

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**FACULTE DES SCIENCE S DE L'INGENIEURE**

**DEPARTEMENT D'AERONAUTIQUE**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDES**

**En Vue de l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Aéronautique**

**Option : Structure**

**THEME :**

**DIFFERENTS TYPES D'ELEMENTS FINIS POUR  
L'ETUDE DE LA FLEXION DES POUTRES**

Proposé par :

Mr : ZEBBICHE Toufik

Présenté par :

Mr : CAID Samir

Mr : KELKOULI Ali

Octobre 2003

## ***Dédicaces***

Je dédie ce modeste travail :

- A mes parents
- A mes sœurs
- A ma grande mère et à la mémoire de mon grand père
- A toute ma grande famille
- A mes amis
- A mes amis de promotion et plus particulièrement *Mohemmed*
- A tous ceux qui me sont chers(e)

*Ali*

## ***Dédicaces***

Je dédie ce modeste travail :

- A ma mère bien aimée
- A mes sœurs et mes frères et a ma future femme
- A mes amis
- A mes amis de promotion

*Samir*

## **REMERCIEMENTS**

Nous tenons à remercier monsieur ZEBBICHE Toufik pour avoir accepté de diriger notre modeste travail.

Qu'il soit permis de remercier également les enseignants et le personnel de l'institut d'aéronautique à qui nous devons notre formation.

Nos remerciements s'adressent aussi aux membres de jury pour avoir bien voulu juger ce mémoire.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail

# TABLE DES MATIERES

## INTRODUCTION

### CHAPITRE I

#### LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

I-1- INTRODUCTION.....	3
I-2- LA METHODE DES ELEMENTS FINIS.....	3
I-2-1- Exposé de la démarche.....	4
I-2-2- Les éléments et leurs espace de fonction d' interpolation.....	8
I-2-2-1- Rappels sur les bases de polynômes .....	9
I-3- RESUME.....	9
I-4 - EVOLUTION DE LA METHODE.....	9
I-4-1- Amélioration de la précision d'approximation.....	10
I-4-2- Divers types d'éléments.....	11
I-4-2-1- Elément de haute précision de type LAGRANGE.....	11
I-4-2-2- Elément de haute précision de type HERMITE.....	11
I-5 CONCLUSION .....	11

### CHAPITRE II

#### LA FLEXION DANS LES STRUCTURES AERONAUTIQUES

II-1- INTRODUCTION.....	13
II-2- LA FLEXION DANS LES STRUCTURES AERONAUTIQUES.....	13
II-2-1- Efforts appliques à la voilure .....	13
II-2-1-1- En vol .....	13
II-2-1-2 - Au sol.....	16
II-2-2- Efforts appliqués à une pal d'hélicoptère.....	17
II-2-2-1- En vol .....	17
II-2-2-2- Au sol.....	18

### CHAPITRE III

#### ETUDE THEORIQUE

III-1- INTRODUCTION.....	21
III-2- EXPOSITION DU PROBLEME PHYSIQUE.....	21
III-3- CHOIX DE L'ELEMENT ET LA FAMILLE DES CHAMP LOCAUX.....	23
III-3-1- Interpolation polynomiale sur les mailles.....	23
III-4 -FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME.....	23
III-4-1- Relation entre déformation et déplacement verticale.....	23

## TABLE DES MATIERES

III-4-2- Relation entre contrainte et déplacement.....	24
III-4-3- Relation entre charge nodale et déplacement nodaux .....	25
III-5- CALCUL DES MATRICES DE RIGIDITES ELEMENTAIRES POUR DES.....	26
ELEMENTS DE POUTRE TRAVAILLANT EN FLEXION	
III-5-1- Calcul de la matrice de rigidité élémentaire pour un élément de.....	27
poutre travaillant en flexion type HERMITE	
III-5-1-1- Deux 2 degrés de liberté par nœud.....	27
III-5-1-2- Trois 3 degrés de liberté par nœud .....	33
III-5-2- Calcul de la Matrice de rigidité pour un élément de poutre travaillant.....	41
en flexion type LAGRANGE	
III-5-2-1- Trois 3 nœuds deux degrés de liberté par nœud .....	41
III-6- CALCUL DE VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE {P}.....	49
III-6-1- Calcul de vecteur charge élémentaire pour un élément de poutre.....	49
travaillant en flexion type HERMITE	
III-6-1-1- Deux degrés de liberté deux nœuds.....	49
III-6-1-2- Six degrés de liberté deux nœuds.....	50
III-6-2- Calcul de vecteur charge élémentaire pour un élément de poutre.....	51
Travaillant en flexion type LAGRANGE	
III-6-2-1- Six degrés de liberté trois nœuds.....	51

## CHAPITRE IV

### ASSEMBLAGE ET RESOLUTION DE SYSTEMES D' EQUATIONS LINEAIRES

IV-1- LE MAILLAGE DU PROBLEME.....	53
IV-2- LA DESCRETISATION DU PROBLEME.....	53
IV-2-1- Assemblage des matrices de rigidités des éléments.....	53
IV-3- LES CONDITIONS AUX LIMITES.....	54
IV-4 -RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES.....	55
IV-4 -1- Introduction .....	55
IV-4 -2- Méthode d'élimination de GAUSS.....	56
IV-4 -2-1- Triangularisation .....	56
IV-4 -3- Méthode des éléments finis.....	58
IV-4 -4. Méthode numérique .....	59
IV-4 -5- Résolution du système triangulaire supérieur.....	62
IV-4 -5-1 Décomposition.....	62
IV-4 -5-2 Forme matricielle de l'élimination de Gauss.....	62
IV-4 -6- Propriétés des matrices triangulaires .....	62
IV-4 -7- Programme .....	63

# TABLE DES MATIERES

---

## CHAPITRE V

### RESULTATS ET INTERPRETATIONS

V-1- INTRODUCTION.....	67
V-2- CHARGE REPARTIE UNIFORME.....	67
V-2-1 CONFRONTATION A DES RESULTAS ANALYTYQUE.....	67
V-2-2 EXAMEN DES RESULTATS.....	70
V-2-3 POSTE DE TRAITEMENT.....	71
V-2-4 CONCLUSION.....	74
V-3- APPLICATION AVEC DEFFERENTS TYPES DE CHARGEMENTS.....	75
(CHARGE REPARTIE NON UNIFORME)	
VI CONCLUSION GENERALE.....	78
• BIBLIOGRAPHIE.....	80
• ANNEXES	
▪ ANNEXE 1	
▪ ANNEXE 2	
▪ ANNEXE 3	

---

## RESUME

Ce travail porte sur l'étude des déformations des poutres pour des chargements quelconques, en régime statique. Il vise l'évaluation de la flèche et de rotation le long de la poutre.

L'essentiel du travail concerne la mise au point d'un élément fini type HERMITE (4 ddl deux nœuds, 6ddl deux nœuds) et un élément fini type LAGRANGE (6ddl trois nœuds) et faire une comparaison entre les trois types d'éléments du point de vue performance en terme de temps, de calcul, et de précision.

Ces trois types d'éléments s'appuient sur les concepts de base de la théorie des flexions des poutres, ils ne s'intéressent qu'au calcul des déplacements (rotations et translations) le long de la poutre.

La densité des charges sur la poutre nécessite un maillage avec un vecteur de charge élémentaire trapézoïdal.

Les résultats des programmes ont été validés par voie analytique

## INTRODUCTION

Le présent travail s'inscrit dans la problématique du choix de l'élément (pour l'étude des déformations des poutres pour différents types de chargements en régime statique), le choix de l'élément est délicat ; c'est un compromis entre la qualité de la solution approchée et le coût de calcul.

Il suffit de retenir que choisir un élément c'est à la fois :

- Choisir une forme de la maille
- Choisir la place des nœuds dans la maille
- Choisir une interpolation sur l'élément

L'examen d'une solution approchée peut parfois amener à recommencer un calcul avec un maillage et/ou des interpolations différentes.

### Organisation du mémoire

Notre travail présenté dans ce mémoire, est constitué de cinq chapitres.

- Le premier chapitre s'intéresse à faire le tour de quelques généralités sur la méthode des éléments finis, ce chapitre présente aussi, de manière résumée les étapes pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis.
- Le chapitre 2 présente d'une manière générale les connaissances de base nécessaire à la compréhension du phénomène de la flexion dans les structures aéronautiques. Elles sont présentées selon des niveaux de détails différents et en rapport avec les besoins du présent travail.
- Le chapitre 3 : nous allons ici présenter un certain nombre d'éléments ( élément fini type Hermite 4 ddl deux nœuds et 6 ddl deux nœuds ,et un élément fini type Lagrange 6 ddl deux nœuds) et calculé les matrices de rigidités élémentaires ainsi que les vecteurs charges élémentaires pour les trois types d'éléments.
- Le chapitre 4 : le but de ce chapitre c'est de présenter le cheminement et les différentes étapes de discrétisation, assemblage jusqu' ou on arrive à l'obtention de la matrice de rigidité et le vecteur charge de la structure ainsi que la résolution de systèmes d'équations linéaires.
- Le chapitre 5 s'intéresse principalement à la validation des résultats fournis par les programmes des trois types d'éléments , ceux-ci permettent d'affirmer que les trois types d'éléments sont bon dans ses formulations théoriques et que les programmes de calcul élaboré en est une transcription fidèle .

Enfin nous terminons par une conclusion générale

## CHAPITRE I

# LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

- INTRODUCTION
- LA METHODE DES ELEMENTS FINIS
- RESUME
- EVOLUTION DE LA METHODE
- CONCLUSION

## I.LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

### I.1-INTRODUCTION

L'évolution actuelle de technologie amène l'ingénieur a réalisé des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons bien sur, aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans lesquels la sécurité est vitale. D'autres types de projets d'envergure sont lies a notre environnement :

Contrôle de la pollution thermique, acoustique ou chimique, aménagement des cours d'eau, gestion des nappes souterraines, prévision météorologique. Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système. Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...). Permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles.

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique :

Problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque a une, deux ou trois dimensions. De plus, elle s'adapte très bien au milieu hétérogène souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

### I-2 LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La méthode des éléments finis consiste à chercher une solution approchée du problème en se plaçant dans un espace de dimension finie.

La résolution se déroule en plusieurs étapes :

- L'analyse mathématique du problème de départ avec, en particulier, son écriture sous forme variationnelle et l'étude des propriétés :
  - existence de la solution
  - unicité de la solution

- propriétés de convergence
  - l'implémentation
- La création de la triangulation (le maillage) du domaine à considérer
  - La définition du ou des éléments finis c'est-à-dire la construction de l'espace de dimension finie
  - La génération des tableaux élémentaires correspondants à la contribution de chaque élément  $T$  de, i.e. à la (aux) matrice(s), au second membre du système et aux contraintes ;
  - La formation du système à résoudre (ou assemblage) ;
  - La prise en compte de conditions aux limites *essentiels* ou *non naturelles*;
  - La résolution du système, i.e. le calcul du champ approchant la solution cherchée ;
  - La présentation et l'exploitation des résultats.

### I-2-1 Exposé de la démarche

La méthode consiste à rechercher une solution *approchée* de la solution exacte sous la forme d'un champ  $\tilde{F}(M, T)$  défini par morceaux sur des sous domaines de  $\Omega$ . Les  $n$  sous domaines  $\Omega_i$  doivent être tels que :

$$\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \Omega \text{ et } \tilde{\Omega}_i \cap \tilde{\Omega}_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Où  $\tilde{\Omega}_i$  désigne l'intérieur de  $\Omega_i$ . Autrement dit, les  $\Omega_i$  sont une partition de  $\Omega$ .

Les champs  $\tilde{F}(M, T)$ , définis sur chaque sous domaines sont des champs choisis parmi une famille *arbitraire* de champs (généralement polynômiaux). La famille de champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation de l'élément la famille de champs globaux  $\tilde{F}(M, T)$ , obtenus par juxtaposition des champs locaux est appelée espace des fonctions d'interpolation du domaine  $\Omega$ .

Le champ dans chaque sous domaine  $\Omega_i$  est déterminé par un nombre fini de valeurs du champ (ou de valeurs de ses dérivées) en des points choisis arbitrairement dans le sous domaine, et appelés *nœuds* (2.1)

Le champ local est une *interpolation* entre les valeurs aux *nœuds*. Le sous domaine muni de son interpolation est appelé *élément*.

Chercher une solution par éléments finis consiste donc à déterminer quel champ local on attribue à chaque sous domaine (2.2) pour que le champ global  $\tilde{F}(M, T)$  obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème. Parmi les contraintes qu'on impose à la solution approchée cherchée, il y a souvent au moins une continuité simple ( $C_0$ ) à la frontière entre les sous domaines.

La figure (2.1) montre une solution approchée discontinue d'un champ scalaire sur un domaine  $\Omega$  de dimension 1.

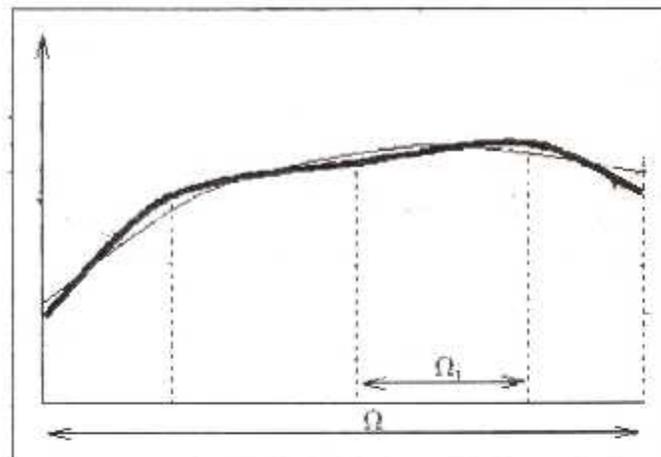


Figure 2.3: Solution approchée continue  $C_1$

La figure (2.2) montre une solution approchée continue  $C_0$  d'un champ scalaire sur un domaine  $\Omega$  de dimension 1.

La famille de champs locaux est la famille des champs polynômiaux de degré 1.

La figure (2.3) montre une solution approchée continue  $C_1$  d'un champ scalaire sur un domaine  $\Omega$  de dimension 1.

La famille de champs locaux est la famille des champs polynomiaux de degré 3.

La qualité de la solution approchée dépend de la division en sous domaines (nombre et dimensions des sous domaines), du choix de la famille de champs locaux dans chaque sous domaine, et des conditions de continuité qu'on impose aux frontières des sous domaines ( $C_0, C_1, \dots$ ).

Une fois ces choix faits, il reste à rechercher, une combinaison de champs locaux qui satisfait approximativement les équations.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par étapes successives :

1. On se pose un problème physique sous la forme d'une équation différentielle ou aux dérivés partielles à satisfaire en tout point d'un domaine  $\Omega$ , avec des conditions aux limites sur le bord  $\partial\Omega$  nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.

2. On construit une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : C'est la *formulation variationnelle du problème*.

3. On divise  $\Omega$  en sous domaines : C'est le *maillage*. Les sous domaines sont appelés *mailles*.

4. On choisit la famille de champ locaux, c'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux *nœuds* (et éventuellement des dérivées). La maille complétée par ces informations est alors appelée *élément*.

5. On ramène le problème à un problème discret : C'est la *discrétisation*. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver les valeurs à attribuer aux nœuds pour décrire une solution approchée. Le problème fondamental de la méthode des éléments finis peut se résumer en deux questions :

a. Comment choisir le problème discret dont la solution est « proche » de la solution exacte?

b. Quelle signification donner au mot « proche » ?

6. On résout le problème discret: C'est la résolution

7. On peut alors construire la solution approchée à partir des valeurs trouvées aux nœuds et en déduire d'autres grandeurs (2.3) : C'est le *post-traitement*.

8. On visualise et on exploite la solution pour juger de sa qualité numérique et juger si elle satisfait les critères du cahier des charges : C'est l'*exploitation des résultats*.

Les étapes 1,2,3,4 et 5 sont souvent rassemblées sous le nom de *prétraitement*.

Le travail de ces différentes étapes est assisté. Il reste que pour maîtriser leur utilisation, il est indispensable de comprendre les fondements de la méthode, notamment les phases 3 et 4, ne serait-ce que pour comprendre et choisir intelligemment parmi les options qu'ils proposent.

## I-2-2 Les éléments et leurs espace de fonction d'interpolation

Les solutions approchées, trouvées par la méthode des éléments finis sont une juxtaposition  $\tilde{F}$  de champs locaux  $\tilde{f}_i$  définis dans chaque maille. L'objet de ce chapitre est de montrer comment on définit dans les mailles une famille de champs locaux dans laquelle la méthode des éléments finis pourra choisir pour s'approcher au mieux de la solution.

Pour qu'une maille devienne un élément, il faut :

- Choisir arbitrairement des nœuds dans la maille. Comme on le verra plus loin, la résolution d'un problème par la méthode des éléments finis se ramène à calculer les

valeurs de la solution approchée aux nœuds du maillage. Le nombre d'inconnues scalaires par nœud varie selon la nature tensorielle du champ inconnu et selon la dimension de l'espace physique. Ce nombre est appelé *nombre de degrés de liberté* (4.1) (abréviation courante : ddl). Par exemple, si le champ cherché est un champ vectoriel dans un espace physique à 3 dimensions, on a 3 ddl par nœuds (1 ddl par composante du champ).

- Choisir arbitrairement une famille de champs locaux, destinés à donner une valeur approchée de la solution en tout point de la maille en ne connaissant que les valeurs d'une solution approchée aux nœuds de l'élément. Cette famille de fonctions s'appelle *l'espace des fonctions d'interpolation de la maille*. S'il y a plusieurs inconnues par nœud (c'est à dire plusieurs degrés de liberté), on construit des interpolations pour chacun des degrés de liberté. En général, les interpolations de chaque degré de liberté appartiennent au même espace de fonctions d'interpolation (4.2).

Dans ce chapitre, on va montrer comment on construit les interpolations. On le fera en supposant qu'il n'y a qu'un seul ddl par nœud. S'il y en a plusieurs, on procède de même pour chaque ddl.

Pour construire les espaces de fonctions d'interpolation sur un élément, on va procéder en deux temps : on construit un espace de fonctions d'interpolation  $\tilde{f}_r$  sur une *maille de référence* standard topologiquement équivalente à la maille réelle, puis on le transforme pour qu'il devienne un espace de fonctions d'interpolation  $\tilde{f}$  sur les mailles réelles. Ce procédé a l'avantage de faire gagner du temps calcul. Les logiciels proposent des bibliothèques d'éléments dans lesquels les interpolations dans les mailles de référence sont déjà définies et n'ont plus à être recalculées.

