

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ SAAD DAHLEB - BLIDA
INSTITUT D' AERONAUTIQUE
DÉPARTEMENT DE CONSTRUCTION
AÉRONAUTIQUE



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
D'INGENIEUR D'ETAT EN AERONAUTIQUE

OPTION : PROPULSION

THEME

EFFET DE LA LONGUEUR SUR
LA DEFLEXION DES AILES

Etabli par :
BOUKEFOUSSA ZERROUK

Promoteur :
Mr ZABBICHE TOUFIK

Co - Promotrice :
Mlle BOUDJELLAL HAYET

Année universitaire 2002 / 2003

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A mes très chers parents, et mes chers frères & sœurs qui m'ont soutenu durant mes années d'études et qui ont toujours été à mes côtés quand j'en avais besoin.

A ma chère tante Bahia qui m'a encouragé malgré qu'elle était loin.

A toute ma famille grands et petits.

A mes amis les plus proches : Riad, Youcef, Amine, Samir & Sofiane, pèruche.

A mes amis et mes collègues de l'université de Blida : Aradj, Kalkouli, caid,
Chouitère.

A toute ma promotion 2003.

REMERCIEMENTS

Mes remerciements les plus sincères à mon promoteur monsieur Zabiche Toufik pour sa précieuse aide, ses conseils et remarques durant la réalisation de mon projet de fin d'étude ainsi Mlle Boudjellal hayet en tant que co-promotrice.

Je tiens à remercier aussi tout particulièrement madame Lila et Mlle ouahida du service scolarité de mon institut ainsi que tous mes professeurs qui m'ont suivis durant ma spécialité.

En dernier je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Résumé

Les anciens calculs de la résistance des matériaux sur la déflexion se fait sur la base des petites déformations , si la dérivé de la fonction de déplacement est nulle dans les équations , les résultats sont bons sous réserve de l'exactitude de cette hypothèse.

Le but de ce mémoire est d'ignorer la présence de l'hypothèse , c'est à dire qu'on travail avec des poutres à grandes déformation , le model mathématique du phénomène change d'une équation différentielle linéaire de 2^{ème} degré d'ou la solution numérique est nécessaire ; par conséquent un programme informatique est élaboré pour résoudre ce problème.

Abstract

The former {ancient} calculations of the resistance of materials on the deflection makes on the basis of small deformations. If by-product of the function{*office*} of movement is nobody in equations, results are good under reserve of the exactness of this hypothesis.

The purpose of This report is to ignore the presence of the hypothesis, that is that one work with beams in big deformation , the mathematical model of the phenomenon changes a linear differential equation of 2rd degree of or numeric {digital} solution is necessary ; consequently a computer program is elaborated to resolve this problem.

TABLES DES MATIERS

Dédicace.....	
Remerciements.....	
Liste des symboles.....	I
Liste des figures.....	III
Table des matières.....	VI
Introduction.....	IX

Chapitre I : Généralité sur les différentes parties de l'aile

I-1. Les composantes essentiels de l'avion.....	01
I-1-1. Le fuselage.....	01
I-1-2. La voilure.....	01
I-1-3. Les ailerons.....	02
I-1-4. Les empennages.....	02
I-1-5. Le train d'atterrissage.....	02
I-1-6. Les organes de propulsion.....	02
I-1-7. Les systèmes de pilotage.....	04
I-1-8. Les systèmes auxiliaire.....	05
I-2. Différentes formes de profil.....	05
I-2-1. Description d'un profil.....	05
I-2-2. Classification des profils.....	06
I-3. Construction d'une aile.....	09
I-3-1. Les différents types d'ailes.....	10
I-3-1-1. Aile bi-longeron à revêtement non travaillant.....	10
I-3-1-2. Aile bi-longeron à revêtement travaillant torsion.....	11
I-3-1-3. Aile mono-longeron à revêtement travaillant.....	12
I-3-1-4. Aile à caisson pur.....	12

I-3-2. Les éléments principaux de la voilure	13
I-3-2-1. Les longerons	13
I-3-2-2. Les caissons	15
I-3-2-3. Nid d'abeille	15
I-3-2-4. Les nervures	16
I-3-2-5. Les raidisseurs - Lisses	18
I-3-2-6. Le revêtement	19

Chapitre II : Calcul de moment

II-1. Moment statique.....	25
II-2. Centre de gravité.....	25
II-3. Moments d'inerties	26
II-3.1 Translation du repère.....	27
II-3.2. Rotation du repère.....	28
II-4. Rayon de giration.....	32
II-5. Méthode de calcul des moments d'inerties des profils d'ailes.....	34
II-5-1. Moment d'inertie d'une surface plane.....	34
II-5-2. Moment d'un triangle quelconque.....	34
II-6. Modélisation d'une surface d'un profil quelconque par triangle	36

Chapitre III : Les paramètres influents sur l'équation de la deflexion

III-1. La flexion dans les structures Aéronautiques	39
III-1-1. Efforts appliqués à la voilure.....	39
III-1-2. Efforts appliqués à une pale d'hélicoptère	41
III-2. Effort tranchant et le moment fléchissant	50
III-2-1. Principaux corollaires	54
III-3. Détermination des constantes K_z et K_y de l'énergie	55
III-3-a \ Pour une section quelconque	55
III-3-B \ Application	57

III-4. Condition de résistance	60
III-5. Hypothèses.....	61
III-5-1. Hypothèse sur le corps solide	61
III-5-2. Hypothèse sur les forces	61
III-5-3. Hypothèse sur la déformation.....	61
III-6. Déflexion élastique des poutres	62
III-6-1. Définition de la déflexion d'une poutre	62
III-6-2. Hypothèses et limitation	65
III-7. Déplacements des poutres en flexion	65
III-8. La méthode des paramètres initiaux	66
III-8-1. L'ordre de résolution	68

Chapitre IV : Résolution de l'équation différentielle et interprétation des résultats

IV-1. Etude des petites déformations.....	72
IV-1-1. Exemple d'une poutre encastree libre	72
IV-1-2. Exemple d'une poutre encastree libre avec une charge répartie sur le long de la poutre	74
IV-2. Etude des grandes déformations.....	80
IV-2-1. Définition de la méthode de RUNG-KUTTA	80
IV-2-2. Les cas à étudier	81
IV-3. Interprétation des résultats	81
Conclusion	87
Résumé	88
Annexe.....	89
Bibliographie	98

Liste des symboles

T_x : L'effort tranchant ;

M_x : Moment fléchissant ;

K_z : Coefficient de forme suivant l'axe des Z ;

K_y : Coefficient de forme suivant l'axe des Y ;

A : L'aire de la section ;

I_z : Moment d'inertie suivant l'axe Z ;

I_y : Moment d'inertie suivant l'axe y ;

b : Largeur de la bande ;

S_z^* : Moment statique de la partie haute par rapport à l'axe z ;

S_y^* : Moment statique de la partie haute par rapport à l'axe y ;

F_x : Force normale ;

W : Energie potentielle de la poutre sous l'action de F_x ;

E : Module de YOUNG ;

r : Rayon de cercle ;

y_x : Déplacement verticale d'une poutre suivant l'axe x ;

θ_x : Rotation des sections ;

M : les moments des couples extérieurs ;

I_{mn} : Moment d'un triangle quelconque ;

$S_{xx'}$: Moment statique par rapport à un axe xx' ;

A : L'aire d'une section ;

$\begin{cases} X_G \\ Y_G \end{cases}$: Coordonné du centre de gravité ;

$I_{xx'}$: Moment d'inertie par rapport à un axe xx' ;

I_{xy} : Produit d'inertie ;

b : Largeur de la bande ;

$\begin{cases} I_y \\ I_z \end{cases}$: Moment d'inertie autour de l'axe y et z ;

I_0 : Moment polaire ;

I_Δ : Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ ;

INTRODUCTION

La résistance des matériaux est une science théorique qui étudie le comportement des corps solides sous l'action des charges appliquées, et dont le principe fondamental est celui de la mécanique, à savoir qu'un corps est en équilibre, si la résultante des forces est celle des moments qui lui sont appliqués sont nuls.

Elle donne des résultats acceptables lorsque la géométrie des pièces à étudier est simple car rarement rencontré en pratique, s'avère très insuffisante lorsque les pièces prennent des formes de plus en plus complexes, aussi elle ignore l'effet perturbateur qu'apporte une discontinuité ou un changement brusque de géométrie sur la répartition des contraintes.

Devant ce déficit, on s'est longtemps borné à prendre un grand coefficient de sécurité, mais pour des raisons d'économie, de fiabilité,, différentes sciences et technique se sont développés dans ce sens, elles constituent « l'analyse expérimentale de la flexion » donnant des résultats de plus en plus précise, et réfutant ainsi de nombreuses études théoriques.

Ce présent mémoire est destinée à l'étude du phénomène de déflexion dans les structures d'avions, qui s'avère d'une grande utilité pour la sécurité et la résistance de l'appareil.

A travers ce modeste mémoire les informations pouvait être utiles à comparer entre deux méthodes de calcul de la flèche maximal de l'aile et de mettre en évidence l'influence de l'effort tranchant et le coefficient de forme sur le phénomène de la déflexion. Pour cela nous avons envisageons le plan de travail suivant :

CHAPITRE I : Généralité sur les différentes parties de l'aile .

On premier lieux on à citez les composante essentielles de l'avion, est en deuxième lieux les éléments essentielles qui constitue l'aile.

CHAPITRE II : Caractéristiques géométriques des profils d'ailes

Ou début de ce chapitre on a citer les différents moments ensuite les méthode de calcul de moment d'inertie pour les profils d'ailes.

CHAPITRE III : Les paramètres influant sur l'équation de la déflexion

En premier lieu, on a défini les effort applique sur la voilure au sol est on vol. Deuxièmement on a défini l'effort tranchant et sont effet sur la poutre, en troisième lieux on a déterminé le coefficient de forme, et a la fin on termine par définir, la déformation élastique d'une poutre et l'équation différentielle de la courbe de déflexion d'une poutre sollicitée par des forces latérales « **équation d'Euler - Bernoulli** » de la flexion d'une poutre et ensuite la définition de l'équation universel de la déformé avec quelques exemples.

CHAPITRE IV : Résolution de l'équation et interprétation

Au début de ce chapitre on aborde la méthode de la résolution de cette équation différentielle, définir la méthode **Rang - Kutta** et finir par résoudre l'équation différentielle pour différent models et terminera par Interprétation des résultats ainsi trouvés et terminer par une conclusion.

Chapitre I

Généralité sur les différentes parties de l'aile

- Les composants essentiels de l'avion
- Différentes formes de profil
- Construction d'une aile

Les éléments essentiels d'un avion sont la cellule, cette dernière se compose de : un fuselage, deux ailes et des empennages, le groupe motopropulseur, le train d'atterrissage, les équipements de pilotage et les systèmes auxiliaires.

I-1. Les composantes essentielles

I-1-1. Le fuselage

Le fuselage comprend le poste de pilotage et les aménagements nécessaires au transport de passagers ou de fret. Afin de limiter la consommation de carburant et d'augmenter l'autonomie, la plupart des avions volent à haute altitude, car la résistance de l'air y est moindre et le rendement des réacteurs meilleur.

Pour la sécurité des occupants, il est donc nécessaire de pressuriser l'intérieur du fuselage, lequel à 11 000 m d'altitude doit résister à une surpression de l'ordre de 60 kPa. Le fuselage est une section circulaire qui offre le meilleur compromis entre la résistance maximale et le poids minimal des structures ainsi que d'excellentes qualités aérodynamiques.

Le plancher (ou pont) est disposé de façon quasi diamétrale afin de maximiser le nombre de sièges de front et d'optimiser l'habitabilité tout en réservant un volume important aux soutes, situées sous le plancher.

Le fuselage est réalisé par l'assemblage de plusieurs tronçons constitués de structures (ou couple) annulaires réalisées par des lisses, ils sont renforcés par des longerons et revêtus de panneaux extérieurs et intérieurs, le pont contribuant à rigidifier l'ensemble. La partie arrière du fuselage est relevée afin de permettre le cabrage de l'appareil lors du décollage et de l'atterrissage, le nez est très court afin d'offrir le meilleur champ de vision possible durant ces phases. (voir fig. I-1) [1]

I-1-2. La voilure

La voilure (ou les ailes) constituent le système sustentateur principal de l'avion. Leurs qualités aérodynamiques, qui dépendent essentiellement de leur position par rapport au fuselage, de leurs caractéristiques géométriques (forme, surface, profil) et de leur état de surface, sont fortement influencées par la vitesse de l'avion et la densité de l'air. [1]

La solution idéale des ailes à géométrie variable mais elle est compliquée, n'étant pas envisageable pour l'instant sur les avions commerciaux.

Les constructeurs afin de limiter la consommation de carburant, définissent la partie fixe de l'aile en fonction de la vitesse de croisière (aile en flèche pour les avions subsoniques, aile delta pour le Concorde) et lui associent des surfaces mobiles destinées à adapter son profil aux différentes conditions de vol. (voir fig. I-1) [1]

I-1-3. Les ailerons

Des ailerons prolongent le bord de fuite (partie arrière des ailes) et pivotent vers le haut ou vers le bas en opposition de phase sur chacune des ailes afin d'incliner l'avion lors des virages selon l'axe longitudinale (contrôle du roulis). Ils sont divisés en deux groupes, les ailerons basse vitesse (ou extérieurs) et les ailerons grande vitesse (ou intérieurs), situés respectivement à l'extrémité de l'aile et à proximité de son emplanture. (voir fig.I-1).[1]

I-1-4. Les empennages

Situé sur la partie arrière du fuselage, ils jouent un rôle fondamental dans le pilotage et le maintien de la stabilité de l'avion. L'empennage vertical est constitué d'une partie fixe, la dérive, et d'une partie mobile qui lui est rattachée, la gouverne de direction. L'empennage horizontal est formé par les stabilisateurs, sur lesquels sont articulées et l'ensemble plans fixes-gouvernes de profondeur peuvent pivoter vers le haut ou vers le bas. (voir fig.I-1)[1]

I-1-5. Le train d'atterrissage

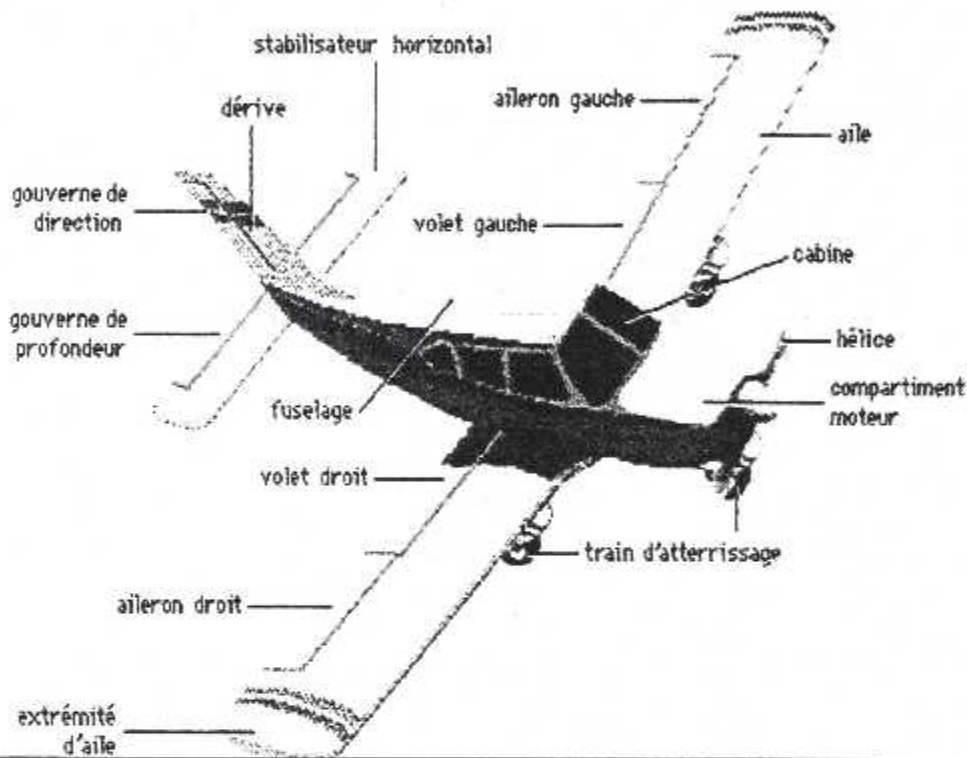
Les trains d'atterrissage constituent la partie la plus complexe d'un avion. Leur jambe principale fait office d'amortisseur en absorbant le choc de l'atterrissage. Ils comportent également un mécanisme de relevage, qui remonte ou abaisse le train, les roues et les freins. Il existe deux grandes classes de trains d'atterrissage : le train classique et le train tricycle. Le train classique comprend deux grandes roues situées en avant du centre de gravité de l'avion et une petite roue placée à la queue de l'appareil. Le train tricycle est muni de plusieurs roues en arrière du centre de gravité et d'une autre roue à l'avant du fuselage. L'atterrissage est plus aisé à l'aide d'un train tricycle car ce dernier améliore le freinage et la maniabilité de l'appareil. Par ailleurs, l'avion a ainsi moins de risque d'atterrir sur le nez.[1]

I-1-6. le groupe motopropulseur

Les avions commerciaux utilisent des turbopropulseurs et surtout des turbo-réacteurs. Les réacteurs, dont le diamètre est inférieur à celui des moteurs à hélices, offrent l'avantage d'une plus grande liberté quant au choix de leur emplacement. Contenus dans une nacelle, ils sont généralement suspendus sous l'aile par l'intermédiaire d'un élément structural, le mat réacteur. Les réacteurs sont équipés d'inverseur de poussée qui participent au freinage de l'avion en déviant le jet de gaz. Un même avion peut recevoir, au choix de la compagnie, l'un ou l'autre des moteurs disponible sur le marché sans modification structurelle majeure.

Sur les biréacteurs les moteurs sont fixés à l'arrière, de part et d'autre du fuselage, et, sur les triréacteurs, le troisième est logé dans la dérive ou dans la pointe arrière du fuselage.

(voir fig.I-2)[1]



Encyclopédie Encarta, © Microsoft Corporation. Tous droits réservés

Fig. I-1. Les composantes essentiel de l'avion.

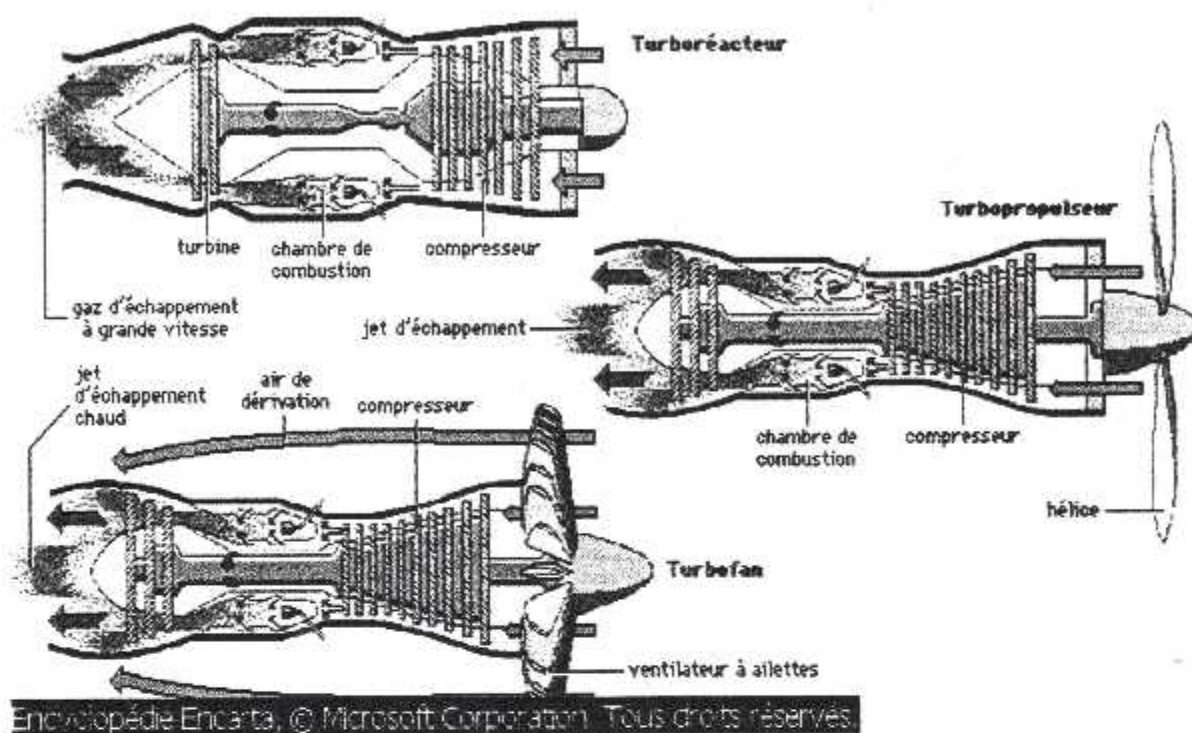


Fig. I-2. Les propulseurs.

I-1-7. Les systèmes de pilotage

Le poste de pilotage centralise les instruments nécessaires à la navigation, les commandes de vol, les systèmes de communication hertzienne, les commandes et instruments de contrôle des autres systèmes. Les progrès réalisés dans la conception de ces équipements convergent vers une plus grande précision, une sécurité accrue, une réduction du poids, mais surtout vers une meilleure assistance au pilotage et un plus grand confort. Les commandes de vol électriques remplacent la traditionnelle timonerie mécanique et contrôlent, grâce à des servocommandes, les moteurs et vérins hydrauliques des éléments mobiles (gouvernes, ailerons, trains d'atterrissage ...) ainsi que la poussée des réacteurs. Les ordres de pilotage, tout comme les données fournies par d'innombrables capteurs, sont traités numériquement par des ordinateurs affectés à des fonctions spécifiques (commandes de vol, navigation, etc.). Ceux-ci assistent le pilote et à sa demande, prennent en charge le contrôle de l'appareil (pilotage ou atterrissage automatique sans visibilité), le pilote peut à tout moment reprendre la main. Des écrans multifonctionnels en couleur remplacent de nombreux cadrans et offrent une grande souplesse d'utilisation ainsi qu'une grande richesse de présentation (écriture de texte, schémas fonctionnels, cartographie...). [1]

I-1-8. Les systèmes auxiliaire

Ils génèrent l'énergie électrique et hydraulique, et assurent la pressurisation et le conditionnement de l'air. Pour des raisons de sécurité différents circuits indépendants coexistent pour chaque fluide. Ils ont pour source principale les moteurs, pour source secondaire une turbine à gaz logée dans le cône arrière du fuselage, le groupe auxiliaire de puissance. Au sol ce dernier permet le démarrage des réacteurs par envoi de l'air sous pression assure le conditionnement de l'air et fournis l'énergie électrique grâce à un alternateur. En vol, les réacteurs entraînent des alternateurs et des pompes hydrauliques et fournissent l'air conditionnement via les systèmes de pressurisation. En cas de panne, ils sont relayés par le groupe auxiliaire et en dernier recours, des circuits électriques de secours fonctionnant sur batteries entrent en service.[1]

Après cette petite généralité sur les composantes essentielles de l'avion on continue par la description des différentes parties des ailes.

I-2. Différentes formes de profil

Pour des raisons de résistance structurale, il a fallu construire des ailes ayant une certaine épaisseur .

On a donc été amené à dessiner « des profils » dont les caractéristiques permettant de répondre aux exigences précédentes notamment accélérant l'écoulement au dessus et le ralentissant au dessous .

On appel profil la coupe verticale de l'aile par une parallèle au plan de symétrie de l'avion .

I-2-1. Description d'un profil

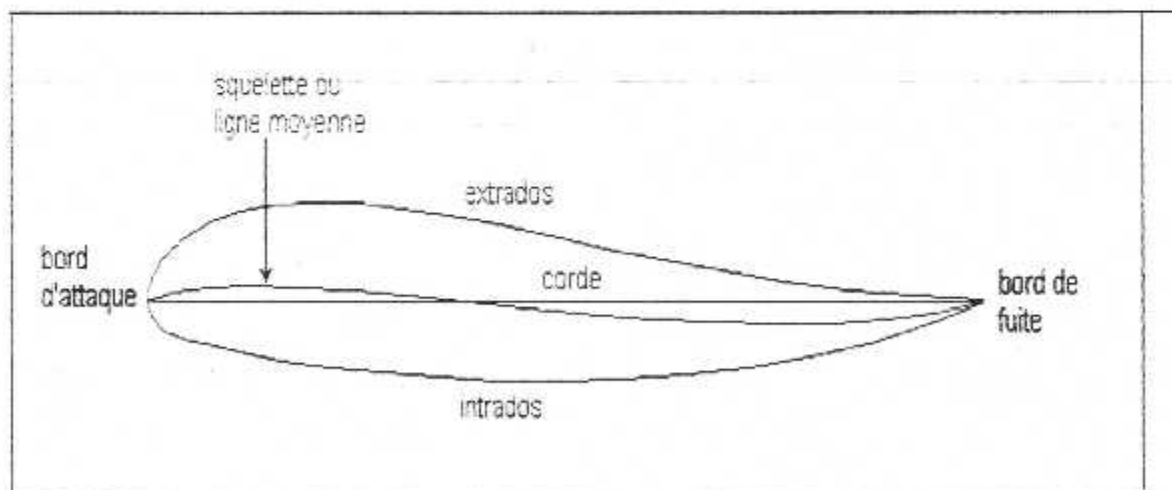


Fig. I-3. Caractéristique géométrique de l'aile

- **Bord d'attaque** : Le point le plus en avant du profil .
- **Bord de fuite** : Le point le plus en arrière du profil .
- **Extrados** : partie supérieure du profil, comprise entre le **BA** et **BF** .
- **Intrados** : partie inférieure du profil , comprise entre le **BA** et **BF** .
- **Corde** : segment de droit joignant le bord d'attaque au bord de fuite, la longueur de la corde s'appelle aussi « **profondeur du profil** » .
- **Ligne moyenne** : Ligne formée par tous les points équidistants de l'extrados et l'intrados, on appelle aussi « **Ossatine** », ou « **squelette** » .
- **Épaisseur** : Distance maximale entre l'intrados et l'extrados, mesurée perpendiculairement à la corde.
- **Épaisseur relative** : Rapport de l'épaisseur à la profondeur du profil, elle est exprimée en pourcentage de la profondeur .
- **Angle d'incidence (angle de calage)** : L'angle de calage est l'angle entre la ligne de référence du profil et l'axe du fuselage ou angle formé entre la corde et la direction du filet d'air .

I-2-2. Classification des profils

Les caractéristiques de formes, courbure et épaisseur, permettent de classer les profils à un double point de vue :

I-2-2-1. Du point de vue courbure

Les variations de la forme de la ligne moyenne entraînent des modifications importantes dans la configuration des profils mais chacun d'eux peut toujours se rattacher à l'une des familles suivantes :

A. Profil biconvexe symétrique

C'est un profil où la ligne moyenne est rectiligne, l'extrados et l'intrados convexe (fig I-04).

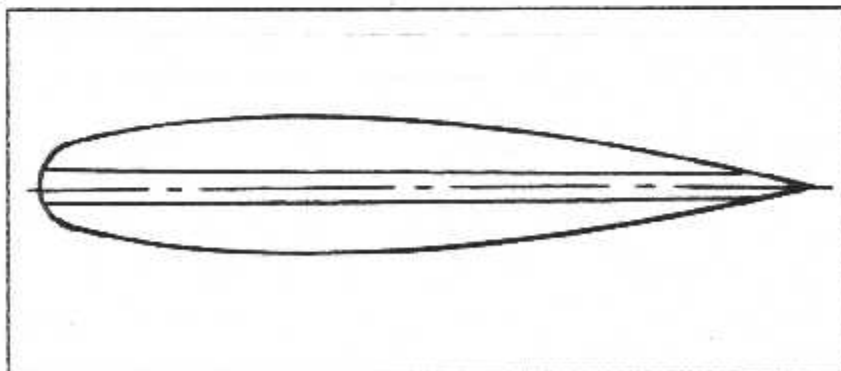


Fig. I-04. Profil biconvexe symétrique

B. Profil biconvexe dissymétrique

C'est un profil où la ligne moyenne est à faible courbure, l'extrados et l'intrados convexe (fig. I-05).

