{\partial N_1}{\partial y} + W_2 \frac{\partial N_2}{\partial y} + W_3 \frac{\partial N_3}{\partial y} + W_4 \frac{\partial N_4}{\partial y} \right\} \quad (V.35)$$

Et :

$$\tau_{xy} = 2G\theta \left\{ W_1 \frac{\partial N_1}{\partial x} + W_2 \frac{\partial N_2}{\partial x} + W_3 \frac{\partial N_3}{\partial x} + W_4 \frac{\partial N_4}{\partial x} \right\} \quad (V.36)$$

\* On a d'après l'équation (III.34):

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy \end{Bmatrix} \quad (V.37)$$

- En dérivant les équations de (V.37) par rapport à y et en les remplaçant dans (V.35), on trouve :

$$\tau_{xx} = -2G\theta \left\{ (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43}) + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) x \right\} \quad (V.38)$$

- En dérivant les équations de (V.37) par rapport à x et en les remplaçant dans (V.36), on trouve :

$$\tau_{xy} = 2G\theta \left\{ (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42}) + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) y \right\} \quad (V.39)$$

3)- Pour un élément triangulaire à six nœuds, l'équation (V.25) aura la forme suivante :

$$W = \sum_{j=1}^6 W_j \cdot N_j$$

Ou bien :

$$W(x,y) = W_1 N_1(x,y) + W_2 N_2(x,y) + W_3 N_3(x,y) + W_4 N_4(x,y) + W_5 N_5(x,y) + W_6 N_6(x,y) \quad (V.40)$$

On a:

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \\ N_5(x,y) \\ N_6(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy + L_{15}x^2 + L_{16}y^2 \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy + L_{25}x^2 + L_{26}y^2 \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy + L_{35}x^2 + L_{36}y^2 \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy + L_{45}x^2 + L_{46}y^2 \\ L_{51} + L_{52}x + L_{53}y + L_{54}xy + L_{55}x^2 + L_{56}y^2 \\ L_{61} + L_{62}x + L_{63}y + L_{64}xy + L_{65}x^2 + L_{66}y^2 \end{Bmatrix} \quad (V.41)$$

\* On suit le même raisonnement que l'étape 2, et on trouve les formules des contraintes de cisaillement suivantes :

$$\tau_{zx} = -2G\theta \left[ \begin{array}{l} (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43} + W_5 L_{53} + W_6 L_{63}) + (W_1 L_{14} + \\ W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44} + W_5 L_{54} + W_6 L_{64}) x + 2(W_1 L_{16} + \\ W_2 L_{26} + W_3 L_{36} + W_4 L_{46} + W_5 L_{56} + W_6 L_{66}) y \end{array} \right] \quad (V.42)$$

Et :

$$\tau_{zx} = 2G\theta \left[ \begin{array}{l} (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42} + W_5 L_{52} + W_6 L_{62}) + (W_1 L_{14} + \\ W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44} + W_5 L_{54} + W_6 L_{64}) y + 2(W_1 L_{15} + \\ W_2 L_{25} + W_3 L_{35} + W_4 L_{45} + W_5 L_{55} + W_6 L_{65}) x \end{array} \right] \quad (V.43)$$

### V.3.3. Détermination de la formule de l'angle de torsion unitaire :

Nous avons d'après la formule (I.) :

$$M_t = 2 \iint \phi \, dx \, dy \quad (V.44)$$

En faisant le changement de variable  $\phi = -2 G\theta W$ , on aura :

$$M_t = -4 \iint G\theta W \, dx \, dy$$

Ou bien :

$$M_t = -4G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \iint_{\Delta_e} W_i \, dx \, dy \quad (V.45)$$

1)- Pour un élément triangulaire à trois nœuds, l'équation (V.45) aura la forme suivante :

$$M_t = -4G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \iint_{\Delta_e} (W_j N_j)_i \, dx \, dy \quad j=1,2,3 \quad (V.46)$$

Avec : i : nombre d'éléments

j : nombre de nœuds

\* On a d'après l'équation (V.29) :

$$N_j^{(e)} = \frac{1}{2\Delta_e} (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \quad j=1,2,3$$

\* Substituant les équations (V.29) dans les équations (V.46), on trouve :

$$M_t = -2G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ \frac{1}{\Delta_e} \left( W_1 \iint_{\Delta_e} (\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) \, dx \, dy + W_2 \iint_{\Delta_e} (\alpha_2 + \beta_2 x + \gamma_2 y) \, dx \, dy + \right. \right. \\ \left. \left. + W_3 \iint_{\Delta_e} (\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y) \, dx \, dy \right) \right]_i \quad (V.47)$$

\* Après le calcul des intégrales de l'équation (V.47), on trouve :

$$M_t = -2G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ \frac{1}{A_e} (W_1(\alpha_1 A_e + \beta_1 A_e \bar{x} + \gamma_1 A_e \bar{y}) + W_2(\alpha_2 A_e + \beta_2 A_e \bar{x} + \gamma_2 A_e \bar{y}) + W_3(\alpha_3 A_e + \beta_3 A_e \bar{x} + \gamma_3 A_e \bar{y})) \right]_i$$

D'où :

$$M_t = -2G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} [W_1(\alpha_1 + \beta_1 \bar{x} + \gamma_1 \bar{y}) + W_2(\alpha_2 + \beta_2 \bar{x} + \gamma_2 \bar{y}) + W_3(\alpha_3 + \beta_3 \bar{x} + \gamma_3 \bar{y})]_i \quad (V.48)$$

\* On a d'après l'équation (III.45) :

$$(\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = \frac{2}{3} A_e \quad (V.49)$$

\* Substituant les équations (V.49) dans les équations (V.48), on trouve :

$$M_t = -2G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ \frac{2}{3} A_e W_1 + \frac{2}{3} A_e W_2 + \frac{2}{3} A_e W_3 \right]_i$$

Enfinement :

$$M_t = -\frac{4}{3} G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} [A_e (W_1 + W_2 + W_3)]_i \quad (V.50)$$

\* Alors, l'angle de torsion unitaire s'écrit :

$$\theta = \frac{M_t}{-\frac{4}{3} G \sum_{i=1}^{i=NE} [A_e (W_1 + W_2 + W_3)]_i} \quad (V.51)$$

Nous avons la formule de torsion suivante :

$$\theta = \frac{M_t}{GC} \quad (V.52)$$

Comparons (v.51) avec (V.52), on trouve que :

$$C = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{i=NE} [A_e (W_1 + W_2 + W_3)]_i \quad (V.53)$$

2)- Pour un élément quadrilatère à quatre nœuds, l'équation (V.45) aura la forme suivante :

$$M_t = -4G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \iint_{A_e} (W_j N_j)_i \, dx \, dy \quad j=1,2,3,4 \quad (V.54)$$

\* On a d'après l'équation (V.37):

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy \end{Bmatrix}$$

\* Substituant les équations (V.37) dans les équations (V.54), on trouve :

$$M_t = -4 G \theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41}) \iint_{Ae} dx dy + (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42}) \iint_{Ae} x dx dy + (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43}) \iint_{Ae} y dx dy + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) \iint_{Ae} xy dx dy \right] ;$$

Finalement :

$$M_t = -4 G \theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41}) I_{00} + (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42}) I_{10} + (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43}) I_{01} + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) I_{11} \right] ; \tag{V.55}$$

Tel que : (voir chapitre III, § 7.2)

$$I_{00} = \int_{\Omega} dx dy = A_{123} + A_{134}$$

$$I_{10} = \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} + A_{134} \bar{x}_{134}$$

$$I_{01} = \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} + A_{134} \bar{y}_{134}$$

$$I_{11} = \int_{\Omega} xy dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9 \bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) + \frac{A_{134}}{12} (x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9 \bar{x}_{134} \bar{y}_{134})$$

\* Alors, l'angle de torsion unitaire s'écrit :

$$\theta = \frac{M_t}{-4 G \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41}) I_{00} + (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42}) I_{10} + (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43}) I_{01} + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) I_{11} \right] } \tag{V.56}$$

Nous avons d'après l'équation (V.52) la formule de torsion suivante :

$$\theta = \frac{M_t}{G C}$$

Comparons (v.52) avec (V.56), on trouve que :



$$C = -4 \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41}) I_{00} + (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42}) I_{10} + (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43}) I_{01} + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44}) I_{11} \right] ; \quad (V.57)$$

3)- Pour un élément triangulaire à six nœuds, l'équation (V.45) aura la forme suivante :

$$M_i = -4G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \iint_{\Delta e} (W_j N_j)_i \, dx \, dy \quad j=1,2,3,4,5,6 \quad (V.58)$$

On a d'après (V.41):

$$\begin{Bmatrix} N_1(x,y) \\ N_2(x,y) \\ N_3(x,y) \\ N_4(x,y) \\ N_5(x,y) \\ N_6(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_{11} + L_{12}x + L_{13}y + L_{14}xy + L_{15}x^2 + L_{16}y^2 \\ L_{21} + L_{22}x + L_{23}y + L_{24}xy + L_{25}x^2 + L_{26}y^2 \\ L_{31} + L_{32}x + L_{33}y + L_{34}xy + L_{35}x^2 + L_{36}y^2 \\ L_{41} + L_{42}x + L_{43}y + L_{44}xy + L_{45}x^2 + L_{46}y^2 \\ L_{51} + L_{52}x + L_{53}y + L_{54}xy + L_{55}x^2 + L_{56}y^2 \\ L_{61} + L_{62}x + L_{63}y + L_{64}xy + L_{65}x^2 + L_{66}y^2 \end{Bmatrix}$$

\* Substituant les équations (V.41) dans les équations (V.58) et on suit le même raisonnement que l'étape 2, et on trouve les formules suivantes :

- Le moment de torsion :

$$M_i = -4G\theta \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41} + W_5 L_{51} + W_6 L_{61}) I_{00} + (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42} + W_5 L_{52} + W_6 L_{62}) I_{10} + (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43} + W_5 L_{53} + W_6 L_{63}) I_{01} + (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44} + W_5 L_{54} + W_6 L_{64}) I_{11} + (W_1 L_{15} + W_2 L_{25} + W_3 L_{35} + W_4 L_{45} + W_5 L_{55} + W_6 L_{65}) I_{20} + (W_1 L_{16} + W_2 L_{26} + W_3 L_{36} + W_4 L_{46} + W_5 L_{56} + W_6 L_{66}) I_{02} \right] ; \quad (V.59)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} I_{00} &= \int_{\Omega} dx dy = A_{123} \\ I_{10} &= \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} \\ I_{01} &= \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} \\ I_{20} &= \int_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9 \bar{x}_{123}^2) \\ I_{02} &= \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9 \bar{y}_{123}^2) \\ I_{11} &= \int_{\Omega} xy dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9 \bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) \end{aligned}$$

- L'angle de torsion :

$$\theta = \frac{M_t}{-4G \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41} + W_5 L_{51} + W_6 L_{61}) I_{00} + \right.}$$

$$+ (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42} + W_5 L_{52} + W_6 L_{62}) I_{10} +$$

$$+ (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43} + W_5 L_{53} + W_6 L_{63}) I_{01} +$$

$$+ (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44} + W_5 L_{54} + W_6 L_{64}) I_{11} +$$

$$+ (W_1 L_{15} + W_2 L_{25} + W_3 L_{35} + W_4 L_{45} + W_5 L_{55} + W_6 L_{65}) I_{20} +$$

$$\left. + (W_1 L_{16} + W_2 L_{26} + W_3 L_{36} + W_4 L_{46} + W_5 L_{56} + W_6 L_{66}) I_{02} \right] i} \quad (V.60)$$

- La constante C :

$$C = -4 \sum_{i=1}^{i=NE} \left[ (W_1 L_{11} + W_2 L_{21} + W_3 L_{31} + W_4 L_{41} + W_5 L_{51} + W_6 L_{61}) I_{00} + \right.$$

$$+ (W_1 L_{12} + W_2 L_{22} + W_3 L_{32} + W_4 L_{42} + W_5 L_{52} + W_6 L_{62}) I_{10} +$$

$$+ (W_1 L_{13} + W_2 L_{23} + W_3 L_{33} + W_4 L_{43} + W_5 L_{53} + W_6 L_{63}) I_{01} +$$

$$+ (W_1 L_{14} + W_2 L_{24} + W_3 L_{34} + W_4 L_{44} + W_5 L_{54} + W_6 L_{64}) I_{11} +$$

$$+ (W_1 L_{15} + W_2 L_{25} + W_3 L_{35} + W_4 L_{45} + W_5 L_{55} + W_6 L_{65}) I_{20} +$$

$$\left. + (W_1 L_{16} + W_2 L_{26} + W_3 L_{36} + W_4 L_{46} + W_5 L_{56} + W_6 L_{66}) I_{02} \right] i \quad (V.61)$$

La constante C et la contrainte de cisaillement maximale seront calculé dans le prochain chapitre, on utilisant les formule obtenues dans ce chapitre et on prenons la forme adimensionnelle de la contrainte de cisaillement, c'est-à-dire  $\tau'$ , tel que  $\tau' = \frac{\tau}{G\theta}$ .