Les fonctions d'interpolations utilisées dans les logiciels sont pratiquement toujours des polynômes. Si la fonction à interpoler est vectorielle ou tensorielle, on interpole de la même manière chacune des composantes. On est donc ramené à des interpolations de champs scalaires. Dans la suite,  $\tilde{f}_r$  représente donc soit l'interpolation d'un champ scalaire soit l'interpolation d'une composante de champ vectoriel ou tensoriel.

- Pour les mailles linéiques  $\tilde{f}_r$  est un polynôme de  $x_1$ ,
- Pour les mailles surfaciques  $\tilde{f}_r$  est un polynôme de  $x_1$  et  $x_2$ ,
- Pour les mailles volumiques  $\tilde{f}_r$  est un polynôme de  $x_1, x_2$  et  $x_3$ .

### 1-2-2-1 Rappels sur les bases de polynômes

L'espace des polynômes de degré  $d$  est un espace vectoriel dont la dimension dépend du degré des polynômes et du nombre de variables. Cet espace possède une *base canonique*

constituée de tous les monômes de degré non négatif inférieur ou égal à  $d$ . Par exemple : La base canonique des polynômes à une variable  $x_1$  de degré 3 est constituée des monômes  $\{1, x_1, x_1^2, x_1^3\}$ .

- La base canonique des polynômes à deux variables  $x_1$  et  $x_2$  de degré 2 est constituée des monômes  $\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2\}$
- La base canonique des polynômes à trois variables  $x_1, x_2$  et  $x_3$  de degré 2 est constituée des monômes  $\{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_2x_3, x_3x_1\}$ .

Le tableau qui suit donne les dimensions des espaces de polynômes pour des degrés de 1 à 5 pour les polynômes à 1, 2 ou 3 variables.

	1 variable	2 variables	3 variables
1	2	3	4
2	3	6	10
3	4	10	20
4	5	15	35
5	6	21	56

À partir de la base canonique, on peut engendrer une infinité de bases : Si  $n$  est la dimension de l'espace de polynômes, toute matrice régulière  $n \times n$  définit une autre base.

### I-3 EN RESUME

Un élément est caractérisé par :

- la forme de sa maille de référence
- la position des nœuds dans la maille (sommets obligatoires pour la conformité)
- l'interpolation  $\tilde{f}_r$  (c'est à dire la matrice  $[H]$  des coefficients des polynômes  
L'interpolation des coordonnées détermine l'approximation géométrique de l'élément.
- Fonction d'interpolation  $F(x)$
- Matrice de rigidité élémentaire  $K$

### I.4. EVOLUTION DE LA METHODE

Depuis une cinquantaine d'années la mécanique des structures permet l'analyse des assemblages de barres et poutres.

Le comportement de chaque élément de barre ou de poutre est représenté par une matrice de rigidité élémentaire construite grâce aux hypothèses de la résistance des matériaux.

A partir des matrices élémentaires, nous construisons un système d'équations algébriques en utilisant des conditions de continuité des déplacement et d'équilibre des forces aux points de jonction des éléments ou nœuds.

La résolution du système d'équations correspondant à des sollicitations données conduit aux déplacements de tous les nœuds de la structure.

L'apparition des ordinateurs et les besoins de l'industrie aéronautique ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures.

Dès 1960 la méthode des élément finis subit un développement rapide dans plusieurs direction :

- La méthode est reformulée, à partir de considérations énergétiques et variationnelles, sous la forme générale des résidus pondérés ;
- De nombreux auteurs créent des éléments de haute précision et des éléments a cotes curvilignes ou iso paramétriques ;

#### I-4-1 Amélioration de la précision d'approximation

POUR AMELIORER LA PRECISION DE L'APPROXIMATION NOUS DEVONS DIMINUER LES ERREURS

Pour cela il faut :

- Soit diminuer la dimension de chaque élément ;
- Soit augmenter  $n$ , c'est a dire utiliser une approximation dont la base polynomiale soit complète jusqu'à un ordre plus élevé.

Nous pouvons par conséquent utiliser plusieurs techniques :

- a) Diminuer la taille de chaque élément et par conséquent augmenter le nombre d'éléments nécessaires pour représenter le domaine entier  $V$ .
- b) Augmenter l'ordre du polynôme d'approximation, ce qui implique une augmentation du nombre de variables nodales ou degrés de liberté de chaque élément. Ceci peut se faire :

## I-4-2 Divers types d'éléments

### I-4-2-1 Elément de haute précision de type LAGRANGE

- Par augmentation du nombre de nœuds d'interpolation de chaque élément, en gardant toujours une variable nodale  $U_i$  par nœud, ce qui conduit à la famille des éléments de type *LAGRANGE*.

### I-4-2-2 Elément de haute précision de type HERMITE

- Par augmentation de nombre de variables nodales en chaque nœuds, en conservant le même nombre de nœuds.

Les variables nodales additionnelles sont les valeurs aux nœud des dérivées

$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}, \dots$ , ce qui conduit à la famille des éléments de type *HERMITE*

## I-5 CONCLUSION

L'objectif de ce chapitre n'était que de faire comprendre comment on les construit (un élément), . Il suffit de retenir que choisir un élément c'est à la fois :

- Choisir une forme de maille
- Choisir la place des nœuds dans la maille
- Choisir une interpolation sur l'élément

*Les fonctions d'interpolation, leurs dérivées, et leurs intégrales sur l'approximation e sont alors déterminées par les valeurs aux nœuds.(conditions aux limites)*

Le choix de l'élément est délicat : c'est un compromis entre la qualité de la solution approchée et le coût du calcul. Il est plus facile d'approcher une courbe avec des polynômes de degré 2 qu'avec des segments de droite ; et plus le nombre de mailles est grand, plus la courbe est facile à approcher. Par contre, le nombre de nœuds (et donc le nombre d'inconnues) augmente avec le degré d'interpolation et le nombre de mailles. La taille du système d'équations à résoudre (et donc le temps de résolution) peut devenir très grande. Pour fixer les idées, on peut retenir que pour un algorithme de résolution par une méthode directe, le temps de résolution est proportionnel au cube du nombre d'inconnues. Sans qu'on puisse le chiffrer exactement, on peut dire que les éléments de faible degré d'interpolation demandent un maillage plus fin que les éléments de degré plus élevé pour obtenir une « précision équivalente ». Il faut donc se préoccuper de cette question dès la phase de maillage, et l'examen d'une solution approchée peut parfois amener à recommencer un calcul avec un maillage et/ou des interpolations différentes.

Pour conclure ce chapitre, on dira qu'une fois qu'on a choisi un maillage et des éléments, on a construit un espace  $f$  de fonctions  $F(M)$  définies sur tout le domaine  $\Omega$  obtenue par juxtaposition des interpolations sur les éléments réels, à valeurs réelles et de carré intégrable. Cet espace est donc inclus dans l'espace fonctionnel de SOBOLEV  $H^1(\Omega)$ . S'il y a  $n_{ddl}$  inconnues par nœud, on a construit un espace de fonctions inclus dans  $H^1(\Omega)^{n_{ddl}}$ . Cette propriété est essentielle dans les théorèmes de convergence de la méthode des éléments finis.

Chaque fonction  $F$  de  $f$  est une interpolation sur tout le domaine  $\Omega$ , complètement déterminée par les  $N_{ddl} = N \times n_{ddl}$  valeurs de ddl aux nœuds. On peut donc écrire :

$$F(M) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} u^{(i)} F^{(i)}(M) \quad (4.2)$$

Où  $u^{(i)}$  est la valeur au ddl numéro  $i$  ( $i \in [1, 2, \dots, N_{ddl}]$ ).

Les fonctions  $F^{(i)}(M)$  sont les fonctions de base de l'espace  $f$ . Ce sont les  $N_{ddl}$  fonctions  $F^{(i)}(M)$  obtenues pour les  $N_{ddl}$ -uplets de valeurs.

$$u^{(1)} = \delta_{i1}, \quad u^{(2)} = \delta_{i2}, \dots, u^{(j)} = \delta_{ij}, \dots, u^{(N_{ddl})} = \delta_{iN_{ddl}}$$

Les fonctions de base  $F^{(i)}(M)$  sont donc nulles partout sauf dans les éléments qui contiennent le nœud  $i$ . On a en particulier :

$$F^{(i)}(M^{(i)}) = \delta_i$$

Un problème traité par éléments finis se ramène toujours à la résolution de systèmes d'équations algébriques (linéaires ou non, symétriques ou non). Ces systèmes sont de grande taille généralement.

## CHAPITRE II

# **LA FLEXION DANS LES STRUCTURES AERONAUTIQUES**

- INTRODUCTION
- LA FLEXION DANS LES STRUCTURES  
AERONAUTIQUES

## II- LA FLEXION DANS LES STRUCTURES AERONAUTIQUES

### II-1 INTRODUCTION

Ce chapitre présente d'une manière générale les connaissances de base nécessaire a la compréhension de ce phénomène (flexion dans les structures aéronautiques). Elle sont présentées selon des niveaux de détails différents et en rapport avec les besoins du présent travail.

### II-2 LA FLEXION DANS LES STRUCTURES AERONAUTIQUES

#### II-2-1 Efforts appliqués à la voilure

##### II-2-1-1 En vol

Etant l'élément sustentateur , la voilure est soumise en vol à des forces (charge ) aérodynamiques. Elle ont deux composantes, l'une orientée de bas en haut, C'est la **PORTANCE**. Et l'autre dirigée dans le sens opposé au mouvement appelé **TRAINEE**

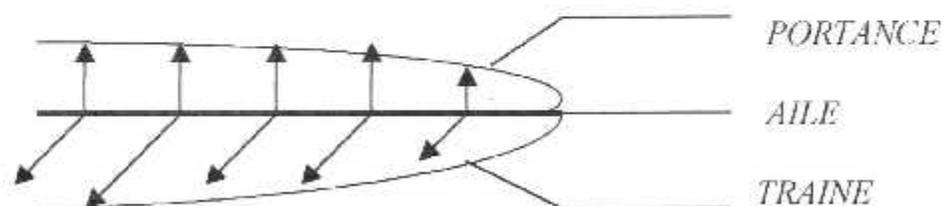


Figure II-1 : charge aerodynamique soumise a la voilure

La plus grande partie des charges aérodynamiques est soumise au fuselage pour équilibrer les forces d'inertie due à sa masse qui est importante par rapport à celle de l'avion complet .

Les différents types de structure reviennent donc à réaliser un élément longitudinal résistant ou poutre orientée dans le sens de l'envergure. Cet élément est chargé uniformément par résultante des charges aérodynamiques et les efforts d'inerties (la masse

de la structure, la masse de carburant). l'équilibre est apporté par les actions du fuselage sur la voilure aux points d'attaches .

En plus des charges citées ci-dessus, on mentionne d'autres charges : efforts localisés en certains points de l'aile, attaches des trains d'atterrissage, de gouvernes, de volets, d'aérofreins, de spoilers, parfois de moteurs, effet du réservoir s'il existe, effet du poids de l'aile.....

Ces effets donnent naissance en général à deux flexions :

#### Horizontale et verticale

La poutre (longeron) travaille donc surtout en flexion simple dirigée de bas en haut dans le cas du vol normal. la poutre supérieure est soumise à des contraintes de compression (pour une aile à porte à faux, le moment de flexion est donc maximum à l'emplanture, l'épaisseur de l'aile à cet endroit est maximum (augmentation du moment quadratique) .

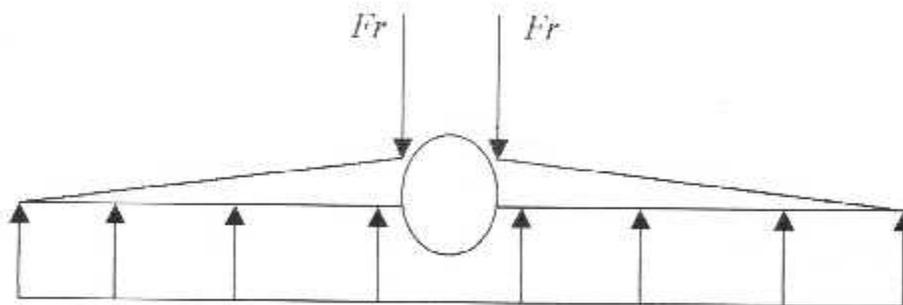


Figure II-2 : les contraintes de traction et de compression sur la voilure (flexion verticale)

Nous savons que le centre de poussée aérodynamique est sujet à des déplacements dans le sens de la profondeur de l'aile.

En résulte que la poutre longitudinale (longeron) travaille également en torsion .

La rigidité en torsion doit être d'autant plus importante quand la voilure possède des masses excentrées importantes telles que les groupes turbo-propulseurs .

Les moments de torsion sont soumis au fuselage ou ils participent à l'équilibre de longitudinal de l'avion .

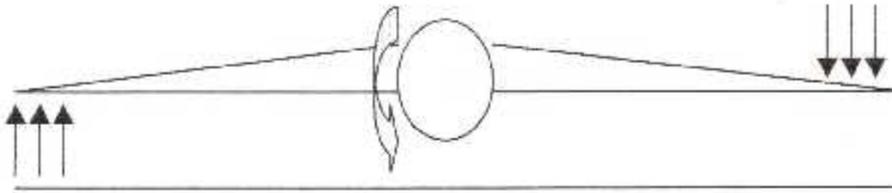
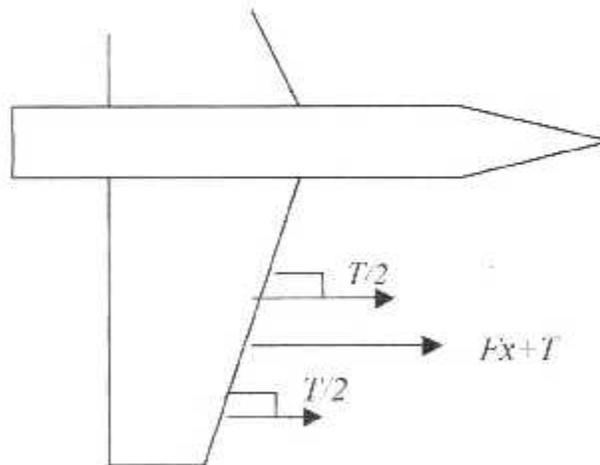


Figure II-3 : rigidite de torsion de la voilure

En plus des charges précédentes, la voilure est soumise dans certaines cas de calcul à des charges dissymétriques sur les deux ailes provenant de l'action des ailerons ou à des charges provenant des trains d'atterrissages .

Si les moteurs sont portés par voilure, celle-ci est soumise en vol à **une flexion horizontale** qui se superpose à celle due à la composante de la charge aérodynamique (force de traînée)  $0$ . dans ce cas la flexion se produit vers l'avant, le bord de fuite est tendue, le bord d'attaque est comprimé. si les moteurs sont fixés au fuselage, la flexion, de moindre intensité se produit vers l'arrière .



En ce qui concerne **la flexion verticale**, elle est due à des charge d'inerties : poids de l'aile, attaches moteurs, train d'atterrissages.

Aux charges réparties par l'ensemble de la structure, s'ajoutent les efforts telques : attaches atterrisseurs, gouvernes, volets, ces charges sont encaissées par des pièces fortes de l'aile conçues spécialement pour cette effet.

### II-2-1-2 Au sol :

La configuration de l'avion au sol est différente à celle en vol. dans ce cas , les charges appliquées à la voilure sont réduites aux poids de l'aile qui est presque négligeable par rapport au poids complet de l'avion), réaction du train d'atterrissage, réaction et moment à l'encastrement. Ces deux dernières inconnues ne peuvent être déterminer statiquement, d'ou le système a résoudre est un système hyperstatique.

#### ▪ Résumé

Selon la configuration de l'aile, on peut distinguer trois forces pour une portion d'aile dans le sens de la demi-envergure, qui sont

- la force de portance élémentaire ;
- le poids élémentaire structural de cette portion d'aile ;
- le poids du carburant contenue dans cette portion d'aile.

Ces trois forces admettant une résultante qui est dirigée vers le haut si l'avion est en vol et vers le bas si l'avion est au sol.

A l'effort tranchant  $t$  correspond des contraintes de cisaillement et au moment fléchissant  $m$  correspond une contrainte de traction (intrados de l'aile en vol) et une contrainte de compression ( extrados de l'aile en vol) .