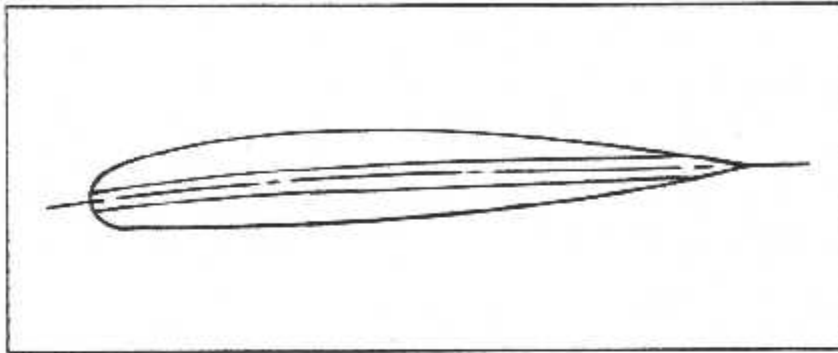


Fig. I-05. Profil biconvexe dissymétrique.

C. Profil plan convexe

C'est un profil où la convexité est augmentée par rapport aux précédents, l'extrados convexe et l'intrados plan (fig. I-06).

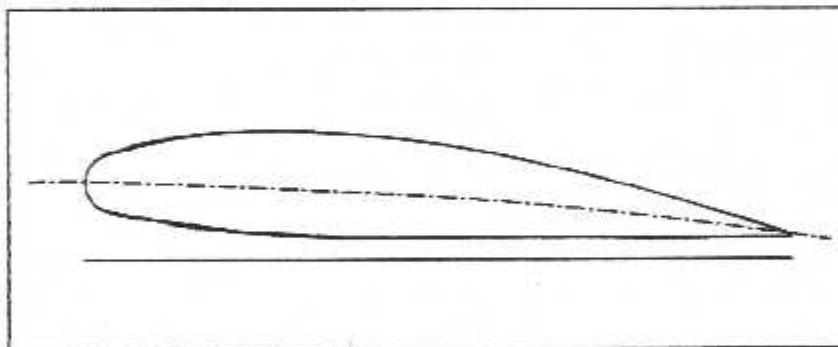


Fig. I-06. Profil plan convexe.

D. Profil creux

Sa ligne moyenne présente une forte convexité, l'extrados convexe et l'intrados concave (fig. I-07).

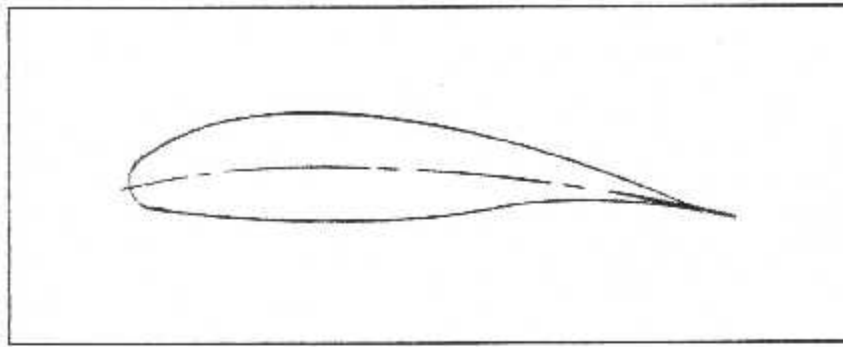


Fig. I-07. Profil creux

E. Profil à double courbure

Auquel une seconde courbure de la ligne moyenne confère des qualités de stabilité, d'où le qualificatif d'auto stable qui lui est couramment appliqué (**fig. I-08**).

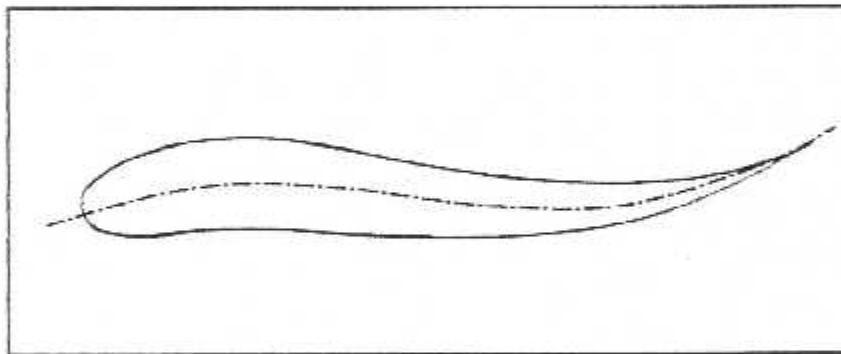


Fig. I-08. Profil à double courbure.

I-2-2-2. Du point de vue de l'épaisseur relative

On distingue trois catégories :

- Profil mince : dont l'épaisseur relative est inférieure à 6 % par rapport à la corde.
 - Profil semi-épais : dont l'épaisseur relative est entre 6 et 12 % par rapport à la corde.
 - Profil épais : dont l'épaisseur relative est supérieure à 12 % par rapport à la corde.
- (l'épaisseur relative est le rapport de l'épaisseur max. du profil sur la corde).

Remarque

Pour les avions de transport de génération 1980, sont apparues des formes de profil élaborées pour permettre à ces avions d'optimiser leurs vol à une vitesse élevée, proche de celle du son.

Ces profil sont appelés « **Supercritique** » et sont caractérisés par un extradados relativement plat et intrados convexe .

I-3. Construction d'une aile

Suivant la nature des matériaux utilisés lors de la réalisation des éléments de l'avion, on distingue principalement trois types de construction :[2]

A / La construction « **Bois** » et « **Toile** », qui comme son nom l'indique, est basée sur l'utilisation d'un matériaux naturel (le bois) .

La construction bois et toile permet la réalisation d'aéronefs dont les vitesses maximales sont voisines de 300 km/h, pour les vitesses supérieures, le revêtement toile est remplacé par le bois.

Lors des derniers conflits mondiaux, la très grande quantité d'avions de guerre¹ produits entraîna la raréfaction des essences d'arbres de qualité aéronautique, ce qui amena les constructeurs à remplacer le bois par le métal.[2]

B / La construction métallique utilise comme matériau de base un alliage d'aluminium et de cuivre, appelé « **Duralumin** ». La mise en œuvre et l'usinage des profils et tôles s'apparentent à celles des produits **aciérés**¹, ce qui explique le grand développement de ce type de construction .[2]

C / A partir des années 1960, la mise au point de fibres de verre, beaucoup plus résistante que les fibres végétales, et de résine synthétique a permis la réalisation d'un nouveau matériau, le **Polyester**. [2]

Les bandes de tissus de verre, souples, et dont les fibres sont correctement orientés, sont disposées sur un moule, et sont successivement imprégnées de résine. Cette dernière contient un additif dont le rôle est d'assurer la liaison fibre-résine et de provoquer le durcissement de l'ensemble. Ce procédé permet l'obtention d'un matériau appelé composite dont les caractéristiques mécaniques sont voisines, voire supérieures à celles obtenues en construction métallique, tout en étant plus léger .[2]

Malheureusement, ce processus a un coût de production élevé car il nécessite le contrôle et le maintien à une valeur constante de l'humidité et la température de l'enceinte contenant le moule. De nos jours et pour les aéronefs de « **Haut de gamme** », des éléments tels que becs, volets capotage moteur sont réalisés en composite à base de fibre de verre, de carbone ou de bore, le coût de fabrication limitant la part des éléments en composite .[2]

¹ Aciéré : qui ressemble à l'acier, qui contient de l'acier ; recouvert de d'acier.

A titre indicatif voici trois exemples de réalisation d'aéronefs français :

Type de construction	Aéronefs	Constructeur
Bois et toile	DR 400	Robin
Polyester	TR	Robin
Métallique	TB9 TB10	SOCATA

I-3-1. Les différents types d'ailes

Dans ce paragraphe on va définir les types d'ailes qui existe sur les avions civils

I-3-1-1. Aile bi-longeron à revêtement non travaillant

C'est la construction la plus ancienne en date. L'aile comporte deux longerons, des entretoises qui en maintiennent l'écartement et un croisillonnage dans le plan de l'aile. Ce système est schématisé comme indique la **fig. I-9 [3]**

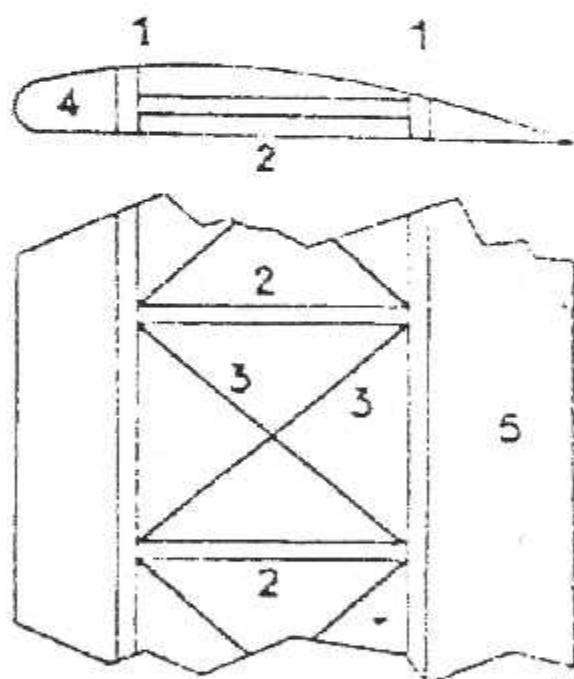


FIG. I.6

- 1-Deux longerons
- 2-Barre de compression (entretoise)
- 3-Haubanage de trainée
- 4-Nervures
- 5-Revêtement

Fig. I-9. Aile bi-longeron à revêtement travaillant.

I-3-1-2. Aile bi-longeron à revêtement travaillant en torsion

Les semelles des longerons qui forment les coins du caisson inter-longeron sont généralement constituées par de forts profils.

Le revêtement est raidi par des profilés qui peuvent avoir des formes variées, ces raidisseurs peuvent être soit longitudinaux, soit transversaux. (voir fig.1-10). [3]

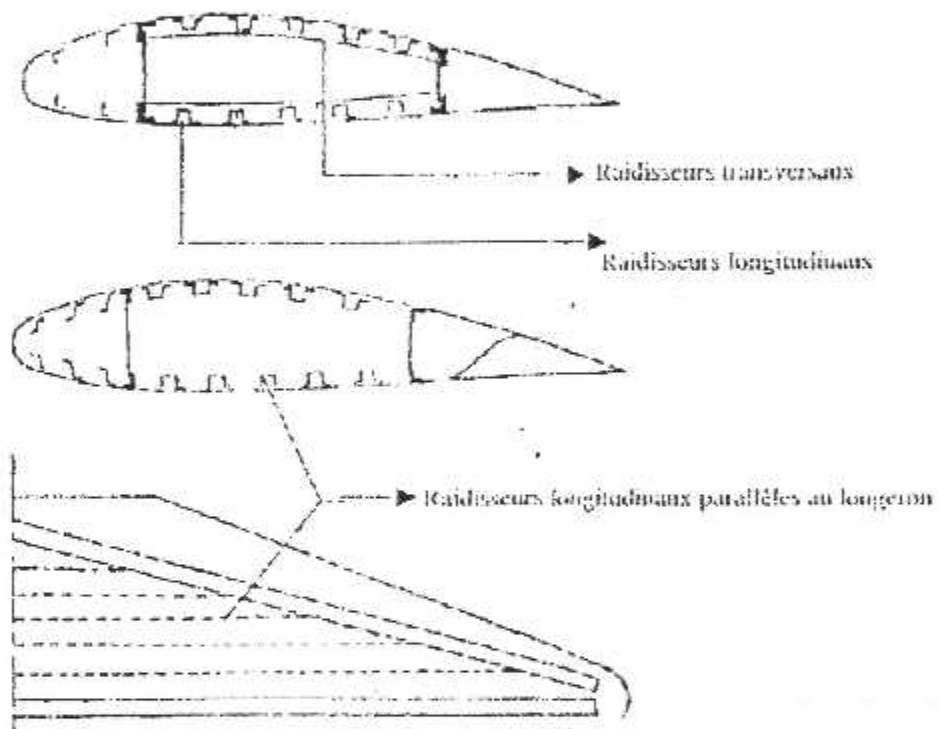


Fig.I-10. Aile bi-longeron à revêtement travaillant en torsion.

I-3-1-3. Aile mono-longeron à revêtement travaillant

La structure du bi-longeron n'atteint pas le rendement maximum, car les deux longerons, ne peuvent pas être à la fois au point où d'épaisseur est maximum de la voilure, leur inertie n'est pas plus grande valeur possible.

Dans le système mono-longeron le longeron qui support la totalité de la flexion sera placé au voisinage de l'épaisseur maximale du profil. (voir fig.1-11).[3]

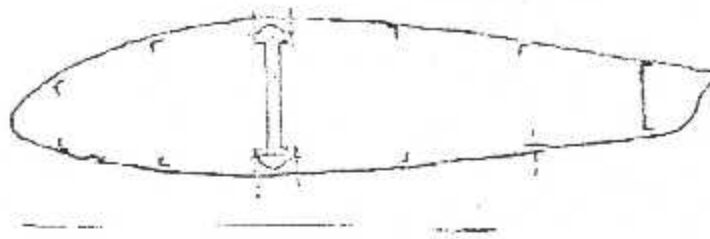


Fig. I-11. Aile mono-longeron à revêtement travaillant.

I-3-1-4. Aile à caisson pûr

Dans la construction bi-longeron avec caisson inter-longeron on augmente beaucoup le raidissement du revêtement en diminuant corrélativement l'importance des semelles des longerons jusqu' à en faire de simples cornières d'assemblage, par exemple, tous les efforts y compris les efforts de flexion et de torsion sont encaissés par le revêtement. Celui-ci doit avoir une épaisseur importante et peut être fortement raidi pour ne pas flamber sous l'action des contraintes de flexion.[3]

La structure est dite dans ce cas : structure caisson .(voir fig.I-12)

Le caisson ne comporte que deux âmes, mais en diminuant les contraintes de cisaillement dans le revêtement on peut utiliser âmes. Ces construction sont appelées « Cellulaires » ou à âmes multiples . [3]

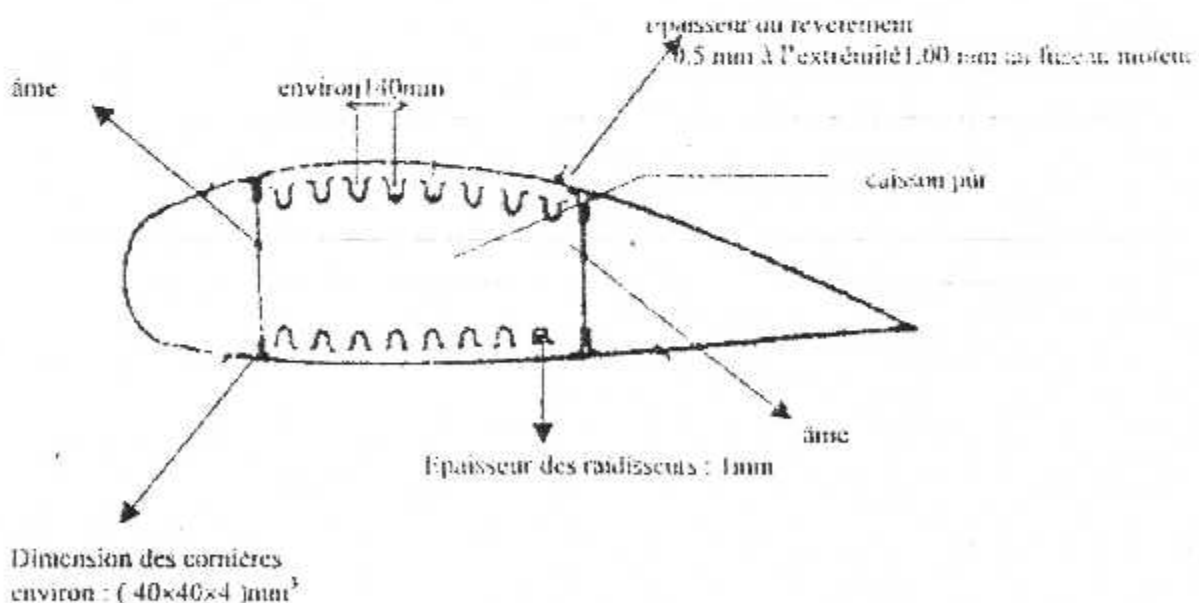


Fig. I-12. Aile caisson pur.

I-3-2. Les éléments principaux de la voilure

L'aile est la surface aérodynamique principale qui porte l'avion sur ces deux cotés à gauche et à droite. On retrouve dans la structure de l'aile principalement un ou deux longerons (dirigés dans le sens de l'envergure), dont une des extrémités est dotée de fixation permettant l'assemblage de la voilure et du fuselage .

Les longerons peuvent être réalisés soit en treillis, soit par l'assemblage d'une ou de plusieurs pièces (voir fig. I-13).

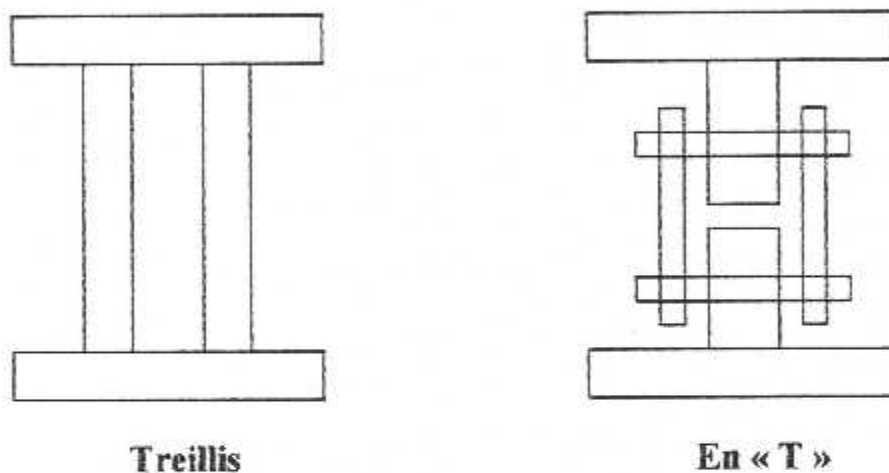


Fig. I-13. Assemblage en treillis et l'assemblage en T

Par rapport à sa fixation au fuselage, le longeron se comporte comme une poutre semi encastree. Sous l'influence de la portance, le longeron est soumis à un moment de flexion, tendant à le faire fléchir vers le haut, les fibres du matériaux constituant la semelle supérieure sont donc comprimés, alors que celles de la partie inférieure sont soumises à une traction.

Ce dernier type de longeron est couramment utilisé en construction métallique .

I-3-2-1. Les longerons

L'élément fort de l'aile est le longeron principal, il supporte la majorité des contraintes en flexion. C'est une poutre placée dans le sens de l'envergure (longitudinale) qui va de l'emplanture jusqu'au bout de l'aile, elle est constituée de :

- Semelle supérieure et une autre en alliage usiné.
- Une ou deux âmes en tôle raidie longitudinalement.

Eventuellement, les longerons ou partie de longerons peuvent être constitué de profils files.

Dans certaines ailes les constructeurs placent un faux longeron, semblable au longeron principal, il n'est pas attaché à l'emplanture, il assure la rigidité. La résistance d'un longeron est proportionnelle au carré de son épaisseur, cela explique pourquoi les longerons des ailes levées vont en s'amincissant depuis l'emplanture où la concentration des charges est la plus grande jusqu'au bout d'aile où les charges sont moindres .

Les longerons ont des formes variées. Certain longerons composés de deux ou plusieurs sections maintenues ensemble peuvent être qualifier de longerons à protection totale. (fig. I-14)

Il existe deux type de longerons :

a) Longeron tubulaire

Pour des raisons d'économie et de facilité de construction ils sont d'abord utilisés comme longeron des tubes de différentes formes fournis par la métallurgie. Le seul problème dans l'utilisation de ces profiles c'est qu'il ne résistent pas a la torsion. (fig. I-14-a)[3]

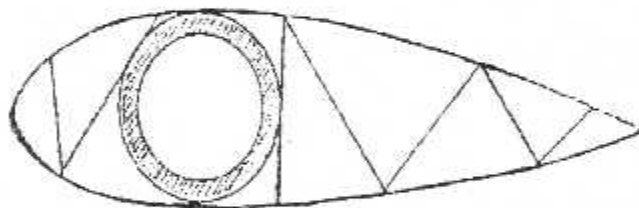


Fig. I-14-a. Profil à longeron tubulaire.

b) Longeron composé

Actuellement ce genre de longeron remplace les longerons tubulaires dans lequel l'utilisation des pièces séparément adaptées à la fonction qu'elles doivent remplir

permet une économie de poids appréciable (fig. I-14-b).[3]

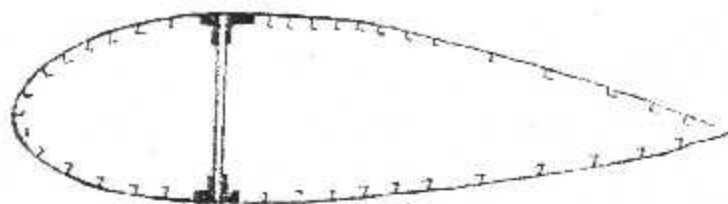


Fig. I-14-b. Profil à longeron composé.

I-3-2-2. Les caissons

La construction est alors un peu différente, il n'y a pas de longeron mais la structure de l'aile est cloisonnée.

Les cloisons longitudinales (sens de l'envergure) et les cloisons transversales (sens de nervure) définissent des volumes appelés « Caisson » (fig. I-15).[2]

Les revêtements et les cloisons sont en règle générale usinés dans la masse.

Il existe trois types de caissons :

- a) Caisson pure (fig. I-16).
- b) Caisson à une ou deux âmes (fig. I-17).
- c) Caisson à âmes multiples (fig. I-18).

I-3-2-3. Nid d'abeille

Certaines parties du revêtement peuvent être réalisées en matériaux dits « Sandwich » (fig. I-19).[2]

Ce dernier est constitué de deux feuilles fines préformées ou soudées (suivant la nature de la feuille), formant un nid d'abeilles (fig. I-20).

Cette structure est ensuite dotée de deux tôles de revêtement. Cet ensemble (analogue à celui utilisé dans la fabrication des emballages en carton) est très résistant à la compression ; il est de ce fait très utilisé dans la réalisation de pièces devant résister à des contraintes de cette nature telles que planchers, bord d'attaque... etc.[2]

Les empennages, comme les plans mobiles (Gouvernes), sont réalisés suivant les mêmes principes de construction précédemment décrits.



Fig.I-16. Caissons Pures.



Fig.I-17. Caissons à une ou deux Ames.



Fig.I-18. Caissons à Ames multiple.

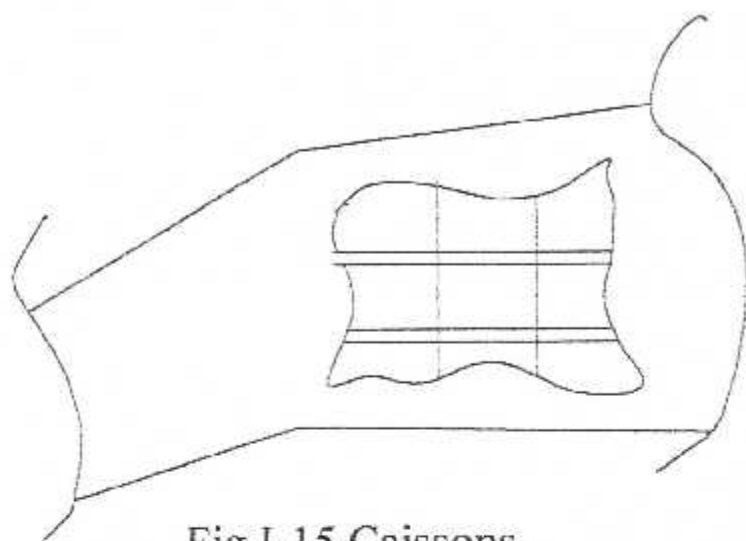


Fig.I-15.Caissons.

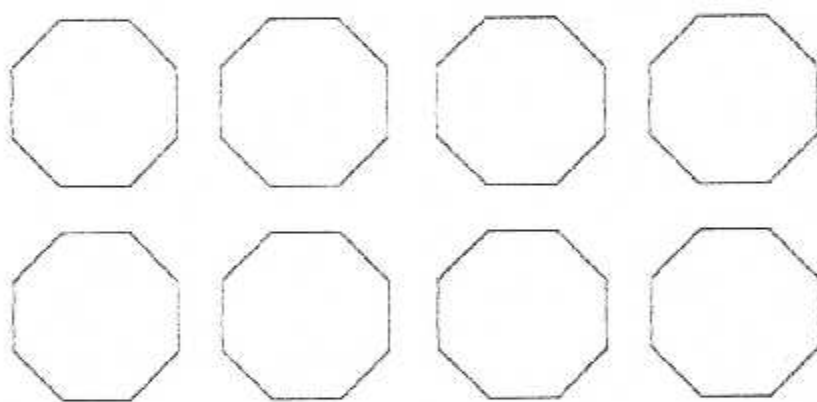


Fig.I-20. Nidabaille(vue en dessus).

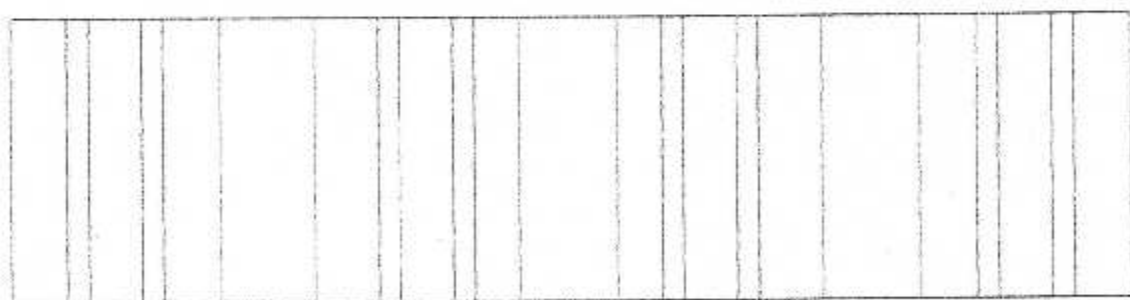


Fig.I-19. Sandwich (vue en coupe).

I-3-2-4. Les nervures

Les nervures sont des éléments transversaux de la voilure, placées perpendiculairement aux longerons, elles servent à :

- Donner la forme au profil.
- Transmettre les efforts du revêtement aux longerons.
- Maintenir la séparation entre les longerons.
- Elles peuvent occuper la corde complète de l'aile ou seulement une partie.

Dans ce cas le bord d'attaque et le bord de fuite sont des entités différentes fixer sur la partie centrale .

- Elles peuvent occuper la corde complète de l'aile ou seulement une partie.

Dans ce cas le bord d'attaque et le bord de fuite sont des entités différentes fixer sur la partie centrale.

Elle travaillent à la flexion et à l'effort tranchant dans la partie vertical.

Elle sont constitué par deux semelles où chapeaux chargés d'encaisser la traction où la compression résultante du moment fléchissant, réunies par une âme destinée à résister aux efforts tranchants et qui peut être constituée soit par une tôle pleine où ajourée, soit par un treillis de profilés.[3].(voir figure. I-21)

il existe deux type de nervure :

A). Nervures des bi-longerons entoilés

Ces nervures sont généralement constituées en treillis. Elle peuvent être fabriquées en acier soudé. Il s'agit alors de nervures en tubes comportant deux semelles en tubes minces reliées entre elles par un treillis en tubes également, le tout soudé à l'autogènes.

On peut aussi concevoir des nervures en acier inoxydable soudées par points électriquement dont le treillis est constitué par des profilés en forme de U qui viennent s'emboîter les uns dans les autres à leurs extrémités et sont soudés par point. Mais la construction en acier soudé conduisant à des poids excessifs on emploie plus généralement le duralumin.