## CHAPITRE VI

### *Résultats et commentaires*

## CHAPITRE VI :

## Résultats et commentaires

**VI.1. Introduction :**

Après la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, en programmant plusieurs types d'éléments finis, et les procédés des générations de maillages pour les différentes géométries, ainsi que la technique numérique employées pour la résolution du problème.

Les géométries traitées sont :

- Géométrie d'un cercle.
- Géométrie d'un ellipse.
- Géométrie d'un carrée ou rectangle.
- Géométrie des profils (symétriques et non symétriques).

**VI.2. Procédure de calcul :**

Dans cette partie, nous allons donner une description grossière du programme à partir de l'organigramme de la figure VI.1

Tous d'abord, la déclaration de toutes les variables et constantes utilisées dans le programme (partie déclaration), en suite, nous allons appelé la subroutine INPUT qui permet de choisir la géométrie du domaine a étudier et le type d'élément fini a utiliser pour la discrétisation du domaine. Les subdivisions  $N_x$  et  $N_y$  seront aussi entrées a la fin de cette subroutine.

Puis, on appelle au sous programmes des différentes géométries selon la valeur de la variable NF, permet de générer le maillage et de discrétiser le domaine afin d'obtenir les coordonnées géométriques nodales (positions des nœuds), les caractères de la discrétisation seront calculés par la suite.

La subroutine **CONNECT** permet de faire la connexion entre les éléments finis en fonction de leur numérotation afin de remplir la matrice de connexion NNE.

Le réarrangement des nœuds du domaine dans un ordre d'affichage convenable permet le traçage et la représentation graphique du maillage, cela se fait grasse à la subroutine **MESH**.

L'appelle de la subroutine **CONDLIMIT** réduit la taille de la matrice globale et les vecteurs correspondants et remplit le vecteur indiquant les nœuds des frontières.

Puis nous passons au remplissage des matrices et des vecteurs élémentaires, ainsi que leur assemblage dans la matrice globale et le vecteur global ceci se fait par l'appelle des subroutines **ELMTRANGL** ou **ELMTQUADRIL** selon le type d'élément choisi.

On utilise la subroutine **REMPLOFFH** pour le calcul des coefficients de la matrice  $[H]$  puis le calcul de son inverse  $[L]$  par **INVMAT**, ainsi que le calcul de  $I_{mn}$  et les surfaces élémentaires afin d'avoir les coefficients linéaires  $K_{ij}$  et  $F_i$  élémentaires, en utilisant autant de fois les sous programmes **CALCAFE**, **SOMAK**, **INTGRAL**.....

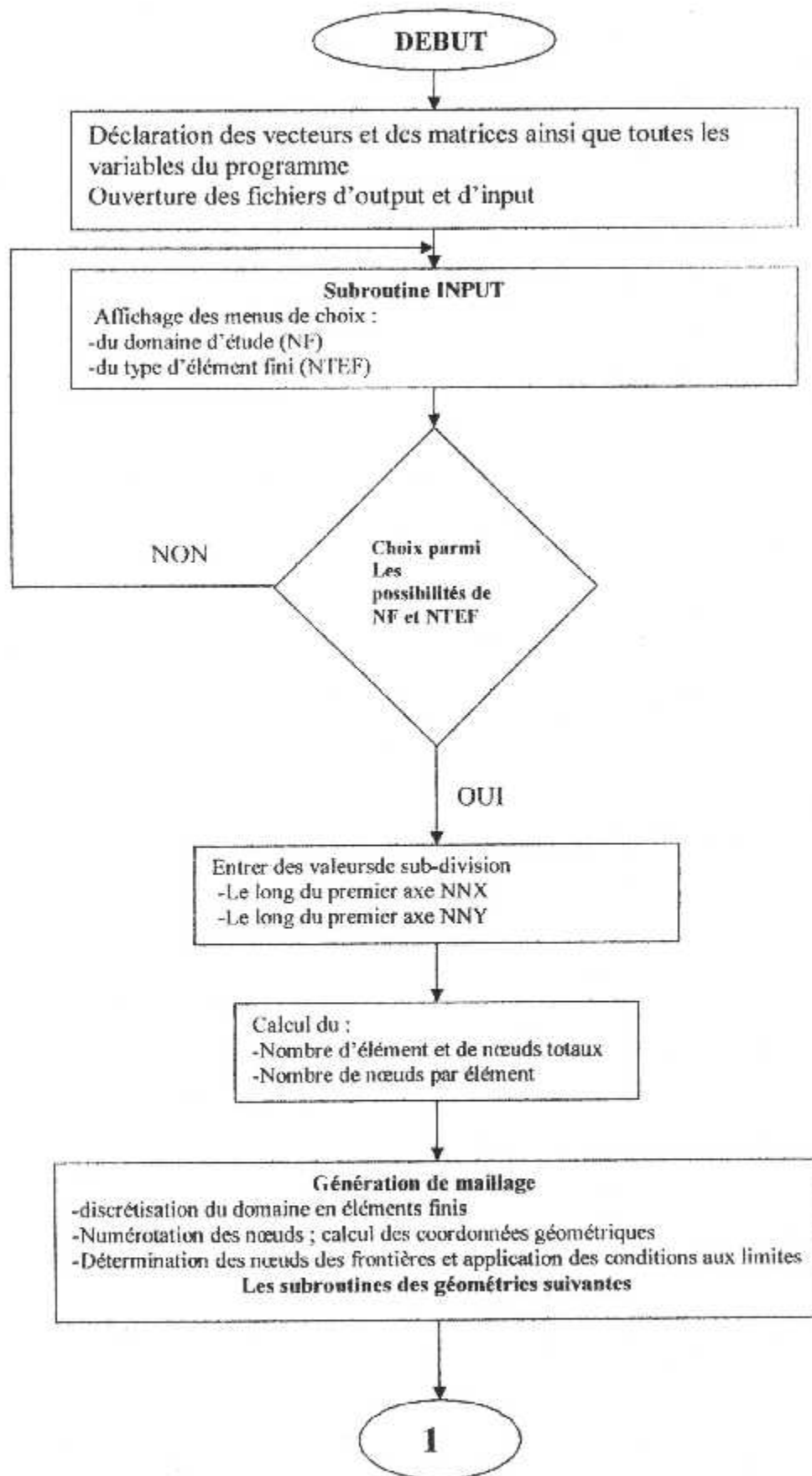
On passe en suite a la subroutine **ASSEMBANDE** qui permet de remplir les vecteurs qui servent a la résolution du système d'équation du problème.

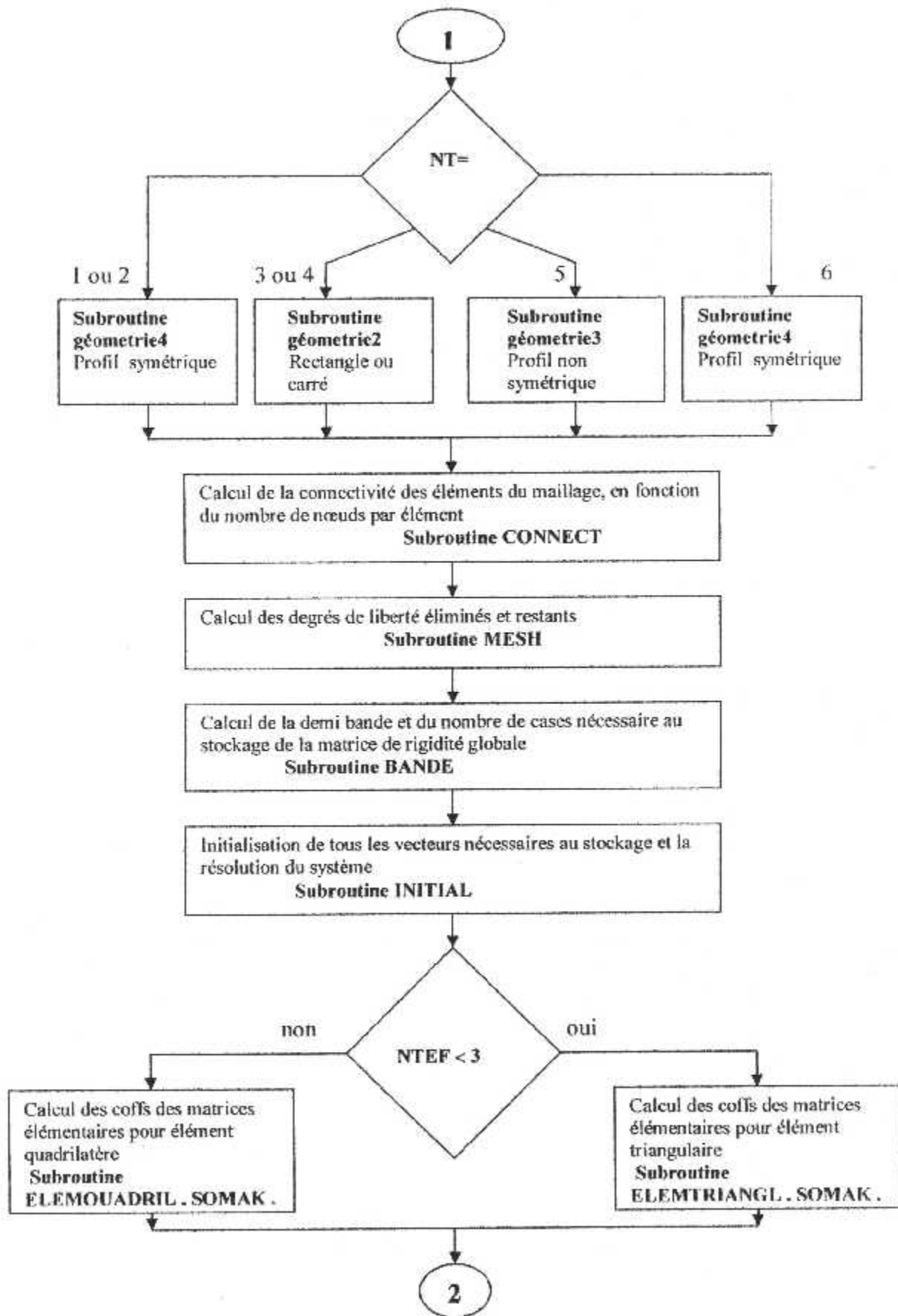
Une fois la matrice de rigidité et le vecteur force global obtenus, nous passons à la phase de résolution en utilisant la subroutine **RESOLKAT** qui résout notre système d'équation par la méthode de **KHALETYSKI**.