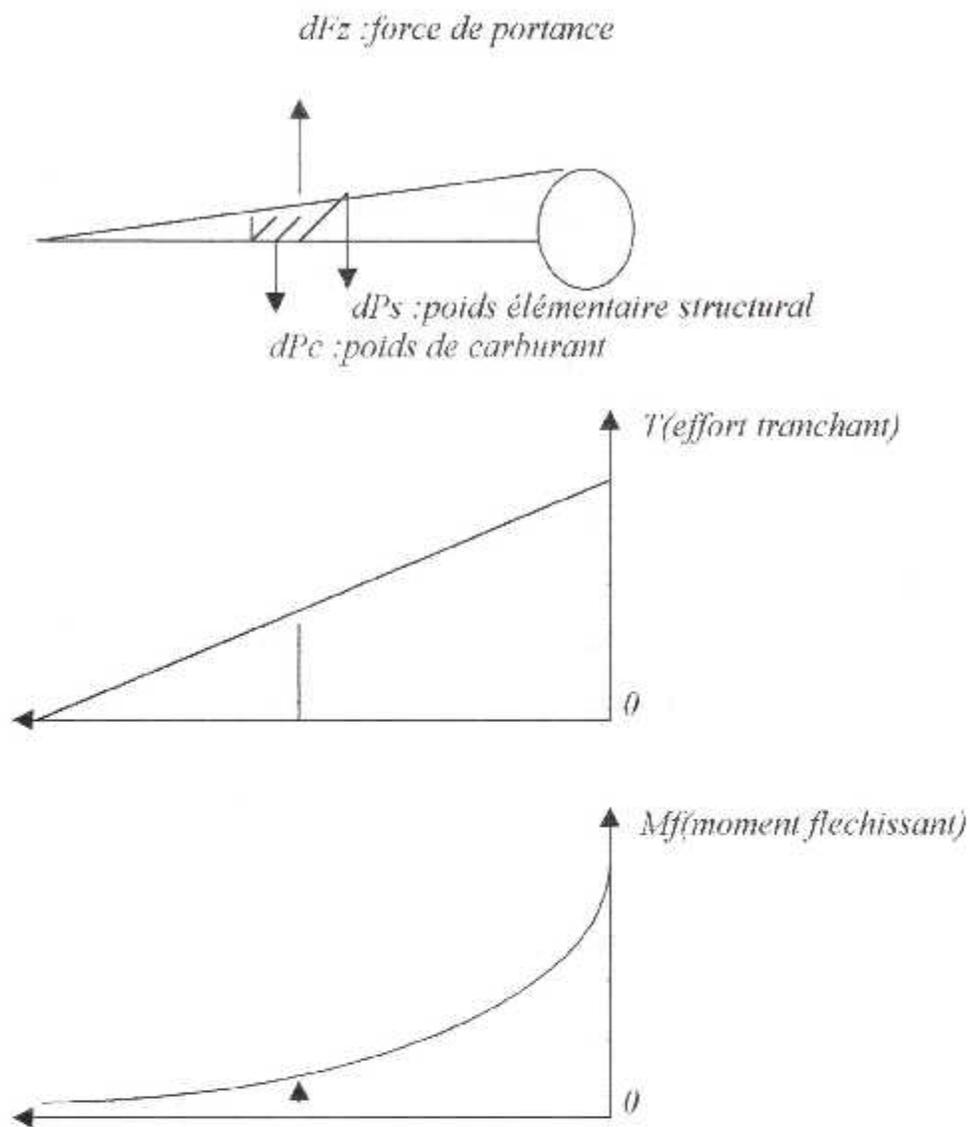


figure II-5 : - flexion verticale ;  
 - diagramme de l'effort tranchant ;  
 - diagramme du moment de flexion

## II-2-2 Efforts appliqués à une pal d'hélicoptère

### II-2-2-1 En vol :

Les efforts sollicitant une pale en vol peuvent se classer comme suit :

- la force centrifuge qui résulte de la masse de la pale en rotation, elle engendre une traction permanente et chaque élément de masse de la pale est donc soumis à une contrainte de traction ;
- les forces aérodynamiques issues de la surface de la pale tant en rotation qu'en translation et dont l'intensité résulte de l'incidence de la pale, laquelle est variable au cours d'un tour ;
- enfin, les forces d'inerties résultant des différents mouvements de la pale au cours d'un tour, tant en battement dans un plan verticale, de traînée dans un plan horizontal qu'en torsion.

La force centrifuge est constante si le régime normal du rotor est régulé, donc constant, ce qui est généralement le cas.

En revanche, les forces aérodynamiques génèrent des efforts alternes, et ce sont eux qui, dans certaines configurations de vol, contribuent à l'endommagement de la pale en fatigue. Toutes ces sollicitations engendrent des forces internes et des moments le long de la pale déterminant ainsi des états de contraintes normales et de cisaillement.

Les forces aérodynamiques engendrent

le moment de flexion verticale variable au cours d'un tour, et il en résulte un état de contraintes normales permanentes et contraintes normales alternées déterminant ainsi une traction et une compression ;

- un moment de flexion horizontale variable au cours d'un tour, cette flexion est due à l'articulation de battement au pied de la pale, et il en résulte les mêmes effets que précédemment ;
- un moment de torsion engendrant un état de contrainte de cisaillement pur.

#### II-2-2-2 Au sol :

De même, pour le cas précédemment (voilure) les efforts appliqués sur la pale se réduisent et les inconnus (moment et réaction pour le cas d'une pale rigide) sont déterminés statiquement.

Les structures actuelles sont munies d'articulations souples, celles-ci éliminent le moment d'encastrement et la réaction à l'appui et créent au niveau de l'excentricité de la pale un effort tranchant qu'il faut prendre en considération.

- **Origine et rôle des articulations :**

Les conditions de résistance de l'attache de pale sur le moyeu et le comportement dynamique du rotor imposent trois degrés de liberté à la liaison entre la pale et le moyeu qui sont ;

- Le battement, c'est à dire la levée de la pôle perpendiculaire au plan du disque, elle permet de supprimer les contraintes de flexion verticale au niveau du pied de la pale. Mais l'articulation de battement crée des contraintes de flexion horizontale en pied de la pale.
- la traînée, c'est à dire le mouvement de la pale dans le plan du disque ; elle supprime les contraintes horizontales de flexion provoquées par le battement des pales.
- Le pas, c'est à dire le mouvement de rotation de la pôle suivant son envergure, permet de faire varier l'angle de pas, par rotation de la pale autour de son axe longitudinal( ou axe de variation de pas). Cette variation est commandée par le pilote.

- **Articulation de battement vertical :**

L'articulation de battement vertical permet d'annuler le moment d'encastrement statique et dynamique et aussi de ramener l'effort de portance tout près de l'axe du rotor et de supprimer le mouvement de roulis parasite.

Le moment d'extrémités des pales décrivent un cône très ouvert. En pratique l'axe de battement ne se trouve pas sur l'axe mais décale d'une distance, appelé excentricité de battement

Principaux profils usuels :

Le profil biconvexe symétrique est par excellence le profil des pales métalliques des rotors d'hélicoptères, notamment pour les raisons suivantes :

- facilite de construction et de stabilité indifférente ;
- la fixité du centre de pousse, confondu avec l'axe d'articulation de la pale, évite tout moment parasite.

Les nouvelles techniques de fabrication(pales plastiques) admettent des profils biconvexes dissymétriques dont les qualités aérodynamiques sont supérieures .

- **Vrillage des pales :**

L'augmentation des forces élémentaires de portance et de traîné, de l'emplanture à l'extrémité de la pale, fait que le centre de poussée(CP) est situé non loin de l'extrémité. Il en résulte au niveau de l'emplanture, des moments de flexion exagérés du point de vue résistance de la pale.

Afin de mieux répartir les efforts et diminuer les moments de flexion, les pales sont vrillées à grande incidence au voisinage de moyen et à faible incidence vers l'extrémité où les vitesses relatives sont grandes. L'angle de pas diminue progressivement de l'emplanture à l'extrémité .

La diminution de  $\theta$  entraîne une diminution progressive de la portance et de la traînée. Nous concluons enfin par les deux figures, l'une qui nous donne une allure sur la distribution de la portance sur la pale, et l'autre qui représente une comparaison de répartition des moments de flexions pour une pale rigide et celle non rigide.

▪ **Remarque :**

Nous pouvons faire une extension pour le cas des aubes d'une turbine, pour le phénomène étudié qui est la flexion . on a deux cas considérés :

-rotor : il sera considéré comme une poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre(cas de l'aile)

stator : qui sera représenté par une poutre encastre en ces deux extrémités

## CHAPITRE III

# ETUDE THEORIQUE

- INTRODUCTION
- EXPOSITION DU PROBLEME PHYSIQUE
- CHOIX DE L'ELEMENT ET LA FAMILLE DES CHAMPS LOCAUX
- FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME
- CALCUL DES MATRICES DE RIGIDITES ELEMENTAIRE POUR DES ELEMENTS DE POUTRE TRAVAILLANT EN FLEXION
- CALCUL DE VECTEURS CHARGES ELEMENTAIRE

### III- ETUDE THEORIQUE

#### III-1 INTRODUCTION

Nous allons ici présenter complètement un certain nombre d'éléments, pour permettre une meilleure compréhension de la méthode par éléments finis et de ces résultats. Pour pouvoir assembler des matrices de rigidité élémentaire il faut pouvoir les expliciter, c'est ce que nous allons faire dans ce chapitre.

Pour résoudre un problème par la méthode des éléments finis, on procède donc par étapes successives :

#### III-2 EXPOSITION DU PROBLEME PHYSIQUE

La flexion des poutres est un système physique discret et continu. Il est caractérisé par un ensemble de variables qui peuvent dépendre des coordonnées d'espace  $x=(x, y, z)$  et du temps  $t$ , le système est dit stationnaire si ses variables ne dépendent pas du temps. Certaines variables  $d$  du système sont connues a priori : propriétés physiques, dimensions du système, sollicitations, conditions aux limites, etc. d'autres variables  $u$  sont inconnues : déplacements, contraintes, etc.

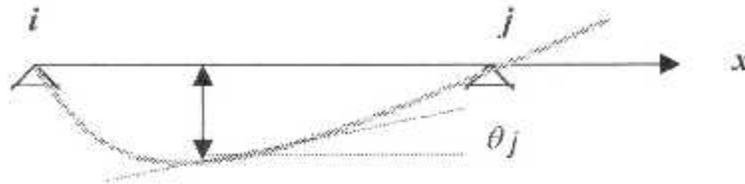
Un modèle mathématique du système permet d'écrire des relations entre  $u$  et  $d$  en utilisant des lois physiques. Ces relations constituent un système d'équations en  $u$  que nous nous proposons de résoudre. Le nombre de degrés de liberté du système est le nombre de paramètres nécessaires pour définir  $u$ .

Un système discret s'il possède un nombre de degrés de liberté fini. Un système est continu s'il possède un nombre de degrés de liberté infini.

Le comportement d'un système discret est représenté par un système d'équation algébrique. Celui d'un système continu est le plus souvent représenté par un système d'équations aux dérivées partielles ou integro-différentielles associées à des conditions aux limites en espace.

Les équations algébriques des systèmes discrets peuvent être résolues par les méthodes numériques, par contre les équations des systèmes continus ne peuvent en général pas être résolues directement. Il est nécessaire de discrétiser ces équations, c'est à dire de les remplacer par des équations algébriques. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes qui peuvent être utilisées pour faire cette discrétisation.

Soit une membrure divisée en éléments finis.



Comme  $\theta_j \ll 1$  alors :

$$\operatorname{tg} \theta_j \approx \theta_j = \left( \frac{dv}{dx} \right)_j$$

d'après la théorie de la flexion des poutres on a :

$$\begin{cases} M(x) = -EI_Z \frac{d^2v}{dx^2} \\ \sigma(x) = \frac{M(x)}{I_Z} y \end{cases}$$

▪ **HYPOTHESES :**

- 1) La poutre doit posséder un plan de symétrie.
- 2) L'axe de la poutre doit être droit ou très peu courbe
- 3) Toutes les forces doivent agir dans un plan de symétrie
- 4) Sous l'influence d'une charge la poutre se courbe, les fibres de la partie convexe s'allongent, celle de la partie concave se raccourcissent, Entre ces fibres tendues et celles comprimées est une zone de fibres neutres ne subissant de variations de longueur.
- 5) Les déformations ne doivent pas dépasser la limite élastique
- 6) La poutre se déforme dans le plan XZ ( hypothèse des contraintes planes  $\sigma_{ZZ} \approx 0$  )
- 7) Matériau isotrope.

▪ **Remarque**

Si l'on suppose que l'élément a un comportement élastique , la relation caractéristique sera toujours de la forme :

$$q = K \cdot a$$

la matrice  $[K]$  s'appelle matrice de rigidité de l'élément

### III-3 CHOIX DE L'ELEMENT ET LA FAMILLE DES CHAMP LOCAUX

C'est à dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux nœuds.

#### III-3-1 Interpolation polynomiale sur les mailles

Les fonctions d'interpolations utilisées sont pratiquement toujours des polynômes.

- Pour les mailles linéiques (c'est le cas pour les poutres en flexions) est un polynôme de  $x$ ,
- La base canonique des polynômes à une variable  $x$  de degré  $n$  ( $n = \text{nombre de degrés de liberté par nœud} \times \text{le nombre de nœud}$ ) est constituée des monômes  $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$ .

$$\Leftrightarrow v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_n x^{n-1}$$

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x}, \alpha(x) = \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2}, \dots, \zeta(x) = \frac{\partial^{n/2} v(x)}{\partial x^{n/2}}$$

### III-4 FORMULATION VAARIATIONNELLE DU PROBLEME

#### III-4-1 Relation entre déformation et déplacement verticale :

Les déformations  $\varepsilon(x)$  aux différents point de l'élément peuvent être obtenues à partir de la dérivée de la fonction de déplacement.

$$\varepsilon = \frac{dv}{dx} \tag{III.1}$$

d'après la théorie de la flexion des poutres on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} M(x) = -EI z \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{III.2} \\ \sigma(x) = \frac{M(x)}{I z} y \tag{III.3} \end{array} \right.$$

$$\text{alors : } \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{1}{E} \cdot \left( \frac{M(x)}{I_z} \cdot y \right) = \frac{1}{E} \cdot \frac{y}{I_z} \cdot \left( -E \cdot I_z \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(x) = -y \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (\text{III.4})$$

$$\text{D'autre part : } v(x) = [F] \cdot \{q\}$$

$$\text{Alors : } \varepsilon(x) = -y \cdot \frac{d^2}{dx^2} \cdot ([F] \cdot \{q\}) = -y \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \cdot \{q\} \quad (\text{III.5})$$

$$\text{On pose : } [B] = y \cdot \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Alors (16) devient : } \varepsilon(x) = [B] \cdot \{q\} \quad (\text{III.7})$$

$$\text{D'où : } \delta \varepsilon = [B] \cdot \{\delta q\} \quad (\text{III.8})$$

Donc on dérivant deux fois la fonction d'interpolation

### III-4-2 Relation entre contrainte et déplacement :

Les propriétés élastique de l'élément nous permettent de visualiser la dépendance entre les contrainte  $\{\sigma(x)\}$  et les déformations  $\{\varepsilon(x)\}$  par la relation suivante :

$$\{\sigma(x)\} = [E] \cdot \{\varepsilon(x)\} \quad (\text{III.9})$$

Pour notre cas on a :

$$[E] = E \text{ module de Young}$$

$$\{\sigma(x)\} = \sigma(x)$$

$$\{\varepsilon(x)\} = \varepsilon(x)$$

Alors (14) devient :

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) \quad (\text{III.10})$$

Remplaçant l'équation (7) dans (10) on obtient :

$$\sigma(x) = E \cdot [B] \cdot \{q\} \quad (\text{III.11})$$

### III-4-3 Relation entre charge nodale et déplacement nodaux :

Le travail produit par les charges nodales doit être égal au travail interne des contraintes :

- Le travail externe des forces nodales due à un déplacement virtuel est :

$$\delta \omega_f = \{\delta \cdot q_1\} \cdot p_1 + \{\delta \cdot q_2\} \cdot p_2 + \dots + \{\delta \cdot q_n\} \cdot p_n \quad (\text{principe de superposition}) -$$

qui devient :

$$\delta \omega_f = (\delta \cdot q)^t \cdot \{p\} \quad (\text{III.12})$$

- Le travail virtuel interne par unité de volume est :

$$\delta \cdot v_i = \int_V (\delta \cdot \varepsilon)^t \sigma \cdot dv \quad (\text{III.13})$$

Remplaçant les expressions (8) et (9) dans (13) on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma \cdot v_i &= \int ([B] \cdot \{\delta \cdot q\})^t \cdot (E \cdot [B] \cdot \{q\}) \cdot dv \\ \Rightarrow \sigma \cdot v_i &= \int \{\delta \cdot q\}^t \cdot [B]^t E \cdot [B] \cdot \{q\} \cdot dv \\ \Rightarrow \sigma \cdot v_i &= \{\delta \cdot q\}^t \cdot \left( \int [B]^t E \cdot [B] \cdot dv \right) \cdot \{q\} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Egalisant les deux travaux ( équation (12)= équation (14) ).

$$\delta \omega_i = \delta \cdot v_i$$

$$(\delta \cdot q)^t \{p\} = (\delta \cdot p)^t \cdot \int [B]^t E \cdot [B] dv \cdot \{q\}$$

qui devient :

$$\{p\} = \int [B]^t E \cdot [B] dv \cdot \{q\}$$

comme :

$$\{p\} = [K] \cdot \{q\} \quad (\text{III.15})$$

alors :

$$\boxed{[K] = \int [B]^T E [B] dv} \quad (\text{III.16})$$

Connaissons que :

$$\int_A y^2 dA = I_{ZZ} \quad (\text{III.18})$$

On peut montrer donc a partir de considérations d'ordre physique que l'expression donnée ci-dessus de l'énergie est toujours a valeur positive ( cette propriété s'exprimant simplement par la condition que la forme quadratique associée soit toujours positive ou nulle).

Cette caractéristique a son importance lorsque l'on aborde la résolution numérique du système d'équations obtenue, car il se présente certaines simplifications dans le cas d'équations symétriques définies positives.

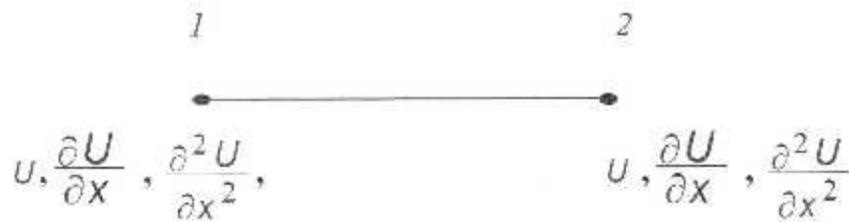
### III-5 CALCULE DES MATRICES DE RIGIDITES ELEMENTAIRE POUR DES ELEMENT DE POUTRE TRAVAILLANT EN FLEXION

- 1) Matrices de rigidité pour un élément de type HERMITE ( 2 degrés de libertés par nœud, 3 degrés de libertés par nœud).

Ces élément sont obtenus en augmentant le nombre de variables nodales attachées a chaque nœuds.

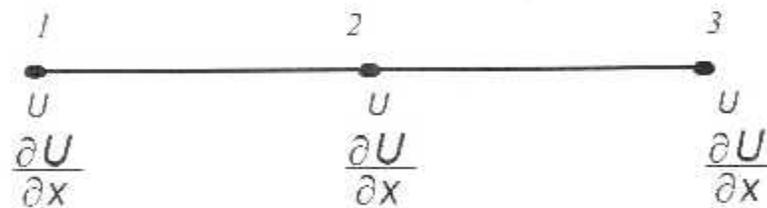
→ aux variables  $V_i$  nous ajoutons les valeurs aux nœuds des dérivées de

$V_i$ .



2) Matrices de rigidité pour un éléments type LAGRANGE qui possède 2 degrés de libertés par nœud.