Si l'on utilise des tubes, on entoure exactement la semelle et les barres en treillis par des petits goussets en duralumin embouti. (figure.I-21-A). Des rivets extérieurs maintiennent parfois le treillis par simple serrage. Souvent aussi, à la traversé des tubes, on mettra un ou deux rivets tubulaires pour renforcer le gousset et les tubes.

Pour réaliser avec les barres en treillis un assemblage beaucoup plus facile, on emploie souvent pour les semelles des profilés en U. Dans ce cas les barres en treillis peuvent être faites en tubes aplatis à leurs extrémités et rivés sur la semelle de l'U ou encore être réalisées en U en venant s'emboîter à l'intérieur des semelles ou elles sont rivées soit au fond, soit aux ailes latérales de l'U formant un chapeau de nervure avec ou sans gousset plat. (voir figure.1-21-B).

Les nervures des longerons entoîlés sont souvent simplement enfilées sur les longerons, mais il est préférable de lier à ceux-ci pour améliorer la rigidité en torsion, on peut le faire au moyen de goussets rapportés. [3]

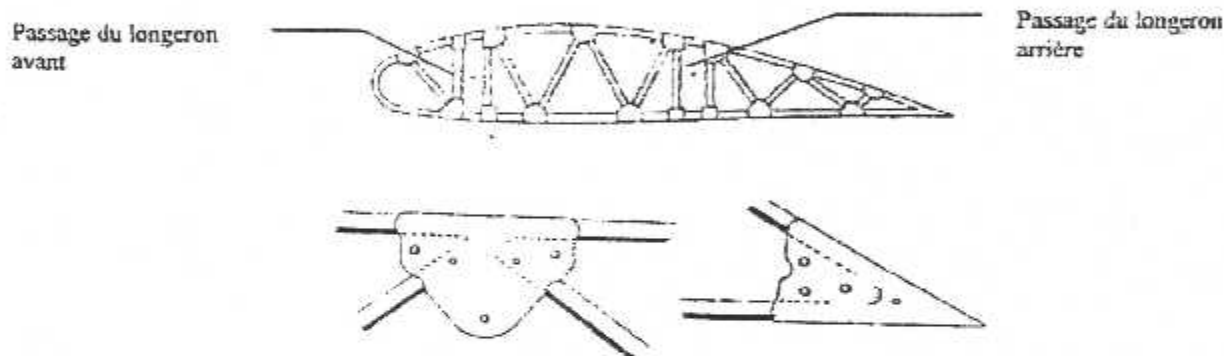


Fig.1-21-A. Nervure métallique en tube.

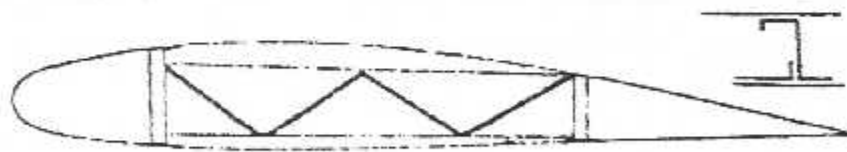


Fig. 1-21-B. Nervure en treillis.

B). Nervures à âmes pleines

Les âmes des nervures sont souvent des tôles pleines réalisées en autant d'élément qu'il faut pour le passage des longerons. Cette tôle est souvent ajourée de trous d'allègement réalisés à bords tombés. D'autre part, un gaufrage adéquat de la tôle permet de la raidir et d'éviter des plissements locaux. Toutes ces opérations : gaufrage, débouchage des trous d'allègement, réalisation de bords tombés sont très simples à exécuter industriellement à la presse. (Voir fig.I-21-C).[3]

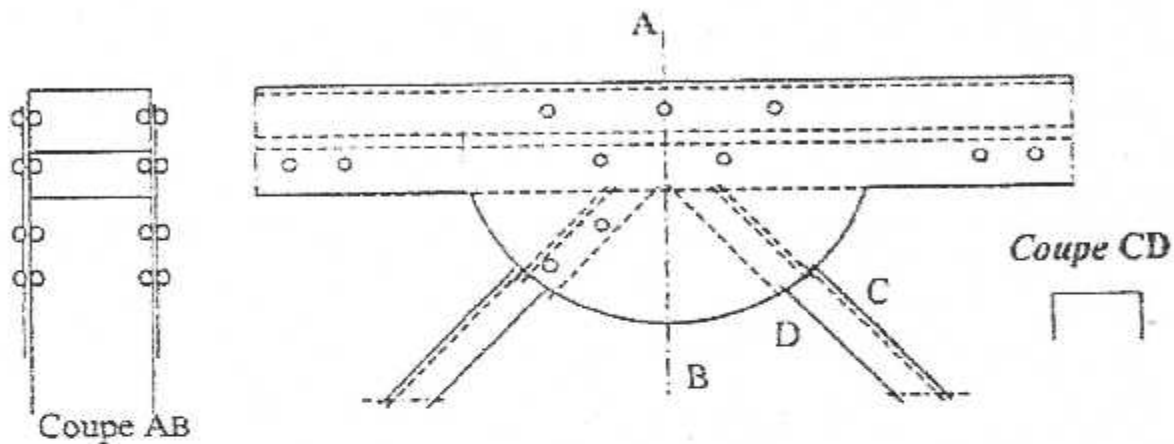


Fig. I-21-C. Nervure à âme pleines.

I-3-2-5. Les raidisseurs - Lisses

C'est des poutrelles placées dans les échancrements des nervures, elles ont le même sens des longerons, c'est à dire de l'emplanture au bout de l'aile, il peut y avoir plusieurs lisses dans une aile, elles servent à répartir les charges et à fixer le revêtement. (voir fig.I-22).[1]

Dans ce cas, les raidisseurs peuvent être dirigés perpendiculairement à l'envergure, c'est à dire parallèlement aux nervure. Pour que la tôle participe à la flexion de la voilure on doit placer les raidisseurs parallèlement à l'envergure de l'aile.

Les lisses ou raidisseurs ont des formes variées. Sur les avions modernes, le raidissage longitudinal est assuré par les lisses rapportées (rives soudés, coller) ou bien des lisses intégrées par usinage (fraisage à longue course) dans l'épaisseur du revêtement.[3]

Exemple de revêtement auto raidi, voilure concorde.

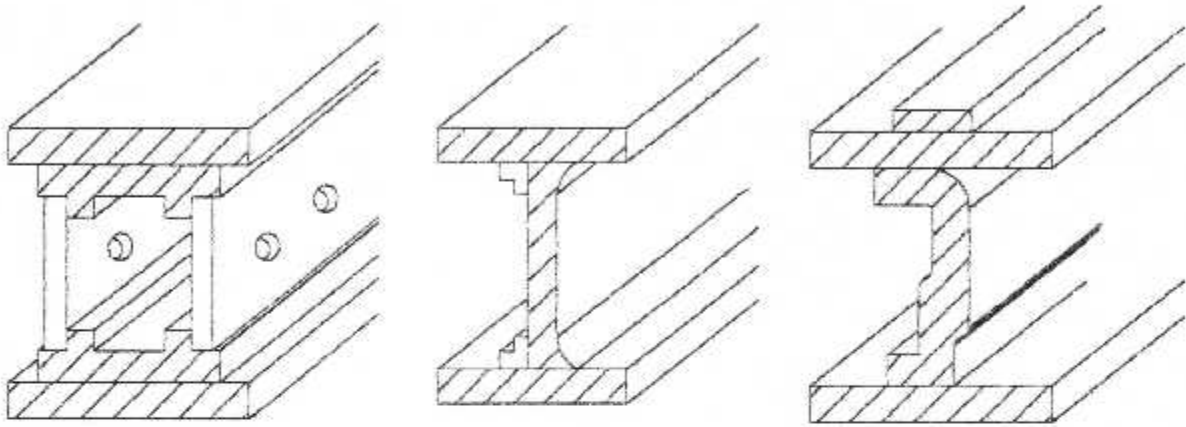


Fig.I-14-. Différents formes de longerons.

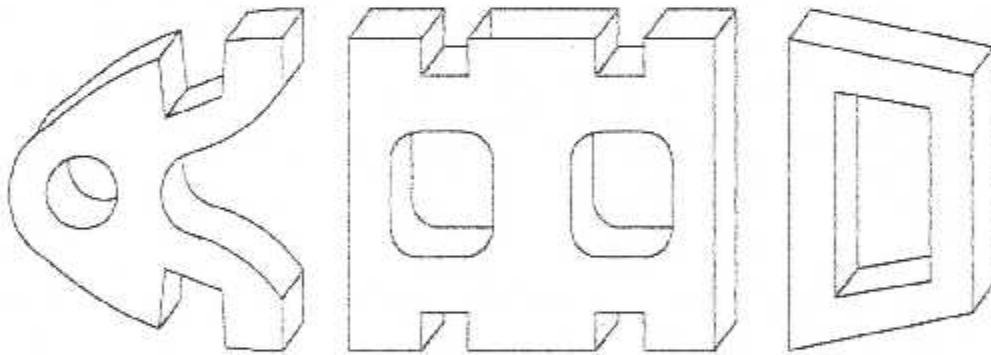


Fig.I-21. Différents formes de nervures.

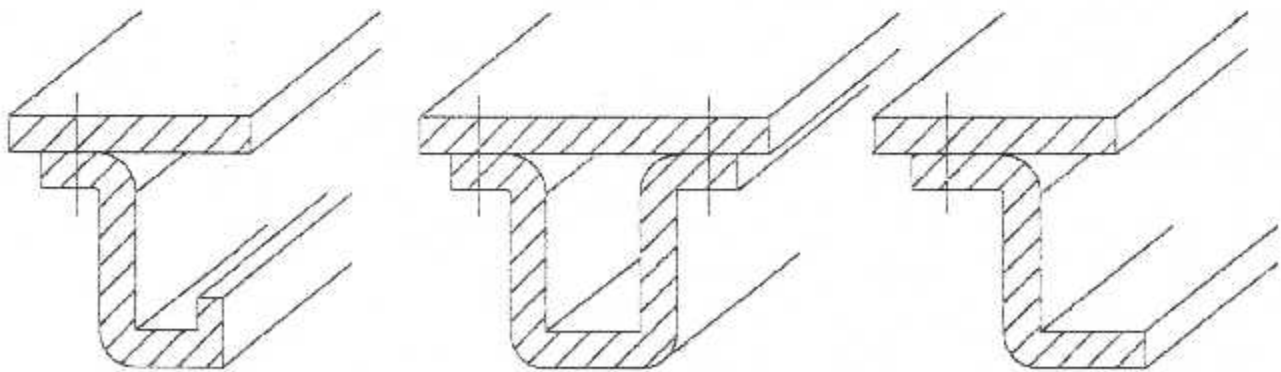


Fig.I-22. Différents formes de Raidisseurs.

I-3-2-6. Le revêtement

Sur tous les avions modernes, le revêtement participe partiellement ou totalement à la résistance générale de l'ensemble en tant que revêtement travaillant, il est constitué d'un matériau à épaisseur variable, croissante de l'extrémité d'aile vers l'emplanture et de nature différente entre l'intrados (alliage léger au cuivre) et l'extrados (alliage léger au zinc). Le revêtement métallique est généralement riveté, parfois collé.

On rencontre très souvent à l'heure actuelle des revêtements constitués de panneaux usinés pour former des raidisseurs intégrés qui donnent une rigidité et une résistance.[3]

On peut même placer au mêmes endroits et pour les mêmes raisons, des vis de caoutchouc amovibles, facilitant ainsi l'entretien et la réparation. (voir figure. I-23)

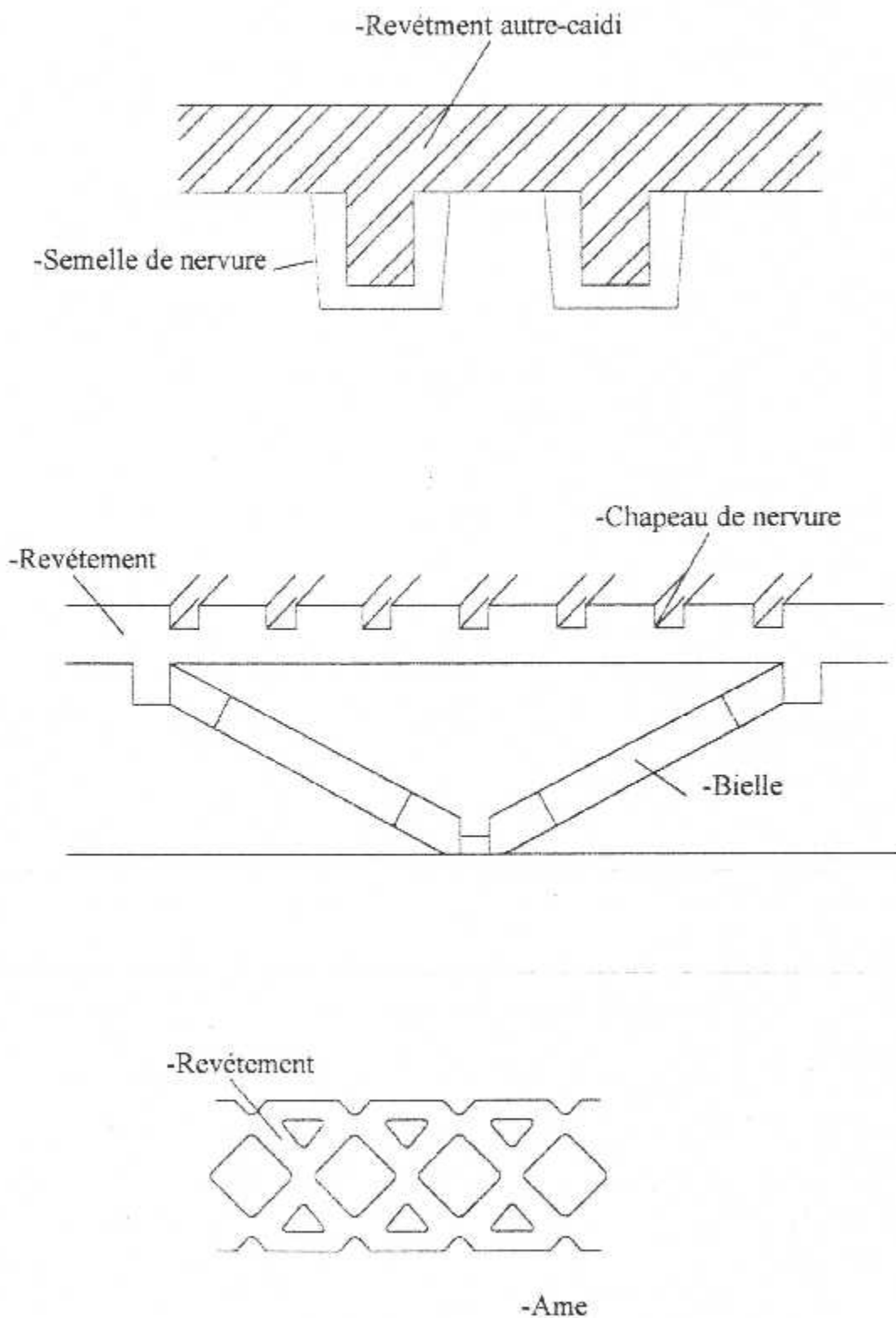


Fig.I-23. Différents cas de revêtement.

Chapitre II

Caractéristiques géométriques des profils d'ailes

- Moment statique
- Centre de gravité
- Moments d'inerties
- Rayon de giration
- Méthode de calcul des moments d'inerties des profils d'ailes
- Modélisation d'une surface d'un profil quelconque par triangle

Le calcul du moment d'inertie nous permet de dimensionner les structures afin qu'elles soient rigides et plus résistante aux charges appliquées, après avoir dimensionner la structure on passe à l'idéalisation qui nous facilite les calculs en respectant les caractéristiques physiques de la structure réelle .[4]

II-1. Moment statique

Le moment statique d'une surface par rapport a un axe situé dans son plan est égale au produit de l'aire de la surface par la distance de son centre de gravité à l'axe.[4]

$$A = \sum \Delta S \cdot X = S \cdot X_G$$

ou encore :

$$A_x = \iint_S r dS \quad (\text{II-1})$$

r étant la distance de l'élément dS à l'axe XX' .

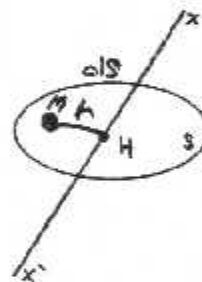


Fig. II-1. Détermination du moment statique.

II-2. Centre de gravité

Etant donné une surface rapportée au système d'axe xoy voir **Figure.II-2**, on appelle centre de gravité de la surface, le point G de coordonnées X_G, Y_G tel que :

$$\left. \begin{aligned} Sx_G &= \iint_S x dS = A_y \\ Sy_G &= \iint_S y dS = A_x \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-2})$$

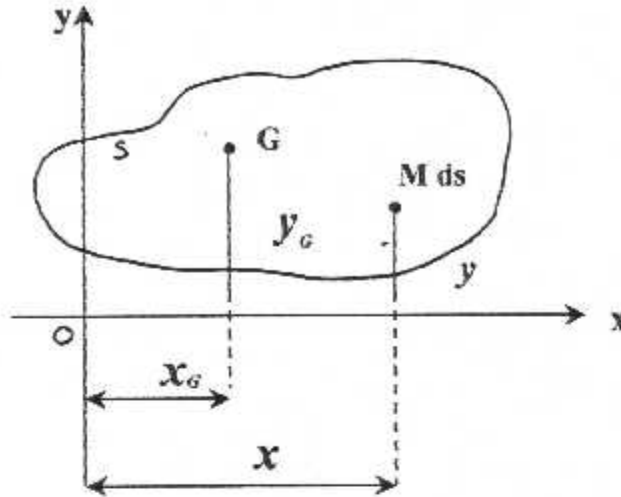


Fig. II-2. Présentation du centre du gravité.

II-3. Moments d'inerties

On appelle moments d'inertie d'une surface par rapport à un axe ou à un point situé dans son plan, la somme intégrale :

$$I_{\Delta} = \iint_S r^2 dS$$

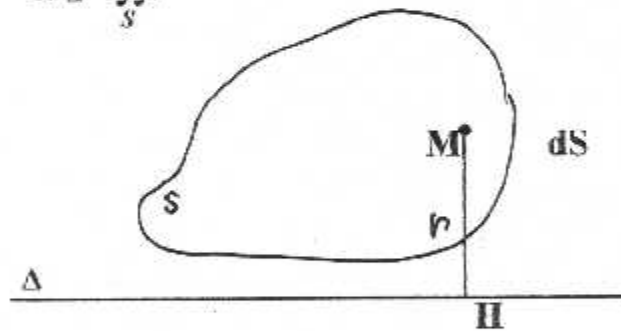


Fig.II-3. Moment d'inertie par rapport a l'axe (Δ)

r étant la distance de l'élément dS par rapport à l'axe ou point (voir Figure II-3) [4] pour une surface rapportée à deux axes rectangulaires on a par définition

$$I_x = \iint_S y^2 dS \quad , \quad I_y = \iint_S x^2 dS \tag{II-3}$$

$$I_o = \iint_S r^2 dS = I_x + I_y \text{ (moment polaire)}$$

Car $r^2 = x^2 + y^2$ (Voir Figure. II-4)

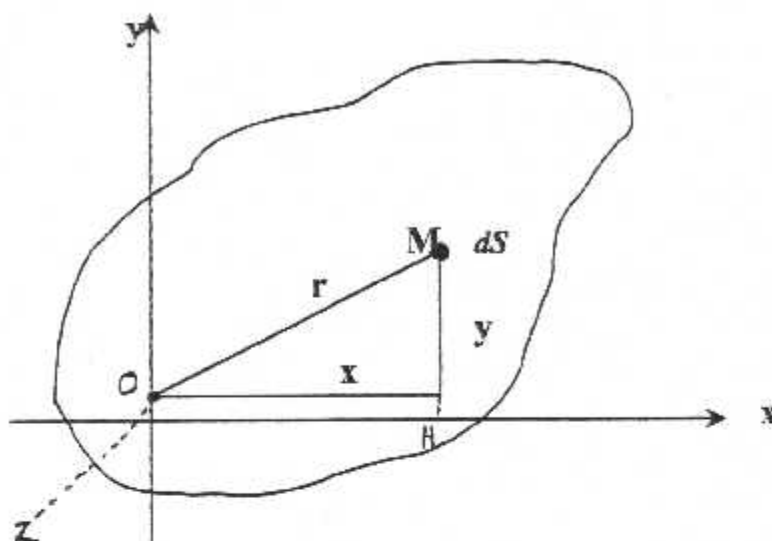


Fig. II-4. Moment polaire.

Le produit d'inertie par rapport au système d'axes xOy , est donné par :

$$I_{xy} = \iint_S xy dS \quad (\text{II-4})$$

II-3.1 Translation du repère

Le moment d'inertie par rapport a un axe Δ est égale au moment d'inertie relatif à l'axe parallèle Δ' passant par le centre de gravité, augmenté le produit de la surface par le carré de la distance d des axes. (voir la figure II-5).[4]

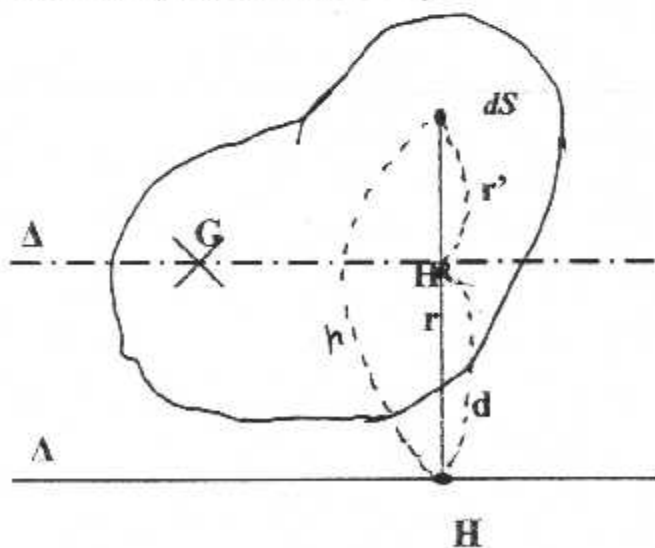


Fig. II-5. Application de théorème de HYGENS.

Si r et r' sont les distances entre dS et l'axes Δ et Δ' . La relation de CHARLES permet d'écrire :

$$r = r' + d$$

après le développement on aura :

$$I_{\Delta} = I_{\Delta'} + sd^2 \tag{II-5}$$

Le produit d'inertie, relatif à un système d'axes xOy est égale, au moment analogue, relatif au système d'axes parallèle issus du centre de gravité augmenté du produit de la surface par les coordonnées du centre de gravité. (Voir figureII-6). [4]

Soit :
$$I_{xy} = I_{x'y'} + S X_G Y_G \tag{II-6}$$

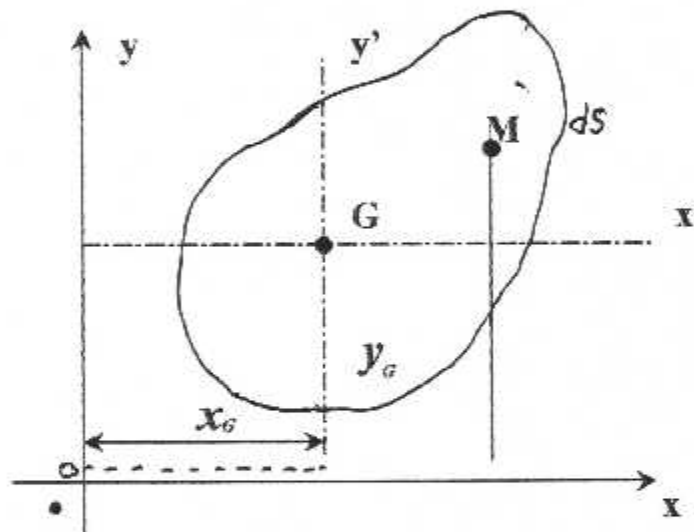


Fig. II-6. L'application du théorème de HYGENS pour le produit d'inertie.