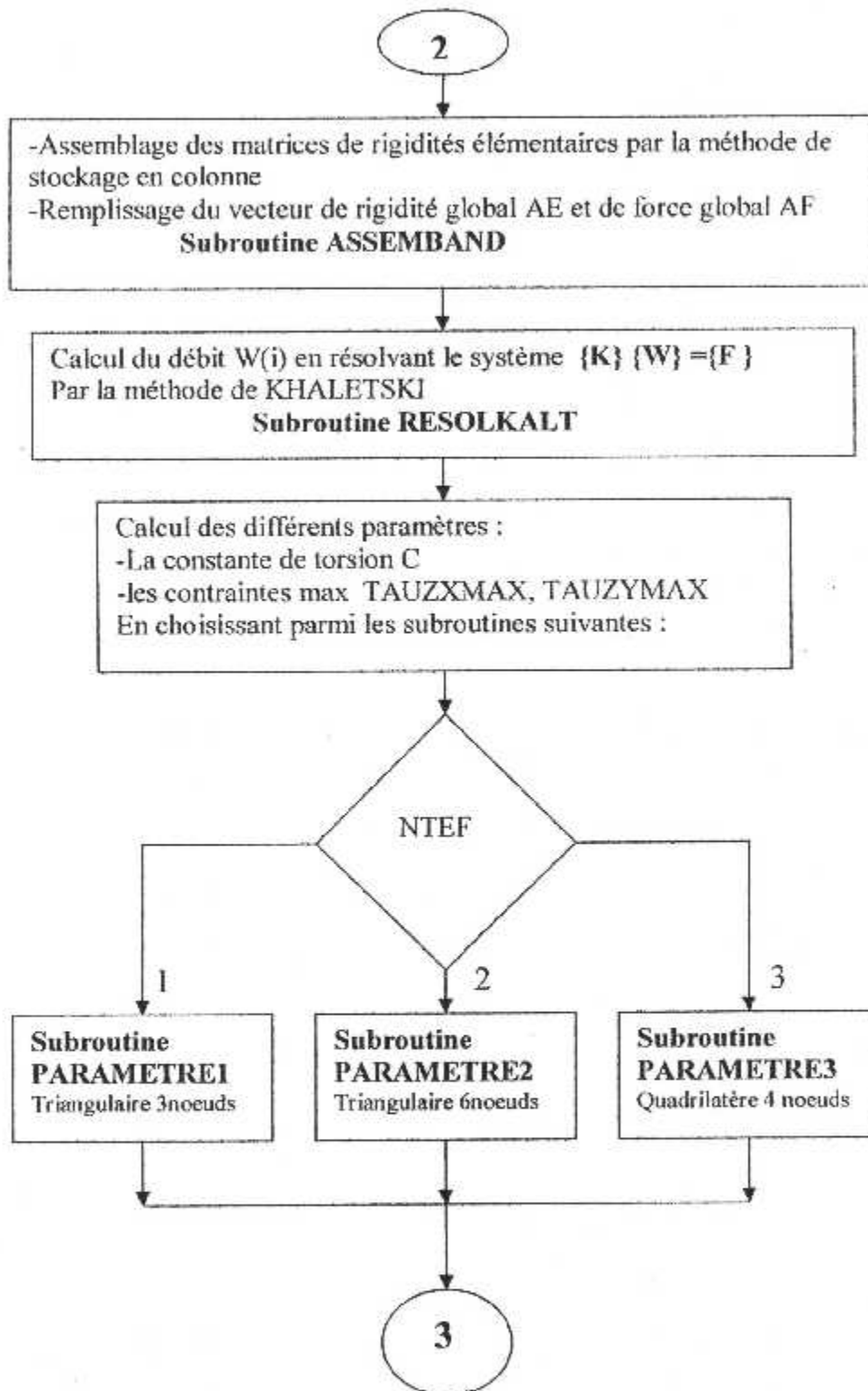
Puis on aura a choisir selon le type d'élément fini utilisé l'une des sous routines **PRAMERETRE1**, **PRAMERETRE2** ou **PRAMERETRE3** pour calculer la constante de torsion et les contraintes max, ainsi que leurs positions.

Cela fait, les sous routines **RDM1** et **RDM2** (selon le type d'élément fini choisi, triangulaire ou quadrilatère) nous donne les valeurs analytiques du moment polaire pour les géométries choisies, afin de les comparées avec ceux obtenus par les sous routines **PARAMATRE1,2** et **3**

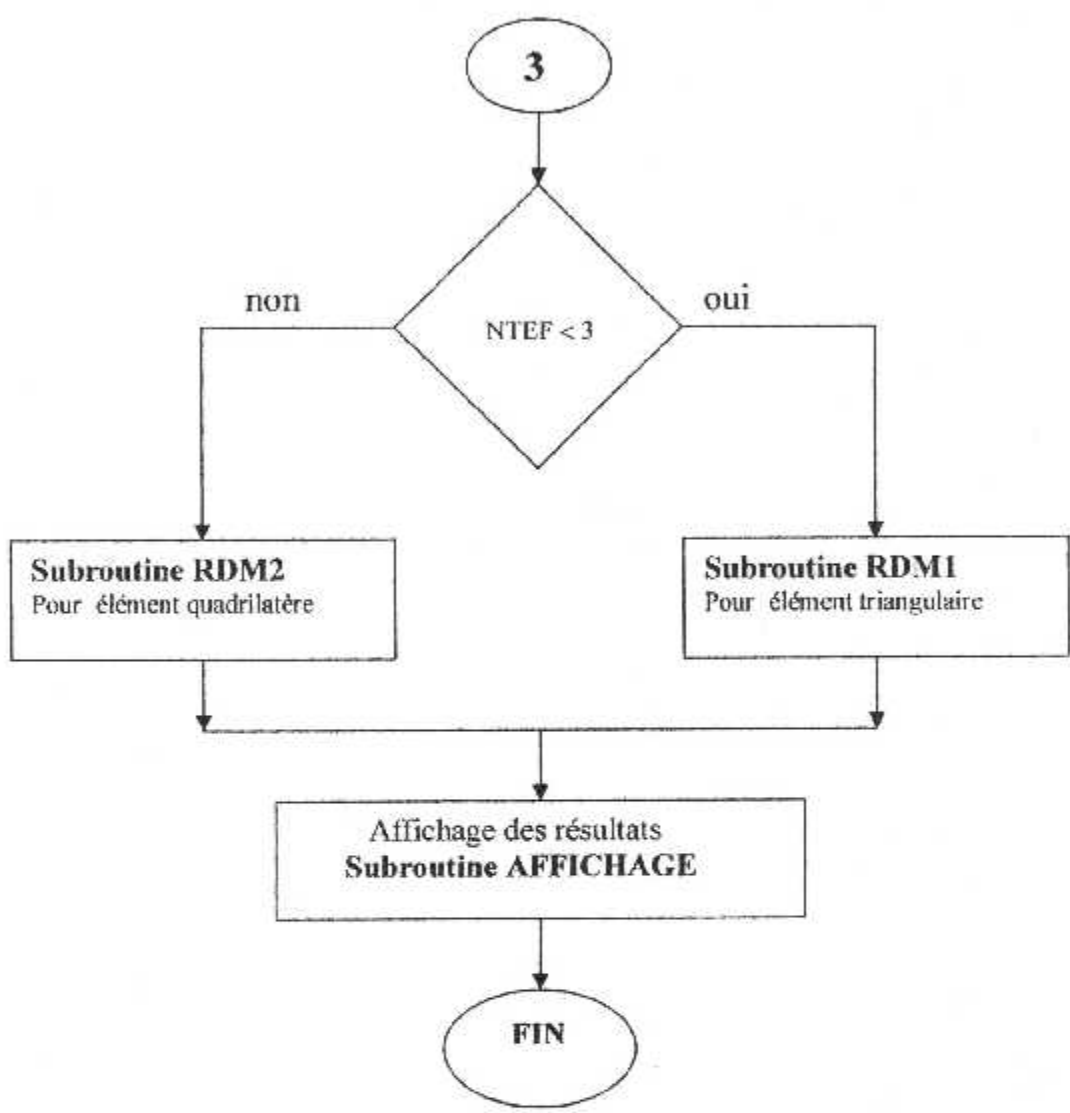
En fin la subroutine **AFFICHAGE** permet de le traçage graphique et la comparaison des résultats.











Arrivé a se stade de notre travail, nous passant à l'application du programme de calcul pour obtenir les résultats recherchés, cela se fera en appliquant pour toutes des géométries étudiés c'est a dire le cercle, le carré, le rectangle, l'ellipse, les profils symétriques et les non symétriques les trois types de discrétisation abordées ( élément triangulaire 3n, triangulaire 6n et quadrilatère 4n)

Nous obtiendrons exécution du programme les résultats suivants :

Nous prendrons comme notation :

- 1 : Élément triangulaire à 3 nœuds.
- 2 : Élément triangulaire à 6 nœuds.
- 3 : Élément quadrilatère à 4 nœuds.

\* Le cercle :

IP= 1.57066713

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	20	20	1.56906843	0.51924710	0.069964	0.068408
3	75	75	1.57611237	0.52735891	0.071050	0.070049
2	51	51	1.56913576	0.52925846	0.071196	0.069715
2	80	80	1.57011765	0.53888745	0.071030	0.070092
2	101	101	1.57036575	0.61158472	0.070966	0.070226

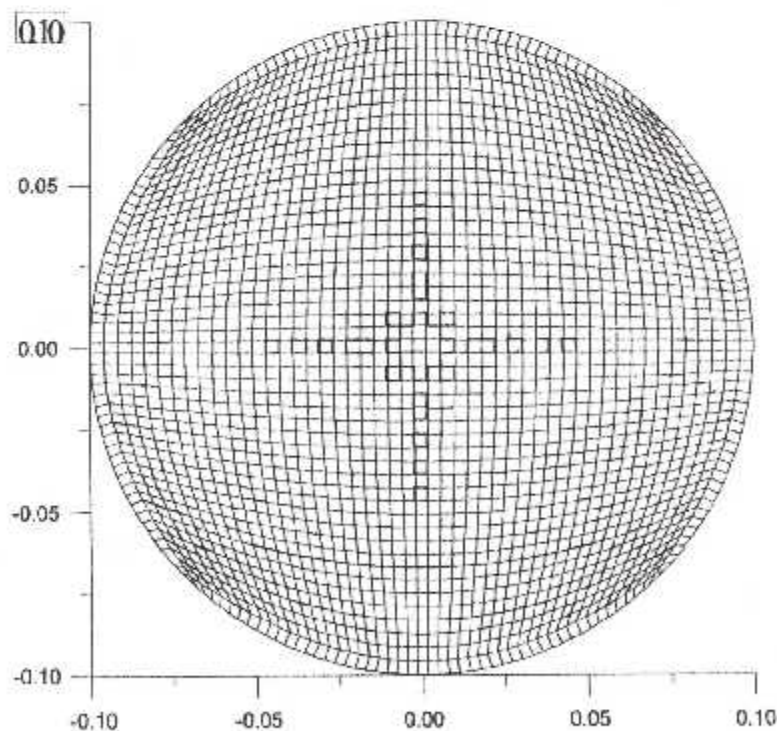


Fig.VI.1 : Maillage quadrilatère d'un cercle

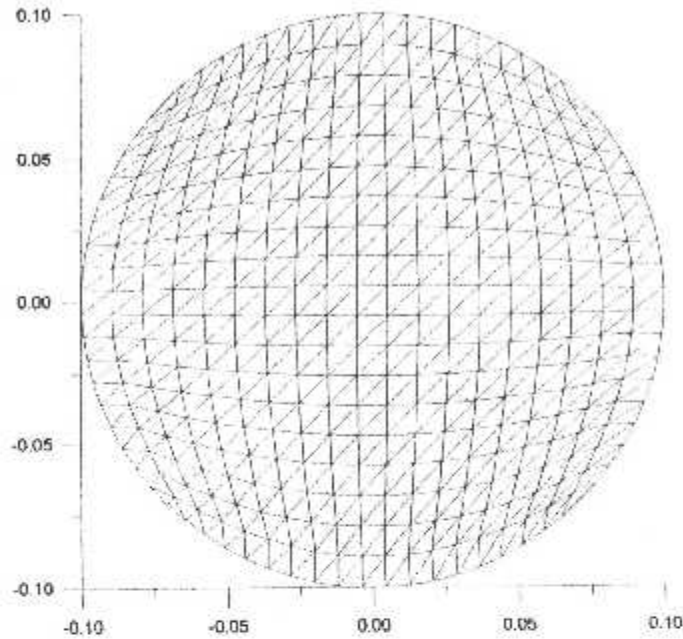


Fig.VI.2 : Maillage triangulaire d'un cercle

\* le carre :