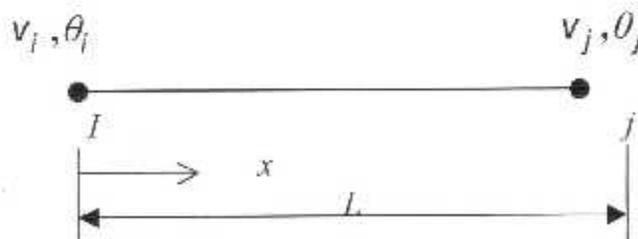
Cette famille d'éléments est obtenue en augmentant le nombre de nœuds d'interpolation et en gardant le même nombre de variable par nœud.  
 Ces éléments sont donc sub-paramétriques.



**III-5-1 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire pour un élément de poutre travaillant en flexion type HERMITE**

**III-5-1-1 Deux 2 degrés de liberté par nœud**

C'est l'élément le plus simple : il est composé de deux nœuds ayant chacun 2 ddl.



On a 4 degré de liberté donc l'approximation qu'on fait pour le déplacement est un polynôme de 3 degré, c'est à dire quatre 4 constante à déterminer

$$v(x) = C_1 - C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

$$\theta(x) = C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2$$

$$\text{Alors : } v(x) = [1, x, x^2, x^3] \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = [g(x)] \cdot \{c\}$$

La détermination des constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  revient à poser les conditions aux limites.

$$v(x=0) = v_i$$

$$\theta(x=0) = \theta_i$$

$$v(x=L) = v_j$$

$$\theta(x=L) = \theta_j$$

on obtient :

$$v(x=0) = v_i = C_1$$

$$\theta(x=0) = \theta_i$$

$$v(x=L) = v_j = C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3$$

$$\theta(x=L) = \theta_j = C_2 + 2C_3 L + 3C_4 L^2$$

sous la forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix} = [H] \{c\}$$

$$\text{ou : } \{q\} = [H] \{C\} \Leftrightarrow \{C\} = [H]^{-1} \{q\}$$

on a :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow [H]^{-1} = \frac{1}{l^4} \times \begin{bmatrix} l^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^4 & 0 & 0 \\ -3l^2 - 2l^3 & 3l^2 & l^3 & \\ 2l & l^2 & -2l^2 & \end{bmatrix}$$

on a :  $[F(x)] = [G] \cdot [H]^{-1}$

et :  $v(x) = [F(X)] \cdot \{q\}$

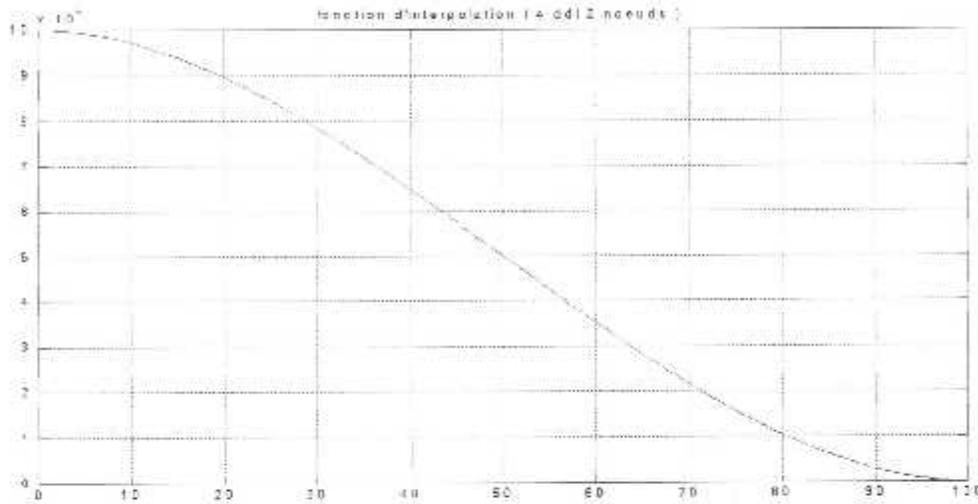
alors :

$$[F(X)] = [G] \cdot [H]^{-1} = [1, x, x^2, x^3] \cdot \frac{1}{l^4} \cdot \begin{bmatrix} l^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^4 & 0 & 0 \\ -3l^2 - 2l^3 & 3l^2 & l^3 & \\ 2l & l^2 & -2l^2 & \end{bmatrix}$$

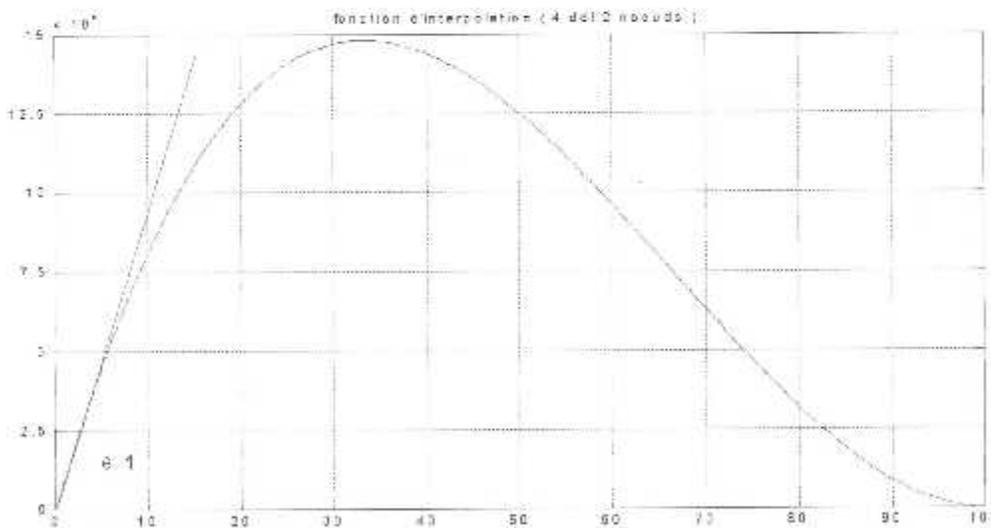
$$[F(X)] = \frac{1}{l^3} \cdot \{2x^3 - 3x^2 \cdot l + l^3, x^3 \cdot l - 2x^2 \cdot l^2 + x \cdot l^3, -2x^3 + 3x^2 \cdot l, x^3 \cdot l - x^2 \cdot l^2\}$$

• Graphe des fonctions d'interpolations deux ddl deux nœuds

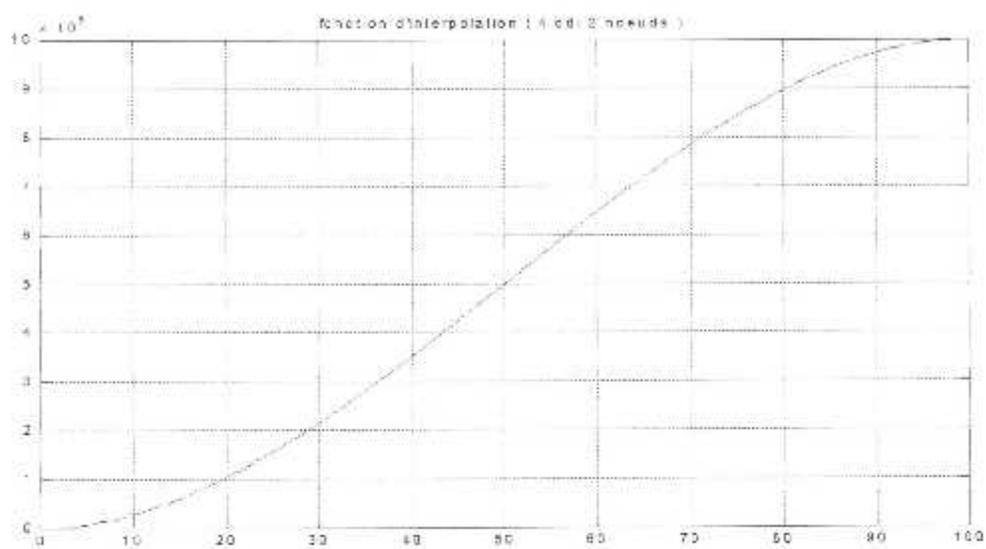
alors :  $v(x) = \{N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x)\} \{q\}$



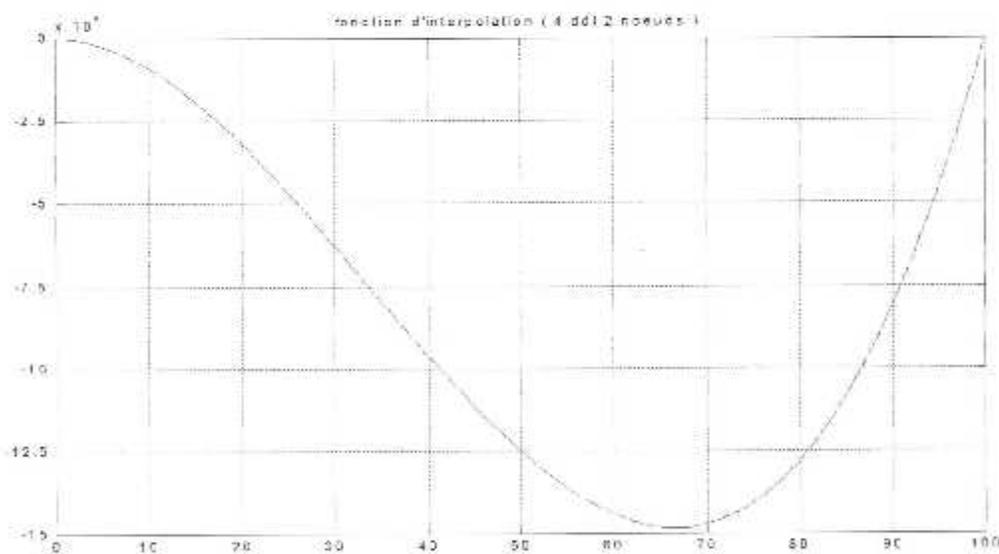
Figure(III.1) : $N_1(x)$



figure(III.2) : $N_2(x)$



figure(III.3) :  $N_3(x)$



figure(III.4) :  $N_4(x)$

On a :  $[B] = -y \cdot \frac{d^2 F}{dx^2}$

Alors :

On dérivant deux fois la fonction d'interpolation on obtient :

$$[B] = \frac{-y}{l^3} \cdot \left\{ 12x - 6l, 6xl - 4l^2, -12x + 6l, 6xl - 2l^2 \right\}$$

et :

$$[K] = \int [B]^t E \cdot [B] \cdot dv$$

donc :

$$[B]^t [B] = \frac{y^2}{l^6} \cdot \begin{bmatrix} 12x - 6l \\ 6xl - 4l^2 \\ -12x + 6l \\ 6xl - 2l^2 \end{bmatrix} \cdot \left[ 12x - 6l, 6xl - 4l^2, -12x + 6l, 6xl - 2l^2 \right]$$

$$\Rightarrow [B]^t [B] = \frac{y^2}{l^6} \cdot [S]$$

connaissions que :

$$[K] = \frac{E \cdot I}{l^6} \cdot \int_0^l [S]_{4 \times 4} \cdot dx$$

Avec :

$$[S]_{4 \times 4} = \begin{vmatrix} (12x - 6l)^2 & & & \\ (6xl - 4l^2) \cdot (12x - 6l) & (6xl - 4l^2)^2 & & \\ (-12x + 6l) \cdot (12x - 6l) & \dots & (-12x + 6l) \cdot (6xl - 4l^2) & (-12x + 6l)^2 \\ (6xl - 2l^2) \cdot (12x - 6l) & (6xl - 2l^2) \cdot (6xl - 4l^2) & (6xl - 2l^2) \cdot (-12x + 6l) & (6xl - 2l^2)^2 \end{vmatrix}$$

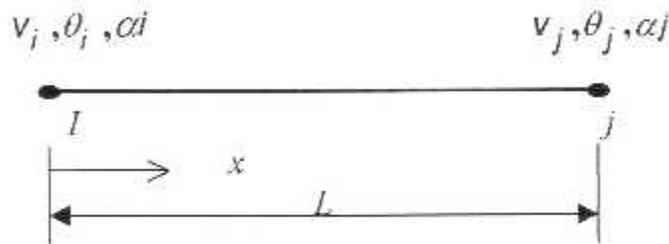
après intégration on obtient:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

**III-5-1-2 Trois 3 degrés de liberté par nœud :**



On a 6 degré de liberté donc l'approximation qu'on fait pour le déplacement est un polynôme de 5 degré, c'est à dire quatre 6 constante a déterminer

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6x^5$$

$$\theta(x) = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 + 4C_5x^3 + 5C_6x^4$$

$$\alpha(x) = 2C_3 + 6C_4x + 12C_5x^2 + 20C_6x^3$$

Alors :

$$v(x) = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5] \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = [g(x)] \cdot \{c\}$$

La détermination des constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  revient à poser les conditions aux limites.

$$v(x=0) = v_i$$

$$\theta(x=0) = \theta_i$$

$$\alpha(x=0) = \alpha_i$$

$$v(x=L) = v_j$$

$$\theta(x=L) = \theta_j$$

$$\alpha(x=L) = \alpha_j$$

on obtient :

$$v(x=0) = v_i = C_1$$

$$\theta(x=0) = \theta_i = C_2$$

$$\alpha(x=0) = \alpha_i = 2C_3$$

$$v(x=L) = v_j = C_1 + C_2L + C_3L^2 + C_4L^3 + C_5L^4 + C_6L^5$$

$$\theta(x=L) = \theta_j = C_2 + 2C_3L + 3C_4L^2 + 4C_5L^3 + 5C_6L^4$$

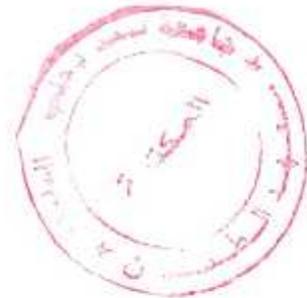
$$\alpha(x=L) = \alpha_j = 2C_3 + 6C_4L + 12C_5L^2 + 20C_6L^3$$

sous la forme matricielle on a :

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ \alpha_i \\ v_j \\ \theta_j \\ \alpha_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6L & 12L^2 & 20L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix}$$

on a :

$$\Leftrightarrow [H] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6L & 12L^2 & 20L^3 \end{pmatrix}$$



$$[H]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -10L^3 & -6L^2 & -\frac{3}{2}L^{-1} & 10L^{-3} & -4L^{-2} & \frac{1}{2}L^{-1} \\ 15L^{-4} & 8L^{-3} & \frac{3}{2}L^{-2} & -15L^{-4} & 7L^{-3} & -L^{-2} \\ -6L^{-5} & -3L^{-4} & \frac{1}{2}L^{-3} & 6L^{-5} & -3L^{-4} & \frac{1}{2}L^{-3} \end{pmatrix}$$

$$[H]^{-1} = \frac{1}{4L^9} \cdot \begin{pmatrix} 4L^9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4L^9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2L^9 & 0 & 0 & 0 \\ -40L^6 & -24L^7 & -6L^8 & 40L^6 & -16L^7 & 2L^8 \\ 60L^5 & 32L^6 & 6L^7 & -60L^5 & 28L^6 & -4L^7 \\ -24L^4 & -12L^5 & 2L^6 & 24L^4 & -12L^5 & 4L^6 \end{pmatrix}$$

on a :  $[F(x)] = [G] \cdot [H]^{-1}$

et:  $v(x) = [F(x)] \cdot \{q\}$

donc :

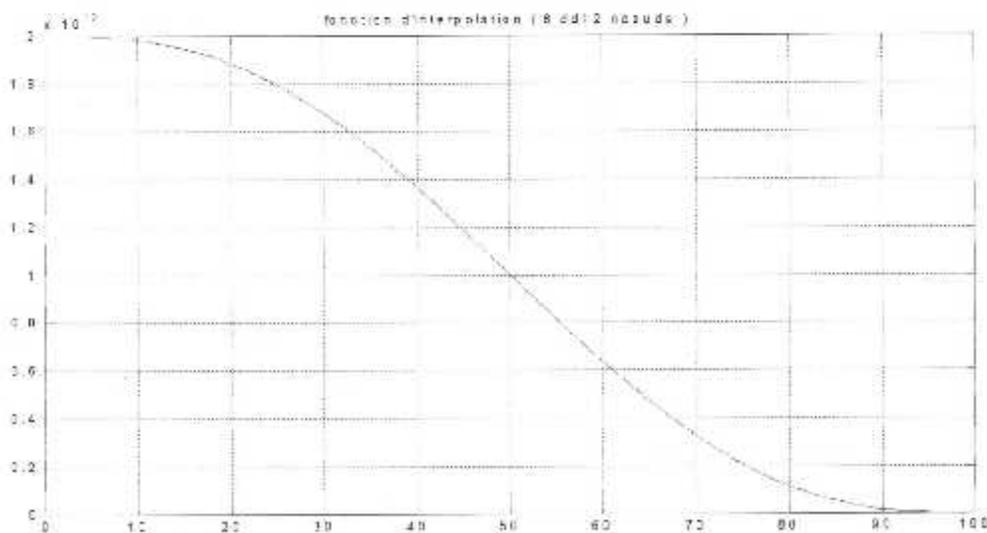
$$[F(x)] = \begin{bmatrix} 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2L^5} \cdot \begin{pmatrix} 2L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 \\ -20L^2 - 12L^3 & -3L^4 & 20L^2 & -8L^3 & L^4 & \\ 30L & 16L^2 & 3L^3 & -30L & 14L^2 & -2L^3 \\ -12 & -6L & L^2 & 12 & -6L & L^2 \end{pmatrix}$$

$$[F(X)] = \frac{1}{2L^5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2L^5 - 20L^2x^3 + 30Lx^4 - 12x^5 \\ 2L^5x - 12L^3x^3 + 16L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^5x^2 - 3L^4x^3 + 3L^3x^3 - L^2x^5 \\ 20L^2x^3 - 30Lx^4 + 12x^5 \\ -8L^3x^3 + 14L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^4x^3 - 2L^3x^4 + L^2x^5 \end{array} \right\}$$