Remarque

Si les axes $G_{x'}$, $G_{y'}$ sont des axes de symétrie ou des axes principaux de S , le moment $I_{x'y'}$ est nul, il ne subsiste que :

$$I_{xy} = S \cdot x_g \cdot y_g$$

II-3-2. Rotation du repère

Soit une plaque d'épaisseur « t » très petite qu'on peut assimiler à un segment de droite. La plaque est portée sur l'axe (UGV). La projection de celui-ci sur le repère $x'Gy'$ nous donne : (voir Figure. II-7)

$$\begin{cases} x' = u \cos \alpha - v \sin \alpha \\ y' = u \sin \alpha + v \cos \alpha \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Par définition on a : $I_{x'} = \int_S y'^2 ds$

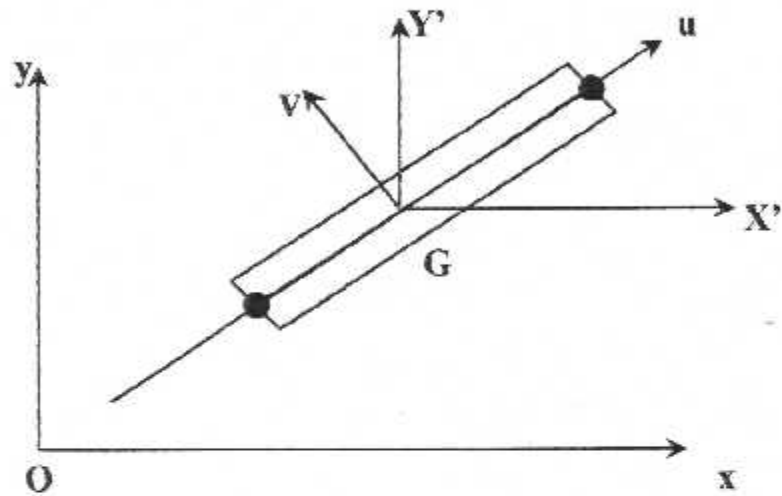


Fig.II-7. Présentation des axes sur la plaque.

$$I_{x'} = \int_S (u \sin \alpha + v \cos \alpha)^2 ds$$

$$I_{x'} = \int_S \left((u \sin \alpha)^2 + (v \cos \alpha)^2 + 2uv \sin \alpha \cos \alpha \right) ds$$

$$I_{x'} = \sin^2 \alpha \int_S u^2 ds + \cos^2 \alpha \int_S v^2 ds + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int_S uv ds$$

$$I_{x'} = \sin^2 \alpha I_v + \cos^2 \alpha I_u + 2 \sin \alpha \cos \alpha I_{uv}$$

$$I_{x'} = \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) I_v + \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) I_u + \sin 2\alpha I_{uv}$$

$$I_{x'} = \left(\frac{I_u + I_v}{2} \right) \cos 2\alpha + \left(\frac{I_v - I_u}{2} \right) \sin 2\alpha + I_{uv} \sin 2\alpha \quad (\text{II-8})$$

$$I_{y'} = \int_S x'^2 ds$$

$$I_{y'} = \int_S (u \cos \alpha - v \sin \alpha)^2 ds$$

$$I_{y'} = \cos^2 \alpha I_v + \sin^2 \alpha I_u - 2 \sin \alpha \cos \alpha I_{uv}$$

$$I_{y'} = \left(\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \right) I_v + \left(\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right) I_u - \sin 2\alpha I_{uv}$$

$$I_{y'} = \left(\frac{I_u + I_v}{2} \right) + \left(\frac{I_v - I_u}{2} \right) \cos 2\alpha - I_{uv} \sin 2\alpha \quad \text{-----} \quad (\text{II-9})$$

$$I_{x'y'} = \int_S (u \sin \alpha + v \cos \alpha)(u \cos \alpha - v \sin \alpha) ds$$

$$I_{x'y'} = \int_S x'y' ds$$

$$I_{x'y'} = \int_S \left(u^2 \cos \alpha \sin \alpha + uv \cos^2 \alpha - uv \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \int_S v^2 ds \right)$$

$$I_{x'y'} = \cos \alpha \sin \alpha \int_S u^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_S v^2 ds + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_S uv ds$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} I_v \cos 2\alpha - \frac{1}{2} I_u \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2} (I_v - I_u) \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha \quad \text{-----} \quad (\text{II-10})$$

par raison de symétrie on a : $I_{uv} = 0$

les équations (II-8, II-9, II-10) deviennent :

$$I_{x'} = \left(\frac{I_u + I_v}{2} \right) - \left(\frac{I_v - I_u}{2} \right) \cos 2\alpha$$

$$I_{y'} = \left(\frac{I_u + I_v}{2} \right) + \left(\frac{I_v - I_u}{2} \right) \cos 2\alpha$$

$$I_{x'y'} = \left(\frac{I_v - I_u}{2} \right) \sin 2\alpha$$

Les cas possibles

il existe 4 cas possibles

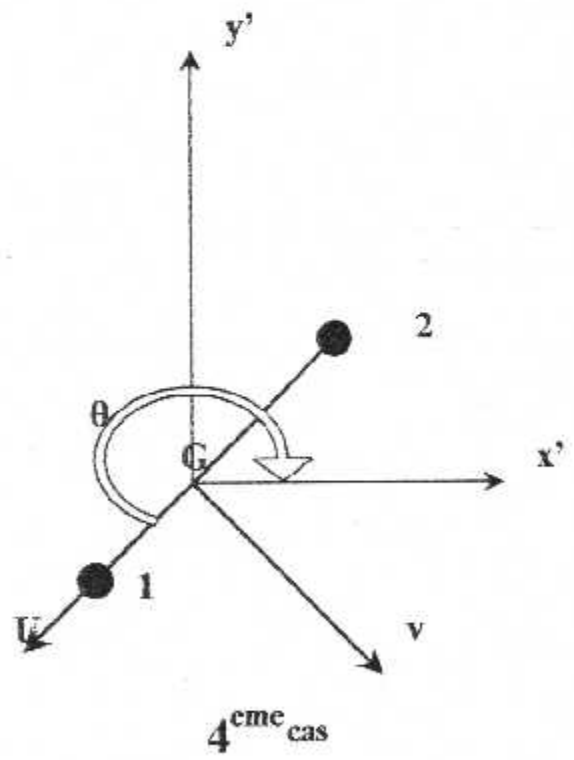
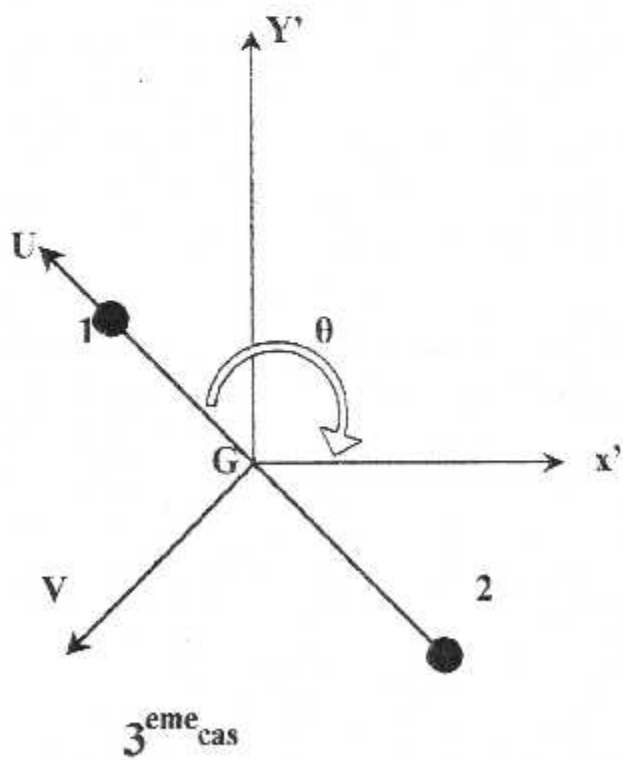
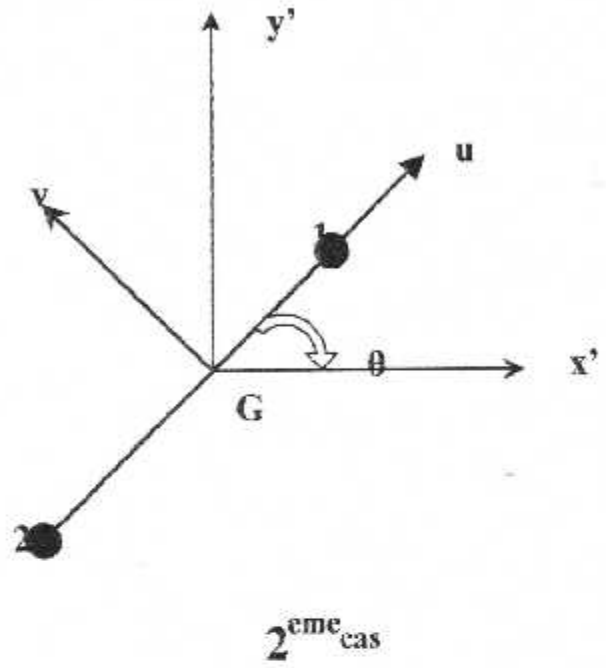
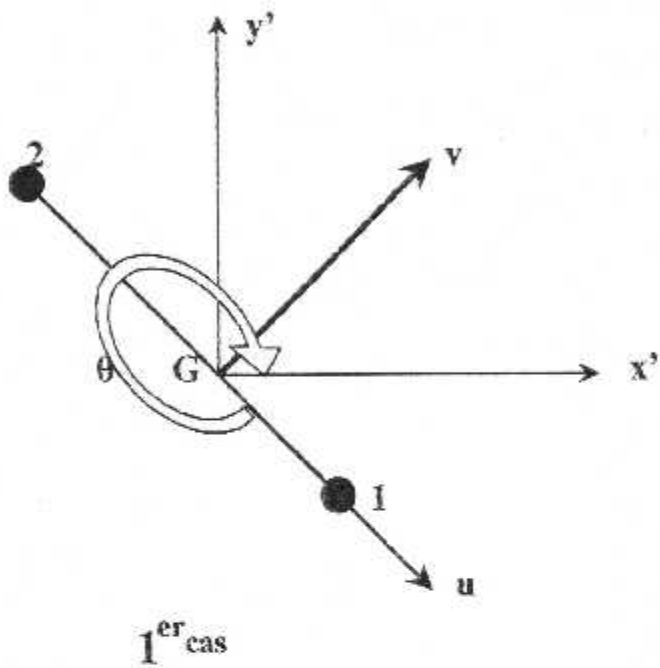
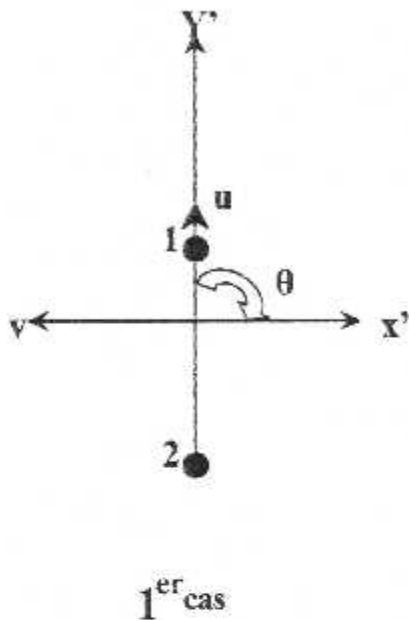
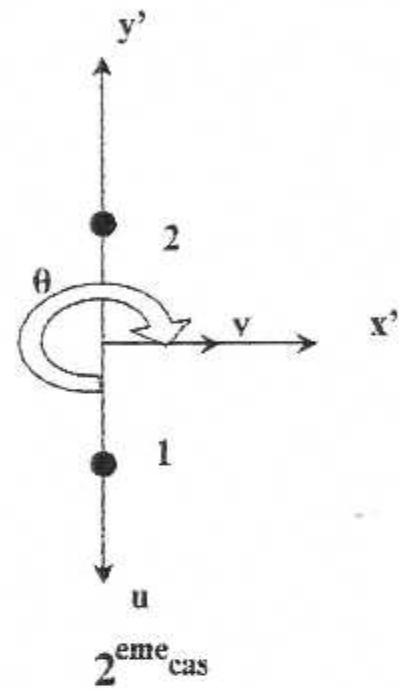


Fig. II-8. Les cas possible de la rotation de repère.

Cas particuliers



1^{er} cas



2^{eme} cas

II-4. Rayon de gyration

On appelle rayon de gyration **R** d'une surface **S** (figure. II-9) par rapport à un axe **m**, la distance à la quelle devrait être reportée l'aire de la surface supposée condensée en point pour obtenir le même moment d'inertie. Cette définition se traduit par la relation.[5]

$$I_{mn} = SR^2$$

Donc :

$$R = \sqrt{\frac{I_{mn}}{S}} \tag{II-11}$$

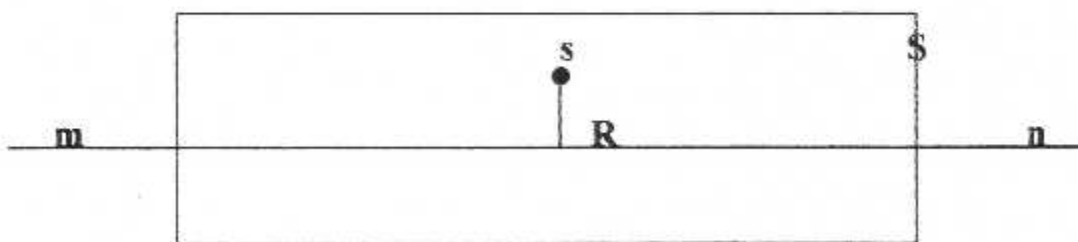


Fig. II-9. Rayon de gyration.

Pour une surface et un axe donnée, R varie avec I , il prendra en même temps ses valeurs maximum et minimum.

L'aire étant donnée, la rayon de gyration peut servir à calculer le moment d'inertie.

- Le calcul du moment d'inertie pour une plaque rectangulaire :

Soit une plaque d'épaisseur t et de longueur a . (voir figure.II-10)

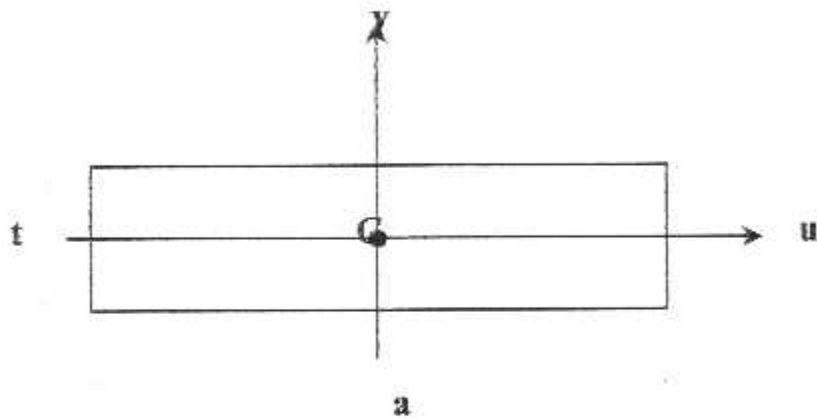


Fig. II-10. Présentation de la plaque rectangulaire

On définit les moments d'inertie suivant le repère uGv par :

$$\left. \begin{aligned}
 * \quad I_v &= \frac{1}{12} a^3 t \\
 * \quad I_u &= \frac{1}{12} a t^3 \\
 * \quad I_{uv} &= 0 \quad \text{par raison de symétrie.}
 \end{aligned} \right\} \quad (II-12)$$

II-5. Méthode de calcul des moments d'inerties des profils d'ailes

II-5-1. Moment d'inertie d'une surface plane

Soit une surface plane A et un axe (xx') situé dans son plan, en décomposant cette surface en une infinité d'élément infiniment petite $dA_1, dA_2, dA_3, \dots, dA_n$ dont les distances a l'axe (xx') sont respectivement $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$.

Par définition, on appelle moment d'inertie d'une surface A par apport à l'axe (xx') la somme des produits de tous les éléments de cet axe [4]

On écrira :

$$I_{xx'} = Y_1^2 dA_1 + Y_2^2 dA_2 + \dots + Y_n^2 dA_n = \sum_{i=1}^n Y_i^2 dA_i \tag{II-13}$$

Ou encore :

$$I_{xx'} = \int_A Y^2 dA$$

Par apport à l'axe OX on a :

$$I_x = \int_A Y^2 dA$$

Par apport à l'axe OY on a :

$$I_y = \int_A X^2 dA$$

II-5-2. Moment d'un triangle quelconque

Considérant un triangle quelconque de nœud $i = 1, 2, 3$ et coordonnées $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ par rapport au repère d'axe XOY quelconque donné (Figure. II-9).[4]

Le moment d'un triangle est donné par l'intégration suivante :

$$I_{mn} = \int X^m Y^n dx dy \tag{1}$$

Ou **m** et **n** sont des entiers positifs .

Pour évaluer cette intégrale, il est commode d'utiliser la transformation de GREEN pour une intégrale de surface à une intégrale simple curviligne le long du contour du triangle dans le sens anti-horaire.

I^{er} Cas : m = 0 , n = 0

cette intégrale nous donne dans ce cas l'aire de la surface du triangle

$$I_{00} = \int dx dy = A \tag{2}$$

le résultat de l'intégrale (2) donne :

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_1)]$$

$$A = \frac{1}{2} [(X_2 - X_1)(Y_3 - Y_1) - (Y_2 - Y_1)(X_3 - X_1)]$$

2^{ème} Cas : (m = 1 , n = 0), (m = 0, n = 1)

Nous aurons le moment statique avec le centre de gravité du triangle à partir du l'intégrale(2).

$$I_{10} = \int X dx dy = A X_G$$

$$I_{01} = \int Y dx dy = A Y_G$$

Tel que :

$$X_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i = \frac{1}{3} (X_1 + X_2 + X_3)$$

$$Y_G = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 Y_i = \frac{1}{3} (Y_1 + Y_2 + Y_3)$$

3^{ème} Cas : m = 1 , n = 1

Nous aurons d'après l'intégrale (2) le produit d'inertie d'un triangle à m=1, n=1
L'intégrale suivant :

$$I_{11} = \int_A YX dx dy = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 X_i Y_i + 9 X_G Y_G \right)$$

$$I_{11} = I_{xy} = \frac{A}{12} \left(\sum_{i=1}^3 X_i Y_i + 9 X_G Y_G \right)$$

$$I_{10} = \int X dx dy = \frac{A}{12} \left\{ \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 x_G^2 \right\}$$

$$I_{02} = \int Y dx dy = \frac{A}{12} \left\{ \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 y_G^2 \right\}$$

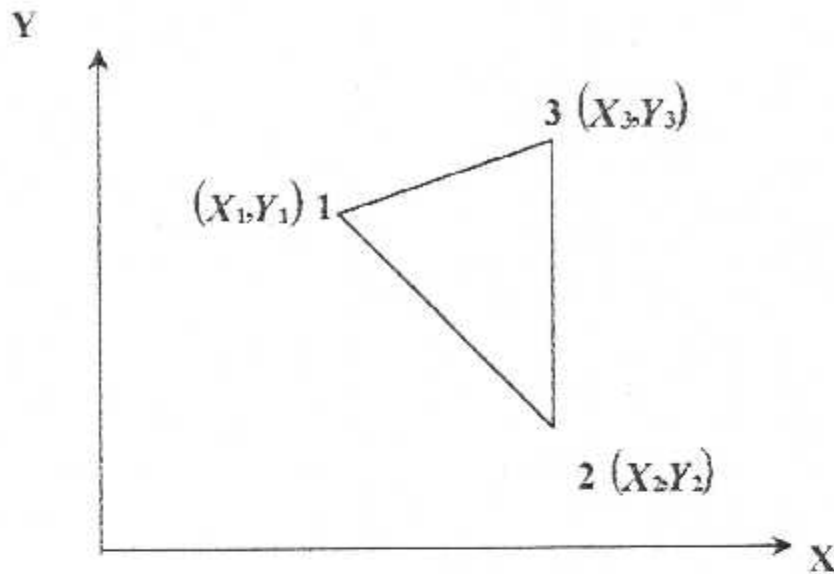


Fig. II-11. Coordonnée des nœuds d'un triangle.

II-6. Modélisation d'une surface d'un profil quelconque par des triangles

Soit une aile définie dans un plan (oxy) , pour calculer le centre de gravité de cette aile on la divise en n triangle de $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, et on sait calculer le moment d'inertie et le centre de gravité d'un triangle quelconque (la méthode citer aux paragraphe précédent) [4]

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

Le centre de gravité de cette surface :

$$X_G = \frac{(X_1 A_1 + X_2 A_2 + X_3 A_3 + \dots + X_n A_n)}{A}$$

$$Y_G = \frac{(Y_1 A_1 + Y_2 A_2 + Y_3 A_3 + \dots + Y_n A_n)}{A}$$

Avec : (X_i, Y_i) coordonnées de chaque triangle i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) et
 A : La surface de tringle i .

Et pour avoir le moment d'inertie nous additionnons tous les moments d'inerties des triangles d'où on aura :

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_x)_i$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_y)_i$$

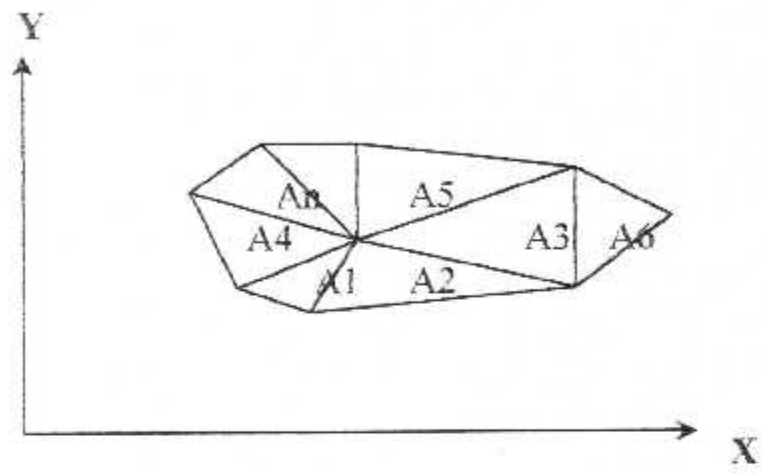


Fig. II-12. Section formée de triangle.

Chapitre III

Les paramètres influents sur l'équation de la déflexion

- La flexion dans les structures Aéronautiques
- Effort tranchant et le moment fléchissant
- Détermination des constantes K_z et K_y de l'énergie
- Condition de résistance
- Hypothèses
- **Déflexion élastique des poutres**
- Déplacements des poutres en flexion
- La méthode des paramètre initiaux

III-1. La flexion dans les structures Aéronautiques

III-1-1. Efforts appliqués à la voilure

III-1-1-1. En vol

La structure étant un élément sustentateur, la voilure est soumise en vol à des forces aérodynamiques, celles-ci ont deux composantes l'une orientée de bas en haut, c'est la PORTANCE et l'autre dirigée dans le sens opposé au mouvement appelé la TRAINEE (**figure. III-1**).[6]

La plus grande partie des charges aérodynamiques est soumise au fuselage pour équilibrer les forces d'inerties due à sa masse, qui est importante par rapport à celle de l'avion complet.

Les différents types de structure reviennent donc à réaliser un élément longitudinale résistant ou poutre orientée dans le sens de l'envergure. Cet élément est chargé uniformément par la résultante des charges aérodynamiques et les efforts d'inerties (la masse de la structure, la masse du carburant). L'équilibre est apporté par les actions du fuselage sur la voilure aux points d'attaches.[6]

En plus des charges citées ci-dessus, on mentionne d'autres charges d'efforts localisés en certains points de l'aile, attaches des trains d'atterrissages, de gouvernes, de volets, d'aérofreins de spoilers de moteurs , effet du réservoir s'il existe, effet du poids de l'aile etc.....

Ces effets donnent naissance en général à deux flexions : flexion horizontale et flexion verticale. La poutre (longeron) travaille donc surtout en flexion simple dirigée de bas en haut dans le cas du vol normale , la poutre est soumise à des contraintes de compression pour une à porte à faux, le moment de la flexion est donc maximum à l'emplanture, l'épaisseur de l'aile à cet endroit est maximum (augmentation du moment quadratique) (**figure. III-2**) [6]

Si les moteurs sont portés par la voilure, celle-ci est soumise en vol à une **FLEXION HORIZONTALE** qui se superpose à celle due à la composante de la charge aérodynamique (force de traînée) et la traction du moteur (pour certaine avion).

Dans ce cas la flexion se produit vers l'avant, le bord de fuite est tendu, le bord d'attaque est comprimé. Si les moteurs sont fixés au fuselage, la flexion, de moindre intensité se produit vers l'arrière (**figure. III-4**).

En ce qui concerne la **FLEXION VERTICALE**, elle est due à des charges d'inerties : poids de l'aile, attaches moteurs, trains d'atterrissages.

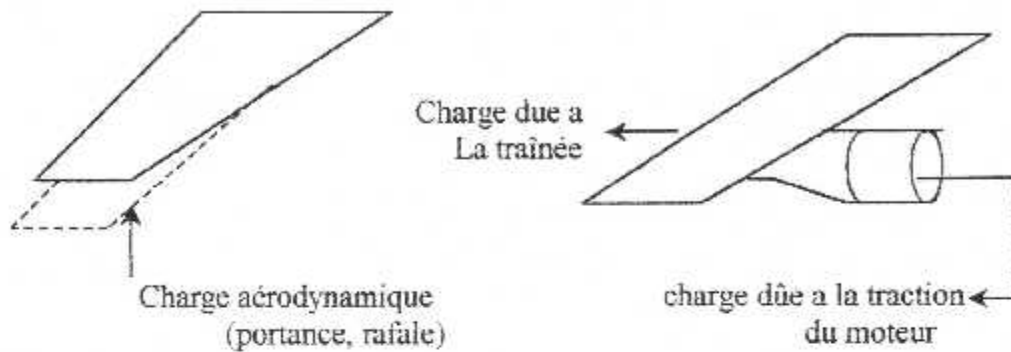


Fig. III-4. La flexion verticale et la flexion horizontale appliquée sur l'aile d'avion

Aux charges réparties supportées par l'ensemble de la structure s'ajoutent des efforts localisés tels que attaches d'atterrisseur, des gouvernes, des volets ,... etc. Ces charges sont encaissées par des pièces fortes de l'aile conçue spécialement pour cet effet.

Nous savons que le centre de poussée des actions aérodynamiques est sujet à des déplacements dans le sens de la profondeur de l'aile. Il en résulte que la poutre longitudinale (longeron) travaille également en torsion. [6]

La rigidité en torsion doit être d'autant plus importante quand la voilure possède des masse excentrées importantes telles que les groupes turbo-propulseurs.

Les moments de torsion sont soumise au fuselage ou il participent à l'équilibre longitudinale de l'avion (**figure. III-3**).

En plus des charges précédentes, la voilure est soumise dans certains cas de calcul à des charges dissymétriques sur les deux ailes provenant de l'action des ailerons ou à des charges provenant des trains d'atterrissages. [6]

II-1-1-2. Au sol

La configuration de l'avion au sol est différente à celle en vol, dans ce cas, les charges appliquées à la voilure sont réduites aux poids de l'aile (qui est presque négligeable par rapport au poids complet de l'avion), réaction du train d'atterrissage, réaction et moment à l'encastrement. Ces deux dernières inconnues ne peuvent être déterminées statiquement ; d'où le système à résoudre est un système hyperstatique.[6]

Selon la configuration de l'aile, on peut distinguer trois forces pour une portion d'aile dans le sens de la demi-envergure, qui sont (**figure. III-5**) :

- La force de portance élémentaire.
- Le poids élémentaire structural de cette portion d'aile.
- Le poids élémentaire du carburant contenu dans cette portion d'aile.

Ces trois forces admettent une résultante qui est dirigée vers le haut si l'avion est en vol et dirigée vers le bas si l'avion est au sol.

L'effort tranchant **T** correspond à des contraintes de cisaillement τ et au moment fléchissant **M** correspond à une contrainte de traction (intrados de l'aile en vol) et une contrainte de compression (extrados de l'aile en vol). [6]

III-1-2. Efforts appliqués à une pale d'hélicoptère

III-1-2-1. En vol

Les efforts sollicitant une pale en vol peuvent se classer comme suit :

- La force centrifuge qui résulte de la masse de la pale en rotation. Elle engendre une traction permanente, et chaque élément de masse de la pale est donc soumise à une contrainte de traction .
- Les forces aérodynamiques issues de la surface de la pale tant en rotation qu'en translation et dont l'intensité résulte de l'incidence de la pale, la quelle est variable au cours d'un tour .
- Enfin, les forces d'inerties résultant des différents mouvements de la pale au cours d'un tour, tant en battement dans un plan vertical, de traînée dans un plan horizontal qu'en torsion.

La force centrifuge est constante si le régime nominal du rotor est régulé, donc constant, ce qui est généralement le cas .

En revanche, les forces aérodynamiques génèrent des efforts alternés, et ce sont eux qui, dans certaines configurations de vol, contribuent à l'endommagement de la pale en fatigue.

Les paramètres influents sur l'équation de la déflexion ——— Chapitre :III

Tout ces sollicitations engendrent des forces internes et des moments le long de la pale déterminant ainsi des états de contraintes normales et de cisaillement.

Les forces aérodynamiques engendrent :

- Le moment de *flexion vertical* variable au cours d'un tour , et il en résulte un état de contraintes normales permanentes et de contraintes normales alternées déterminant ainsi une traction et une compression ;
- Un moment de *flexion horizontal* variable au cours d'un tour, cette flexion est due à l'articulation de battement au pied de la pale, et il en résulte les mêmes effets que précédemment ;
- Un moment de torsion engendrant un état de contrainte de cisaillement pur.

III-1-2-2. Au sol

De même, pour le cas précédemment (voilure) les efforts appliquées sur la pale se réduisent et les inconnus (moment et réaction pour le cas d'une pale rigide) sont déterminés statiquement. Les structures actuelles sont menées d'articulations souples, celles-ci éliminent le moment d'encastrement et la réaction à l'appui et créent au niveau de l'excentricité de la pale un effort tranchant qu'il faut prendre en considération.

III-1-2-3. Origine et rôle des articulations

Les conditions de résistance de l'attache de la pale sur le moyeu et le comportement dynamique du rotor imposent trois degrés de liberté à la liaison entre la pale et moyeu qui sont :

1 – Le battement c'est à dire la levée de la pale perpendiculaire au plan du disque, elle permet de supprimer les contraintes de *flexion vertical* au niveau du pied de la pale. Mais l'articulation de battement crée des contraintes de *flexion horizontal* au pied de la pale .

2 – la traînée, c'est à dire le mouvement de la pale dans le plan du disque supprime les contraintes horizontal de la flexion provoquées par le battement des pales.

3 – Le pas, c'est à dire le mouvement de rotation de la pale suivant son envergure, permet de faire varier l'angle de pas θ , par rotation de la pale autour de son axe longitudinal (ou axe de variation de pas). Cette variation est commandée par le pilote. voir fig.III-6

III-1-2-3-1. Articulation de battement verticale

L'articulation de battement vertical permet d'annuler le moment d'encastrement statique et dynamique et aussi de ramener l'effort de portance tout près de l'axe du rotors et de supprimer le mouvement de roulis parasite.

Le moment d'extrémité des pales décrivent un cône très ouvert. En pratique l'axe de battement ne se trouve pas sur l'axe mais décalé d'une distance a , appelé « **excentricité** » de battement (**figure. III-7**).

III-1-2-4. Vrillage des pales

L'augmentation des forces élémentaires de portance et de traînée, de l'emplanture à l'extrémité de la pale, fait que le centre de poussée (CP) est situé non loin de l'extrémité (**figure. III-9**).

Il en résulte au niveaux de l'emplanture, des moments de flexion exagérés du point de vue résistance de la pale.

Afin de mieux répartir les efforts et diminuer les moments de flexion, les pales sont vrillées (tordues autour de leur axe longitudinal) de façon à les faire travailler à grande incidence au voisinage du moyeu et à faible incidence vers l'extrémité où les vitesses relatives (V_r) sont grandes. L'angle de pas θ diminue progressivement de l'emplanture à l'extrémité (**figure. III-10**).