IP= 0.16666666

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	20	20	0.13932107	4.0935874	0.482456	0.464912
3	75	75	0.14695914	4.1005879	0.493243	0.493243
2	51	51	0.14039444	4.1584732	0.493333	0.486666
2	80	80	0.14050382	4.5621471	0.495780	0.491561
2	101	101	0.14053132	4.6695144	0.496666	0.493333

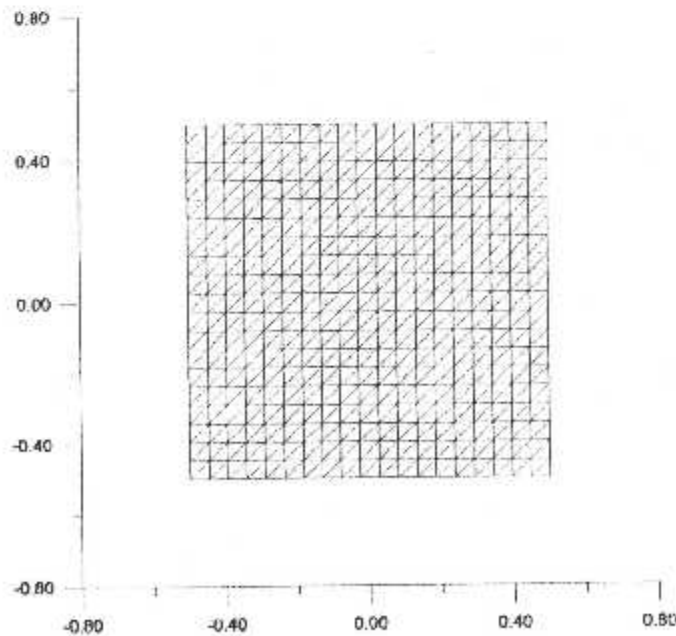


Fig.VI.3 : Maillage triangulaire d'un carré

\* Ellipse :

$\tau_{\max} = \sigma_{\max}^2$

XG = 0.5

YG = 0.25

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{\max}$	P	
					X	Y
1	20	20	4.89756639	0.2257849	0.071765	0.033936
3	75	75	4.90800130	0.2298987	0.071050	0.035024
2	51	51	4.90712385	0.2411521	0.071196	0.034857
2	80	80	4.90809166	0.2548713	0.071030	0.035046
2	101	101	4.90833480	0.2685771	0.070966	0.035113

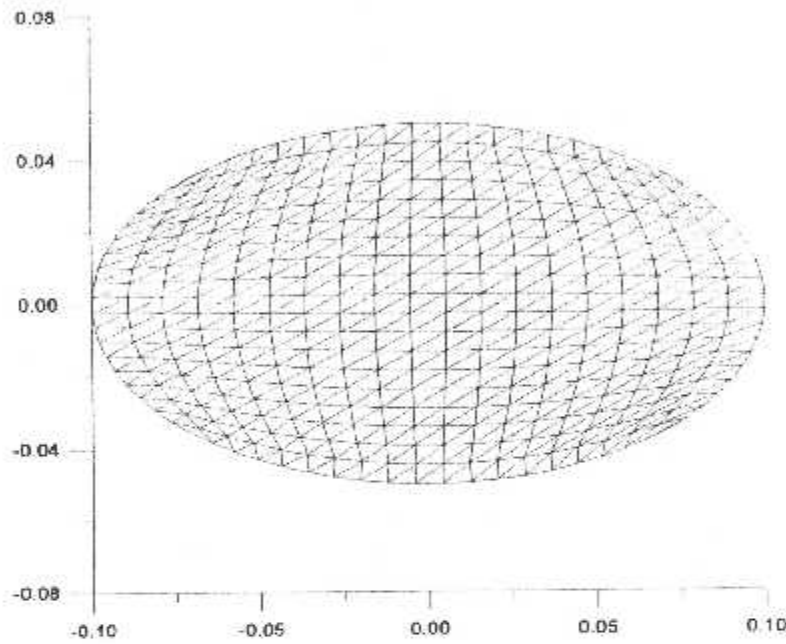


Fig.VI.4 : Maillage triangulaire d'une ellipse

\* Rectangle :

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{\max}$	P	
					X	Y
1	20	20	2.8303345	0.2315481	0.482456	0.232456
3	75	75	2.8566419	0.2355748	0.495495	0.245495
2	51	51	2.8544098	0.2411587	0.493333	0.243333
2	80	80	2.8568720	0.2751289	0.495780	0.245780
2	101	101	2.8574269	0.3368111	0.496563	0.246563

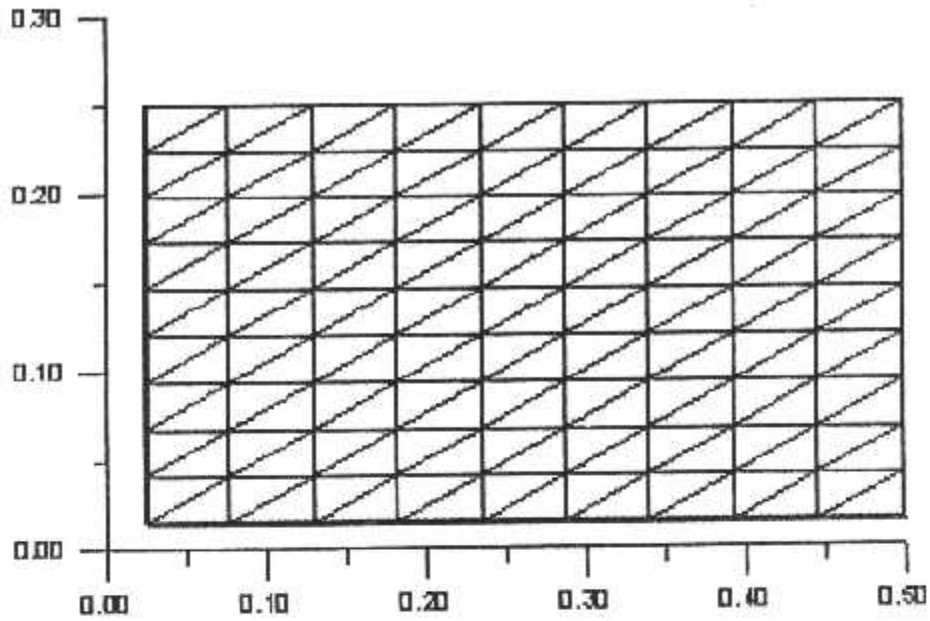


Fig.V.5 : maillage triangulaire d'un rectangle

\* PROFIL NACA0012 :

IP= 1.862012029043688E-004

XG= 8.987205375316046E-001 , YG= 1.359393227715719E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	20	20	2.58303 E-04	0.0565514	0.892718	0.014053
3	75	75	2.61270 E-04	0.0765487	0.898258	0.013642
2	51	51	2.61014 E-04	0.0800157	0.897389	0.013728
2	80	80	2.61297 E-04	0.1000698	0.898371	0.013631
2	101	101	2.61369 E-04	0.1021874	0.898720	0.013593

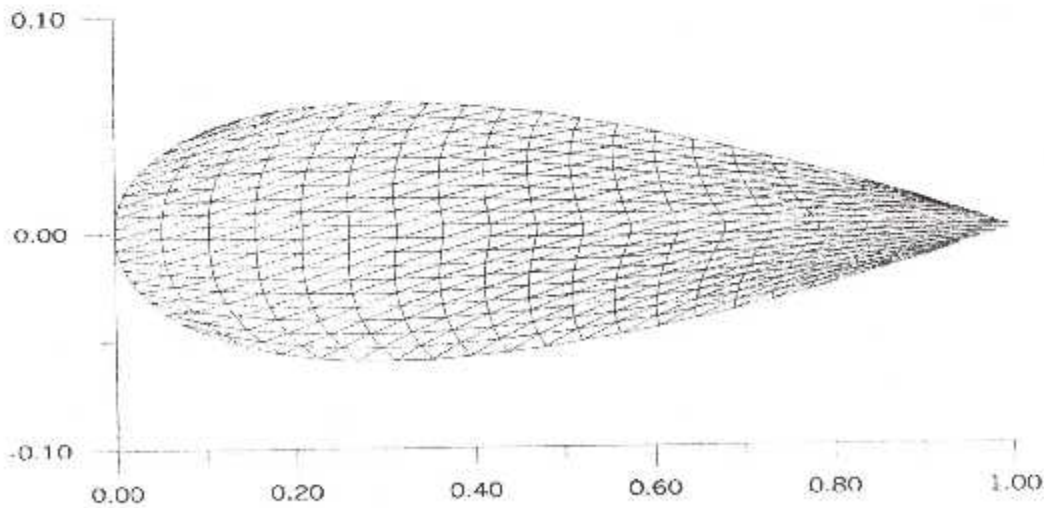


Fig.VI.6 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0012

**\* NACA0009 :**

IP= 1.393044179237491E-002

XG= 8.987334626242166E-001 , YG= 1.019439210855355E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	20	20	1.10014 E-04	0.0725481	0.892718	0.010540
3	75	75	1.11285 E-04	0.0755897	0.898258	0.010232
2	51	51	1.11175 E-04	0.0865471	0.897389	0.010296
2	80	80	1.11297 E-04	0.0998451	0.898371	0.010223
2	101	101	1.11327 E-04	0.1000998	0.898720	0.010195

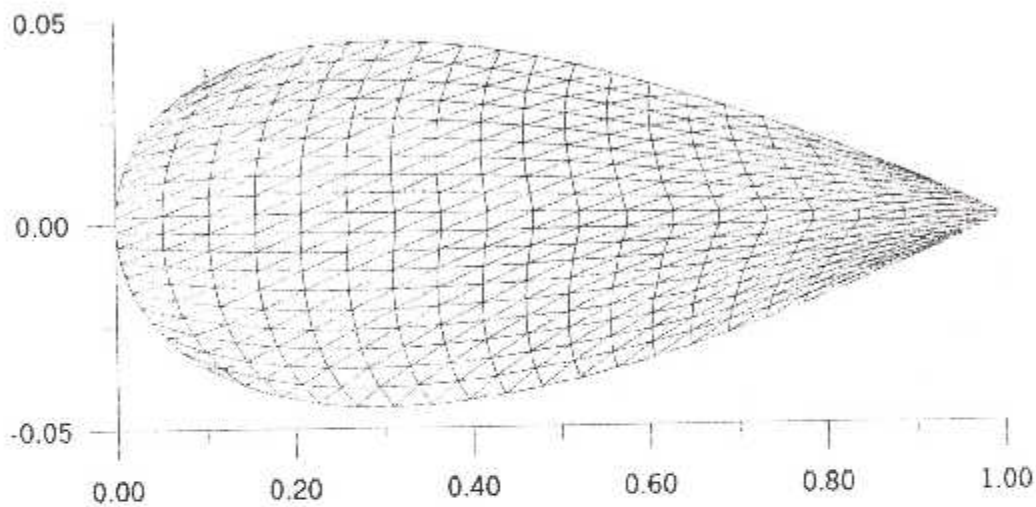


Fig.VL.7 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0009

**\*NACA0018 :**

IP= 2.805549073396119E-003

XG= 8.987585454554917E-001

YG= 2.038467208180881E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	20	20	8.49176 E-04	0.0985741	0.892718	0.021080
3	75	75	8.58788 E-04	0.1001548	0.898258	0.020464
2	51	51	8.57957 E-04	0.0101254	0.897389	0.020592
2	80	80	8.58875 E-04	0.0119987	0.898371	0.020446
2	101	101	8.59106E-04	0.1325489	0.898720	0.020390