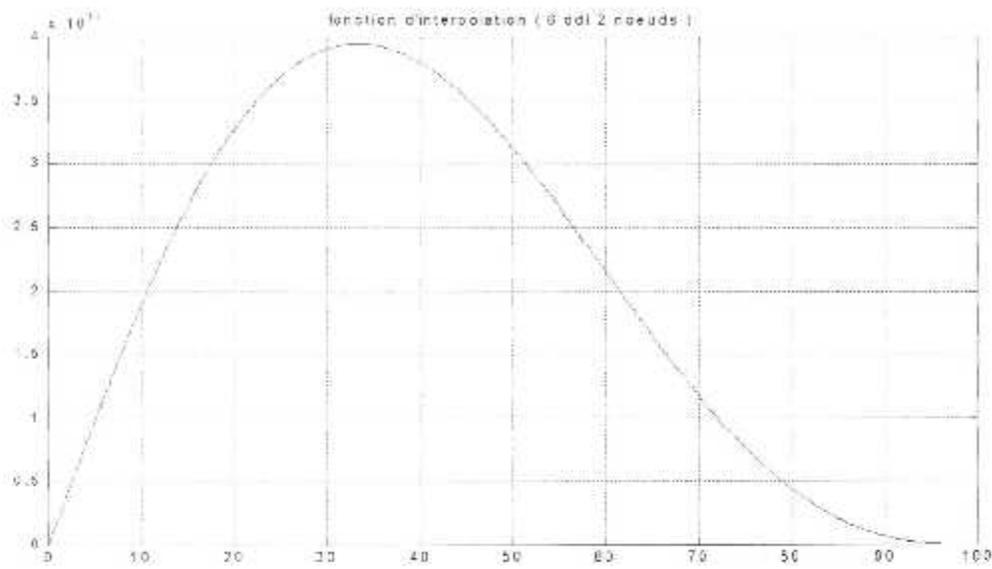
alors :

$$v(x) = \{N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x), N_5(x), N_6(x)\} \cdot \{q\}$$

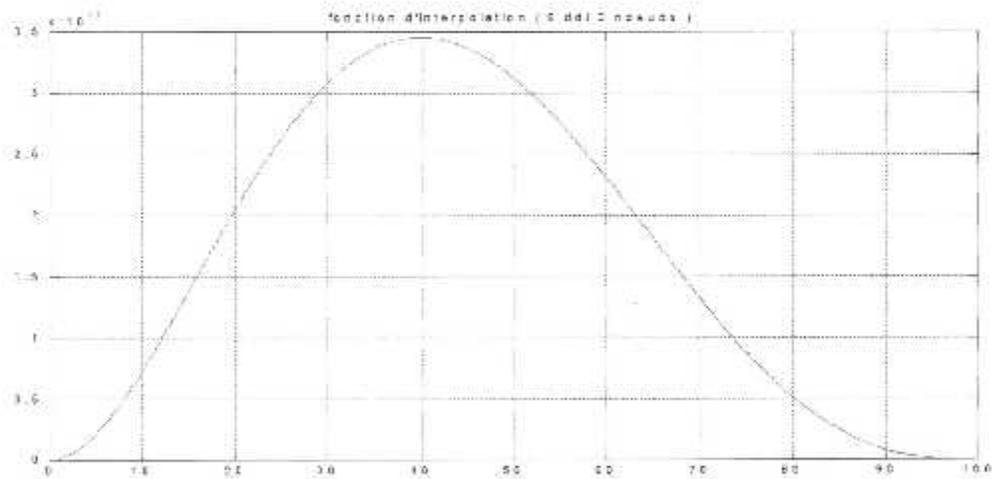
▪ **Graphes des fonctions d'interpolations trois ddl deux nœuds**



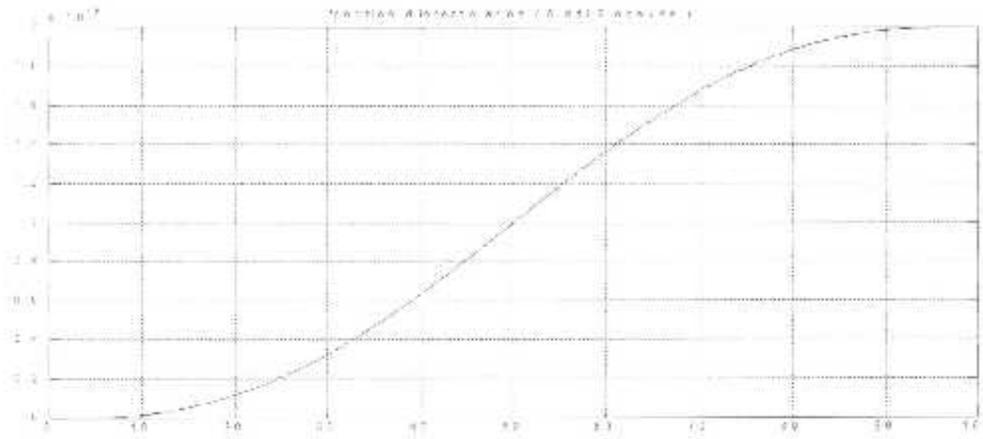
figure(III-5) :  $N_1(x)$



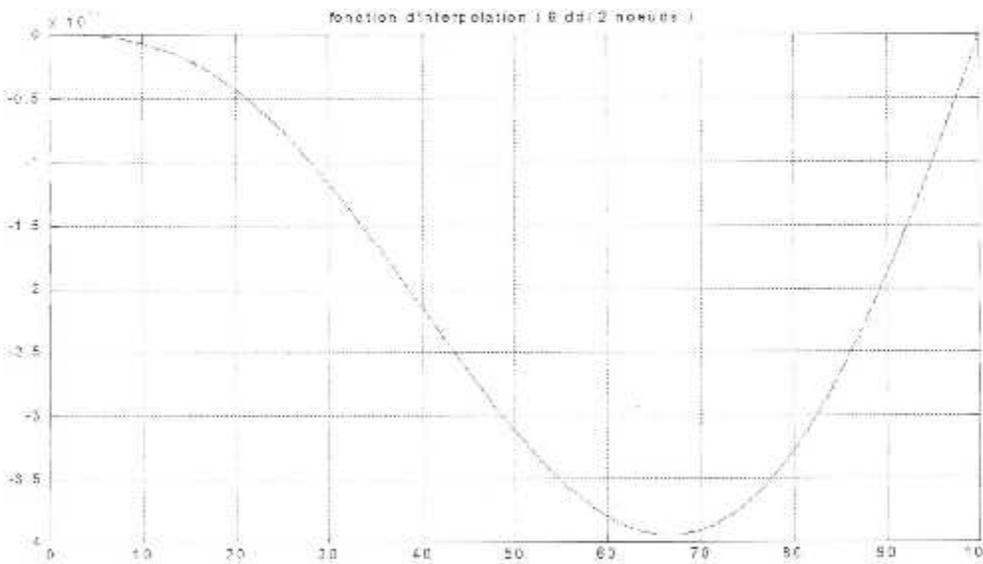
figure(III-6) :  $N_2(x)$



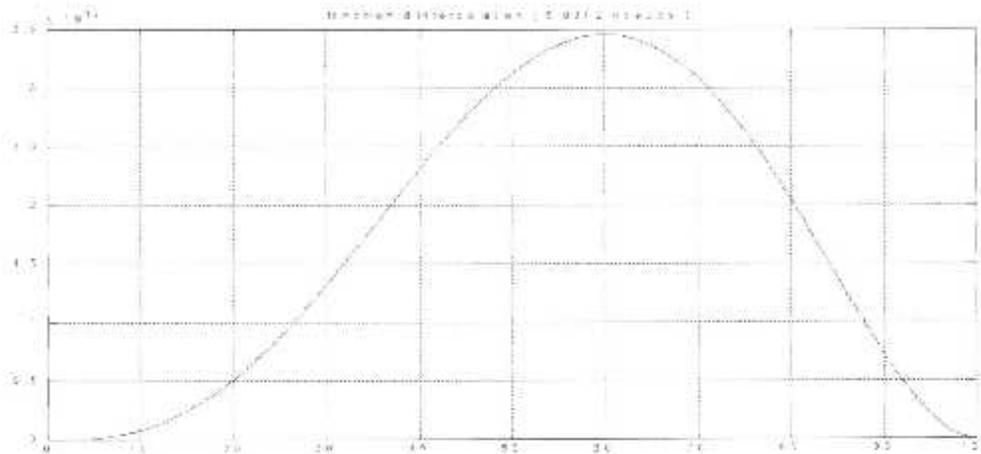
figure(III-7) :  $N_3(x)$



figure(III-8) :  $N_4(x)$



figure(III-9) :  $N_5(x)$



figure(III-10) :  $N_6(x)$

On a :

$$[B] = -y \cdot \frac{d^2 F}{dx^2}$$

On dérivant deux fois la fonction d'interpolation on obtient :

$$[B] = \frac{-y}{2L^5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -120L^2x + 360Lx^2 - 240x^3 \\ -72L^3x + 192L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 2L^5 - 18L^4x + 36L^3x^2 - 20L^2x^3 \\ 120L^2x - 360Lx^2 + 240x^3 \\ -48L^3x + 168L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 6L^4x - 24L^3x^2 + 20L^2x^3 \end{array} \right\}$$

$$[K] = \int [B]^T E [B] \cdot dv$$

on a :

$$[B]^t [B] = \frac{y^2}{4L^{10}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -120L^2x + 360Lx^2 - 240x^3 \\ -72L^3x + 192L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 2L^5 - 18L^4x + 36L^3x^2 + 20L^2x^3 \\ 120L^2x - 360Lx^2 + 240x^3 \\ -48L^3x + 168L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 6L^4x - 24L^3x^2 + 20L^2x^3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} -120L^2x + 360Lx^2 - 240x^3 \\ -72L^3x + 192L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 2L^5 - 18L^4x + 36L^3x^2 + 20L^2x^3 \\ 120L^2x - 360Lx^2 + 240x^3 \\ -48L^3x + 168L^2x^2 - 120Lx^3 \\ 6L^4x - 24L^3x^2 + 20L^2x^3 \end{array} \right\}$$

$$[K] = \frac{E \cdot I}{4L^{10}} \cdot \int_0^L [S]_{4 \times 4} \cdot dx$$

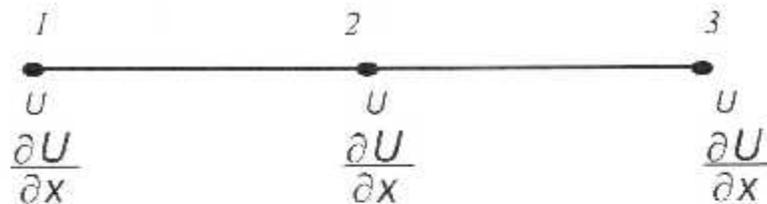
Avec :

après intégration on obtient:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \cdot \left| \begin{array}{cccc} \frac{120}{7} & & & \\ \frac{60}{7}L & \frac{192}{35}L^2 & & \\ \frac{3}{7}L^2 & \frac{11}{35}L^3 & \frac{3}{35}L^2 & \\ -\frac{120}{7} & -\frac{60}{7}L & -\frac{3}{7}L^2 & \frac{120}{7} \\ \frac{60}{7}L & \frac{108}{35}L^2 & \frac{4}{35}L^3 & -\frac{60}{7}L & \frac{192}{35}L^2 \\ -\frac{3}{7}L^2 & -\frac{4}{35}L^3 & \frac{1}{70}L^2 & -\frac{3}{7}L^2 & -\frac{11}{35}L^3 & \frac{3}{35}L^2 \end{array} \right|$$

**III-5-2 Calcule de la Matrice de rigidité pour un élément de poutre travaillant en flexion type LAGRANGE**

**III-5-2-1 Trois 3 nœud deux degrés de liberté par nœud :**



On a 6 degré de liberté donc l'approximation qu'on fait pour le déplacement est un polynôme de 5 degré, c'est à dire 6 constante à déterminer

$$v(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^4 + C_6x^5$$

$$\theta(x) = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 + 4C_5x^3 + 5C_6x^4$$

Alors : 
$$v(x) = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5] \cdot \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix}$$

$$v(x) = [g(x)] \cdot \{c\}$$

La détermination des constantes  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  revient à poser les conditions aux limites.

$$v(x=0) = v_1$$

$$\theta(x=0) = \theta_1$$

$$v(x=L/2) = v_2$$

$$\theta(x=L/2) = \theta_2$$

$$v(x=L) = v_3$$

$$\theta(x=L) = \theta_3$$

on obtient :

$$v(x=0) = v_1 = C_1$$

$$\theta(x=0) = \theta_1 = C_2$$

$$v(x=L/2) = v_2 = C_1 + C_2 L/2 + C_3 L^2/4 + C_4 L^3/8 + C_5 L^4/16 + C_6 L^5/32$$

$$\theta(x=L/2) = \theta_2 = C_2 + C_3 L + 3C_4 L^2/4 + C_5 L^3/2 + 5C_6 L^4/16$$

$$v(x=L) = v_3 = C_1 + C_2 L + C_3 L^2 + C_4 L^3 + C_5 L^4 + C_6 L^5$$

$$\theta(x=L) = \theta_3 = C_2 + 2C_3 L + 3C_4 L^2 + 4C_5 L^3 + 5C_6 L^4$$

sous la forme matricielle on a :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & \frac{L^4}{16} & \frac{L^5}{32} \\ 0 & 1 & L & 3\frac{L^2}{4} & 2\frac{L^3}{2} & 5\frac{L^4}{16} \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix}$$

on a :

$$\Leftrightarrow [H] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 0 & 1 & L & 3\frac{L^2}{4} & 2\frac{L^3}{5} & \frac{L^4}{16} \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \end{vmatrix}$$

$$[H]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{23}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{16}{L^2} & -\frac{8}{L} & \frac{7}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{66}{L^3} & \frac{13}{L^2} & -\frac{32}{L^3} & \frac{32}{L^2} & -\frac{34}{L^3} & \frac{5}{L^2} \\ -\frac{68}{L^4} & \frac{12}{L^3} & \frac{16}{L^4} & -\frac{40}{L^3} & \frac{52}{L^4} & -\frac{8}{L^3} \\ \frac{24}{L^5} & \frac{4}{L^4} & 0 & \frac{16}{L^4} & -\frac{24}{L^5} & \frac{4}{L^4} \end{vmatrix}$$

$$[H]^{-1} = \frac{1}{4L^9} \begin{vmatrix} L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23L^3 & -6L^4 & 16L^3 & -8L^4 & 7L^3 & -L^4 \\ 66L^2 & 13L^3 & -32L^2 & 32L^3 & -34L^2 & 5L^3 \\ -68L & 12L^2 & 16L & -40L^2 & 52L & -8L^2 \\ 24 & 4L & 0 & 16L & -24 & 4L \end{vmatrix}$$

on a :  $[F(x)] = [G] \cdot [H]^{-1}$

et :  $v(x) = [F(X)] \cdot \{q\}$

donc :

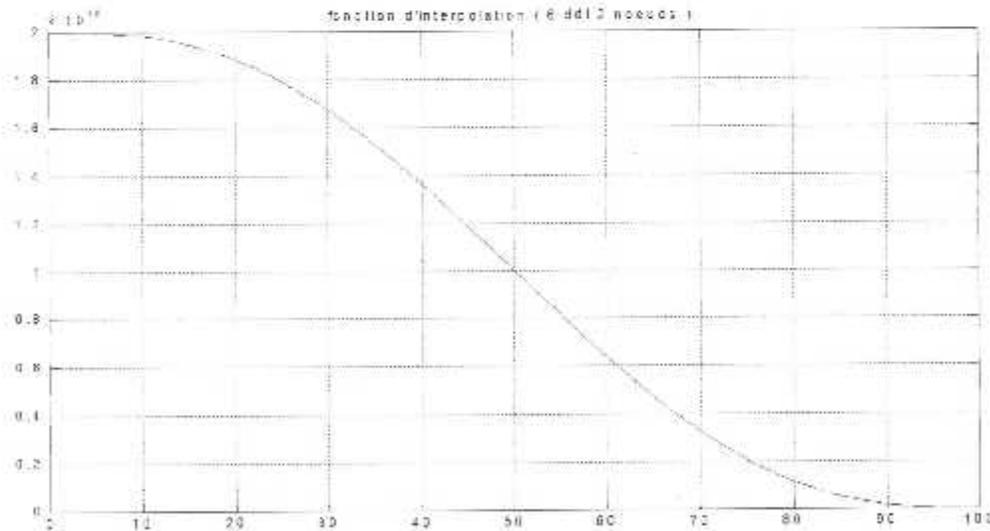
$$[F(x)] = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5] \cdot \frac{1}{L^5} \cdot \begin{pmatrix} L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23L^3 - 6L^4 & 16L^3 & -8L^4 & 7L^3 & -L^4 & \\ 66L^2 & 13L^3 & -32L^2 & 32L^3 & -34L^2 & 5L^3 \\ -68L - 12L^2 & 16L & -40L^2 & 52L & -8L^2 & \\ 24 & 4L & 0 & 16L & -24 & 4L \end{pmatrix}$$

$$[F(X)] = \frac{1}{L^5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} L^5 - 23L^3x^2 + 66L^2x^3 - 68Lx^4 + 24x^5 \\ L^5x - 6L^4x^2 + 13L^3x^3 - 12L^2x^4 + 4Lx^5 \\ 16L^3x^2 - 32L^2x^3 + 16Lx^4 \\ -8L^4x^2 + 32L^3x^3 - 40L^2x^4 + 16Lx^5 \\ 7L^3x^2 - 34L^2x^3 + 52Lx^4 - 24x^5 \\ -L^4x^2 + 5L^3x^3 - 8L^2x^4 + 4Lx^5 \end{array} \right\}$$

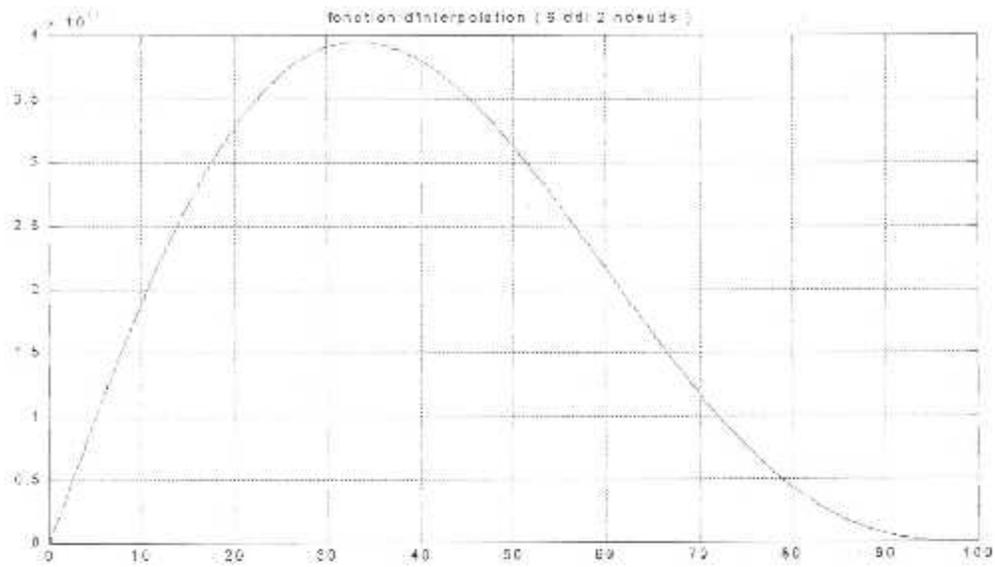
alors :

$$v(x) = \{N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x), N_5(x), N_6(x)\} \cdot \{q\}$$