La diminution de θ entraîne une diminution progressive de la portance et de traînée. Nous concluons enfin par deux figure (III-11) et (III-12), l'une qui nous donne une allure sur la distribution de la portance sur la pale, et l'autre représente une comparaison de répartition des moments de flexion pour une pale rigide et non rigide et non rigide.

Nous pouvons faire une extension pour le cas des aubes d'une turbine, pour le phénomène étudié qui est la flexion.

On a deux cas à considérer :

- Rotor : il sera considéré comme une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre (le cas de l'aile).
- Stator : qui sera représenté par une poutre encastree à ces deux extrémités.

Il est claire que les structure d'avion doivent résister à toutes les forces extérieures et intérieures donc avant d'entamer notre étude il faut faire une description sur les différents types d'ailes ainsi que les différents éléments qui les constituent.

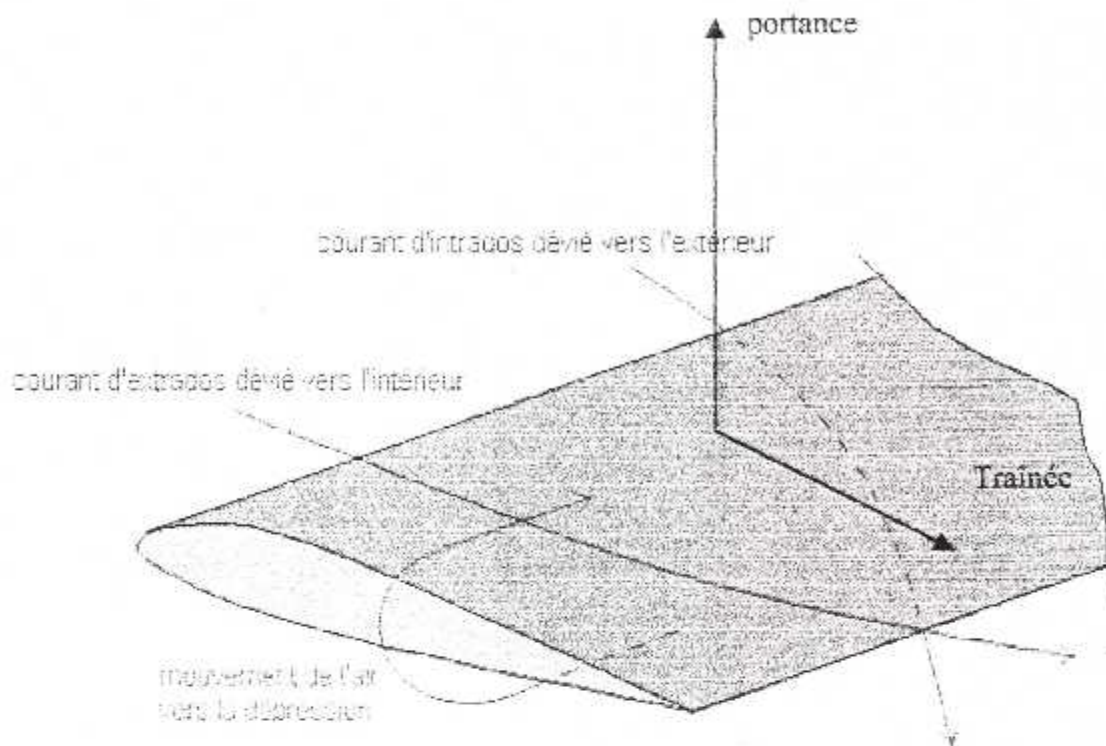


Fig .III-1. Charge aérodynamique soumise à la voilure.

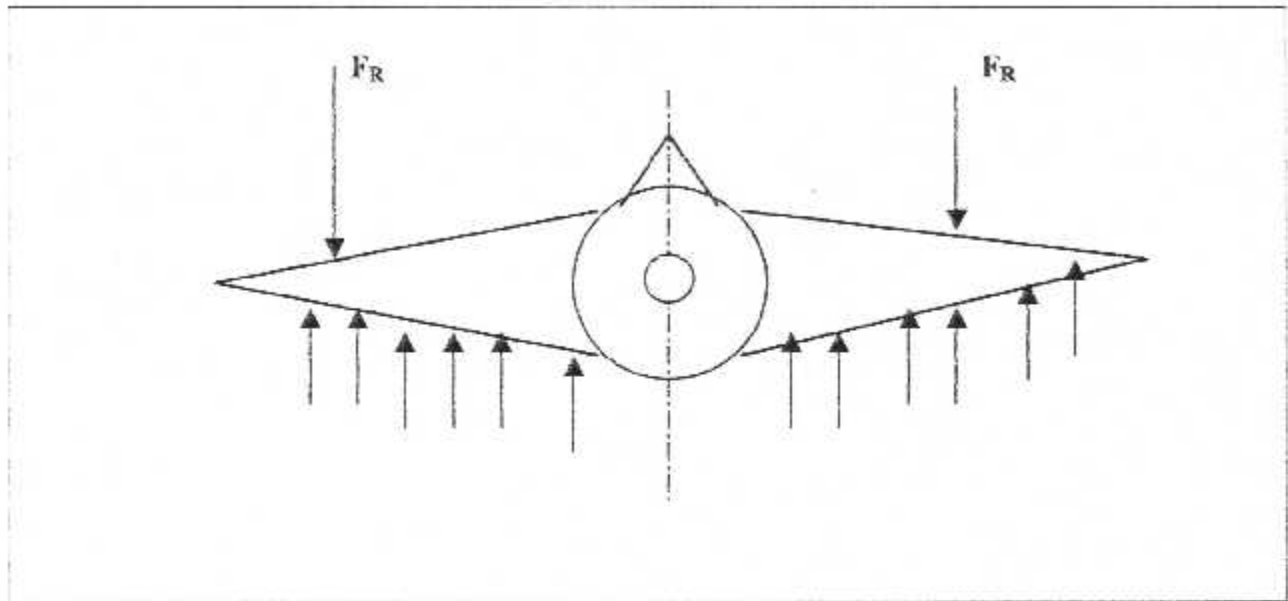


Fig.III-2. les contraintes de traction et de compression sur la voilure (flexion vertical)

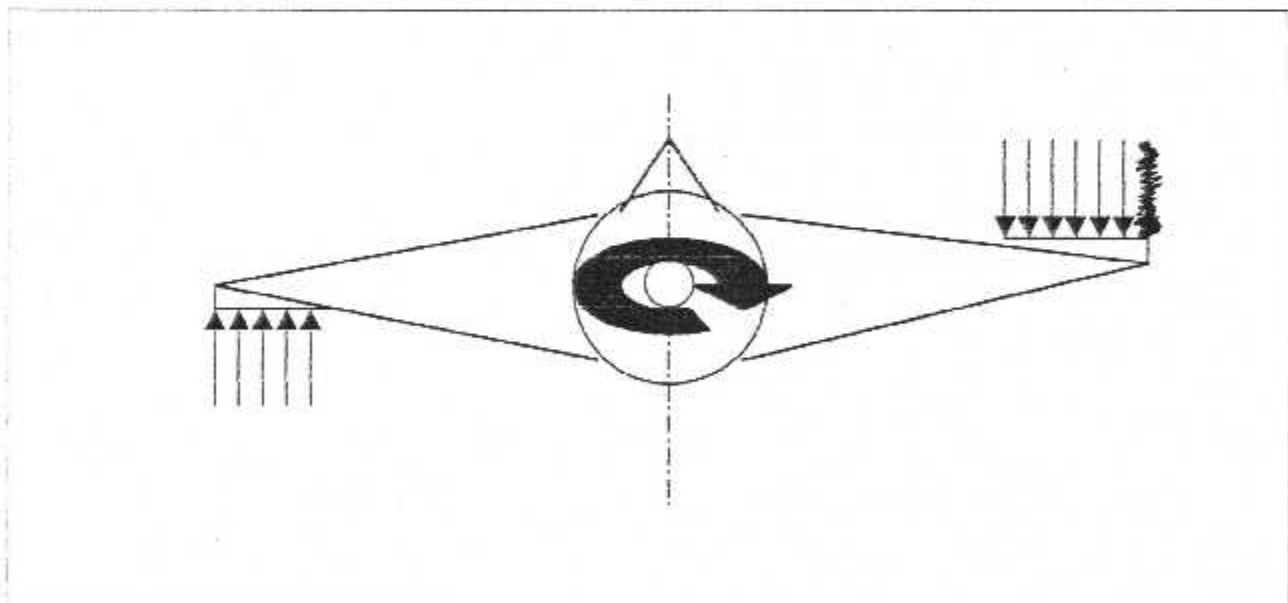


Fig.III-3. Rigidité de torsion de la voilure.

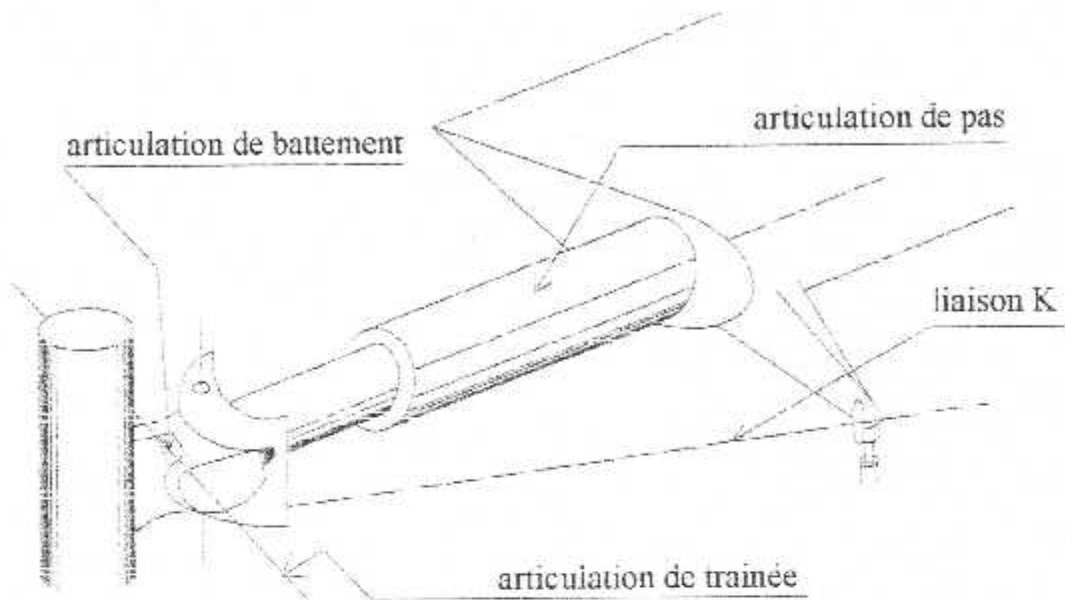


Fig. III-6. Origine et role des articulations.

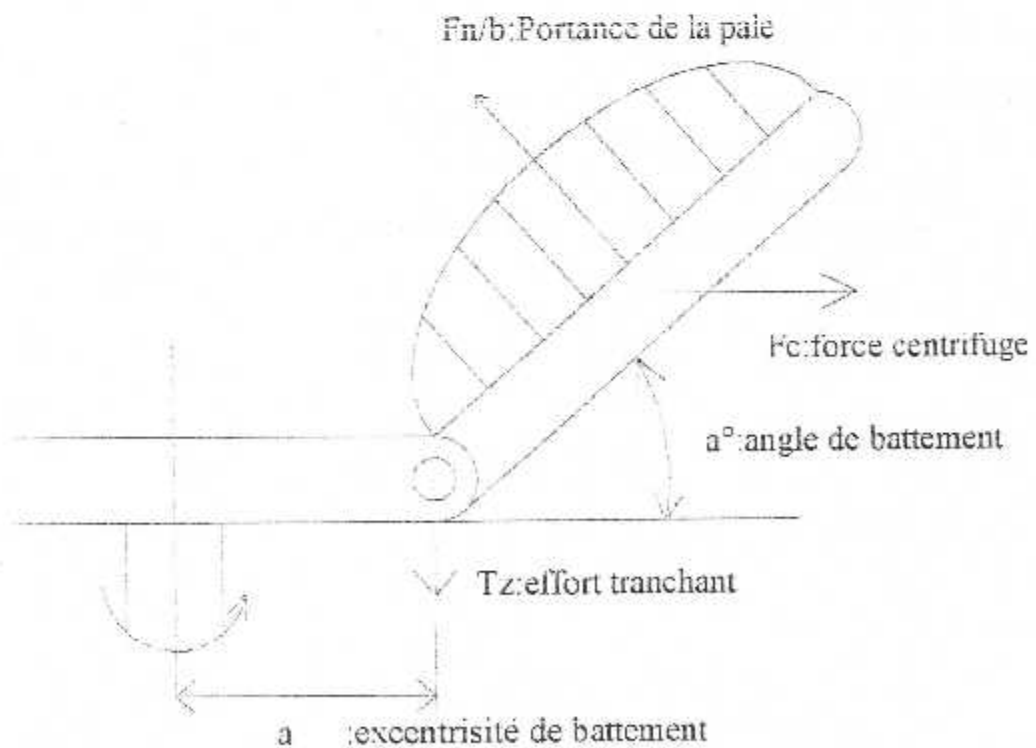


Fig. III-7. Repartition de la portance sur la pale.

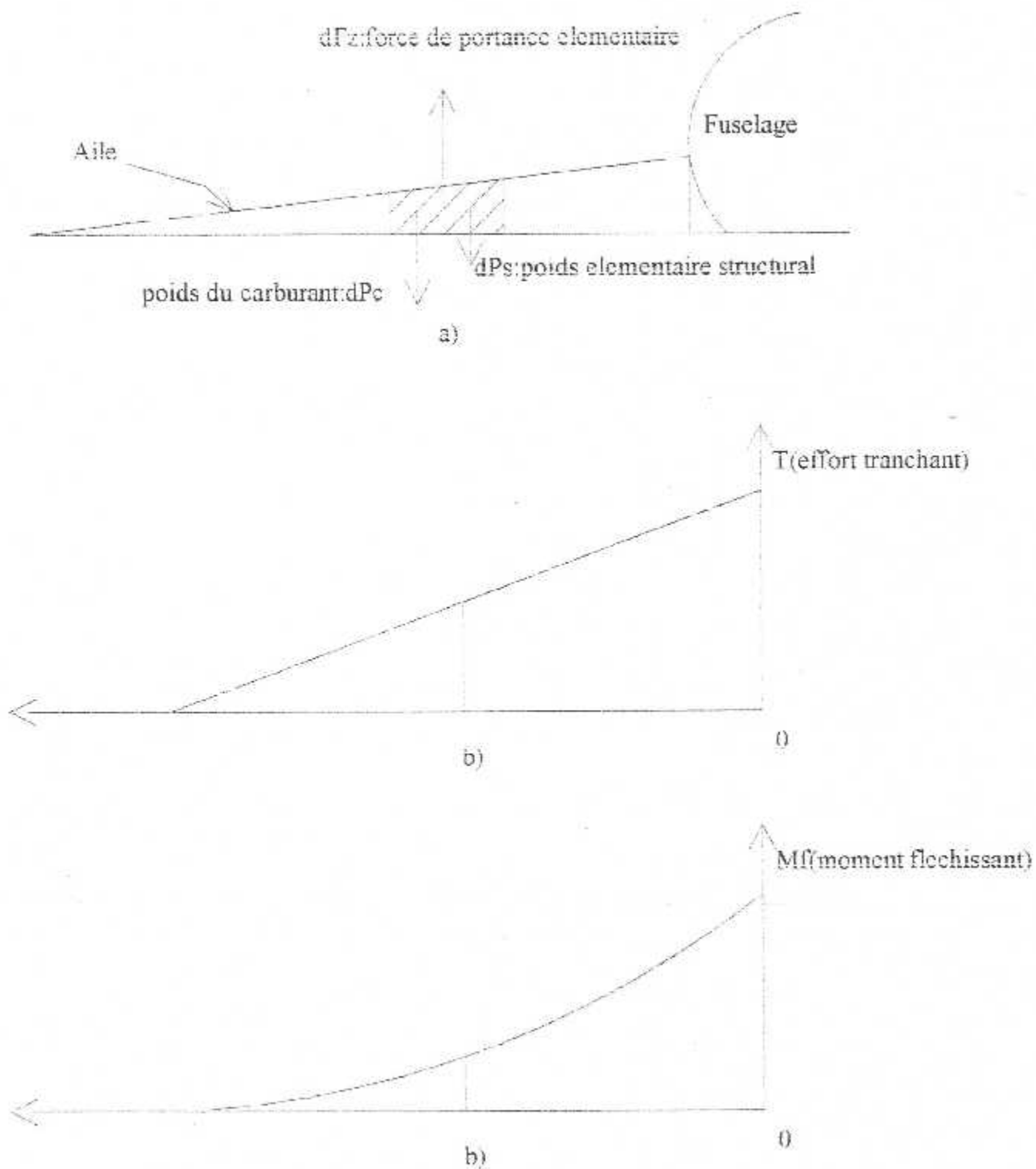


Fig. III-5. a) flexion verticale
 b) Diagramme de l'effort tranchant.
 c) Diagramme du moment de flexion.

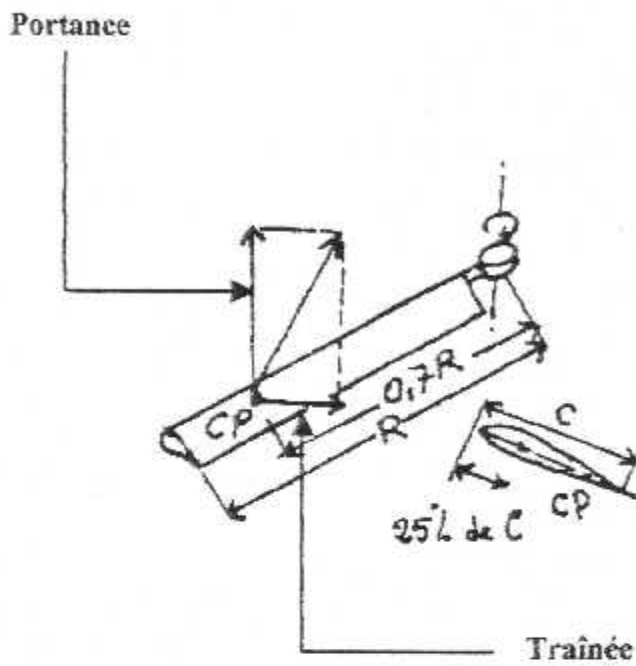


Fig. III-9. Position comparée du C.P pour une pale vrillée et celle non vrillée.

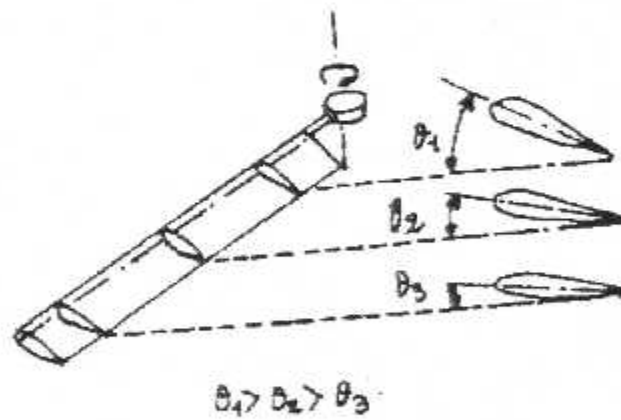


Fig. III-10. Vrillage d'une pale.

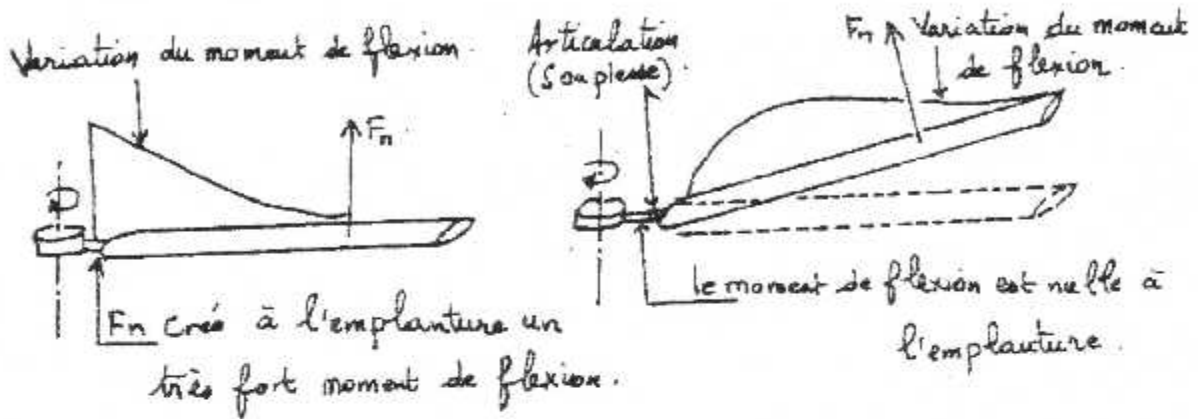


Fig. III-11. Distribution de la variation du moment de flexion pour :
 a). Pale rigide.
 b). Pale non rigide.

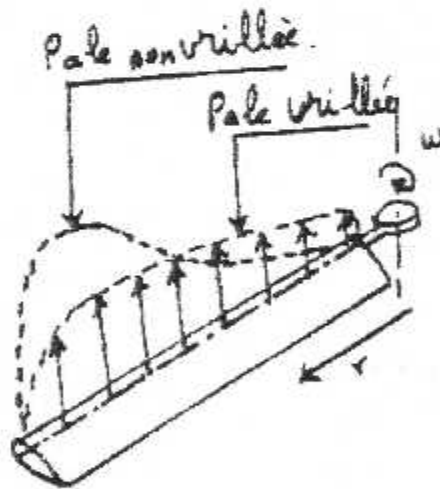


Fig. III-12. Comparaison de la portance pour une pala vrillée et celle non vrillée.

III-2. Effort tranchant et le moment fléchissant

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont déterminés par la méthode des sections.

La valeur de l'effort tranchant T_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des projections de toutes les forces extérieures (concentrées ou réparties) agissant sur la poutre d'un côté de la section considérée, sur l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section .

La valeur de moment fléchissant M_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des moments de toutes les charges extérieures agissant d'un côté de la section considérée, par rapport à l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.[7]

On admet que la valeur positive et négative de T et M correspond aux directions indiquées (figure. III-13).

Si la répartition de la charge se termine avant la section considérée (figure. III-14), cette charge répartie peut être considérée comme une charge concentrée, appliquée dans la section passant par le centre de gravité de l'aire du diagramme de la charge réparti.[7]

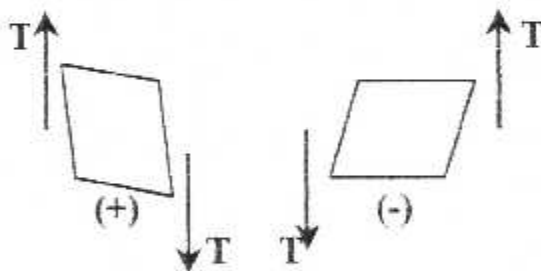


Fig. III-13. Convention de signe.

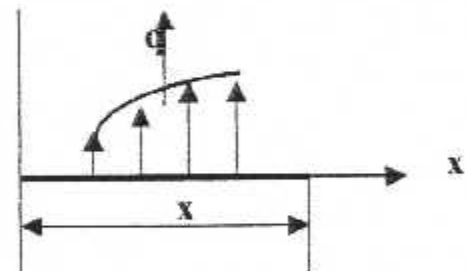


Fig. III-14. Répartition de la charge.

Il est recommandé de s'approcher de la section du côté de la poutre le moins chargé et de construire d'abord le diagramme T et puis celui de M .

Des définitions des quantités T et M conformément à la convention de signe, il découle que pour des poutres symétriques par rapport aux charges et aux types de liaisons, le diagramme de l'effort tranchant doit être antisymétrique et le diagramme du moment fléchissant, symétrique (figure. III-14-a).[7]

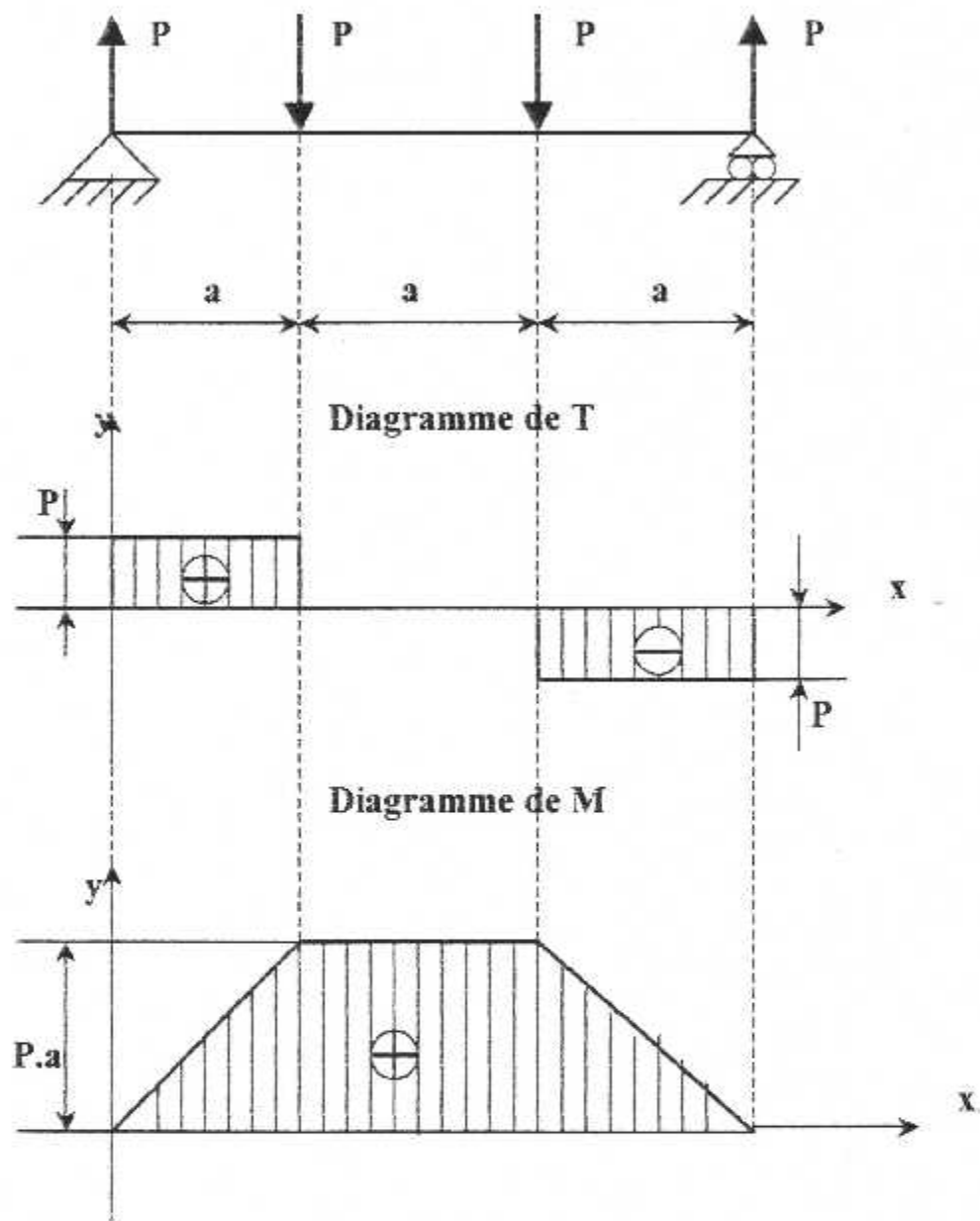


Fig. III-14-a. poutre avec deux appuis et deux force concentrée dans le même sens.