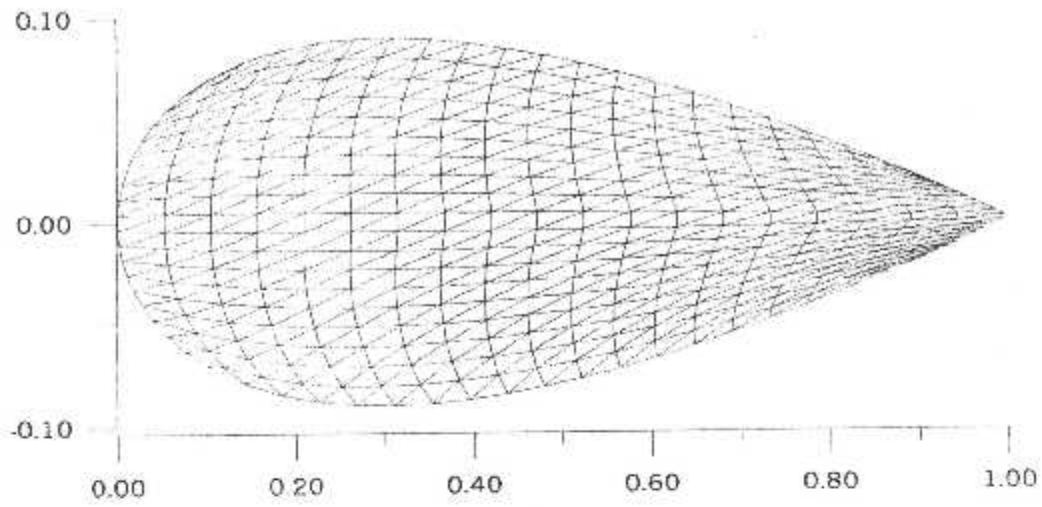


Fig.VI.8 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0018

\* NACA0024 :

IP= 3.764123353545316E-003

XG= 8.987585454554918E-001 YG= 2.717956277574508E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	τ <sub>MAX</sub>	P	
					X	Y
1	20	20	1.94415 E-03	0.0958744	0.892718	0.028107
3	75	75	1.96579 E-03	0.1021541	0.898258	0.027285
2	51	51	1.96392 E-03	0.1152489	0.897389	0.027456
2	80	80	1.96598 E-03	0.1325959	0.898371	0.027262
2	101	101	1.96650 E-03	0.1548777	0.898720	0.027187

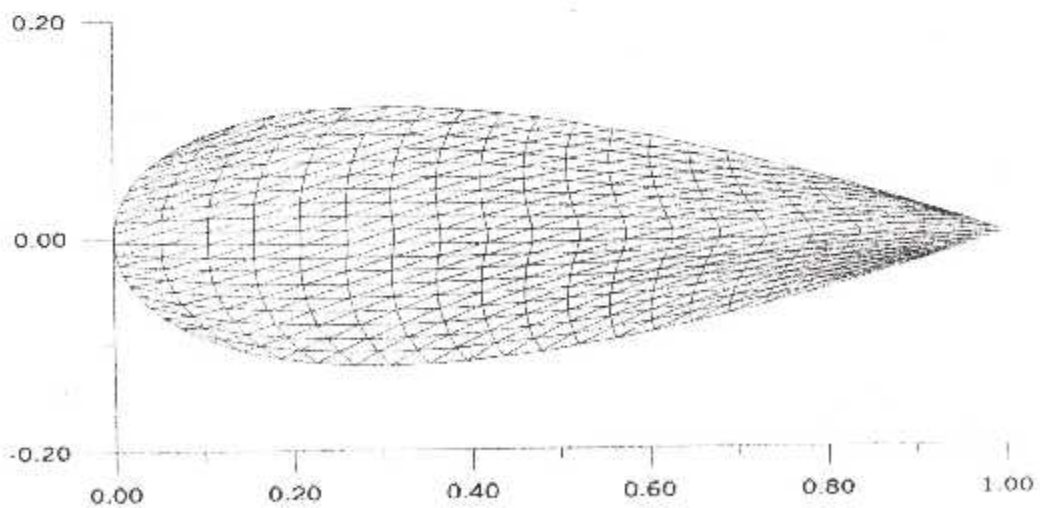


Fig.VI.9 : Maillage triangulaire d'un profil NACA0024

\* LES PROFILS NON SYMETRIQUES :

- NACA 23012:

IP= 3.825070889296163E-002

XG= 6.079618861413865E-002 YG= 1.204833772638952E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.02169839	0.0958495	0.067829	0.012569
2	11	10	0.02101254	0.1026541	0.067622	0.013255
3	11	10	0.02172610	0.1152289	0.062886	0.015251

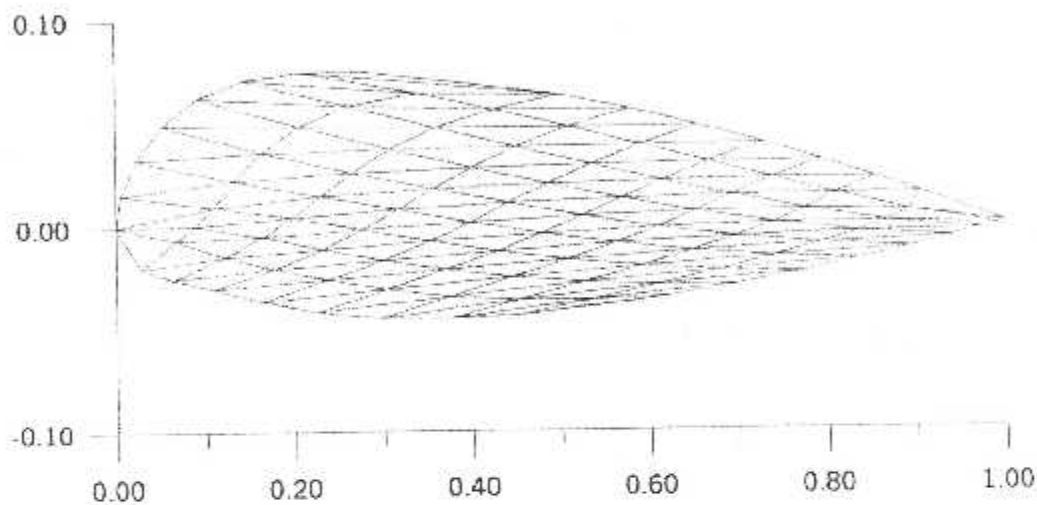


Fig.VI.10 : Maillage triangulaire du profil NACA23012

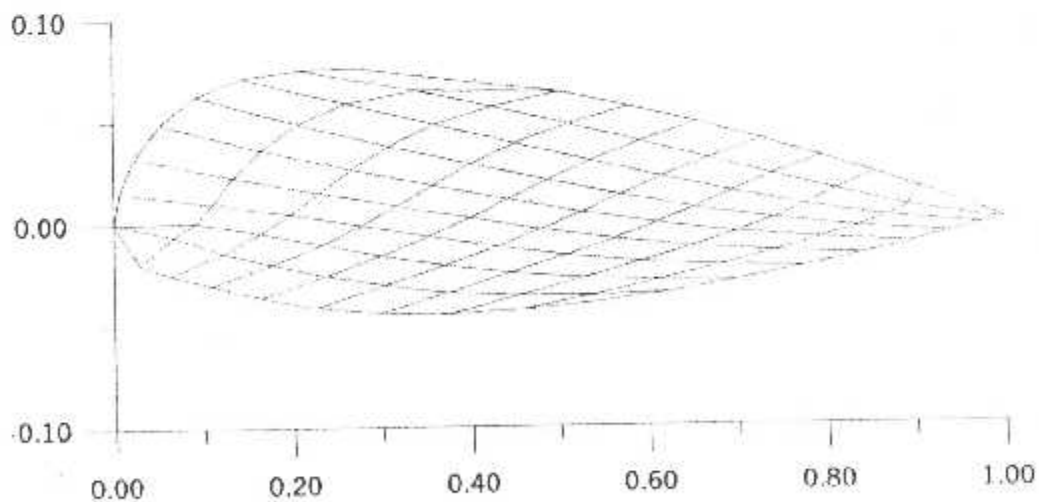


Fig. VI.11 :Maillage quadrilatère du profil NACA23012



\* NACA 23015:

IP = 8.885247647945856E-003

XG= 6.075062679030704E-002

YG= 1.413208889033370E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.00157764	0.0955744	0.067834	0.01155
2	11	10	0.0142511	0.0821541	0.060154	0.01256
3	11	10	0.00158749	0.1152489	0.063542	0.01483

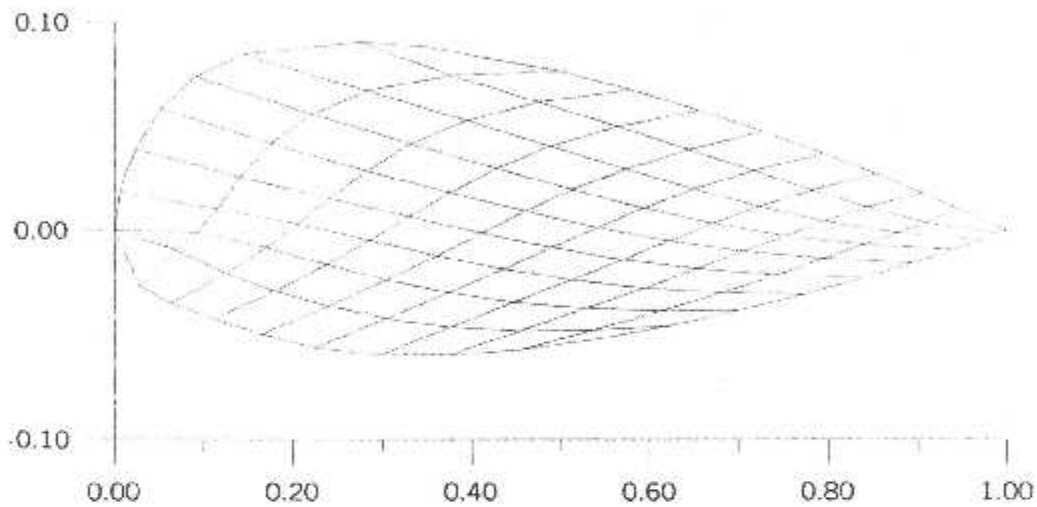


Fig.VI.12 : Maillage quadrilatère du profil NACA23015

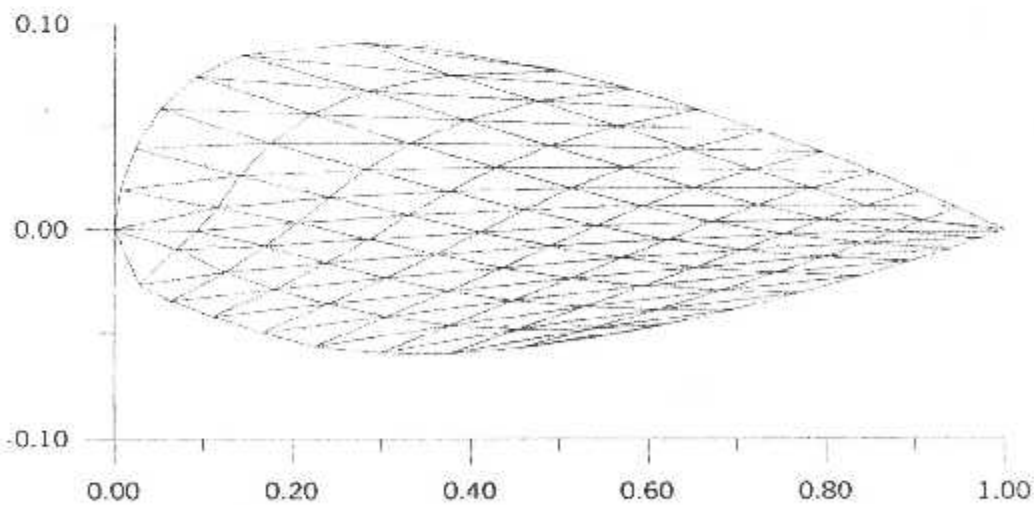


Fig. VI.13 : Maillage triangulaire du profil NACA23015

\* NACA 23018:

IP= 1.0952933143E-002

XG= 6.070506547611363E-002 YG= 1.621583883578972E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.02095293	0.0895894	0.067839	0.02063
2	11	10	0.01548777	0.0910514	0.065654	0.02652
3	11	10	0.01999187	0.1226523	0.064197	0.01442

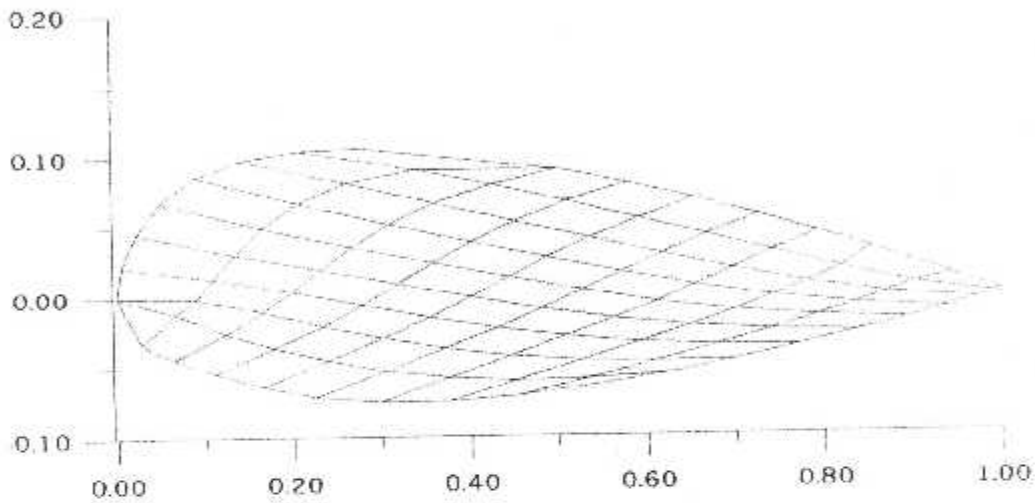


Fig.VI.14 :Maillage quadrilatère du profil NACA23018

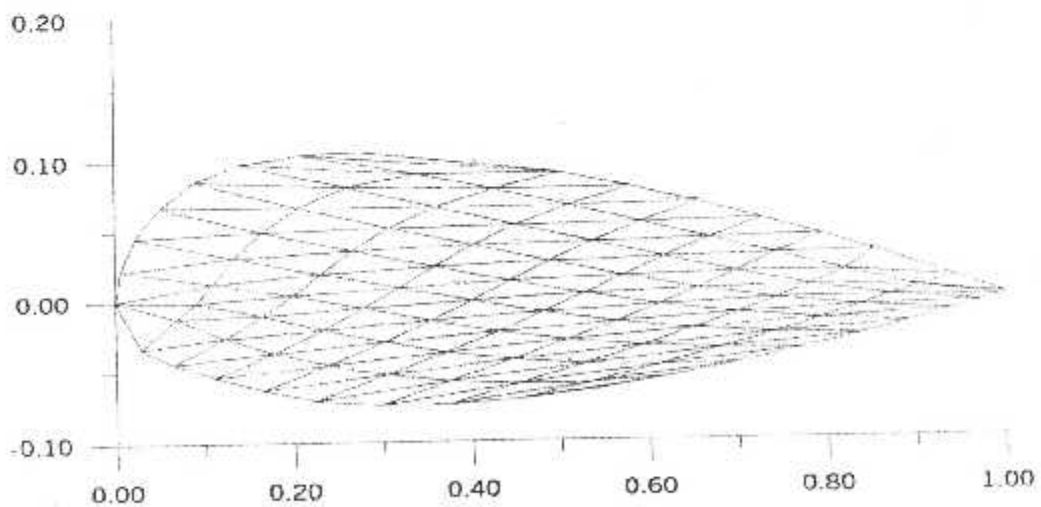


Fig.VI.15 : Maillage triangulaire du profil NACA23018

\* NACA 23024 :

IP= 1.511546241757333E-002

XG= 6.061394219759012E-002

YG= 2.038334652186759E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.0263664	0.0787744	0.067848	0.028806
2	11	10	0.0275486	0.0821541	0.066986	0.023657
3	11	10	0.0280862	0.0842489	0.065509	0.023602

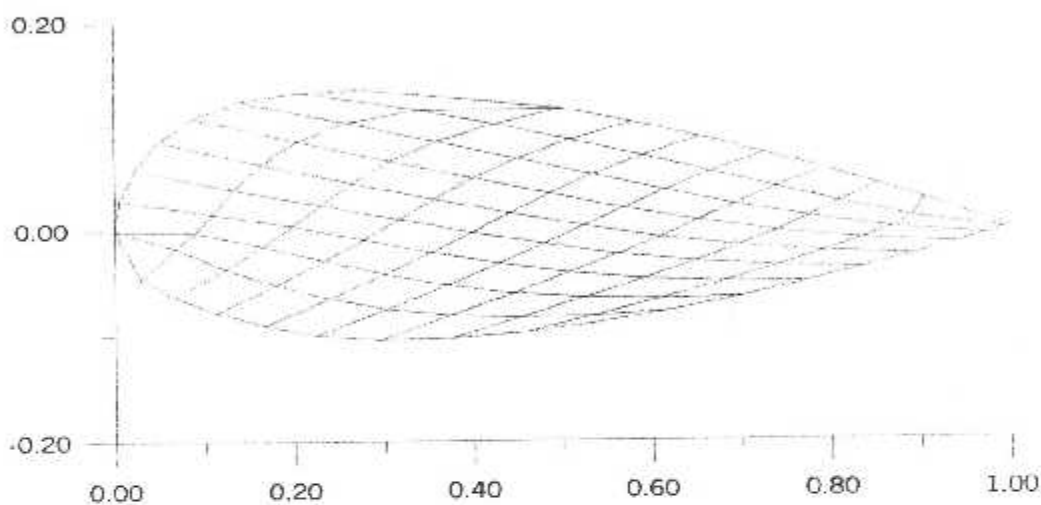


Fig.VI.16 : Maillage quadrilatère du profil NACA2324

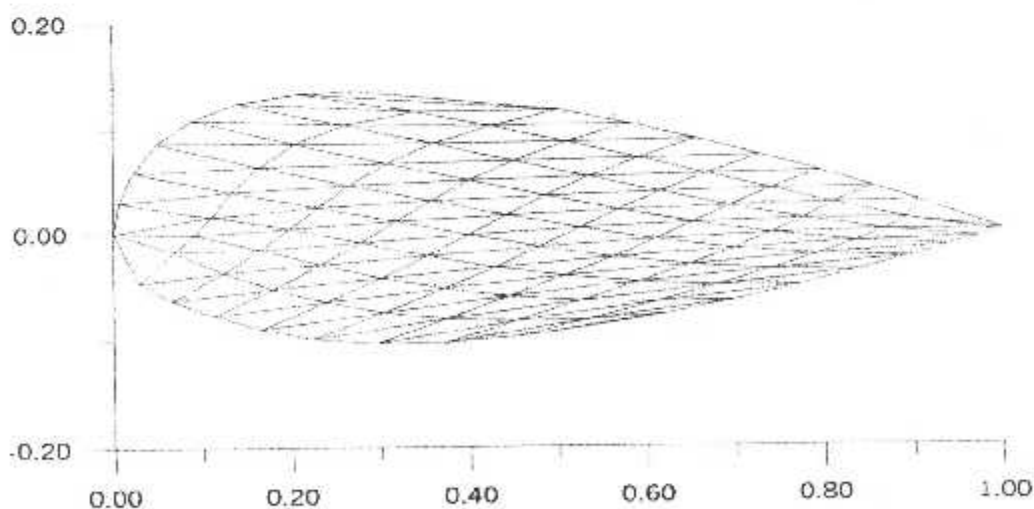


Fig.VI.17 : Maillage triangulaire du profil NACA2324

\* NACA 2412:

IP= 6.913866121592007E-002

XG= 6.019549929738242E-002

YG= 1.009785974347448E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.0510058	0.1528744	0.067833	0.014657
2	11	10	0.0501120	0.1215449	0.065249	0.010254
3	11	10	0.0554862	0.1601581	0.063516	0.032730

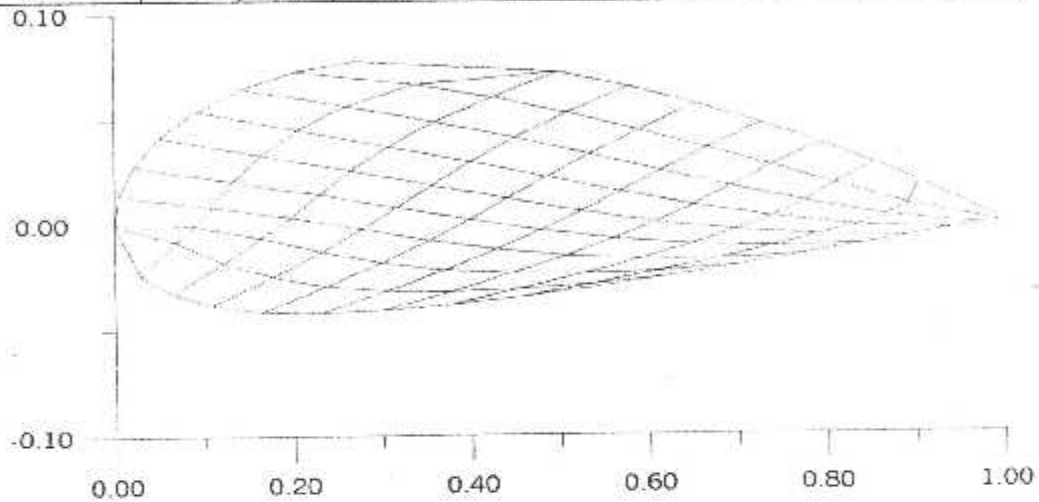


Fig.VI.18 : Maillage quadrilatère du profil NACA2412

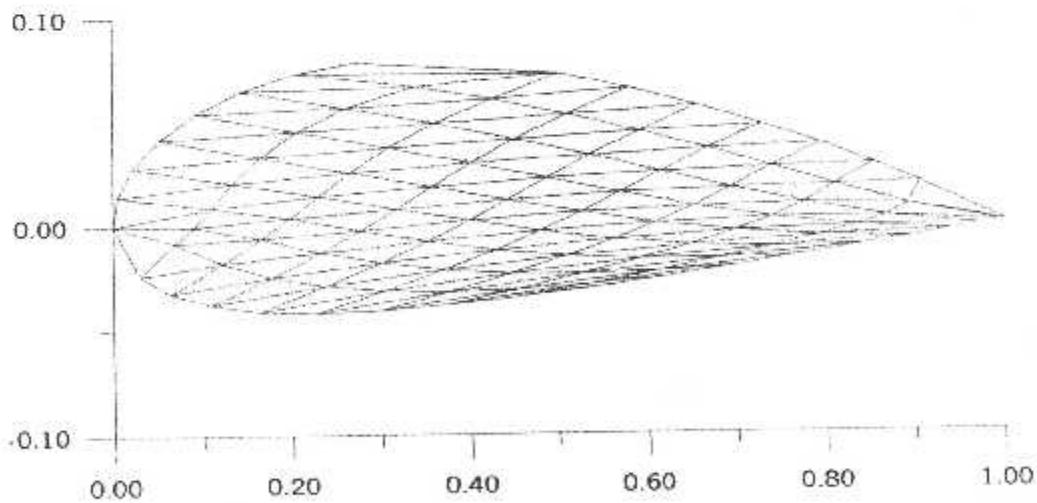


Fig.VI.19 : Maillage triangulaire du profil NACA2412

\* NACA 4412:

IP= 3.947297821283500E-002

XG= 5.943353278654830E-002

YG= 1.178482277052575E-002

Type d' E.F	NNX	NNY	C	$\tau_{MAX}$	P	
					X	Y
1	11	10	0.05112489	0.2021548	0.067855	0.032991
2	11	10	0.05954874	0.1998589	0.067254	0.021546
3	11	10	0.05547706	0.2112154	0.066701	0.026753

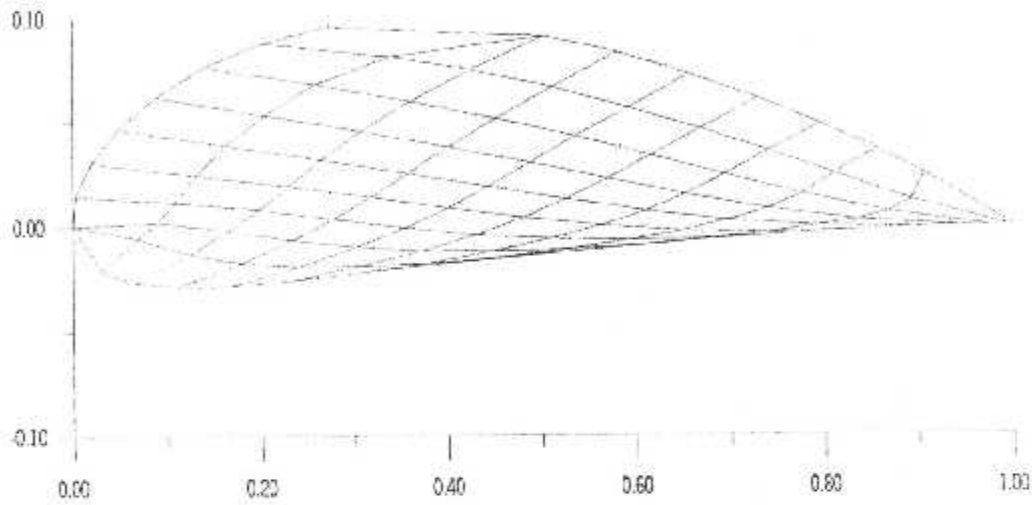


Fig.VI.20 : Maillage quadrilatère du profil NACA4412

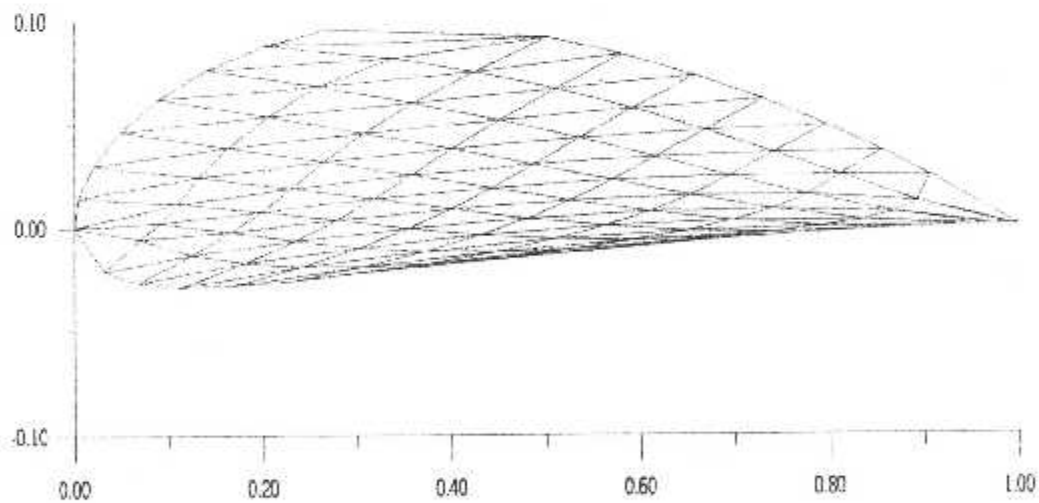


Fig.VI.21 : Maillage triangulaire du profil NACA4412

### VI.3. Interprétation des résultats :

Dans cette partie, on va présenter quelques résultats numériques et graphiques obtenus par la résolution de l'équation de poisson, avec des conditions aux limites appropriées pour toutes les géométries traitées.

Après la discrétisation des différentes géométries avec les éléments triangulaires trois et six nœuds, et le quadrilatère à quatre nœuds, on observe que :

\* Pour le cercle, la constante de torsion est très proche du moment polaire calculé analytiquement. Et le nœud (point) d'application de la contrainte maximale de torsion se situe aux alentours du centre de gravité pour les petites discrétisations et se déplace vers la périphérie de la section pour les grandes discrétisations.

\* Pour l'ellipse, la constante de torsion est différente du moment polaire calculé analytiquement. Et le nœud (point) d'application de la contrainte maximale de torsion se situe près du périphérie de la section.

\* Pour le carré, la constante de torsion converge vers le moment polaire calculé analytiquement avec une erreur relative. Et que le nœud (point) d'application de la contrainte maximale de torsion se situe aux alentours du centre de gravité. autrement dit, à chaque fois qu'on augmente le nombre d'éléments finis, la contrainte de torsion est maximale aux environs du centre de gravité.

\* Pour le rectangle, la constante de torsion se rapproche du moment polaire calculé analytiquement avec une erreur relative. Et le nœud (point) d'application de la contrainte maximale de torsion se situe tous près du centre de gravité du rectangle, il est à noter aussi qu'avec l'augmentation du nombre d'éléments, ce point d'application de la contrainte maximale de torsion converge vers le centre de gravité.

Nous remarquons que la constante de torsion pour le cercle (section circulaire) est égale (avec une certaine erreur) au moment polaire de la section, par contre celle-ci en est différente pour les autres géométries classiques tel le carré, l'ellipse et le rectangle (section non circulaire).

Ceci nous permet de dire que la méthode des éléments finis est applicable puisque elle nous donne de bons résultats du moment que la constante de torsion du cercle coïncide avec son moment polaire. et de valider les résultats obtenus pour les autres géométries (sections non circulaires) et notamment les profils.

\* Pour les profils symétriques étudiés qui sont le NACA0009, NACA0012, NACA0018 et le NACA0024, nous remarquons que la constante de torsion est différente du moment polaire calculé analytiquement comme pour les géométries non circulaires précédentes. Et le nœud (point) d'application de la contrainte maximale de torsion se situe au alentours de centre de gravité, et plus

le nombre d'éléments finis est grand, plus ce dernier se déplace vers le centre de gravité de la géométrie.

\* Pour les profils non symétrique que nous avons abordé, et qui sont le NACA23009, NACA23012, NACA23015, NACA23018, NACA23024, NACA2412, NACA2415, NACA2418, NACA4412 et en fin le M6, la contrainte de torsion reste toujours différente du moment polaire calculé analytiquement mais, on note aussi que le point d'application de la contrainte maximale de torsion se situe tous près du centre de gravité du profil.

## Conclusion

L'objectif de travail était de procéder à la simulation numérique du problème de PRANDTL pour la torsion des poutres de sections non circulaires, par la méthode des éléments finis, tout en déterminant et localisant la contrainte de torsion maximale, afin d'y remédier efficacement en renforçant la structure en ces points.

Une simulation basée sur l'extension de l'analyse mathématique de la torsion a été adoptée, qui a abouti à un problème de l'équation de Poisson.

La modélisation et la discrétisation numériques utilisées sont basées sur la méthode des éléments finis, pour la résolution de l'équation différentielle partielle du second ordre type elliptique dans les domaines complexes.

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis par un programme de calcul nous permet de trouver des résultats numériques pour des sections circulaires et non circulaires, avec une bonne adaptation aux frontières tout en ajustant la précision d'interpolation par l'utilisation des trois types d'éléments finis, triangulaire trois et six nœuds et le quadrilatère quatre nœuds dans les maillages générés.

Cependant, les solutions numériques obtenues ont fait l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques obtenus par d'autres sous-programmes.

Nous avons remarqué en premier lieu qu'en augmentant la discrétisation, on obtient une meilleure précision et une convergence vers la solution exacte. On peut remarquer aussi que, les solutions obtenues avec des éléments finis de type triangulaire six nœuds sont plus précises et meilleures que les solutions obtenues avec les éléments triangulaires trois nœuds et quadrilatères quatre nœuds. Il est justifié, car l'interpolation avec ces éléments est faite avec des polynômes d'ordre supérieur et avec plusieurs termes utilisés dans ces fonctions d'interpolation.

La présente étude nous a amené à la conclusion suivante :

- La méthode des éléments finis confirme, que pour les sections circulaires, le moment polaire est égale à la constante de torsion, et que le moment polaire est différent de la constante de torsion, d'où l'inexactitude d'appliquer la formule donnant l'angle de torsion unitaire aux sections non circulaires.
- Le point d'application de la contrainte de torsion est très proche du centre de gravité.



Finalement, nous espérons que ce travail pourrait servir de base pour un développement progressif dans les techniques appliqués aux éléments finis et dans tout travail se portant sur la torsion des structures.

# *Annexes*

I / - Equations d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

II / - Relation déformation / contrainte :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \\ \gamma_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{G} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

III / - Equation de compatibilité :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} \quad (\text{A-4})$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \quad (\text{A-5})$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (\text{A-6})$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (\text{A-7})$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \quad (\text{A-8})$$

$$\bar{X} = \sigma \cdot L + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{zy} \cdot n$$

$$\bar{Y} = \sigma \cdot m + \tau_{xy} \cdot L + \tau_{zy} \cdot n \quad (\text{A-9})$$

$$\bar{Z} = \sigma \cdot n + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{zx} \cdot L$$

IV / - Equations de compatibilité géométrique :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\text{A-10})$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{A-11})$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

## INTEGRATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DE « GAUSS-LEGENDRE »

### 1/ INTEGRATION NUMERIQUE

Dans la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et vu que l'intégration numérique fait une partie intégrante de cette méthode, on a opté la méthode de *GAUSS-LEGENDRE* puisqu'elle est la plus utilisée et efficace que d'autres méthodes comme celle de *NEWTON-CÔTE* ou *SIMPSON*...

Dans la méthode de *GAUSS-LEGENDRE*, les « r » poids «  $Wp_i$  » et les « r » abscisses  $\xi_i$  sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre ' $m \leq 2r-1$ ', [23].