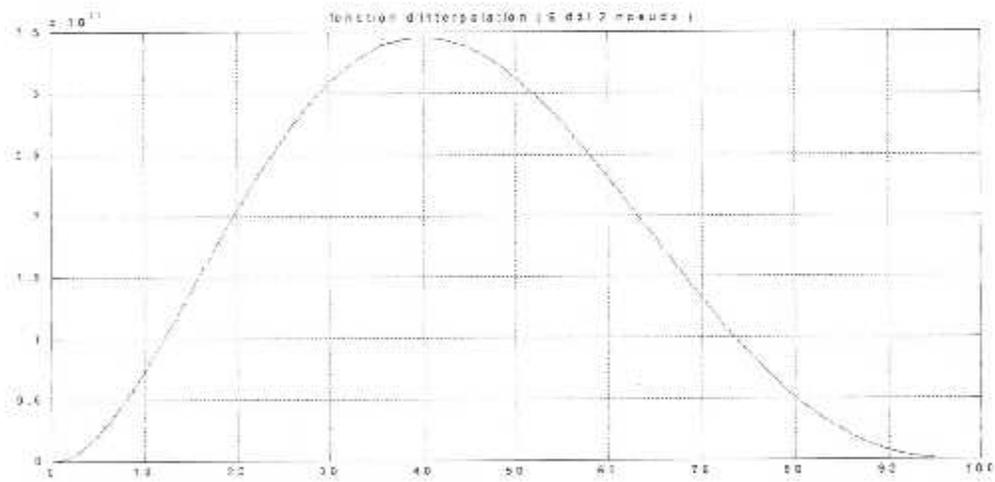
▪ **Graphes des fonctions d'interpolations trois ddl trois nœuds**



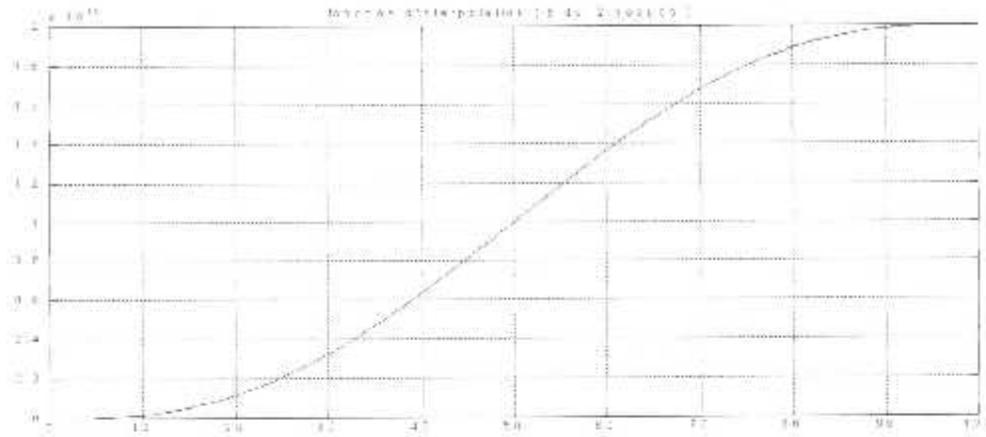
figure(III-11) : N1(x)



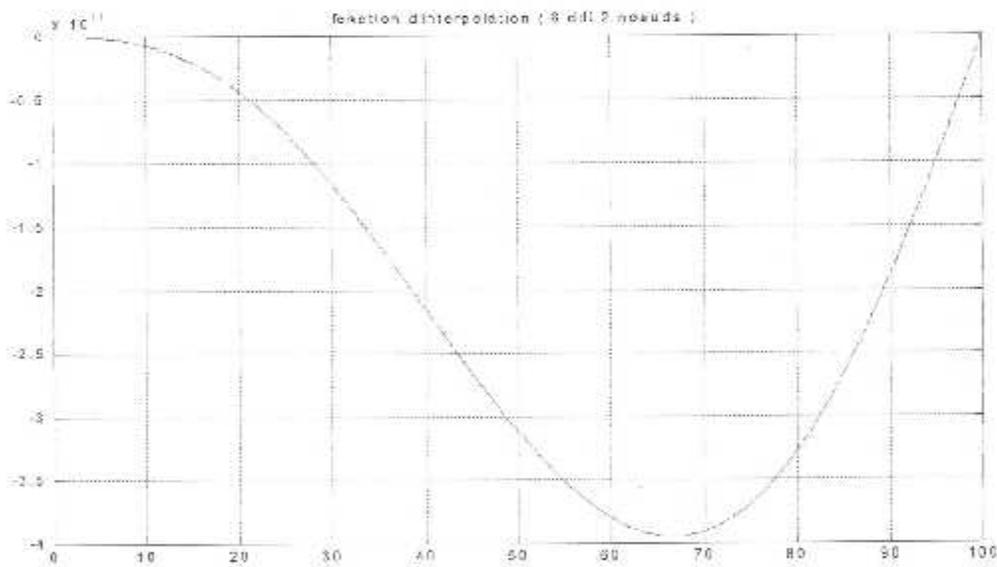
figure(III-12) : N2(x)



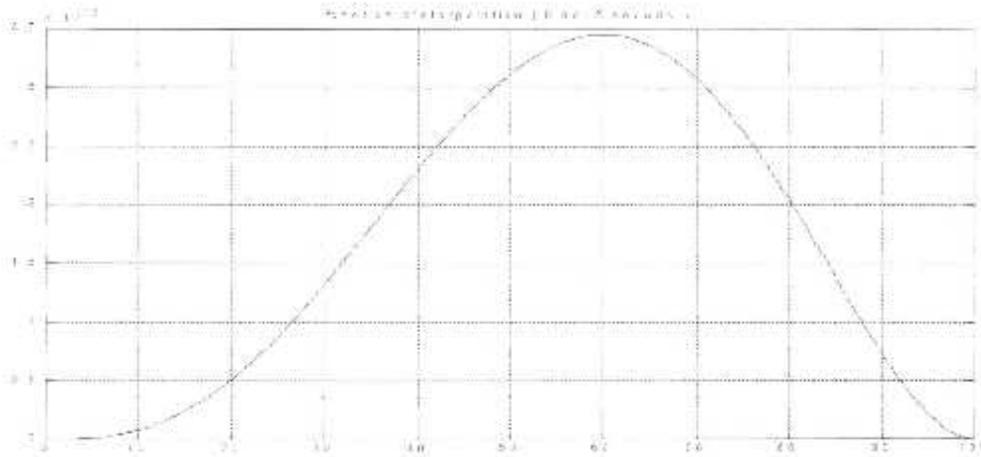
figure(III-13) : N3(x)



figure(III-14) :  $N_4(x)$



figure(III-15) :  $N_5(x)$



figure(III-16) : N6(x)

On a : 
$$[B] = -y \cdot \frac{d^2F}{dx^2}$$

On dérivant deux fois la fonction d'interpolation on obtient :

$$[B] = \frac{-y}{L^5} \begin{Bmatrix} 46L^3 - 396L^2x + 816Lx^2 - 480x^3 \\ 12L^4 - 72L^3x + 144L^2x^2 - 80Lx^3 \\ -32L^3 + 192L^2x - 192Lx^2 \\ 16L^4 - 192L^3x + 480L^2x^2 - 320Lx^3 \\ -14L^3 + 204L^2 - 624Lx^2 + 480x^3 \\ 2L^4 - 30L^3x + 96L^2x^2 - 80Lx^3 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \int [B]^t E [B] \cdot dv$$

on a :

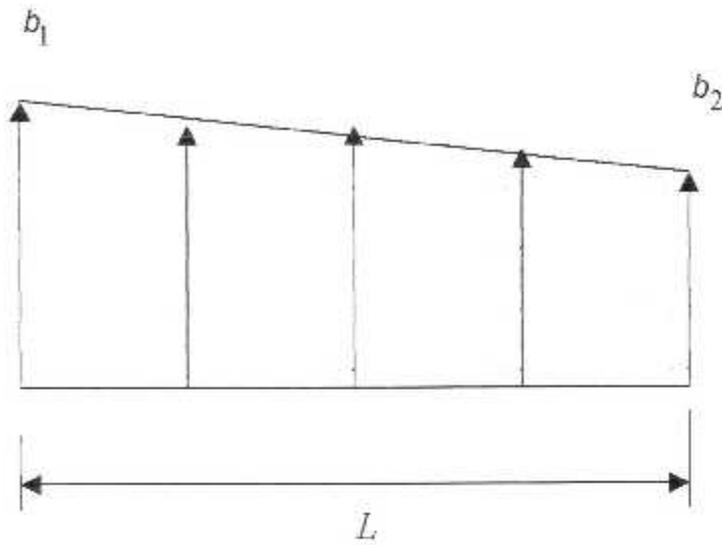
$$[B]^t [B] = \frac{y^2}{4L^{10}} \begin{Bmatrix} 46L^3 - 396L^2x + 816Lx^2 - 480x^3 \\ 12L^4 - 72L^3x + 144L^2x^2 - 80Lx^3 \\ 32L^3 + 192L^2x - 192Lx^2 \\ 16L^4 - 192L^3x + 480L^2x^2 - 320Lx^3 \\ -14L^3 + 204L^2 - 624Lx^2 + 480x^3 \\ 2L^4 - 30L^3x + 96L^2x^2 - 80Lx^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 46L^3 - 396L^2x + 816Lx^2 - 480x^3 \\ 12L^4 - 72L^3x + 144L^2x^2 - 80Lx^3 \\ -32L^3 + 192L^2x - 192Lx^2 \\ 16L^4 - 192L^3x + 480L^2x^2 - 320Lx^3 \\ -14L^3 + 204L^2 - 624Lx^2 + 480x^3 \\ 2L^4 - 30L^3x + 96L^2x^2 - 80Lx^3 \end{Bmatrix}$$

$$[K] = \frac{E \cdot I}{4L^{10}} \cdot \int_0^L [S]_{4 \times 4} \cdot dx$$

après intégration on obtient:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{5092}{35} & & & & & \\ \frac{1138}{35} L & \frac{332}{35} L^2 & & & & \\ -\frac{512}{5} & -\frac{128}{5} L & \frac{1024}{5} & & & \\ \frac{384}{7} L & \frac{64}{7} L^2 & 0 & \frac{256}{7} L^2 & & \\ -\frac{1508}{35} & -\frac{242}{35} L & -\frac{512}{5} & -\frac{384}{7} L & \frac{5092}{35} & \\ \frac{242}{35} L & \frac{38}{35} L^2 & \frac{128}{5} L & \frac{64}{7} L^2 & -\frac{1138}{35} L & \frac{332}{35} L^2 \end{vmatrix}$$

III-6 CALCULE DE VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE {P}



$$b(x) = \frac{b_2 - b_1}{L} x + b_1$$



III-6-1 Calcule de vecteur charge élémentaire pour un élément de poutre travaillons en flexion type HERMITE

III-6-1-1 Deux degres de liberte deux nœuds

$$P = \int_0^L F^t b(x) dx$$

$$\Rightarrow P = \int_0^L F^t \left( \frac{b_2 - b_1}{L} x + b_1 \right) dx$$

avec

$$F^t = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2L + L^3 \\ x^3L - 2x^2L^2 + xL^3 \\ -2x^3 + 3x^2L \\ x^3L - x^2L^2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{b_2 - b_1}{L^4} \int_0^L \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2L + L^3 \\ x^3L - 2x^2L^2 - xL^3 \\ -2x^3 - 3x^2L \\ x^3L \quad x^2L^2 \end{bmatrix} dx + \frac{b_1}{L^3} \int_0^L \begin{bmatrix} 2x^3 - 3x^2L + L^3 \\ x^3L \quad 2x^2L^2 + xL^3 \\ -2x^3 - 3x^2L \\ x^3L - x^2L^2 \end{bmatrix} dx$$

$$P = \frac{b_2}{60} \begin{bmatrix} 9L^2 \\ 21L \\ -3L^2 \end{bmatrix} + \frac{b_1}{60} \begin{bmatrix} 21L \\ 3L^2 \\ -2L^2 \end{bmatrix}$$

### III-6-1-2 Six degrés de liberté deux nœuds

$$P = \int_0^L F^t b(x) dx$$

$$\Rightarrow P = \int_0^L F^t \left( \frac{b_2 - b_1}{L} x + b_1 \right) dx$$

avec

$$F^t = \frac{1}{2L^5} \cdot \begin{Bmatrix} 2L^5 - 20L^2x^3 + 30Lx^4 - 12x^5 \\ 2L^5x - 12L^3x^3 + 16L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^5x^2 - 3L^4x^3 + 3L^3x^4 - L^2x^5 \\ 20L^2x^3 - 30Lx^4 + 12x^5 \\ -8L^3x^3 + 14L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^4x^3 - 2L^3x^4 - L^2x^5 \end{Bmatrix}$$

$$P = \frac{b_2 - b_1}{2L^6} \int_0^L \begin{bmatrix} 2L^5 - 20L^2x^3 + 30Lx^4 - 12x^5 \\ 2L^5x - 12L^3x^3 + 16L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^5x^2 - 3L^4x^3 + 3L^3x^3 - L^2x^5 \\ 20L^2x^3 - 30Lx^4 + 12x^5 \\ -8L^3x^3 + 14L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^4x^3 - 2L^3x^4 + L^2x^5 \end{bmatrix} dx + \frac{b_1}{2L^5} \int_0^L \begin{bmatrix} 2L^5 - 20L^2x^3 + 30Lx^4 - 12x^5 \\ 2L^5x - 12L^3x^3 + 16L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^5x^2 - 3L^4x^3 + 3L^3x^3 - L^2x^5 \\ 20L^2x^3 - 30Lx^4 + 12x^5 \\ -8L^3x^3 + 14L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^4x^3 - 2L^3x^4 + L^2x^5 \end{bmatrix} dx$$

$$P = \frac{b_2}{840} \begin{bmatrix} 120L \\ 32L^2 \\ 3L^3 \\ 300L \\ -52L^2 \\ 4L^3 \end{bmatrix} + \frac{b_1}{840} \begin{bmatrix} 300L \\ 52L^2 \\ 4L^3 \\ 120L \\ -32L^2 \\ 3L^3 \end{bmatrix}$$

**III-6-2 Calcule de vecteur charge élémentaire pour un élément de poutre travaillons en flexion type LAGRANGE**

**III-6-2-1 Six degrés de liberté trois nœuds**

$$P = \int_0^L F^t b(x) dx$$

$$\rightarrow P = \int_0^L F^t \left( \frac{b_2 - b_1}{L} x + b_1 \right) dx$$

avec

$$F^t = \frac{1}{L^5} \cdot \begin{bmatrix} L^5 - 23L^3x^2 + 66L^2x^3 - 68Lx^4 + 24x^5 \\ L^5x - 6L^4x^2 + 13L^3x^3 - 12L^2x^4 + 4Lx^5 \\ 16L^3x^2 - 32L^2x^3 + 16Lx^4 \\ -8L^4x^2 + 32L^3x^3 - 40L^2x^4 + 16Lx^5 \\ 7L^3x^2 - 34L^2x^3 + 52Lx^4 - 24x^5 \\ -L^4x^2 + 5L^3x^3 - 8L^2x^4 + 4Lx^5 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{b_2 - b_1}{L^6} \int_0^L \begin{bmatrix} L^5 - 23L^3x^2 + 66L^2x^3 - 68Lx^4 + 24x^5 \\ L^5x - 6L^4x^2 + 13L^3x^3 - 12L^2x^4 + 4Lx^5 \\ 16L^3x^2 - 32L^2x^3 + 16Lx^4 \\ -8L^4x^2 + 32L^3x^3 - 40L^2x^4 + 16Lx^5 \\ 7L^3x^2 - 34L^2x^3 + 52Lx^4 - 24x^5 \\ -L^4x^2 + 5L^3x^3 - 8L^2x^4 + 4Lx^5 \end{bmatrix} dx + \frac{b_1}{L^5} \int_0^L \begin{bmatrix} L^5 - 23L^3x^2 + 66L^2x^3 - 68Lx^4 + 24x^5 \\ L^5x - 6L^4x^2 + 13L^3x^3 - 12L^2x^4 + 4Lx^5 \\ 16L^3x^2 - 32L^2x^3 + 16Lx^4 \\ -8L^4x^2 + 32L^3x^3 - 40L^2x^4 + 16Lx^5 \\ 7L^3x^2 - 34L^2x^3 + 52Lx^4 - 24x^5 \\ -L^4x^2 + 5L^3x^3 - 8L^2x^4 + 4Lx^5 \end{bmatrix} dx$$

$$P = \frac{b_2}{420} \begin{bmatrix} 19L \\ 2L^2 \\ 112L \\ 8L^2 \\ 79L \\ -5L^2 \end{bmatrix} + \frac{b_1}{420} \begin{bmatrix} 79L \\ 5L^2 \\ 112L \\ -8L^2 \\ 19L \\ -2L^2 \end{bmatrix}$$

## IV- ASSEMBLAGE ET RESOLUTION DE SYSTEMES D' EQUATIONS LINEAIRES

### IV-1 LE MAILLAGE DU PROBLEME



Figure(IV-1)

Remarquez que le fait d'avoir utiliser des nœuds aux extrémités de chaque élément présente deux avantages :

1. Le nombre de nœuds est réduit, car il y a des nœuds communs à deux éléments.
2. On assure ainsi une continuité  $C_0$  de la solution approchée : les champs locaux de deux éléments voisins auront la même valeur à leur nœuds commun.