Pour des poutres antisymétriques et vice-versa, le diagramme de l'effort tranchant doit être symétrique et le diagramme du moment fléchissant, antisymétrique.
 (Figure. III-14-b)

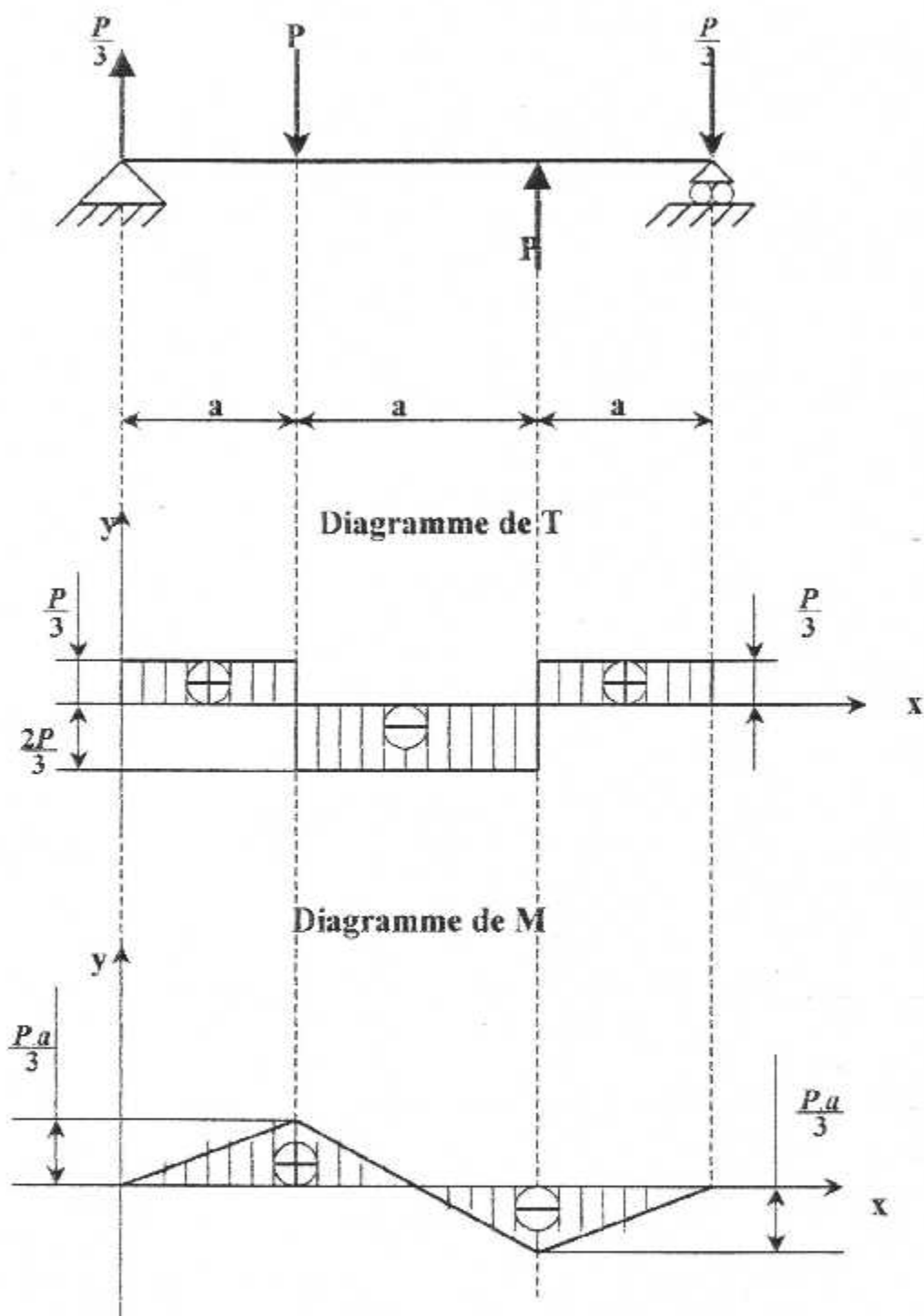


Fig. III-14-b. poutre supporte par deux appuis avec deux force inversé.

De la définition de T , il découle que dans une section où est appliquée une force concentrée, le diagramme de l'effort tranchant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que cette force extérieure. (figure. III-14-a et figure. III-14-b)[7]

De la définition de M il découle que, dans une section soumise à un couple le diagramme du moment fléchissant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que le moment de ce couple. (figure. III-15) [7]

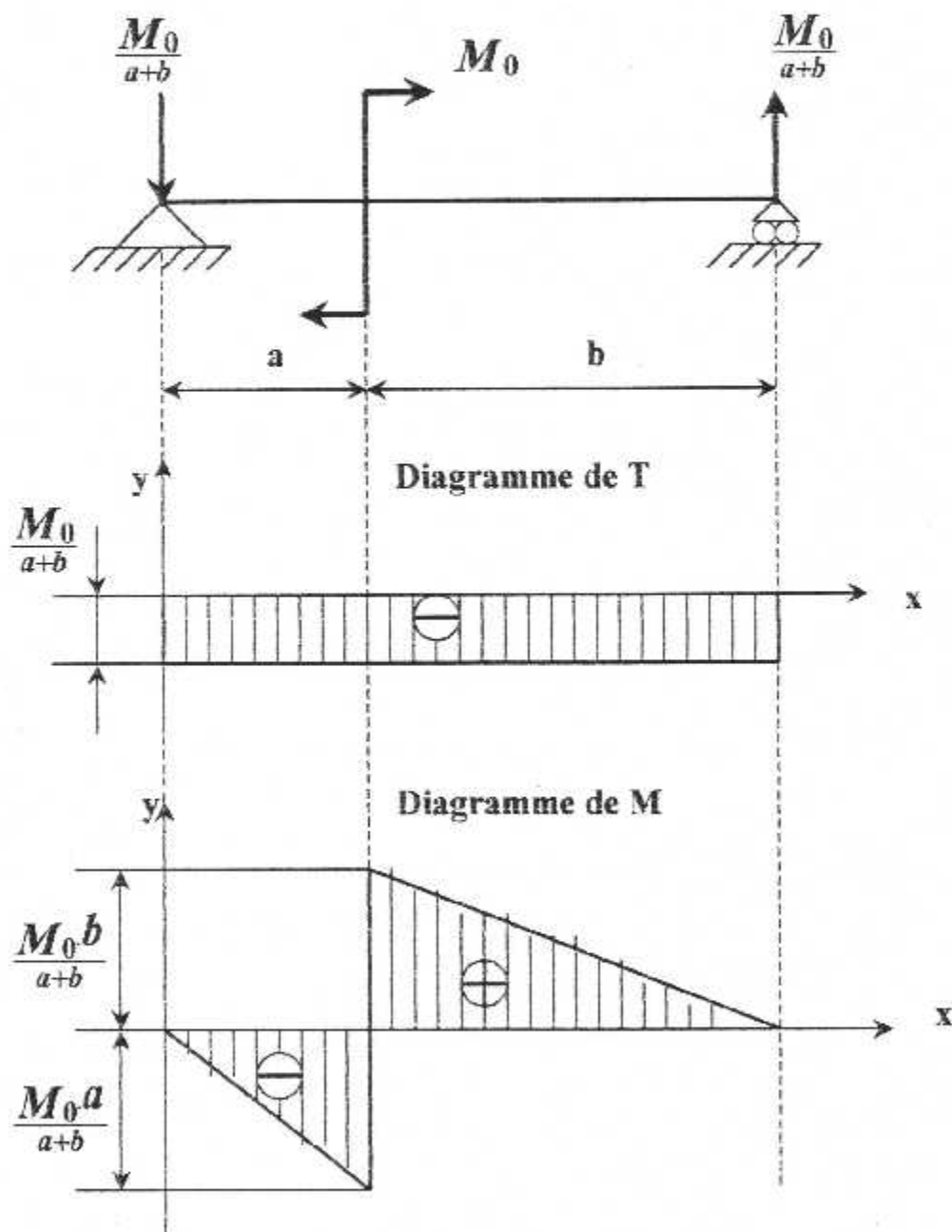


Fig. III-15. poutre supporte par deux appuis et moment de couple.

Pour les poutres non soumises à des couples répartis provoquant une flexion, la construction des diagrammes de T et M ainsi que le contrôle de leurs exactitudes, s'effectue à l'aide des relations différentielles (III-1) et (III-2) entre M, T et des conséquences qui découlent :[7]

$$T = \frac{dM}{dx} \quad \text{(III-1)}$$

$$Q = \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} \quad \text{(III-2)}$$

III-2-1. Principaux corollaires

- 1- Géométriquement, l'effort tranchant est interprété comme la tangente de l'angle formé par la tangente au diagramme du moment fléchissant aux niveau de la section considérée et par l'axe x de la poutre, et l'intensité de la charge, comme la tangente de l'angle formé par cet axe et la tangente au diagramme de l'effort tranchant.
- 2- Si les fonctions décrivant les variations des charges réparties sont des fonctions algébriques dans chaque partie de la poutre, le degré de la fonction de l'effort tranchant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de la charge répartie dans cette même partie de la poutre et le degré de la fonction du moment fléchissant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de l'effort tranchant.
- 3- Dans la section de la poutre où l'effort tranchant est nul, le moment fléchissant a une valeur extrême, et dans la section où l'effort tranchant passe par la valeur de zéro d'une manière discontinue, le diagramme du moment fléchissant perd son allure monotone.
- 4- Dans la section de la poutre où le diagramme de l'effort tranchant a un saut ne passant pas par la valeur zéro, le diagramme du moment fléchissant a un point anguleux.
- 5- Si sur toute la longueur de la poutre ou sur une de ses parties le diagramme de l'effort tranchant est antisymétrique, sur ces mêmes parties le diagramme du moment fléchissant est symétrique et vice-versa.
- 6- Dans chaque partie de la poutre la variation du moment fléchissant entre deux sections droites quelconques est égale à l'aire du diagramme des efforts tranchants entre ces deux sections.
- 7- Si l'axe x est orienté vers la gauche de la section extrême droite de la poutre, on a :

$$T = -\frac{dM}{dx}$$
- 8- La concavité du diagramme curviligne du moment fléchissant est dirigée suivant le sens de l'intensité de la charge répartie provoquant la forme curviligne.[7]

Il est utile de savoir que dans la section droite coïncidant avec l'axe de symétrie directe de la poutre l'effort tranchant (force antisymétrique) est nul et dans la section coïncidant avec l'axe de symétrie indirecte de la poutre le moment fléchissant (moment symétrique) est nul.[7]

Si une force extérieure agit sur la poutre suivant l'axe de symétrie directe de la poutre, les valeurs numériques des efforts tranchants dans les sections à gauche et à droite de l'axe de symétrie sont égales à la moitié de cette force.[7]

III-3. Détermination des coefficient de forme K_z et K_y de l'énergie

Par hypothèses, les constantes K_y et K_z sont calculées par rapport à des axes principaux d'inerties (figure. III-16).

La constante K_y suivant la flexion autour de l'axe Z est donnée par : (l'effort tranchant et dirigé suivant l'axe Y) [8]

$$K_y = \frac{A}{I_{zA}} \int \left(\frac{S_z^*}{b} \right) dA \quad (III-3)$$

Et la constante K_z de la flexion autour de l'axe Y et donnée par l'effort tranchant dirigé suivant l'axe Z : [8]

$$K_z = \frac{A}{I_{yA}} \int \left(\frac{S_y^*}{b} \right) dA \quad (III-4)$$

Avec :

A : l'aire de la section ;

I_z : moment d'inertie suivant l'axe Z ;

I_y : moment d'inertie suivant l'axe y ;

b : largeur de la bande ;

s^*_z : moment statique de la partie haute par rapport à l'axe z ;

s^*_y : moment statique de la partie haute par rapport à l'axe y ;

a \ Pour une section quelconque

l'énergie potentielle de la poutre sous l'action d'une force normale F_x est donnée :[8]

$$W_1 = \int_0^l \frac{(F_x)^2}{2EA} dx \quad (III-5)$$

avec :

F_x : force normale ;

W : énergie potentielle de la poutre sous l'action de F_x ;

L'énergie potentielle sous l'effet du moment M_y et M_z (y, z sont deux axes principaux d'inertie) est donnée par :[8]

$$W_2 = \int_0^l \left(\frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} \right) dx \quad \text{(III-6)}$$

Pour le calcul de l'énergie potentielle des efforts tranchants T_y, T_z on procède comme suit :

- L'énergie potentielle pour un élément volumique sous l'effet de la contrainte de cisaillement est :[8]

$$W_0 = \frac{\tau^2}{2G} \quad \text{(III-7)}$$

- On sait que l'effort tranchant est accompagné du moment fléchissant sous l'effet de T_y est : [8]

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T_y S_z^*}{bI_z} \quad \text{(III-8)}$$

- Supposant un élément infiniment petit de surface dA et de longueur dx , son énergie potentielle sera :[8]

$$W_0 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA dx \quad \text{(III-9)}$$

- En remplaçant la valeur τ_{xy} dans (III-9) on aura l'expression suivante de l'énergie potentielle :[8]

$$W_0 = \frac{T_y^2 S_z^{*2}}{2G b^2 I_z^2} dA dx \quad \text{(III-10)}$$

- En intégrant (III-10) suivant toute la surface A on aura l'énergie potentielle de l'élément de longueur dx :[8]

$$W_{dx} = \frac{T_y^2}{2GI_z^2} dx \int_A \frac{S_z^{*2}}{b^2} dA = \frac{T_y^2}{2GI_z^2} \frac{A}{A} dx \int_A \frac{S_z^{*2}}{b^2} dA \quad (\text{III-11})$$

- Cette dernière équation s'écrit sous la forme suivante :[8]

$$W_{dx} = \frac{T_y^2}{2GA} dx K_y \quad (\text{III-12})$$

Avec :

$$K_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left(\frac{S_z^*}{b} \right)^2 dA \quad (\text{III-13})$$

Donc K_y est le coefficient de forme de la section considérée.

Enfin, l'énergie potentielle de l'élément de poutre de longueur L sera :[8]

$$W_s = K_y \int_0^l \frac{T_y^2}{2GA} dx \quad (\text{III-14})$$

Avec la même méthode utilisée au paravent pour trouver l'énergie potentielle de la poutre sous l'effet de T_z d'où on aura :[8]

$$W_s = K_z \int_0^l \frac{T_z^2}{2GA} dx \quad (\text{III-15})$$

B \ Application

On va illustrer notre méthode par une application qui consiste à calculer le coefficient de forme, pour une figure simple par exemple un cercle (**figure. III-17**) et par la suite on dressera un tableau englobant quelques résultats.

Remarque

Par raison de symétrie , on étudie que la partie supérieure et on multiplie par le double pour obtenir le coefficient de forme totale du cercle .

- Section totale : $A = \pi r^2$
- Le centre de gravité : $YG = ZG = 0$
- Le moment d'inertie : $I_x = I_z = \frac{\pi r^4}{4}$
- Calcule du coefficient de forme :

$$K_y = \frac{A}{I_z} \int \left(\frac{S_z^*}{b} \right) dA$$

- La largeur de la bande :

$$b(z) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$$

avec :

b : largeur de la bande de la partie haute suivant l'axe z .
r : rayon du cercle.

- Détermination des angle θ_1 et θ_2 ;
 d'après la (figure. III-17) :

$$\theta < \theta_1 < \pi / 2 \quad \text{et} \quad \pi / 2 < \theta_2 < \pi$$

- Détermination de S_y^* :

On détermine le moment statique S_y^* numériquement :
 On discrétise la section supérieure en triangle

$$S_y^* = \int_s y dA = \sum_{i=1}^{NT} \Delta S_y^* = \sum_{i=1}^{NT} A_T(i) Y_{GT}(i)$$

avec :

- NT** : Nombre de triangle ;
- NN** : Nombre de nœuds ;
- A_T(i)** : Surface du triangle ;
- Y_{GT}(i)** : Centre de gravité du triangle ;

- pour un triangle (i) (figure III-17), on a :

$$AT(i) = 0.5 \{ (y_2 - y_1)(Z_3 - Z_1) - (Z_2 - Z_1)(y_3 - y_1) \}$$

$$YGT(i) = (1/3) \{ y_1 + y_2 + y_3 \}$$

- Numérotation des nœuds de chaque triangle :

Le nombre total des nœuds NN est déterminé par : $NN = NT+2$, les nœuds de chaque triangle (i), sont numérotés dans le sens antihoraire par : 1, i+1, i+2 ; i=1,2,.....,NT.

Conclusion

1)- Après avoir calculer tous les paramètres (l'aire, moment statique, moment d'inertie, largeur de la bande) contribuant au calcul de K_y (où K_z) celle-ci sera obtenue par la relation (III-3 où III-4)

2)- On propose des valeur de K_y et K_z pour quelques géométrie :

Figure	Coefficient de forme $K_z K_y$
Rectangle	6/5
Cercle	10/9

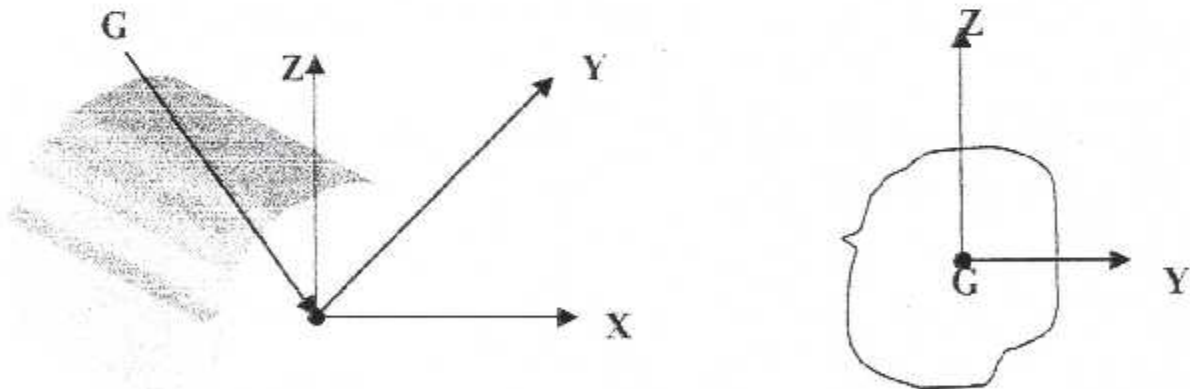


Fig.III-16. Les axes principaux d'inerties d'une section arbitraire.

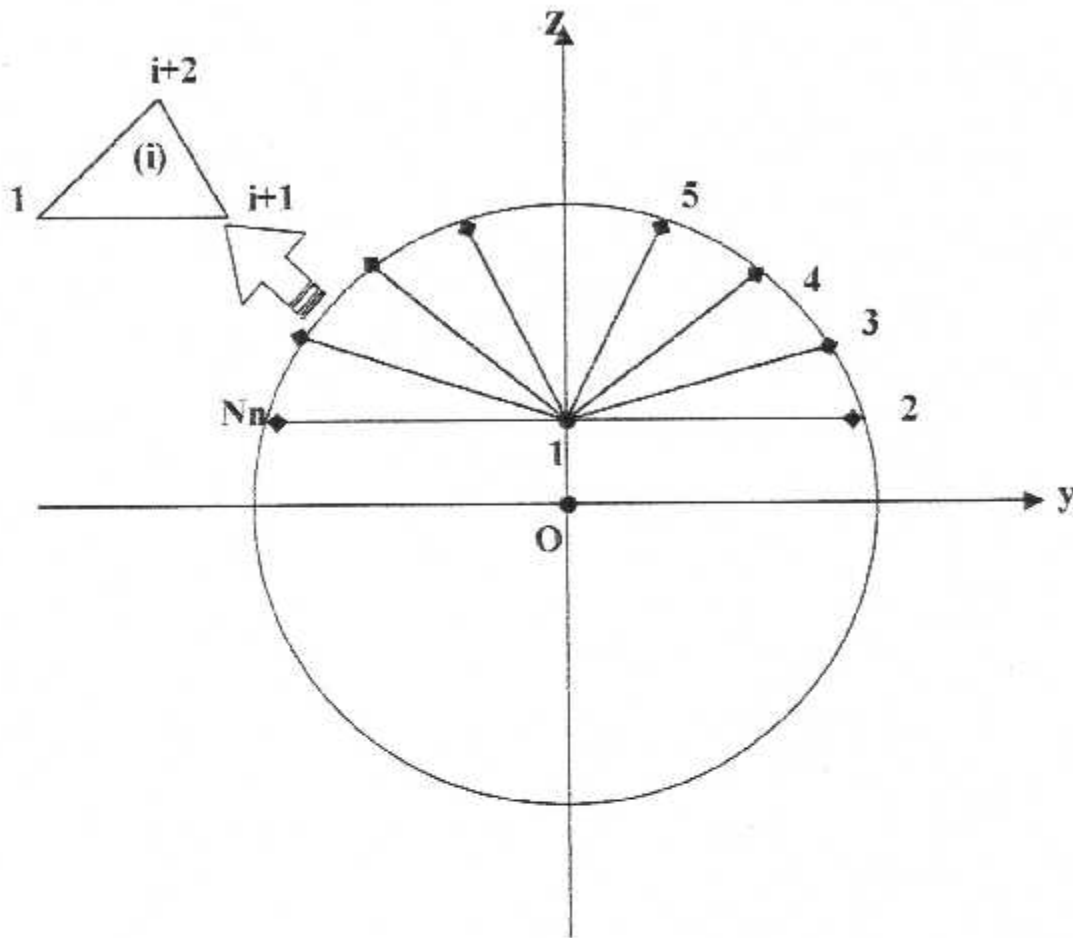


Fig.III-17. Discrétisation du cercle en triangle.

III-4. Condition de résistance

La contrainte sera maximale à la périphérie de la section (S) :

$$\sigma_{\text{maxi}} = \frac{M_{z \text{ maxi}}}{\left[\frac{I_{Gz}}{v} \right]}$$

La condition de résistance est : $\sigma_{\text{maxi}} \leq R_{pe}$

$V = Y_{\text{max}}$ et $\frac{I_0}{v}$ module de flexion (rigidité de la section de la poutre).

R_p : Résistance pratique à l'extension.

R_e : Résistance élastique à l'extension.

III-5. Hypothèses

III-5-1. Hypothèse sur le corps solide

- La poutre admet un plan de symétrie.
- Elle est formée de fibres jointives parallèle à l'axe ($x'x$).

III-5-2. Hypothèse sur les forces

- Les forces agissant dans le plan de symétrie.
- Elle sont perpendiculaires à l'axe ($x'x$), c'est pourquoi la flexion est simple.

III-5-3. Hypothèse sur la déformation

- a\ Les déformations sont élastiques et suffisamment petites pour ne pas modifier les intensités des forces ni leurs distances.[2]
- b\ Toute fibre contenu dans le plan parallèle au plan de symétrie (π) demeure dans ce plan pendant la déformation, c'est pourquoi la flexion est dit plane.[2]

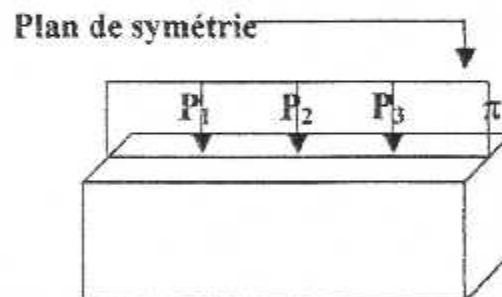


Fig.III-18. Plan de symétrie.

C/ Les sections droites de la poutre telles que CDEH (fig.III-19) demeurent planes et perpendiculaires à ($x'x$) déformé.

La flexion allonge certaines fibres et en raccourcit d'autres. Les fibres tendues sont séparées des fibres comprimées par la couche de fibres neutres passant par l'axe ($x'x$) de chaque section droite.

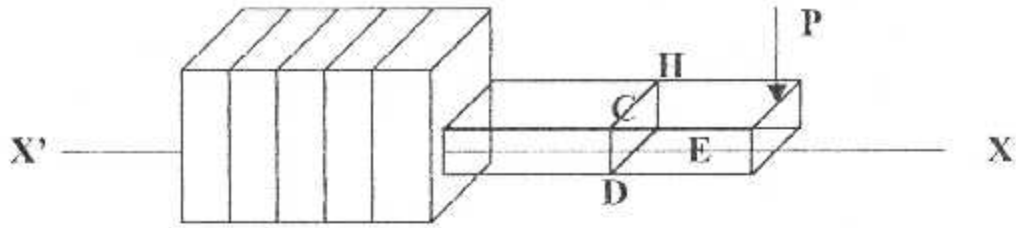


Fig.III-19. Présentation de la flexion.

On définit l'axe neutre ($\alpha\beta$) (fig.III-12) d'une section droite quelconque CDEH. Par l'intersection de cette dernière avec la couche des fibres neutres. [2]

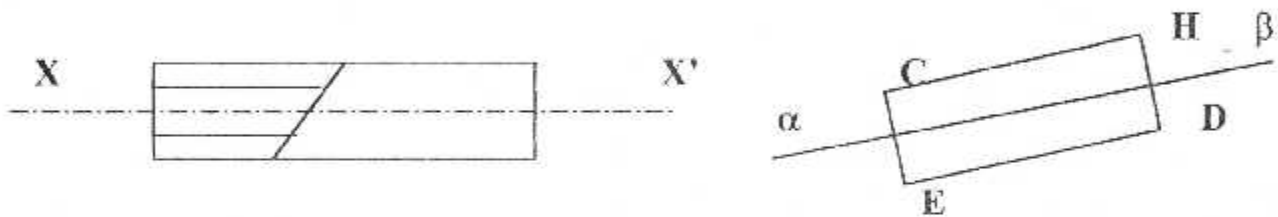


Fig.III-20. Laxe des fibre neutre.

III-6. Déflexion élastique des poutres

Il a été constatée que des charges latérales appliquées à une poutre, non seulement produisaient une flexion interne, et des contraintes de cisaillement dans la poutre, mais aussi la faisaient fléchir dans une direction perpendiculaire à son axe.

III-6-1. Définition de la déflexion d'une poutre

La manière la plus commode d'exprimer la déformation d'une poutre est d'évaluer sa déflexion à partir de sa position non chargée. La déflexion est mesurée par la déformation de la surface neutre de la poutre depuis sa position initiale jusqu'à sa position finale. La surface neutre prend une forme dite ligne élastique de la poutre.

La poutre dans son état initiale non déformé est présenté dans la **figure. III-21** et dans son état déformé sous l'action des charges dans la **figure. III-22**.



Fig. III-21. Poutre non déformé.

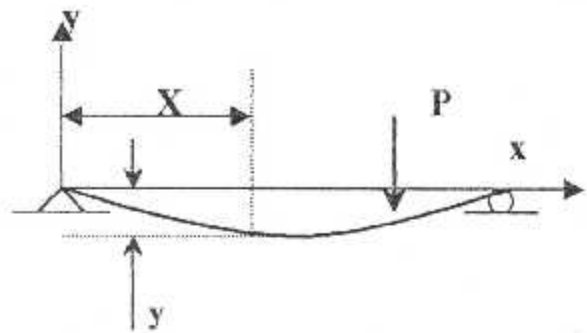


Fig. III-22. Poutre déformé.

La déflexion d'une poutre est exprimée par le déplacement Y , il est habituellement nécessaire de calculer la déflexion Y pour chaque valeur de X le long de la poutre. Cette relation peut s'écrire sous la forme d'une équation fréquemment dénommée équation de la courbe de déflexion (ou ligne élastique) de la poutre.[9]

La courbe de la déflexion est représentée par l'équation différentielle suivant :[9]

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} = -M \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (III-16)$$

Où x et y sont les coordonnées dans la (figure. III-22). L'ordonnée y est donc la déflexion de la poutre. Dans cette équation, E est le module d'élasticité de la poutre et I le moment d'inertie de la section droite autour de l'axe neutre qui passe par le centre d'inertie de la section.

De même M représente le moment de flexion à la distance x d'une extrémité de la poutre.[9]

L'équation différentielle de la courbure de la déflexion (III-16) d'une poutre chargée par des forces latérales.(figure. III-22)

$$M = \frac{EI}{\rho} \quad (III-17)$$

Dans cette expression, M est le moment de flexion agissant sur une section particulière de la poutre, ρ le rayon de courbure de la surface neutre de la poutre en cette même section et I le moment d'inertie de la section autour de l'axe neutre passant par son centre d'inertie.

L'équation (III-17) peut être écrite sous la forme :[9]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \text{(III-18)}$$

Le terme de gauche représente la courbure de la surface neutre de la poutre. Puisque M varie d'une extrémité à l'autre de la poutre, la courbe de déflexion est à courbure variable.