#### 1-a/ Détermination des poids « $Wp_i$ » et des abscisses $\xi_i$ :

Si 'F' est une fonction polynomiale de degré ' $m \leq 2r-1$ ', nous pouvons l'intégrer exactement par la méthode de *GAUSS-L* sur l'intervalle  $[-1, +1]$  :

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r Wp_i F(\xi_i) \quad (B-1)$$

L'équation (B-10) est donc vérifiée pour le polynôme suivant :

$$F(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots + a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (B-2)$$

Pour déterminer les poids  $Wp_i$  et les abscisses  $\xi_i$  qui sont aussi des inconnus, nous portons l'expression (B-2) dans (B-1) nous aurons alors :

$$a_1 \int_{-1}^{+1} d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi = a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) + \dots + a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1}) \quad (B-3)$$

Pour que (B-3) soit identiquement vérifiée pour tout  $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ , il faut que :

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=0, 2, 4, \dots, 2r$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

Soit :

$$\begin{aligned} 2 &= W_1 + W_2 + \dots + W_r \\ 0 &= W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r \\ 2/3 &= W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_r \xi_r^2 \\ &\vdots \\ 0 &= W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1} \end{aligned} \quad (B-4)$$

Le système (B-4) est linéaire en  $W_i$  et non linéaire en  $\xi_i$ , il détermine les 2r paramètres de (B-1) sous les conditions :

$$\left. \begin{aligned} W_i &> 0 \\ 0 &< \xi_i < 1 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

Les abscisses  $\xi_i$ , solution de (B-4) sont aussi les racines du polynôme de *LEGENDRE* d'ordre 'r' :

$P_k(\xi) = 0$ , défini par la formule de récurrence :

$$\left. \begin{aligned} P_0(\xi) &= 0 \\ P_1(\xi) &= \xi \\ &\vdots \\ P_k(\xi) &= \frac{2k-1}{k} \xi \cdot P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(\xi) \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, r \quad (B-5)$$

Les poids  $W_i$  sont donnés par [23] :

$$W_i = \frac{2(1-\xi_i^2)}{(r \cdot P_{r-1}(\xi_i))^2} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (B-6)$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^4}{(2r+1)(2r)!^3} \frac{d^{2r}F}{d\xi^{2r}} \quad (B-7)$$

Le tableau suivant donne les valeurs des abscisses  $\xi_i$  et des poids  $W_i$  pour :  $r=1$  jusqu'à '7'. Les abscisses  $\xi_i$  sont symétrique par rapport à  $\xi_i = 0$ . Les poids  $W_i$  correspondant à deux points symétriques sont égaux : (la précision est de l'ordre  $10^{-19}$ )

r	$\xi_i$	$W_i$
1	0.000000 000000 000000	2.000000 000000 000000
2	± 0.577350 269189 625764	1.000000 000000 000000
3	± 0.774596 669241 483377 0.000000 000000 000000	0.555555 555555 555555 0.888888 888888 888888
4	± 0.861136 371594 052575 ± 0.339981 043584 856264	0.347854 845137 453857 0.652145 154862 546142
5	± 0.906179 845938 663992 ± 0.538469 310105 683091 0.000000 000000 000000	0.236926 885056 189087 0.478628 670499 366468 0.568888 888888 888888
6	± 0.932469 514203 152027 ± 0.661209 366466 264513 ± 0.238619 185083 196908	0.171324 492379 170345 0.360761 573048 138607 0.467913 934572 691047
7	± 0.949107 912342 758524 ± 0.741531 185599 394439 ± 0.405845 151377 397166 0.000000 000000 000000	0.129484 966168 869693 0.279705 391489 276667 0.381830 050505 118944 0.417959 183673 469387

**Tableau 1 :** Les abscisses  $\xi_i$  et les poids  $W_i$  de l'intégration numérique par la méthode de GAUSS-LEGENDRE, pour :  $r = 1$  jusqu'à '7'

**1-b/ Généralisation à un intervalle d'intégration quelconque**

Jusqu'à présent, nous avons présenté la méthode de GAUSS-L dans l'intervalle [-1, +1] sans se soucier de sa généralisation à un intervalle quelconque [a, b] sur lequel 'F' est définis. Avec un changement de variable approprié, une intégrale du type suivante, peut facilement se ramener à une intégrale sur l'intervalle [-1, +1].

$$\int_a^b F(x) dx \quad (B-8)$$

Le changement de variable qu'il faudrait opérer est le suivant :  $x = \frac{b-a}{2} \cdot \xi + \frac{b+a}{2}$

Après remplacement de x par sa valeur, l'intégrale (B-8) s'écrit :

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)) d\xi$$

Que nous pouvons l'évaluer par la méthode de GAUSS-LEGENDRE.  
D'après ce qui précède, nous pouvons évaluer l'intégrale double suivante :

$$I = \int_c^d \int_a^b F(x,y) dx dy \tag{B-9}$$

Avec cette méthode, nous on utilisant dans chaque direction (x et y) une intégration numérique à une dimension. Pour cela, nous devons opérer un changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= x(\xi) \\ y &= y(\eta) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ y &= \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2} \end{aligned}$$

Après remplacement de x et y par leurs nouvelles expressions dans (B-9), l'intégrale I s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \end{aligned} \tag{B-10}$$

Avec  $r_1$  points dans le sens de 'x' et  $r_2$  points dans le sens de 'y', la méthode de GAUSS-L permet d'intégrer exactement le produit d'un polynôme en x d'ordre  $2r_1-1$  et d'un polynôme en y d'ordre  $2r_2-1$ .

Remarque :

Les termes :  $\left. \begin{matrix} \frac{b-a}{2} \\ (b-a)(d-c) \\ 4 \end{matrix} \right\}$  intégration à une dimension ou intégration double

Sont constants, parce que les limites d'intégration sont constantes. En effet, ce sont les déterminants des matrices Jacobiennes des transformations :

$$\begin{aligned} (x) &\xrightarrow{\tau_1} (\xi) \\ (x, y) &\xrightarrow{\tau_2} (\xi, \eta) \end{aligned}$$

Exemple :  $|J_2| = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$

Les déterminants de ces matrices peuvent ne pas être constants. Dans ce cas nous n'avons pas le droit de les faire sortir des signes «  $\sum$  » somme, et ils doivent être évalués aux points d'intégration de GAUSS-L. La forme d'intégration devient :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} F(x,y) dx dy \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) Det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) Det[J(\xi_i, \eta_j)] \end{aligned} \tag{B-11}$$

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.AMTOUT  
« Cours d'analyse numérique de magistère »  
Institut d'aéronautique, Université de BLIDA, ALGERIE, (1998).
- [2] MOULOUD.AISSANI.  
« Calcul de l'écoulement subsonique laminaire dans des conduites de section complexe par la méthode des éléments finis »  
Mémoire de magistère, institut d'aéronautique, Université de BLIDA, ALGERIE, (2002).
- [3] A.BERKANI & F.TAIL.  
« Résolution numérique de l'équation de poisson dans un domaine simplement connexe quelconque avec conditions aux limites de type Dirichlet »  
Mémoire d'ingénieur, département de mathématiques, Université de BLIDA, ALGERIE, (2000).
- [4] M.BOUMAH RAT & A.GOURDIN  
« Méthodes numériques appliquées »  
Edition OPU, Algérie, (1993).
- [5] G.BEAUQUET & M.POGU.  
« Programmation des éléments finis (2D) »  
Edition CEPADUES - Toulouse, FRANCE, (1987).
- [6] A.BAZERGUL.  
« Résistance des matériaux »  
Edition de l'école polytechnique de Montréal, (1969).
- [7] FERDINAND P.BERR.  
« Mécanique à l'usage des ingénieurs (statique) »  
Edition MC GRAW-HILL, (1975).
- [8] B.DEMIDOVITCH.& I.MARRON.  
« Eléments de calcul numérique »  
Edition MIR.MOUSCOU, (1987).



- [9] GOURI.DHIATT & GILBERT.TOUZOT.  
 << Une présentation de la méthode des éléments finis >>  
 Université LAVAL, MALOINE.S.A, Editeur, PATIS, (1981).
- [10] B.DEMIDOVITCH.  
 << Recueil d'exercices et problèmes >>  
 Edition MIR.MOUSCOU, (1986).
- [11] TOUFIK.EL-AICHI  
 << Application des techniques de génération de maillage pour le calcul des écoulement potentiels transsoniques stationnaires >>  
 Mémoire de magistère, institut d'aéronautique, Université de BLIDA, ALGERIE, (1997).
- [12] CHARLES.HIRSCH.  
 << Numerical computation of internal and external flows >>  
 A Wiley-interscience publication, NEW YORK,(1988).
- [13] W.F.HUGHES & E.W.GAYLORD.  
 << Basic equations of engineering science >>  
 Schaums outline series, MC GRAW-HILL, (1964).
- [14] N.J.HOFF.  
 << Analysis of structures >>  
 Wiley, NEW YORK, (1956).
- [15] A.HRENNIKOFF.  
 << Solution of problems in elasticity by the framework method >>  
 J.appl.Mech, vol.8, pp: 169-175, (1941).
- [16] J.F.IMBERT  
 << Analyse des structures par éléments finis >>  
 3ème Edition, SUPAERO, France,(1984).
- [17] B.M.IRONS & O.C.ZIENKIEWICZ.  
 << The isoparametric finite element system – a new concept in finite element analysis >>  
 Proceedings, confernee on recent advances in steress analysis.  
 Royal aeronautical society, LODON, (1968).

- [18] AMAR KHENNANE.  
 << Méthodes des éléments finis, énoncés des principes de base >>  
 Edition OPU, ALGERIE, (1997).
- [19] H.KARDESTUNCER.  
 << Finite element handbook >>  
 Edition MC GRAW-HILL Book Company, (1987).
- [20] MASATAKE MOVI.  
 << The finites elements method and its application >>  
 MAC-MILAN publishing compagny, NEWYORK, (1986).
- [21] T.H.G.MEGSON EDWARD ARNOLD.  
 << Aircraft structure of engineering students >>  
 Edition MC GRAW-HILL, New York, (1964).
- [22] WILLIAM A.NASH.  
 << Résistance des matériaux >>  
 Série schaum, Mechanics University of Florida, (1975).
- [23] YUCEF.OURAGIL.  
 << Aide mémoire de mathématique pour ingénieur >> PARTIE II.  
 Edition OPU, ALGERIE, (1993).
- [24] A.POUJADE.  
 << Cellule et système >>  
 Institut d'aéronautique JEAN MERMOZ, France, (1991).
- [25] N.PISKOUNOV.  
 << Calcul différentiel et intégral >> TOME I,II  
 Edition MIR.MOUSCOU, (1982).
- [26] J.S.PRZEMIENIECKI.  
 << Theory of matrix structural analysis >>  
 Edition MC GRAW-HILL, New York, (1968).
- [27] J.N REDDY.  
 << An introduction to the finite element method >>  
 Edition MC GRAW-HILL Book Company, (1988).

- [28] R.M.RIVELLO.  
« Theory and analysis of flight structures »  
Edition MC GRAW-HILL Book Company, New York, (1969).
- [29] G.STRANG & G.J.FIX.  
« An analysis of the finite element method »  
Wellesley-Cambridge press, Wellesley, (1973).
- [30] S.TIMOSHENKO.  
« Theory of elasticity »  
Edition MC GRAW-HILL Book Company, New York, (1951).
- [31] N & S.TAIBL.  
« La programmation en FORTRAN 77 »  
Edition BERTI, (1992).
- [32] M.TURNER, R.W.CLOUGH, H.MARTIN & ROBERT DAUTRY.  
« Stiffness and deflection Analysis of complex structures »  
Journal of aeronautical science, vol.23, pp: 805-823, (1956).
- [33] O.C.ZIENKIEWICZ.  
« The finite element method in engineering science »  
2<sup>nd</sup> Edition MC GRAW-HILL, LONDON, (1971).
- [34] TOUFIK ZEBBICHE.(CHARGER DE COURS À L'I.A.B)  
« Eléments finis » cours ingénieur aéronautique, option structure.  
Institut d'aéronautique, Université de BLIDA, ALGERIE,(2001).