### IV-2 LA DESCRETISATION DU PROBLEME

La figure représente une structure à une dimension assemblée à partir d'éléments constitutifs individuels reliés entre eux aux nœuds numérotés de 1 à n

#### IV-2-1 Assemblage des matrices de rigidités des éléments

Après avoir établi les matrices de rigidité élémentaire de tous les éléments, il est nécessaire de les assembler afin d'obtenir la matrice de rigidité de la structure complète.

Le principe est basé sur le fait que pour un nœud obtenu par assemblage de deux nœuds a deux éléments adjacents, la force est égale à la somme des forces des deux nœuds et ces déplacements sont identiques à ceux de chaque nœud composant l'ensemble.

pour être en mesure d'obtenir la solution, les deux conditions :

- *De compatibilité des déplacement, et*
- *D'équilibre*

Doivent être satisfaites en tous point.  
Tous les systèmes de déplacements nodaux

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \theta_n \end{Bmatrix}$$

écrits maintenant pour la structure entière avec la participation de tous les éléments, vérifient automatiquement la première condition.

Comme les conditions d'équilibre global ont déjà été satisfaites à l'intérieur d'un élément, ce qu'il reste à faire est d'établir les conditions d'équilibre aux nœuds de la structure.. les équations qui en résultent contiennent les déplacements comme inconnues

Une fois celles-ci résolues le problème est déterminé

### IV-3 LES CONDITIONS AUX LIMITES

Il suffit de reporter les valeurs imposées des déplacements et des moments dans l'encastrement dans le système d'équation pour pouvoir le résoudre. Dans l'exemple de la figure où les composantes de déplacement et de moment de nœud 1 sont toutes les deux nulles, revient à remplacer  $q_1$  et  $\theta_1$  par 0

Ce qui équivaut à réduire le nombre d'équations d'équilibre en supprimant les deux premières, et réduire ainsi le nombre total des composantes de déplacements inconnues. Il est néanmoins toujours pratique d'assembler les équations comme cela est fait de manière à inclure tous les nœuds.

Il est clair que, sans la substitution d'un nombre minimal de déplacements imposés de manière à empêcher le mouvement de corps solide de la structure, le système est impossible à résoudre car dans une telle situation les déplacements ne sont pas déterminés de façon unique par les forces. Cette évidence physique s'interprète mathématiquement par le fait que la matrice  $\mathbf{K}$  est singulière, c'est à dire qu'elle n'a pas d'inverse, le fait d'imposer les déplacements appropriés après la phase d'assemblage permet d'obtenir une solution unique par *suppression des lignes et des colonnes appropriées dans les diverses matrices*

## IV.4 RESOLUTION DE SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

### IV.4.1. Introduction :

La résolution du système d'équation

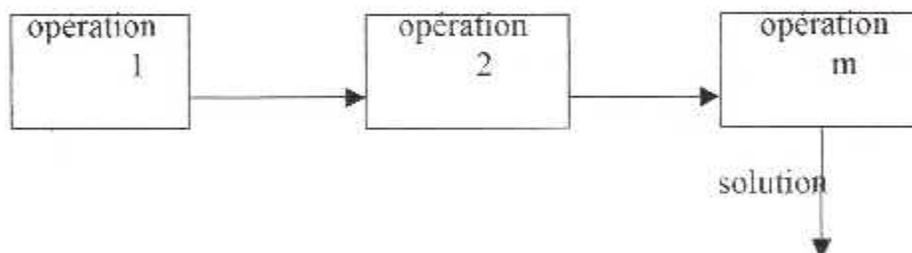
$$[K] \{U_n\} = \{F\}$$

est une étape importante de la méthode des éléments finis. Ce système est linéaire lorsque  $[K]$  ne dépend pas de  $\{U_n\}$ .

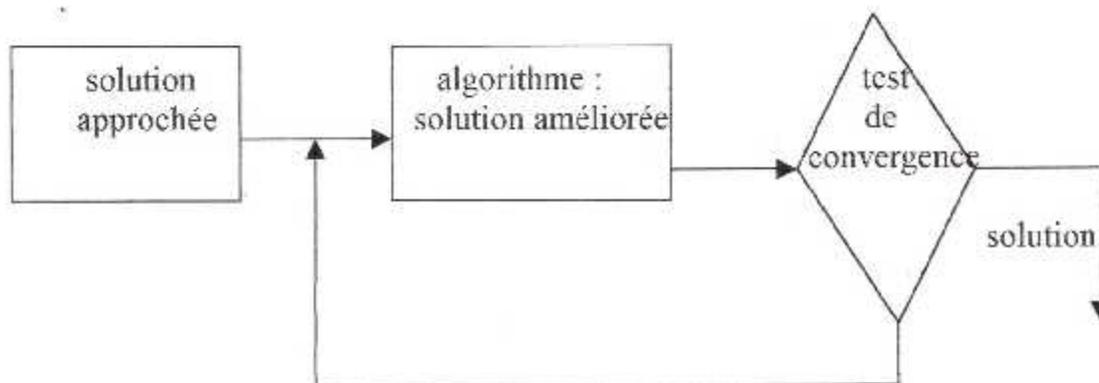
Le nombre  $n$  d'inconnues  $U_n$  est proportionnel au nombre total de nœuds d'interpolation et au nombre de degrés de liberté par nœud. La précision et le champ d'application de la méthode des éléments finis sont limités par la dimension des systèmes d'équation que nous pouvons résoudre économiquement sur les ordinateurs disponibles.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

- a) les méthodes directes qui conduisent en un nombre d'opérations connu a priori :



- b) les méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée. Le nombre d'itérations nécessaire étant à prévoir et dépendant de la structure de la matrice  $[K]$



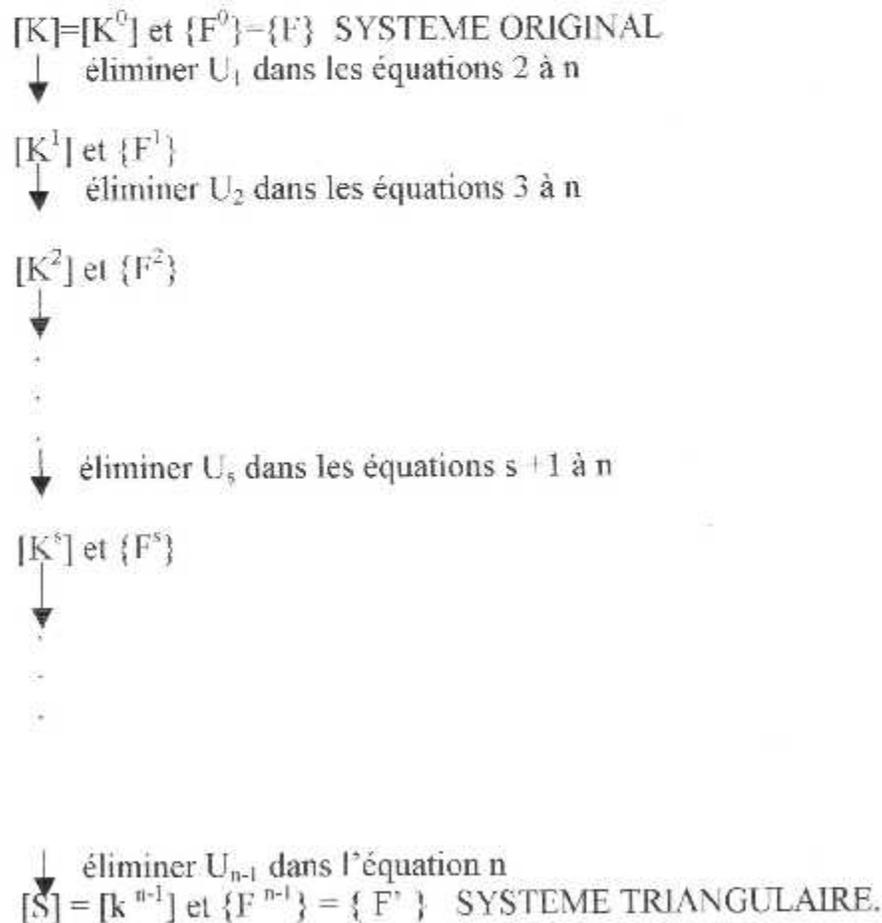


La triangularisation consiste à « éliminer » successivement les inconnues  $U_s, S=1, 2, \dots, n-1$  dans les équations  $S+1$  à  $n$ . L'élimination de  $U_s$  se fait de la manière suivante :

- exprimer  $U_s$  en fonction de  $U_{s+1}, U_{s+2}, \dots, U_n$  et  $F_s$  en utilisant l'équation  $S$
- reporter l'expression de  $U_s$  précédente dans les équations  $S+1, S+2, \dots, n$ .

Après élimination de  $U_s$ , cette inconnue n'apparaît plus dans les équations  $s+1$  à  $n$  ; il y a donc des zéro dans la colonne  $s$  sous la diagonale.

Après élimination des inconnues  $U_1$  à  $U_{n-1}$  la matrice  $[K]$  et  $\{F\}$ . Notons  $[K^s]$  et  $\{F^s\}$  la matrice et le second membre après élimination des inconnues  $1, 2, 3, \dots, s$ , la matrice  $[K^0]$  étant la matrice  $[K]$  initiale :



### IV.4.3. Méthode des éléments finis :

Pour éliminer la variable  $U_1$  du système nous utilisons la première équation sous la forme :

$$U_1 = \frac{1}{K_{11}} (F_1 - K_{12} U_2 - \dots - K_{1n} U_n)$$

Et reportons cette expression de  $U_1$  dans les équations 2, 3, ..... n :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & & \\ 0 & K_{22} - \frac{K_{21} K_{12}}{K_{11}} & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{n2} - \frac{K_{n1} K_{12}}{K_{11}} & \dots & & K_{nn} - \frac{K_{n1} K_{1n}}{K_{11}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 - \frac{K_{21} K_{11}}{K_{11}} \\ \vdots \\ \vdots \\ F_n - \frac{K_{n1} F_1}{K_{11}} \end{Bmatrix}$$

Ce que nous notons :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & & & \\ 0 & K_{22}^1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & K_{n2}^1 & \dots & K_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ K_2^1 \\ \vdots \\ F_n^1 \end{Bmatrix}$$

Où :

$$K_{ij}^1 = K_{ij} - K_{i1} \cdot K_{11}^{-1} \cdot K_{1j} \quad i, j = 2, 3, \dots, n,$$

$$F_i^1 = F_i - K_{i1} \cdot K_{11}^{-1} \cdot F_1$$

après élimination de  $U_1, U_2, \dots, U_{s-1}$ :

$$\begin{pmatrix}
 K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\
 0 & K_{22}^1 & \dots & K_{2n}^1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & K_{sn}^{s-1} \\
 0 & 0 & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & K_{nn}^{s-1}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 \vdots \\
 U_s \\
 \vdots \\
 U_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F_1 \\
 F_2^1 \\
 \vdots \\
 F_s^{s-1} \\
 \vdots \\
 F_n^{s-1}
 \end{pmatrix}$$

$$[K^{s-1}]\{U_s\} = \{F^{s-1}\}.$$

Après élimination de  $U_s$ :

$$[K^s]\{U_n\} = \{F^s\}$$

**IV.4.4. Méthode numérique :**

Les termes modifiés étant :

$$K_{ij}^s = K_{ij}^{s-1} - K_{is}^{s-1} (K_{ss}^{s-1})^{-1} K_{sj}^{s-1} \quad i, j = s + 1, s + 2, \dots, n.$$

$$F_i^s = F_i^{s-1} - K_{is}^{s-1} (K_{ss}^{s-1})^{-1} F_s^{s-1}$$

le système final triangulaire s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
 K_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{1n} \\
 0 & K_{22}^1 & \dots & \dots & \dots & K_{2n}^1 \\
 \vdots & 0 & K_{33}^2 & \dots & \dots & K_{3n}^2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & K_{ss}^{s-1} & \dots & K_{sn}^{s-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & K_{nn}^{s-1}
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 \vdots \\
 U_s \\
 \vdots \\
 U_n
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F_1 \\
 F_2^1 \\
 F_3^2 \\
 \vdots \\
 kllk_s \\
 \vdots \\
 F_n^{s-1}
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & & S \\ & & & \backslash \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ \vdots \\ U_s \\ \vdots \\ U_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^{n-1} \\ \vdots \\ F^s \\ \vdots \\ F^1 \end{Bmatrix}$$

En pratique nous construisons les matrices successives  $[K^1], [K^2], \dots$  dans la matrice originale  $[K]$  l'algorithme est le suivant :

$$\begin{array}{l} S= 1,2,\dots,n-1 \\ \quad i= s+1,s+2,\dots,n \\ \quad \quad c= K_{is}K_{ss}^{-1} \\ \quad \quad F_i=F_i-cF_s \\ \quad \quad \quad j= s+1,s+2,\dots,n \\ \quad \quad \quad \quad K_{ij}=K_{ij}-cK_{sj} \end{array}$$

▪ **Remarque:**

Pour un système symétrique l'indice j varie de i à n . De plus  $K_{ji} = K_{ij}$ .  
 L'algorithme ne fonctionne plus si en cours de triangularisation, le pivot  $K_{ss}$  est nul. Il faut alors échanger la ligne s avec une autre ligne  $i>s$  telle que  $K_{is} \neq 0$ .  
 Dans le cas d'un système symétrique , nous pouvons conserver la symétrie à condition d'échanger également les colonnes i et s, ce qui implique une modification de l'ordre des inconnues ; pour que ceci soit possible il faut que le terme diagonal  $K_{ii}$  soit non nul.  
 Si, lorsque  $K_{ss} = 0$ , tous les termes  $K_{si}$  ( $i>s$ ) ou tous les termes  $K_{is}$  ( $i>s$ ) sont nuls, la matrice K est singulière ; le système ne peut être résolu.  
 Le déterminant de K est le produit des termes diagonaux de la matrice triangularisée [S].

#### IV.4.5. Résolution du système triangulaire supérieur :

La résolution se fait à partir de la dernière équation, en calculant successivement  $U_n, U_{n-1}, \dots, U_1$ , d'où le nom anglais de « back substitution » :

$$\begin{aligned} U_n &= S_{nn}^{-1} F_n \\ U_{n-1} &= S_{n-1, n-1}^{-1} (F_{n-1} - S_{n-1, n} U_n) \\ &\dots \\ U_1 &= S_{11}^{-1} (F_1 - S_{1,2} U_2 - S_{1,3} U_3 - \dots - S_{1,n} U_n). \end{aligned}$$

L'algorithme pratique travaille directement sur les matrices  $[K]$  et  $\{F\}$  modifiées par la triangularisation :

$$\begin{aligned} U_i &= S_{ii}^{-1} F_i \\ i &= n-1, n-2, \dots, 1 \\ U_i &= K_{ii}^{-1} (F_i - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} U_j) \end{aligned}$$

##### IV.4.5.1 Décomposition :

**Introduction :** nous allons reformuler la matrice  $[K]$  en une matrice triangulaire supérieur  $[S]$ . Ceci permettra :

- a) de montrer qu'en fait la méthode de Gauss décompose  $[K]$  sous la forme :

$$[K] = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & & \\ L & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & \\ & 0 \end{bmatrix} = [L][S]$$

Où :  $[L]$  est une matrice triangulaire inférieure à termes diagonaux unités  
 $[S]$  est la matrice triangulaire supérieure obtenue par élimination de Gauss.

- b) de faire séparément les opérations qui portent sur  $[K]$  et  $\{F\}$  pendant l'élimination. Ceci permet, après triangularisation de  $[K]$  de résoudre successivement le système avec plusieurs seconds membres ;

**IV.4.5.2 Forme matricielle de l'élimination de Gauss :**

L'opération d'élimination de l'inconnue  $U_s$  transforme  $[K^{s-1}]$  en  $[K^s]$ , cette transformation s'écrit matriciellement :

$$[K^s] = ([I] + \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & -l_{s+1,s} & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -l_{n,s} & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}) [K^{s-1}] = [I^s] [K^{s-1}]$$

ou:  $[I]$  est la matrice unite

$$l_{is} = K_{is}^{s-1} (K_{ss}^{s-1})^{-1} \quad i = s+1, s+2, \dots, n.$$

La matrice  $[I^s]$  est triangulaire inférieure, ses termes diagonaux sont égaux à 1, et seule colonne « s » n'est pas nulle.

L'élimination des inconnues  $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$  équivaut à appliquer successivement l'opération avec  $s = 1, 2, \dots, n-1$ .