Dans la **figure. III-22** la ligne en trait gras représente la surface neutre déformée de la poutre fléchie. Avec la convention de signe, la déflexion y est considérée comme positive vers le haut, donc dans ce cas particulier toutes les déflexions sont négatives.[9]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \quad \text{(III-19)}$$

Dans cette expression (III-19), dy/dx représente la pente de la courbe en un point quelconque. Donc pour les poutres rigides la grandeur dy/dx est petite alors on peut négliger le terme $(dy/dx)^2$ devant l'unité.[9]

Cette hypothèse simplifie l'expression de la courbe dans le cas des petites déflexions et elle devient :[9]

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{(III-20)}$$

Donc pour les petites déflexions, l'équation différentielle (III-16) devient :[9]

$$d^2y/dx^2 = M/EI \quad \text{ou} \quad EI \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad \text{(III-21)}$$

C'est l'équation différentielle de la courbe de déflexion d'une poutre sollicitée par des forces latérales. En l'honneur de leur découverte simultanée, on appelle « **équation d'Euler -Bernoulli** » de la flexion d'une poutre.[9]

III-6-2. Hypothèses et limitation

Dans l'établissement de l'équation (III-16), on a fait l'hypothèse que les déflexions dues au cisaillement sont négligeables comparativement à celles produites par la flexion, il est aussi admis que les déflexions sont petite par rapport au dimensions de la section de la poutre est que toutes les régions de la poutre ont un comportement élastique.[9]

Lorsqu'on a croise un problème hyperstatique de trois inconnus et deux équation, on fait appelle une troisième équation qui est « **l'équation de la déforme** » ou équation de déplacement.

III-7. Déplacements des poutres en flexion

Les déplacements des sections d'une poutre sont caractérisés :[7]

- 1) Par des déplacements linéiques des centres de gravité des sections droites dans une direction normale à l'axe géométrique x de la poutre, appelés **déplacement verticale** « y_x ».
- 2) Par des déplacements angulaires des sections droites autour de l'axe neutre z , appelés **rotations des sections** « θ_x ».

Le déplacement verticale y_x est positif, si sa direction coïncide avec le sens positif de l'axe perpendiculaire à l'axe géométrique x de la poutre.[7]

La rotation θ_x est positive, si la rotation de la section droite de la poutre autour de l'axe neutre Z se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.[7]

Puisque l'effort tranchant n'a pas un effet appréciable que sur la déformation pour les poutres courtes, les quantités y et θ sont en général déterminées compte tenu seulement du moment fléchissant.

Les valeurs de y et θ peuvent être calculées par la méthode des paramètres initiaux, par les méthodes graphique, grapho-analytique et autres [7]

III-8. La méthode des paramètres initiaux

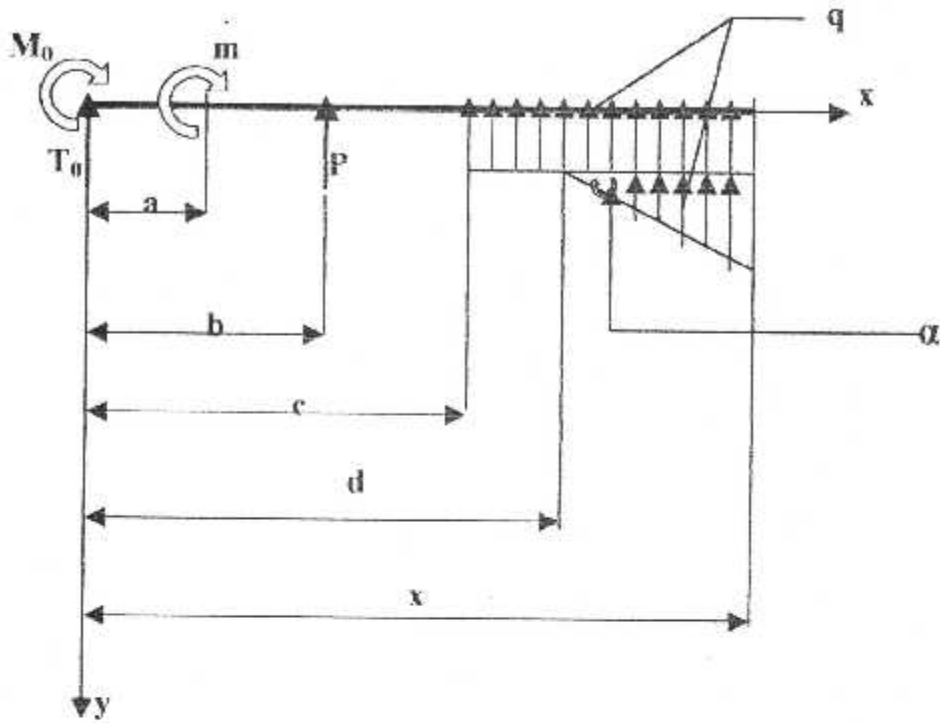


Fig.III-23. La poutre chargée par certain système de forces.

Nous nous bornons ici à étudier les poutres à rigidité constante : $E I_z = \text{Const.}$ Considérons une partie de la poutre, chargée par un certain système de forces (fig.III-22) ; dans une section courante (x) le moment fléchissant $M_z(x)$ peut être écrite :[10]

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + m(x-a)^0 + P(x-b)^1 + q \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{\text{tg} \alpha (x-d)^3}{6}$$

Il est facile de montrer, que pour n'importe quelle section de la poutre entre l'intervalle de 0 à x, l'expression de $M_z(x)$ peut être représentée sous la forme :[10]

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + \left| \begin{array}{l} I \\ II \\ III \\ IV \end{array} \right. \begin{array}{l} m(x-a)^0 \\ P(x-b)^1 \\ q \frac{(x-c)^2}{2} \\ \frac{\text{tg} \alpha (x-d)^3}{6} \end{array} \quad \text{-----(III-22)}$$

- I $\Leftrightarrow x > a$.
- II $\Leftrightarrow x > b$.
- III $\Leftrightarrow x > c$.
- IV $\Leftrightarrow x > d$.

Remarque

1). Le signe $\left. \begin{array}{l} \\ x > n \end{array} \right\}$ dit que le membre correspondant doit être prise en considération uniquement pour les sections où $x > n$. [10]
n : distance l'axe y jusqu'à l'appuis de la force.

2). **Règle des signes.** Un certaine paramètre est positif, s'il provoque le moment fléchissant positif dans une section considérée (x). Par exemple, tout les paramètres représentés en figure. III-23, sont positifs.

Représentons l'équation différentielle de la ligne élastique sous la forme : [10]

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M_z \tag{III-23}$$

En égalisant les expression (III-22) et (III-23) de $M_z(x)$, nous obtenons : [10]

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -[M_0 + T_0 x + \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \right\} \dot{m}(x-a)^0 + P(x-b)^1 + q \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{tg\alpha(x-d)^3}{6}] \dots \tag{III-24}$$

L'intégration de cette équation (III-24) nous donne :

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = EI_z \theta_z = C - [M_0 x + T_0 \frac{x^2}{2} + \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \right\} \dot{m}(x-a)^0 + P \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} + \frac{tg\alpha(x-d)^4}{24}]$$

et la deuxième intégration :

$$EI_z Y(x) = D + Cx - [M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \right\} \dot{m} \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} + \frac{tg\alpha(x-d)^5}{120}]$$

Pour la section $x = 0$ nous avons : [10]

$$C = EI_z \theta_0 \quad ; \quad D = EI_z Y_0$$

Où Y_0 et θ_0 sont les valeurs de θ_z et de Y en extrémité gauche de la poutre.

Alors, finalement : [10]

$$EI_z Y(x) = EI_z Y_0 + EI_z \theta_0 x \left[M_0 \frac{x^2}{2} + T_0 \frac{x^3}{6} + \left. \begin{array}{l} I \\ m \frac{(x-a)^2}{2} \end{array} \right| + \left. \begin{array}{l} II \\ P \frac{(x-b)^3}{6} \end{array} \right| + \left. \begin{array}{l} III \\ q \frac{(x-c)^4}{24} \end{array} \right| + \left. \begin{array}{l} IV \\ \frac{\text{tg} \alpha (x-d)^6}{120} \end{array} \right] \quad (III-25)$$

- I $\Leftrightarrow x > a$.
- II $\Leftrightarrow x > b$.
- III $\Leftrightarrow x > c$.
- IV $\Leftrightarrow x > d$.

Cette équation s'appelle « l'équation universelle de la ligne élastique ».

III-8-1. L'ordre de résolution

La résolution des problèmes à l'aide de l'équation universelle est la suivante : [10]

- 1). On choisit l'origine des coordonnées à l'extrémité gauche de la poutre.
- 2). On détermine (si cela est possible) **les grandeurs des paramètres initiaux**, c'est à dire Y_0 , θ_0 , M_0 , T_0 .
- 3). En utilisant la formule (III-25), on compose l'équation de $Y(x)$.
- 4). L'expression de $\theta_z(x)$ se détermine par différentiation de l'équation de $Y(x)$.
- 5). Les constantes Y_0 et θ_0 (si elle ne sont pas connues d'avance) se déterminent à l'aide des conditions d'appui.

Considérons des exemples où pour les poutres de rigidité $E I_z$

Exemple [10]

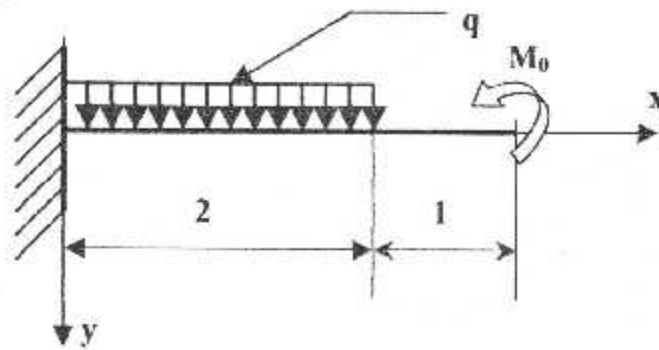


Fig.III-23. Encastre libre.

Dans cette exemple $T_0 = 0$, et $M_0 = -3 \text{ tm}$, et $q = 1 \text{ tm}$.

Les paramètre y_0 et θ_0 sont inconnus avant la résolution.

L'expression de $Y(x)$ peut être écrite sous la forme :[10]

$$E I_z Y(x) = E I_z Y_0 + E I_z \theta_0 x \left[-3 \frac{x^2}{2} \Big|_{x>1} q \frac{1(x-1)^4}{24} \right]$$

la différentiation (la dérive de $Y(x)$) de cette équation nous donne :[10]

$$E I_z \theta(x) = E I_z \theta_0 - \left[-3 x \Big|_{x>1} q \frac{1(x-1)^3}{6} \right]$$

Pour déterminé les paramètre y_0 et θ_0 il faut établir des condition d'appui à l'encastrement :

- $x = 3 \text{ m}$.

$$E I_z \theta(x) = 0 = E I_z \theta_0 - \left[-3 \cdot 3 \Big|_{x>1} q \frac{1(3-1)^3}{6} \right]$$

$$E I_z Y(x) = 0 = E I_z Y_0 + 3 E I_z \theta_0 - \left[-3 \frac{3^2}{2} \Big|_{x>1} q \frac{1(3-1)^4}{24} \right]$$

d'où :

$$E I_z y_0 = \frac{-101}{6} \quad \text{et} \quad E I_z \theta_0 = \frac{-31}{3}$$

finalement, les expressions de $Y(x)$ et $\theta(x)$ sont : [10]

$$E I_z Y(x) = \frac{101}{6} - \frac{31}{3} x - \left[-3 \frac{x^2}{2} \right]_{x>1} \left[q \frac{1(x-1)^4}{24} \right]$$

$$E I_z \theta(x) = \frac{-31}{3} - \left[-3 x \right]_{x>1} \left[q \frac{1(x-1)^3}{6} \right]$$

Chapitre IV

Résolution de l'équation différentielle et interprétation des résultats

- Etude des petites déformation
- Modélisation du problème
- Etude des grandes déformation
- Interprétation des graphes

IV-1. Etude des petites déformation

Dans ce cas on néglige le paramètre le $(y')^2 = 0$ donc l'équation devient facile à résoudre et elle s'écrit sous la forme suivante :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

IV-1-1. Exemple d'une poutre encastrée libre

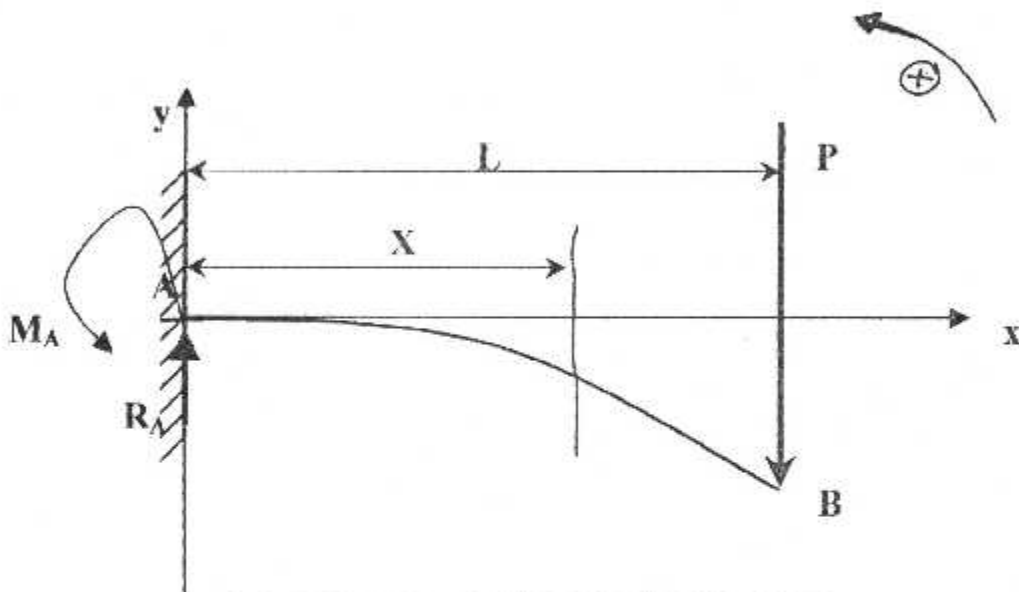


Fig. IV-1. Une poutre encastrée libre

1)- On calcule la valeur de la réaction R_A et le moment de l'encastrement M_A : pour cela on applique les deux lois de la statique

- La première loi de la statique $\sum \vec{F}_{ext} = 0$:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{R}_A + \vec{P} = 0 \dots\dots\dots (*)$$

Par projection sur l'axe y l'équation (*) devient :

$$R_A - P = 0 \Rightarrow R_A = P$$

- La deuxième loi de la statique $\sum_{i,1} M = 0$:

$$\sum_{/A} \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_A + \vec{P} L = \vec{0} \dots\dots\dots (*)$$

Par projection sur le sens contraire anti-horreur l'équation (*) devient :

$$M_A - P L = 0 \Rightarrow M_A = P L$$

2)- Apres avoir calculer M_A et R_A on calcul le moment de flexion .

Le moment de flexion pour toute la section situé à une distance x du mur est donné par la somme des moment de ces deux réactions autour d'un axe situé dans cette section.

$$\text{Donc : } \sum \vec{M}_{ext} = M \Leftrightarrow \vec{M} = \vec{M}_A + \vec{R}_A x$$

Après la projection on à :

$$M = -M_A + R_A x$$

on remplace M dans l'équation de la courbe de déflexion (L'équation (III-22)chap. III)

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M_A + R_A$$

Donc on remplace M_A et R_A par leur valeur :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -PL + Px \dots\dots\dots (IV-1)$$

intégration deux fois de l'équation (IV-1) nous donne :

$$EI y = -PL \frac{x^2}{2} + \frac{P x^3}{6} + C_1 x + C_2 \dots\dots\dots (IV-2)$$

3)- Calcul des constants d'intégrations C_1 et C_2 :

Pour $x = 0$:

- La pente est nulle $y' = 0$ donc $C_1 = 0$.
- La cote est nulle $y = 0$ donc $C_2 = 0$.

Alors l'équation (IV-2) devient :

$$EI y = -PL \frac{x^2}{2} + \frac{P x^3}{6}$$

$$y = \frac{P}{6EI} (-3Lx^2 + x^3) \text{-----(IV-3)}$$

$$\theta = y' = \frac{P}{2EI} (-2Lx + x^2) \text{-----(IV-4)}$$

La déflexion est maximale à l'extrémité de droite de la poutre ($x = L$) sous la charge P est de l'équation (3) on tire :

$$\theta = -\frac{PL^2}{2EI} \qquad y = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Les valeurs sont négatives indiquent que ce point de la courbe de déflexion se trouve en-dessous de l'axe des x .

IV-2-2. Exemple d'une poutre encastree libre avec une charge répartie sur le long de la poutre

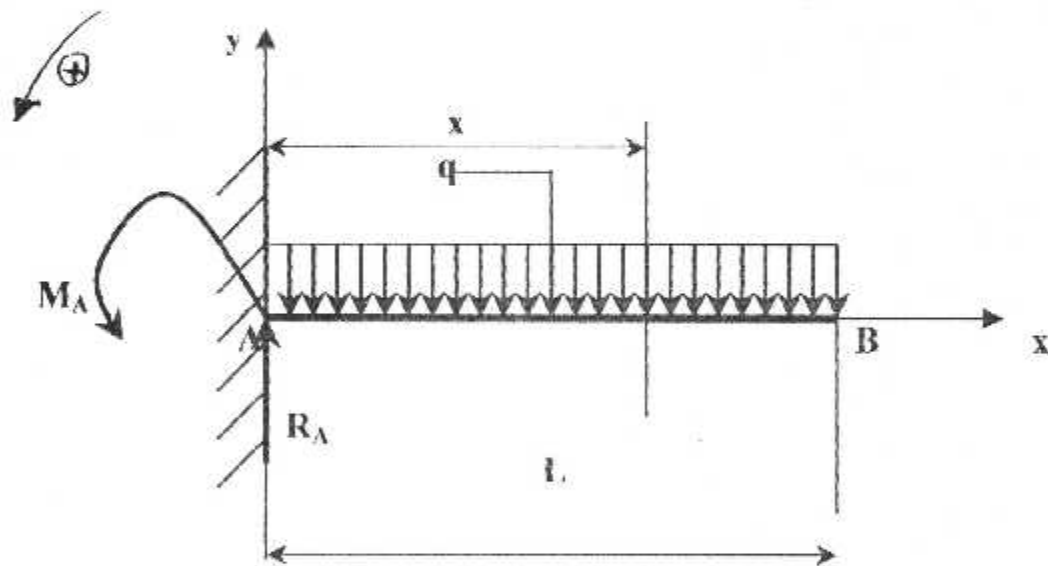


Fig.IV-3. Une poutre encastree libre avec une charge répartie

1)- On calcule la valeur de la réaction R_A et le moment de l'encastrement M_A :
pour cela on applique les deux lois de la statique

- La premier lois de la statique $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$:

$$\vec{R}_A + qL = \vec{0}$$

Par projection sur l'axe des y on a :

$$R_A - qL = 0 \Rightarrow R_A = qL$$

- La deuxième lois de la statique $\sum_{i/A} M = 0$:

$$\overrightarrow{M}_A + \frac{L}{2} \overrightarrow{q} L = \overline{0}$$

Par projection sur le sens anti-horreur on a :

$$M_A - q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow M_A = q \frac{L^2}{2}$$

2)- Calcul du moment de flexion M :

La charge répartie q agit sur une longueur (L-x) à l'adroitte de cette section, la force résultante est donc : q (L-x).

Cette force agit sur au centre de cette partie de la poutre à droite de x et le bras de son moment en x est $\frac{(L-x)}{2}$.

Le moment de flexion sur cette section x est alors donné par :

$$M = -\frac{q}{2}(L-x)^2$$

Le signe moins est nécessaire puisqu'une charge est dirigée vers le bas produit une courbure négative.

L'équation différentielle (l'équation IV-6) de la poutre fléchie est donc :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q}{2}(L-x)^2 \text{ -----(IV-5)}$$

Intégré une fois l'équation (IV-5) donne :

$$EI y' = -\frac{q}{2} \frac{(L-x)^3}{3} + C_1 \text{ -----(IV-6)}$$

3)- Calcule des constants d'intégration C_1 :

Pour $x = 0$:

- La pente est nulle $y' = 0$ donc :

$$0 = -\frac{qL^3}{6} + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{6}$$

alors (2) devient :

$$EI y' = -\frac{q}{2} \frac{(L-x)^3}{3} + \frac{qL^3}{6} \text{-----(IV-7)}$$

Intégré une deuxième fois l'équation (*) donne :

$$EI y = -\frac{q}{6} \frac{(L-x)^4}{4} + \frac{qL^3}{6} x + C_2$$

4)- Calcul de la constant d'intégration C_2 :

Pour $x = 0$:

- La pente est nulle $y = 0$ donc :

$$0 = -\frac{qL^4}{24} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{24}$$

La forme finale de la courbe de déflexion de la poutre est alors :

$$EI y = -\frac{q(L-x)^4}{24} - \frac{qL^3}{6} x + \frac{qL^4}{24} \text{-----(IV-8)}$$

La déflexion est maximale à l'extrémité de droite de la poutre ou $x = L$ et en ce point, d'après l'équation (IV-8), on a :

$$EI y_{\max} = -\frac{qL^4}{6} + \frac{qL^4}{24} = -\frac{qL^4}{8} \Rightarrow y_{\max} = -\frac{qL^4}{8EI}$$

D'abord on représente notre problème réel « aile d'avion »

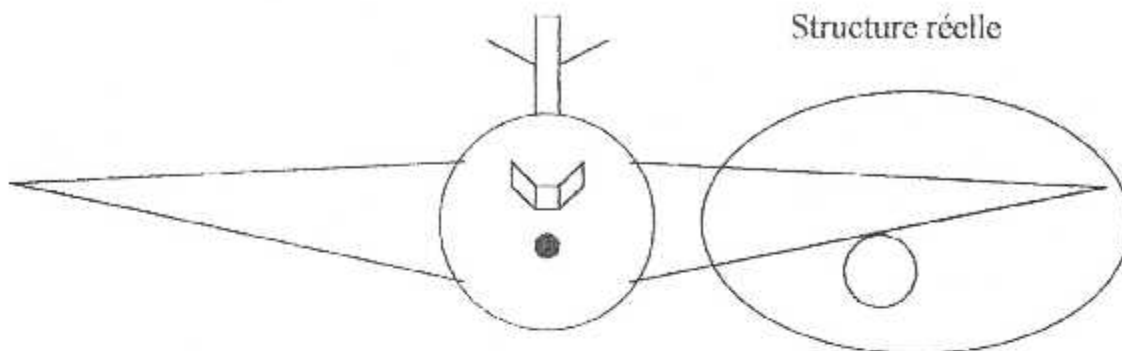


Fig.VI-4. Problème réelle

Dans l'étude on va assimiler une aile à une poutre encastree est libre à l'extrémité, donc tous les efforts appliqué à l'aile est assimilés à des force concentrée ou des appuis ou des charges réparties tout ça est encaissé par la poutre.

VI-2-1. Effort appliqué à la voilure au sol (cas d'un avion biréacteur)

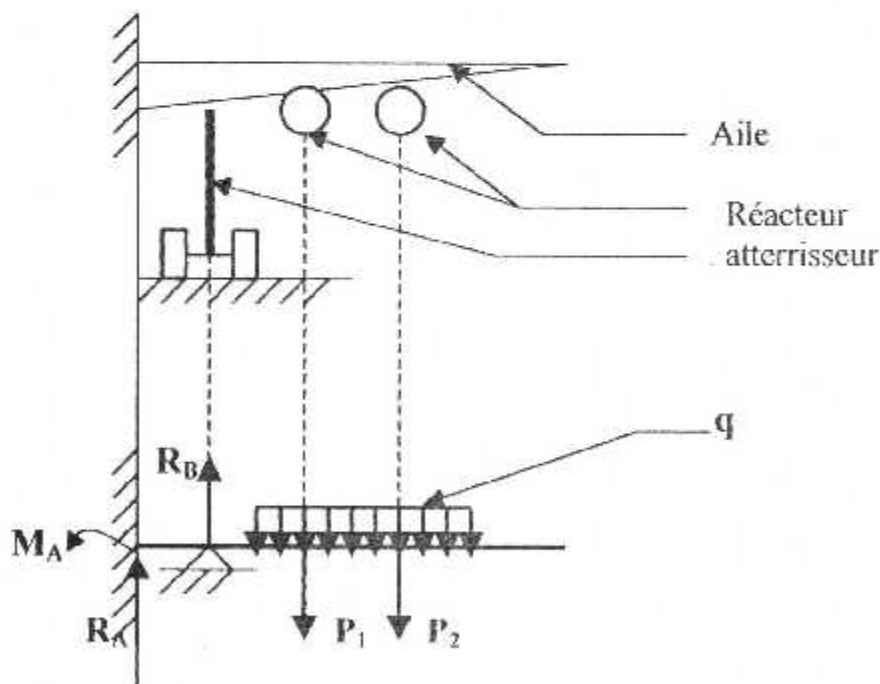


Fig.IV-5. Effort appliqué à la voilure au sol.

- P_1, P_2 : Poids concentrée des réacteurs.
- q : Poids répartie de carburant.
- R_B : Réaction ponctuelle de l'atterrisseur assimilés à un appuis.
- R_A : Réaction d'encastrement.
- M_A : Moment d'encastrement.

VI-2-2. Effort applique à la voilure en vol

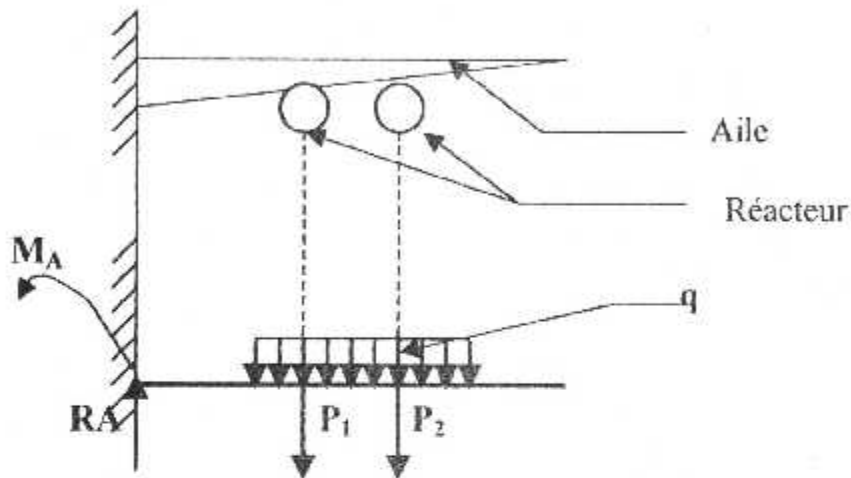


Fig.IV-6. Effort applique à la voilure en vol.

- P_1, P_2 : Poids concentrée des réacteurs.
- q : Poids répartie de carburant.
- R_A : Réaction d'encastrement.
- M_A : Moment d'encastrement.

VI-2-3. Cas d'un avion qui n'a pas de réacteur porté par l'aile

- Effort applique à la voilure au sol

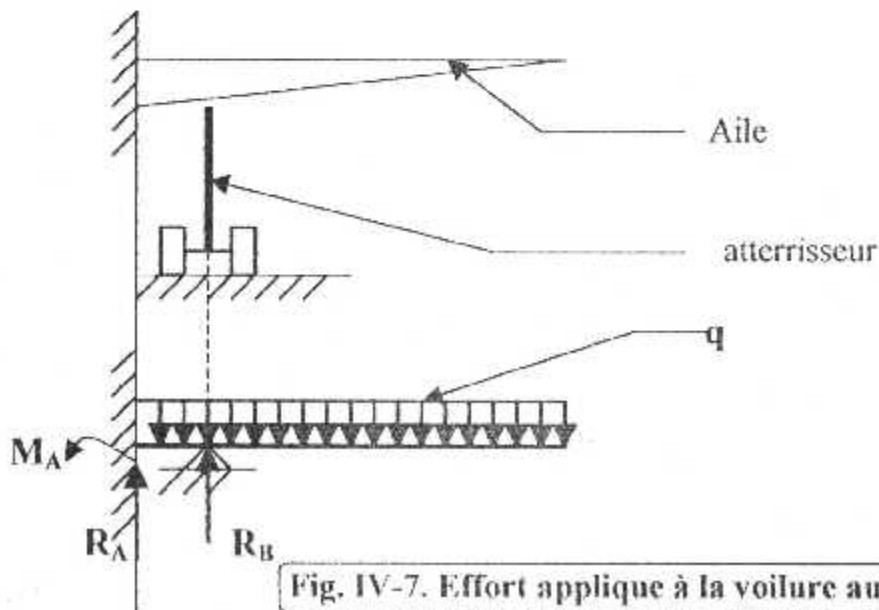


Fig. IV-7. Effort applique à la voilure au sol.

q : Poids répartie de carburant.

R_A : Réaction d'encastrement.

M_A : Moment d'encastrement.

R_B : Réaction ponctuelle de l'atterrisseur assimilés à un appuis.

- Effort appliqué à la voilure en vol

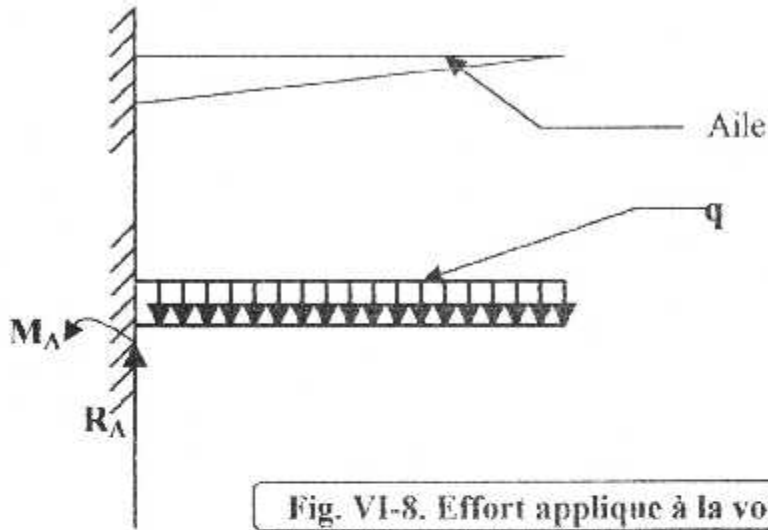


Fig. VI-8. Effort appliqué à la voilure en vol.

q : Poids répartie de carburant.

R_A : Réaction d'encastrement.

M_A : Moment d'encastrement.

VI-2-4. Cas d'un planeur

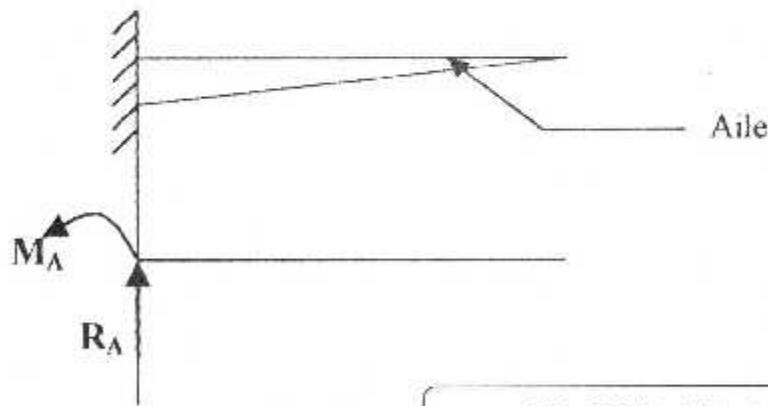


Fig. IV-9. Aile simple

R_A : Réaction d'encastrement.

M_A : Moment d'encastrement.

VI-3. Etude des grandes déformation

Dans ce cas on fait résolution de l'équation différentielle sont néglige le terme $(y')^2$ qui est :

$$E I \frac{dy^2}{dx^2} = M \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \text{-----(IV-9)}$$

Pour résoudre cette dernier (équation (1)) on fait appelle à des méthodes numériques, méthode des élément finie, ou déférence finie, Rung-Kutta,etc.

Toutes ces méthodes permettent de traiter des problèmes linéaires pour des petites déformations. Pour les problèmes non linéaires associés à des déformations importantes (plasticité, viscoplasticité), la technique consiste en des calculs «pas à pas», chaque pas correspondant à des accroissements petits pour lesquels le problème peut être linéarisé.

Donc c'est le but de n'autre étude faire le calcul de l'équation différentielles non linéaire d'ordre supérieur.

Dans ce modeste travail on fait appelle la méthode de RUNG-KUTTA. pour résoudre cette équation on fait appelle à la méthode **RUNG-KUTTA** d'ordre 4 .

IV-3-1. Définition de la méthode de RUNG-KUTTA

C'est une amélioration de la méthode d'EULER, qui n'est pas très performante par apport a propagation des erreurs.

Parmi ses avantage on note que :

- Elle est facile a programmer.
- Généralement elle est stable.
- La largeur de pas peut être modifier sans difficulté.

Et la connaissance de $Y(0)$ suffit à intégré l'équation différentielle.

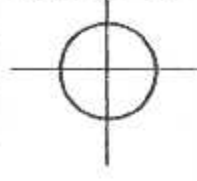
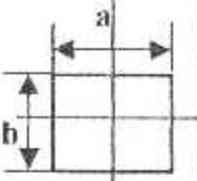
On note quelle à des inconvénients suivants :

- Elle demande notablement plus de temps de calcul que les autre méthodes de précision comparable.
- L'erreur local est difficile à estimé.

Dans notre cas on utilisera **RUNG-KUTTA** d'ordre 4 définie par :

$$\begin{cases} K_1 = h f(x, y) \\ K_2 = h f(x_i + (h/2), y_i + (k_1/2)) \\ K_3 = h f(x_i + (h/2), y_i + (k_2/2)) \\ K_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3) \end{cases} \quad \text{et} \quad Y_{i+1} = y_i + 1/6 (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Tableaux des caractéristiques géométriques de quelque forme

Section	Cercle de rayon R=1.0 	Rectangle  a = b = 1.0	NACA0012	NACA0015
Surface A	$A = \pi r^2 = \pi d^2/4$ 3.14180533612	$A = a \cdot b$ A= 1.0	0.10222094	0.161659167
Centre de gravité (X _G , Y _G)	X _G = 0 Y _G = 0	X _G = a / 2 Y _G = b / 2	X _G =0.495580 Y _G =7.71 10 ⁻⁸	X _G =0.215102 Y _G =3.2310 ⁻⁹
Moment d'inertie par rapport au repère OXY I _X I _Y	$I_x = I_y = \pi r^2 / 4$ 0.00628318530 0.00628318530	$I_x = a b^3 / 12$ $I_y = b a^3 / 12$ 0.008333333 0.008333333	0.00001068 0.00194122	0.000170883 0.026020026
Produit d'inertie I _{XY}	I _{XY} =0.000000	$I_{XY} = a^2 b^2 / 4$ I _{XY} =0.25	I _{XY} =4.4010 ⁻¹⁰	0.25 10 ⁻¹¹
Moment d'inertie par rapport au repère OXY I _{XG} I _{YG}	$I_{XG} = I_x$ $I_{YG} = I_y$	$I_{XG} = I_x + A(Y_G)^2$ $I_{YG} = I_y + A(X_G)^2$ I _{XG} =0.3333333 I _{YG} =0.3333333	I _{XG} =0.00001068 I _{YG} =0.00054071	I _{XG} =0.000170883 I _{YG} =0.018525987
Produit d'inertie I _{XGYG}	I _{XGYG} =0.00000	I _{XGYG} =	I _{XGYG} =2.2210 ⁻¹⁰	I _{XGYG} =0.41 10 ⁻¹¹
Coefficient de forme K _Z	10/9	6/5	0.002030978	0.00563911
Coefficient de forme K _Y	10/9	6/5	0.002030978	0.00563911

IV-3-2. Les cas à étudier

- Le cas n° 1



- Le cas n° 2

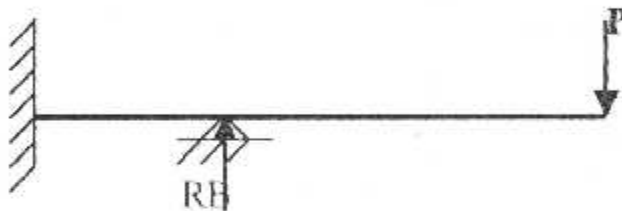


Fig. IV-10. Les modèles mathématique

IV-4. Interprétation des résultats

IV-4-1. Graphe 01 : Encastrement libre

On remarque bien que les courbes qui présente la déflexion avec les deux méthodes de calcul sont presque identique, donc on peut dire que l'erreur elle très petite mais se ne veut pas qu'on la néglige surtout dans les domaines sensibles comme l'aéronautique.

On trouve aussi que les courbe sont décroissent du début du plan OXY, cette forme de décroissance peut change on fonction de la force applique à l'extrémité, est aussi la longueur de la poutre par ce que si la poutre était courte la déflexion seras très petite est on fait intervenir l'effet de l'effort tranchant.

D'après ce résultats et les remarque on peut conclure :

- L'erreur est très petites presque négligeable par ce que on a un cas très simple, aux contraire si nous avons un cas compliqué.

Poutre encastrée libre

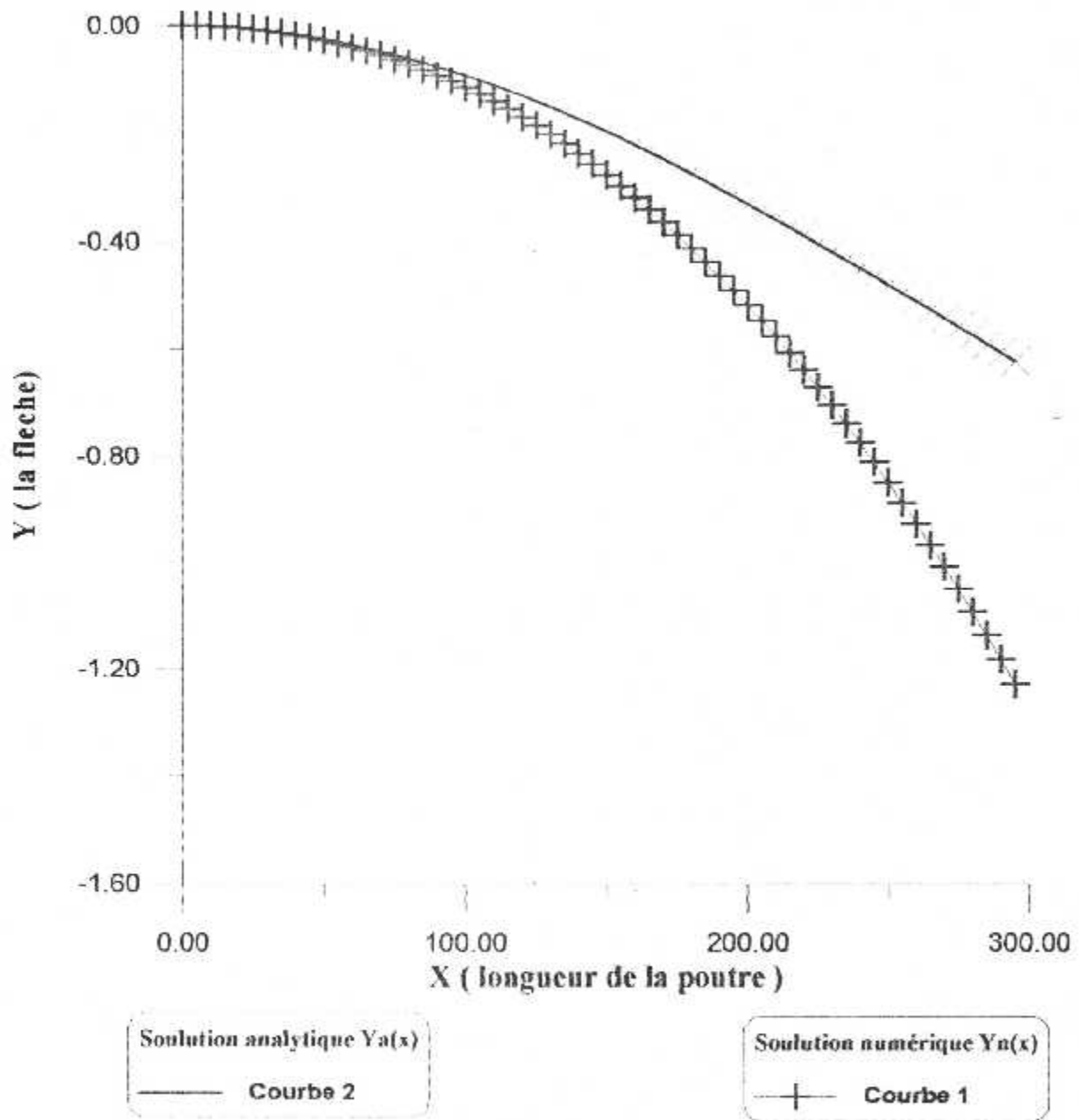


Fig. IV-11. Graphe de la déflexion de la poutre encastrée

Tableau des résultats :

Nombre de à afficher n= 61

les X	Yn numérique	Ya analytique	erreur	téta
0	0	0	0	0
5	-0,0002659	-0,00026461	0,00486231	-0,00010666
10	-0,00106951	-0,00105251	0,015894	-0,00021509
15	-0,00241971	-0,00235485	0,0268053	-0,00032529
20	-0,00432538	-0,00416275	0,037598	-0,00043727
25	-0,0067954	-0,00646736	0,0482742	-0,00055103
30	-0,00983867	-0,00925981	0,0588358	-0,00066657
35	-0,0134641	-0,0125312	0,0692847	-0,00078389
40	-0,0176805	-0,0162727	0,0796226	-0,00090298
45	-0,0224969	-0,0204755	0,0898514	-0,00102386
50	-0,0279221	-0,0251306	0,0999729	-0,00114652
55	-0,033965	-0,0302293	0,109989	-0,00127096
60	-0,0406347	-0,0357626	0,1199	-0,00139719
65	-0,0479399	-0,0417216	0,12971	-0,0015252
70	-0,0558896	-0,0480976	0,139419	-0,001655
75	-0,0644929	-0,0548816	0,149028	-0,00178659
80	-0,0737585	-0,0620648	0,15854	-0,00191996
85	-0,0836955	-0,0696383	0,167956	-0,00205513
90	-0,0943128	-0,0775933	0,177277	-0,00219209
95	-0,105619	-0,0859208	0,186506	-0,00233085
100	-0,117624	-0,0946121	0,195642	-0,00247141
105	-0,130336	-0,103658	0,204688	-0,00261376
110	-0,143765	-0,11305	0,213645	-0,00275792
115	-0,157919	-0,122779	0,222514	-0,00290388
120	-0,172807	-0,132837	0,231298	-0,00305164
125	-0,188438	-0,143214	0,239996	-0,00320122
130	-0,204822	-0,153901	0,24861	-0,0033526
135	-0,221967	-0,16489	0,257141	-0,0035058
140	-0,239883	-0,176172	0,265592	-0,00366082
145	-0,258578	-0,187738	0,273962	-0,00381765
150	-0,278062	-0,199579	0,282253	-0,00397631
155	-0,298344	-0,211686	0,290466	-0,0041368
160	-0,319433	-0,22405	0,298603	-0,00429911
165	-0,341339	-0,236663	0,306663	-0,00446326
170	-0,364069	-0,249515	0,314649	-0,00462925
175	-0,387634	-0,262598	0,322562	-0,00479708
180	-0,412043	-0,275903	0,330402	-0,00496675
185	-0,437305	-0,289421	0,338171	-0,00513827
190	-0,463429	-0,303143	0,345869	-0,00531165
195	-0,490424	-0,317061	0,353498	-0,00548688
200	-0,518301	-0,331164	0,361058	-0,00566398
205	-0,547067	-0,345446	0,36855	-0,00584294
210	-0,576733	-0,359896	0,375976	-0,00602378
215	-0,607308	-0,374505	0,383335	-0,0062065

220	-0,638801	-0,389266	0,39063	-0,0063911
225	-0,671222	-0,404169	0,397861	-0,00657758
230	-0,70458	-0,419205	0,405029	-0,00676597
235	-0,738885	-0,434365	0,412134	-0,00695625
240	-0,774146	-0,449641	0,419178	-0,00714845
245	-0,810373	-0,465024	0,426161	-0,00734255
250	-0,847575	-0,480504	0,433084	-0,00753858
255	-0,885762	-0,496073	0,439948	-0,00773654
260	-0,924944	-0,511722	0,446753	-0,00793643
265	-0,965129	-0,527442	0,453501	-0,00813826
270	-1,00633	-0,543225	0,460192	-0,00834205
275	-1,04855	-0,559061	0,466827	-0,00854779
280	-1,09181	-0,574941	0,473406	-0,0087555
285	-1,13611	-0,590857	0,47993	-0,00896518
290	-1,18147	-0,6068	0,4864	-0,00917685
295	-1,22788	-0,622761	0,492817	-0,00939051

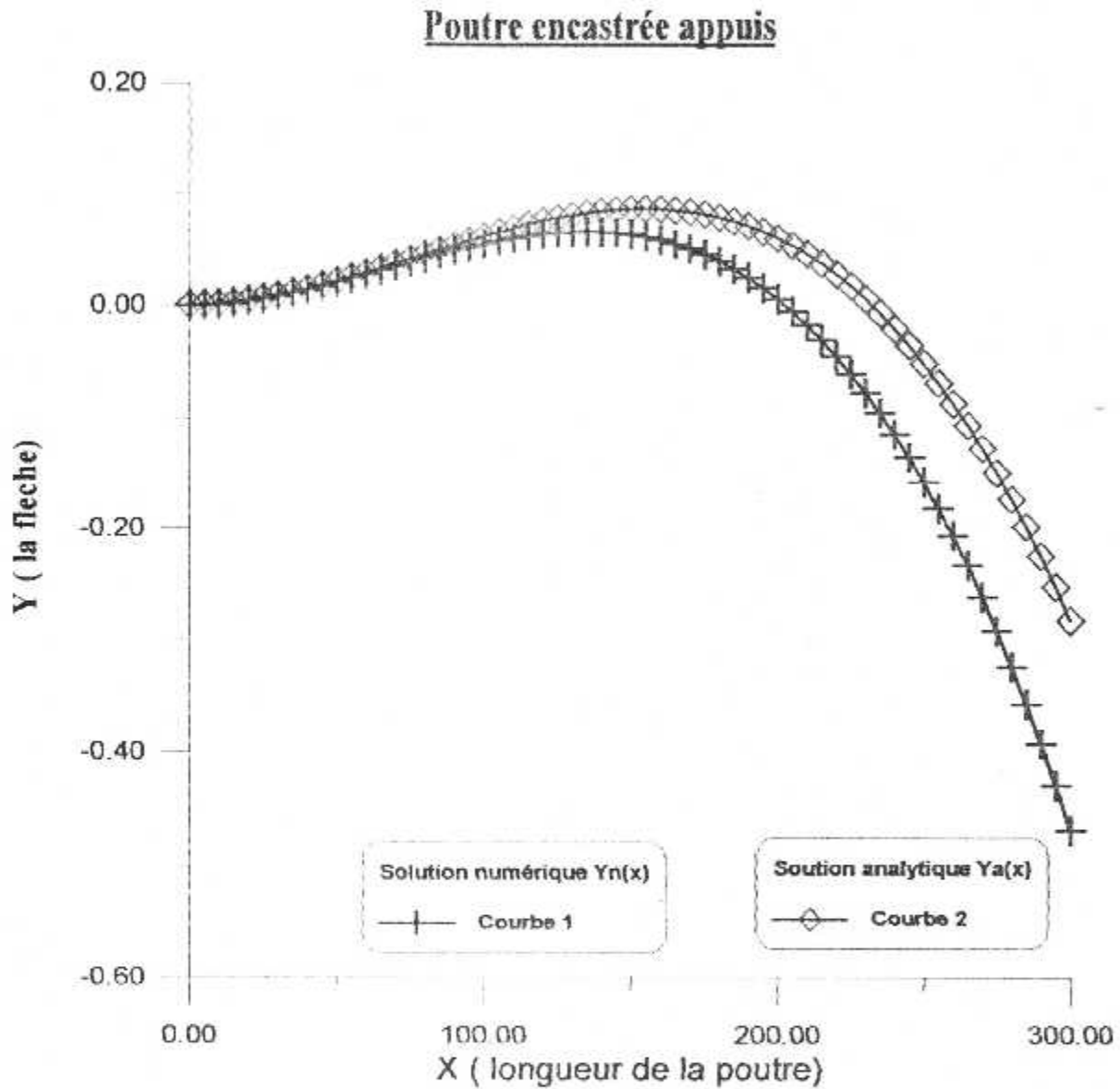


Fig. IV-12. Graphe de la déflexion de la poutre encastrée libre Avec appuis.

Tableau des résultats :

NOMBRE DE POINT a AFFICHE n=61

Variation de X	Yn (numérique)	Ya (analytique)	erreur
0	0	0	0
5	0,00026264	0,00026299	2,36726 E-03
10	0,00102396	0,00102879	4,83 E-06
15	0,00224402	0,00226265	2,23 E-05
20	0,0038829	0,00392983	4,693 E-05
25	0,00590067	0,00599556	9,489 E-05
30	0,00825741	0,00842511	1,677 E-04
35	0,0109132	0,0111837	2,705 E-04
40	0,0138281	0,0142367	4,086 E-04
45	0,0169622	0,0175492	5,87 E-04
50	0,0202755	0,0210865	8,11 E-04
55	0,0237281	0,0248138	1,0857 E-03
60	0,0272802	0,0286965	1,4163 E-03
65	0,0308917	0,0326997	1,808 E-03
70	0,0345227	0,0367887	2,266 E-03
75	0,0381333	0,0409287	2,7954 E-03
80	0,0416836	0,0450849	3,3653 E-03
85	0,0451336	0,0492227	4,0891 E-03
90	0,0484433	0,0533073	4,864 E-03
95	0,051573	0,0573038	5,73247 E-03
100	0,0544826	0,0611776	6,695 E-03
105	0,0571321	0,0648939	7,7618 E-03
110	0,0594818	0,0684179	0,01346972
115	0,0614915	0,0717148	0,0102233
120	0,0631216	0,07475	0,0116284
125	0,0643319	0,0774887	0,0131568
130	0,0650825	0,079896	0,0148135
135	0,0653336	0,0819374	0,0185326
140	0,0650453	0,0835779	0,0185326
145	0,0641775	0,0847829	0,02060515
150	0,0626903	0,0855177	0,0228267
155	0,0605439	0,0857474	0,0249301
160	0,0576982	0,0854373	0,0277391
165	0,0541133	0,0845527	0,0334197
170	0,0497493	0,0830588	0,0333095
175	0,0445661	0,0809209	0,0363548
180	0,0385237	0,0781041	0,0395804
185	0,0315821	0,0745737	0,0429916
190	0,0237013	0,0702949	0,0465936
195	0,0148412	0,0652329	0,0503917
200	0,00496165	0,0593528	0,05439115
205	-0,00597751	0,0526199	0,05859741
210	-0,0180165	0,0449993	0,0269765
215	-0,0311955	0,0364561	0,0676516
220	-0,0455549	0,0269553	0,0725043

225	-0,061135	0,0164621	0,0446729
230	-0,0779763	0,00494143	0,07303487
235	-0,0961193	-0,0076417	0,0884776
240	-0,115605	-0,0213224	0,0942826
245	-0,136173	-0,0361357	0,1003373
250	-0,158765	-0,0521168	0,1066482
255	-0,182522	-0,069301	0,113251
260	-0,207786	-0,0877236	0,1200524
265	-0,234596	-0,10742	0,127176
270	-0,262994	-0,128425	0,134569
275	0,293023	-0,150776	0,142247
280	-0,324723	-0,174507	0,150216
285	-0,358137	-0,199653	0,158484
290	-0,393307	-0,226253	0,167054
295	-0,430275	-0,25434	0,175935
300	-0,469084	-0,283951	0,185097

IV-4-2. Graphe 01 : Encastrement libre plus un appuis

Les courbes qui présente la déflexion forment deux petites paraboles, nulle au début c'est due à l'encastrement et à l'appuis, et elles continuent leurs décroissances dans le plans OXY, on vois aussi que la variation de la déflexion et presque identique mais l'erreur est un peut développe entre les deux calcul.

D'après ce résultats on peut dire que :

Ce cas est un peut complique par apport à l'autre à le précédent parce on a ajoutée un appuis, donc ces pour cela l'erreur elle est devenu un peut remarquable par apport à le calcul précédant est sont oublier de dire que le résultats du calcul numérique est plus précise que le résultats du calcul analytique.

Pour le calculer des grandes déformations on fait appelle à la méthode numérique par ce que elle donne des résultats plus exacte et minimise l'erreur.

Conclusion

La déflexion est l'un des problèmes fondamentaux que rencontrent les structures aéronautiques. Son existence est due aux surfaces portantes qui sont assujetties à des charges aérodynamiques.

Ce projet de fin d'étude nous a menés à élaborer un programme permettant de déterminer la déflexion des poutres le long l'aile avec l'utilisation de l'équation de la déforme est après l'application du programme nous avons déduit les conclusion suivante :

- Lorsque la longueur de la poutre augmente la déflexion augment aussi.
- Lorsque la longueur de la poutre diminue la déflexion diminue aussi mais on fait appelle à l'effort tranchant tout dépend du rapport longueur section.

Dans le domaine aéronautique il est nécessaire de déterminer la valeur exacte de la déflexion pour éviter tout problème qui résulte des accidents par exemple : fatigue , rupture.

D'autre part ce projet ouvre la voie à d'autres sujets de fin d'études.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE STRUCTURE 2001-2002 ING**
« APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENT FINIE ET METHODE
DES ITERATIONS INVERSE POUR LA DETERMINATION DES MODES ET
FREQUENCE PROPRE D'UNE AILE D'AVION ».
INSTITUT D'AERONAUTIQUE - BLIDA
- [2] **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE STRUCTURE 1999-2000 DEA**
« ETUDE DE DEFLEXION DES POUTRES A GRANDE DEFORMATION
APPLICATION A DES AILES D'AVION ».INSTITUT D'AERONAUTIQUE - BLIDA
- [3] **THEORIE DE L'AVION**
GEORGES RAMAT – 24^e édition, LIMOGES,NANCY 1956
- [4] **RESISTANCE DES MATERIAUX**
M.KERGUIGNAS, G.CAIGNAERT- 4^{ème} édition, DUNOD PARIS
1977
- [5] **COURS DE STATIQUE GRAPHIQUE ET RESISTANCE DES MATERIAUX**
F.H.PERRIN – 3^{ème} édition, EYROLLES, PARIS 1968
- [6] **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE STRUCTURE 1997-1998 ING**
« COMPARISON ENTRE LA MODELISATION DES AILES EN ELEMENT
FINIE TRIDIMENSIONNELS ET UN ELEMENT DE POUTRE AVEC EFFET DE
L'EFFORT TRANCHANT SUR LE PHENOMENE DE FLEXION. »
INSTITUT D'AERONAUTIQUE – BLIDA.
- [7] **PROBLEMES DE RISISTANCE DES MATERIAUX**
I. MIROLOUBOV, S. ENGALYTCHEV, N. SERGUIEVSKI, F.ALMAMETOV
, K. SMIRNOV-VASSILIEV, L. IACHINA – 2^{ème} édition MIR. MOSCOU 1973
Traduit du russe par JEAN SISLIAN et VALENTIN POLONSKI
- [8] **STENGTH OF MATERIALS 2**
Dr. GHASSAN SALLOUM et Dr. FOUAD MOUDARESS 1986-1987
- [9] **RESISTANCE DES MATERIAUX 1 COURS ET PROBLEMES**
SERIE SCHAUUM Traduit par :
HENRI LE BOITEUX et ROBERT BOUSSARD – Quatorzième tirage 1974
- [10] **CALCUL DES BARRES dans les cas de sollicitation composée**
A.ANISSIMOV – édition office des publication universitaires 04-1996