D'où :

$$[K^{n-1}] = \begin{bmatrix} \diagup S \\ 0 \end{bmatrix} = [I^{n-1}][I^{n-2}] \dots [I^1][K]$$

$$\begin{bmatrix} \diagup S \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \diagup 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K] = [I][K]$$

La décomposition de K est obtenue en inversant la matrice triangulaire  $[I]$  définie par :

$$[K] = [I]^{-1}[S] = [I^1]^{-1}[I^2]^{-1} \dots [I^{n-1}]^{-1}[S]$$

$$= [L^1][L^2] \dots [L^{n-1}][S] = \begin{bmatrix} \diagup S \\ L \end{bmatrix} = [S]$$

$$= [L][S].$$





```

C   Nom :
C   PIVOTE
C   Fonctionalite :
C   Procedure de permettant d'effectuer le pivot akr
C   l'etape i
C   Entree(s) :
C   h : etape du pivot
C   akr : matrice carree
C   mr : dimension de akr
C   pr : matrice / vecteur
C   o : nombre de colonnes de pr
C
C   Sortie(s) :
C   akr : matrice
C   pr : matrice / vecteur
C
SUBROUTINE PIVOTE (h, akr, mr, pr, o)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION akr(5000, 5000), pr(5000, 5000)
  INTEGER i, j, mr, o, h
  DOUBLE PRECISION piv, t
  piv = akr(h, h)
  DO 700 i=h+1, mr
    t = akr(i, h)
    akr(i, h) = 0
C
C   Boucle de pivot de akr
C
    DO 700 j=h+1, mr
      akr(i, j) = akr(i, j) - akr(h, j)*t/piv
700 CONTINUE
C
C   Boucle de pivot de akr
C
    DO 710 j=1, o
      pr(i, j) = pr(i, j) - pr(h, j)*t/piv
710 CONTINUE
720 CONTINUE
  RETURN
  END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   Nom :
C   TRIANG
C
C   Fonctionalite :
C   Procedure de resolution d'un systeme triangulaire
C
C   Entree(s) :
C   akr : matrice triangulaire
C   mr : dimension de akr
C   pr : matrice / vecteur
C   n : nombre de colonnes de pr
C
C   Sortie(s) :
C   X : matrice / vecteur
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE TRIANG (akr, mr, pr, n, X)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION akr(5000, 5000), pr(5000, 5000), X(5000, 5000)
  INTEGER mr, n, i, j, k
  DOUBLE PRECISION t
  DO 820 k=1, n
    X(mr, k) = pr(mr, k) / akr(mr, mr)
    DO 810 i=mr-1, 1, -1

```

```
t=0
DO 800 j=i-1, mr
  t = t + X(j, k) * akr(i, j)
800 CONTINUE
  X(i, k) = (pr(i, k) - t) / akr(i, i)
810 CONTINUE
820 CONTINUE
  RETURN
  END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  Nom :
C  DUTLIQ
C
C  Fonctionallite :
C  Procedure de duplication matricielle / vectorielle
C
C  Entree(s) :
C  akr : matrice / vecteur
C  mr, n : dimension
C
C  Sortie(s) :
C  pr : matrice / vecteur
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE DUTLIQ(akr, mr, n, pr)
  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
  DOUBLE PRECISION akr(5000,5000), pr(5000,5000)
  INTEGER mr, n, i, j
  DO 510 i=1, mr
    DO 500 j=1, n
      pr(i, j) = akr(i, j)
500 CONTINUE
510 CONTINUE
  RETURN
  END
```

## CHAPITRE V

# RESULTATS ET INTERPRETATIONS

- INTRODUCTION
- CHARGE REPARTIE UNIFORME
- APPLICATION AVEC DEFFERENTS TYPE DE CHARGEMENTS (CHARGE REPARTIE NON UNIFORME)

## V- RESULTATS ET INTERPRETATION

### V-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre on s'intéresse principalement à la validation des résultats fournis par les trois éléments finis, et faire des applications sur différents type de chargement

Devant cette situation, nous devant opté pour des validations vérifiant une phase ou une autre des processus de calcul.

1. faire une comparaison entre les résultats des programmes des trois types d'élément finis (4 ddl deux nœuds, 6ddl deus nœuds, 6 ddl trois nœuds )avec le résultat exacte
2. voir ce que représente la dérivé de moment a l'encastrement (pour l'élément type Hermite haute précision 6 ddl deux nœuds)
3. faire une comparaison entre les trois éléments du point de vue précision, rapidité de convergence et temps d'exécution.
4. Verification des densité de charge réparties par intégration analytique et confrontation avec les formulations de la méthode des éléments finis .

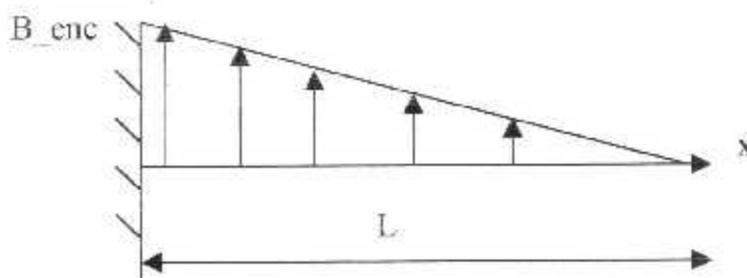
### V-2 CHARGE REPARTIE UNIFORME

#### V-2-1 CONFRONTATION A DES RESULTATS ANALYTYQUES

Il est intéressant de comparer les résultats avec les équations de la théorie exacte des poutres qu'on trouve dans tous les traités classiques de résistance des matériaux

- **POUTRE ENCASTREE AVEC CHARGE REPARTIE TRIANGULAIRE**

L'exemple de vérification porte sur l'évaluation de flèche à chaque point d'une poutre cet exemple est tiré de la référence



Il s'agit d'une poutre déformable encastree avec une charge repartie triangulaire  
 Les caracteristiques geometriques et mecaniques de la poutre sont :

Longueur :  $L=1$

Chargement  $b$  a l'encastrement :  $b_{enc}=1$

Module de young :  $E=1$

Moment d'inertie:  $I=1$

• **Les donnees du programme**

Les caracteristiques geometriques et mecaniques de la poutre.

NE :=nombre d'element maillage

B(xx) :=La fonction de chargement (dans ce cas  $b(XX)=b_{enc}*ALPOUTRE(1-XX/ALPOUTRE)$ )

• **Calcul avec l'element 4ddl deux noeuds**

Avec :

Solution exacte =3.333333333333333E-002

Conditions au limites au bout libre :

$V1=0$

$\Theta1=0$

NE Y(FLECHE AU BOUT LIBRE) SOLUTION EXACT E ERREUR EXACTE %

1	3.333333333333333E-002	3.333333333333333E-002	0.000000000000000E+000%
2	3.333333333333332E-002	3.333333333333333E-002	4.163336342344337E-016%
5	3.3333333333333693E-002	3.333333333333333E-002	1.080385780838356E-013%
10	3.3333333333337598E-002	3.333333333333333E-002	1.279393258002415E-012%
15	3.3333333333340306E-002	3.333333333333333E-002	2.091868345210912E-012%
20	3.3333333333379814E-002	3.333333333333333E-002	1.394405424459677E-011%
30	3.333333333276863E-002	3.333333333333333E-002	1.694103191063334E-011%
50	3.333333333471157E-002	3.333333333333333E-002	4.134713404990720E-011%
80	3.333333346895437E-002	3.333333333333333E-002	4.068631057063676E-009%
100	3.333333330748210E-002	3.333333333333333E-002	7.755369263451328E-010%
120	3.333333342759367E-002	3.333333333333333E-002	2.827810069438996E-009%
130	3.333333259839599E-002	3.333333333333333E-002	2.204812041273208E-008%
150	3.333333442713347E-002	3.333333333333333E-002	3.281400401400347E-008%
180	3.333333388569510E-002	3.333333333333333E-002	1.657085302309014E-008%
200	3.333333414766723E-002	3.333333333333333E-002	2.443001675955792E-008%
230	3.333333378393206E-002	3.333333333333333E-002	1.351796174997588E-008%
250	3.33333309726482E-002	3.333333333333333E-002	7.082055358820227E-009%
350	3.333333364670185E-002	3.333333333333333E-002	9.401055559021820E-009%
400	3.333334204447525E-002	3.333333333333333E-002	2.613342575674693E-007%

• **Calcul avec l'element 6ddl deux noeuds**

Avec :

Solution exacte =3.333333333333333E-002

Conditions au limites au bout libre :

elles representent deux cas :

a)  $V1=0$

$\Theta1=0$

$\alpha=0$

- b)  $V1=0$
- $\Theta1=0$
- $\alpha \neq 0$

- pour le premier cas  $V1=0$
- $\Theta1=0$
- $\alpha=0$

	NE Y(FLECHE AU BOUT LIBRE)	SOLUTION EXACT	ERREUR EXACTE %
1	3.33333333333333E-002	3.33333333333333E-002	3.12500000000000E-001%
2	2.795698924731177E-002	3.33333333333333E-002	1.612903225806470E-001%
5	3.118167592347686E-002	3.33333333333333E-002	6.454972229569429E-002%
10	3.225750462601881E-002	3.33333333333333E-002	3.227486121943561E-002%
15	3.261611419521604E-002	3.33333333333333E-002	2.151657414351881E-002%
20	3.279541897916718E-002	3.33333333333333E-002	1.613743062498466E-002%
30	3.297472376452060E-002	3.33333333333333E-002	1.075828706438207E-002%
50	3.311816758245476E-002	3.33333333333333E-002	6.454972526357336E-003%
80	3.319885461008707E-002	3.33333333333333E-002	4.034361697387856E-003%
100	3.322575050738064E-002	3.33333333333333E-002	3.227484778580703E-003%
120	3.324368106109685E-002	3.33333333333333E-002	2.689568167094578E-003%
130	3.325057838286886E-002	3.33333333333333E-002	2.482648513934260E-003%
150	3.326161145630333E-002	3.33333333333333E-002	2.151656310900238E-003%
180	3.327356659639046E-002	3.33333333333333E-002	1.793002108286326E-003%
200	3.327954196844913E-002	3.33333333333333E-002	1.613740946526110E-003%
230	3.328654915462732E-002	3.33333333333333E-002	1.403525361180283E-003%
250	3.329029506288424E-002	3.33333333333333E-002	1.291148113472668E-003%
350	3.330259719101977E-002	3.33333333333333E-002	9.220842694070142E-004%
400	3.330643849433272E-002	3.33333333333333E-002	8.068451700183471E-004%

- pour le deuxieme cas  $V1=0$
- $\Theta1=0$
- $\alpha \neq 0$

	NE Y(FLECHE AU BOUT LIBRE)	SOLUTION EXACTE	ERREUR EXACTE %
1	3.33333333333333E-002	3.33333333333333E-002	0.00000000000000E+000%
2	3.33333333333324E-002	3.33333333333333E-002	2.706168622523819E-015%
5	3.333333333333064E-002	3.33333333333333E-002	8.076872504148014E-014%
10	3.3333333333329159E-002	3.33333333333333E-002	1.252331571777177E-012%
15	3.333333333324939E-002	3.33333333333333E-002	2.518402153484090E-012%
20	3.333333333300515E-002	3.33333333333333E-002	9.845457782375888E-012%
30	3.333333333419785E-002	3.33333333333333E-002	2.593550374463405E-011%
50	3.333333332681669E-002	3.33333333333333E-002	1.954992417951829E-010%
80	3.333333320049127E-002	3.33333333333333E-002	3.985261912142768E-009%
100	3.333333318672320E-002	3.33333333333333E-002	4.398304012664944E-009%
120	3.333333362150763E-002	3.33333333333333E-002	8.645228907755431E-009%
130	3.333333421293427E-002	3.33333333333333E-002	2.638802822085840E-008%
150	3.33333327351661E-002	3.33333333333333E-002	1.794501838792151E-009%
180	3.333333482546456E-002	3.33333333333333E-002	4.476393672403489E-008%
200	3.333333304235382E-002	3.33333333333333E-002	8.729385339578677E-009%
230	3.333332468785274E-002	3.33333333333333E-002	2.593644178594534E-007%

250	3.333333010629358E-002	3.333333333333333E-002	9.681119260418480E-008%
350	3.333333352895468E-002	3.333333333333333E-002	5.868640365336297E-009%
400	3.333333512332688E-002	3.333333333333333E-002	5.369980647651484E-008%

• Calcul avec l'élément 6ddl trois nœuds

Avec :

Solution exacte =3.333333333333333E-002

Conditions au limites au bout libre :

V1=0

Θ1=0

	NE	Y(FLECHE AU BOUT LIBRE)	SOLUTION EXACT	E ERREUR EXACTE %
1	3.333333333333333E-002	3.333333333333333E-002	4.579669976578771E-015%	
2	8.341585725396472E-003	3.333333333333333E-002	7.497524282381058E-001%	
5	4.651289802285752E-003	3.333333333333333E-002	8.604613059314274E-001%	
10	1.553164135276811E-003	3.333333333333333E-002	9.534050759416956E-001%	
15	2.911514058769395E-004	3.333333333333333E-002	9.912654578236918E-001%	
20	1.039199152923959E-004	3.333333333333333E-002	9.968824025412281E-001%	
30	1.819696703985889E-004	3.333333333333333E-002	9.915409098880423E-001%	
50	3.750915743809280E-004	3.333333333333333E-002	9.887472527685722E-001%	
80	2.635198139192907E-004	3.333333333333333E-002	9.920944055824214E-001%	
100	1.450973510135256E-005	3.333333333333333E-002	9.995647079469595E-001%	
120	6.415826622210505E-006	3.333333333333333E-002	9.998075252013337E-001%	
130	1.457836923623656E-006	3.333333333333333E-002	9.999562648922913E-001%	
150	2.453603610196589E-006	3.333333333333333E-002	9.999263918916941E-001%	

V-2-2 EXAMEN DES RESULTATS

Nous remarquons que :

- dans le cas présent (la charge repartie uniforme) l'approximation par éléments finis conduit à la solution exacte avec un nombre d'élément NE=1 pour les trois types d'éléments finis
  - Hermite 4 ddl 2 nœuds avec déplacement et moment égale a zéro a l'encastrement.
  - Hermite 6ddl 2 nœuds avec déplacement et moment égale a zéro et dérive de moment égale pas a zéro a l'encastrement
  - Lagrange 6ddl 3 nœuds avec déplacement et moment égale à zéro a l'encastrement.

La raison en étant que les polynômes d'interpolation des trois type d'élément(polynôme de troisième degré, polynôme de cinquième degré, polynôme de cinquième degré)est en mesure de la représenter si le chargement est uniforme.

Si les chargements repartis sont d'une autre manière, il est facile de montrer que la différence entre la solution approchée et la solution exacte diminue au fur et à mesure que la longueur des éléments tend vers zéro.

- A un nombre d'élément NE=400 :
  - l'élément type Hermite 4ddl deux nœuds a converger vers la solution exacte avec un pourcentage d'erreur exacte err=2.613342575674693E-007% ;
  - l'élément type Hermite 6ddl deux nœuds a converger vers la solution exacte avec un pourcentage d'erreur err= 5.369980647651484E-008%

- l'élément type Lagrange diverge on augmentant le nombre des nœuds

**V-2-3 POSTE DE TRAITEMENT**

On peut alors construire la solution approchée a partir de valeurs trouvées aux nœuds et en déduire la flèche entre les nœuds.

D'après la relation :  $v(x) = [F(X)] \cdot \{q\}$  (chapitre 3)

On peut trouver les valeurs de la flèche entre les nœuds

La solution exacte est donnée par l'équation suivante

$$EIY(x) = \frac{b\_enc(alpoutre - x)^3}{120alpoutre} - \frac{b\_enc * alpoutre^3(alpoutre - x)}{24} + \frac{b\_enc * alpoutre^4}{30}$$

**1-Avec NE=1**

- *Elément type Hermite 4ddl deux nœuds*

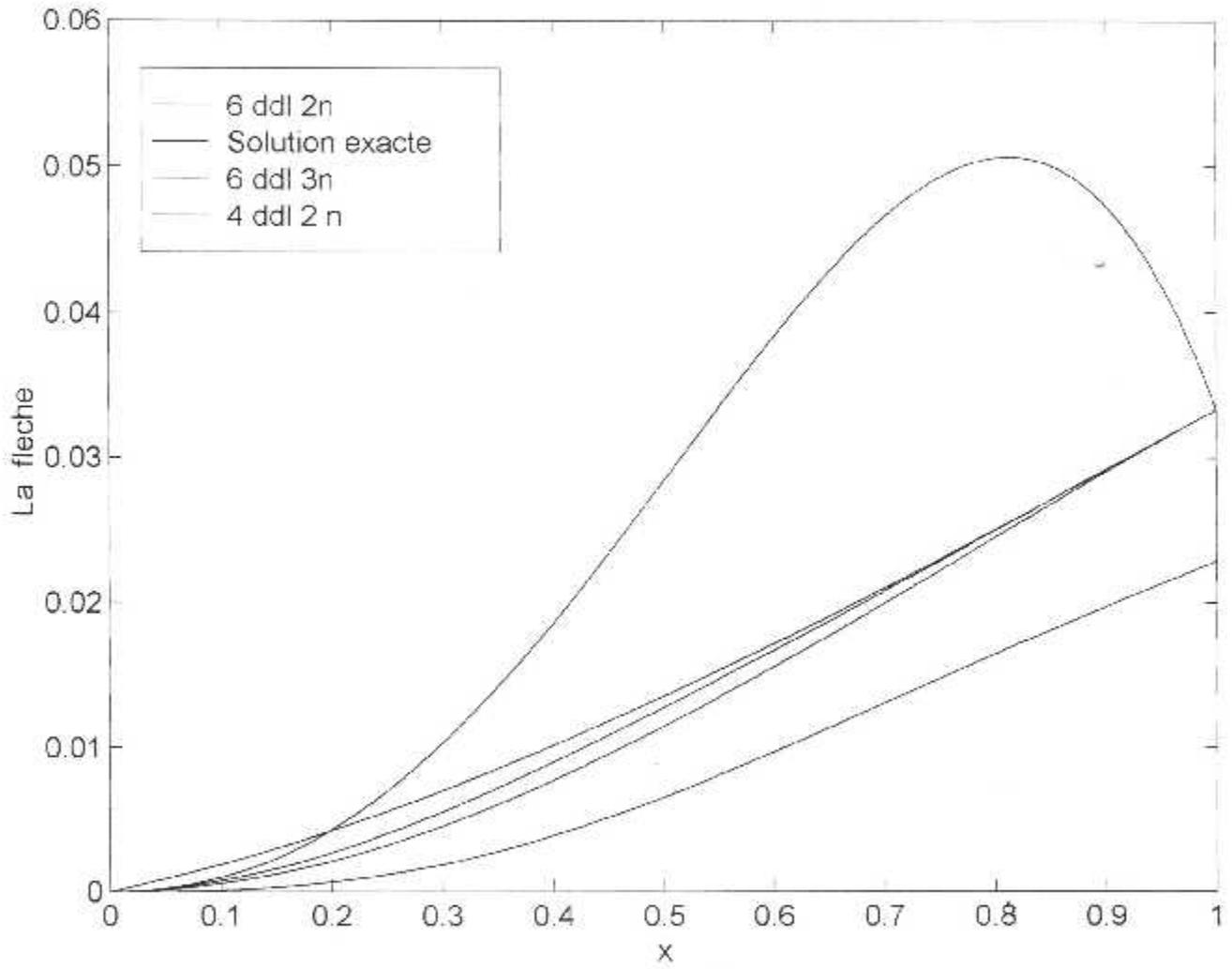
$$V(x) = \frac{1}{l^3} \cdot \left\{ 2x^3 - 3x^2 \cdot l + l^3, x^3 \cdot l - 2x^2 \cdot l^2 + x \cdot l^3, -2x^3 + 3x^2 \cdot l, x^3 \cdot l - x^2 \cdot l^2 \right\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.3333E-2 \\ 4.1666E-2 \end{Bmatrix}$$

- *Elément type Hermite 6ddl deux nœuds*

$$V(x) = \frac{1}{2L^5} \cdot \begin{Bmatrix} 2L^5 - 20L^2x^3 + 30Lx^4 - 12x^5 \\ 2L^3x - 12L^3x^3 - 16L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^5x^2 - 3L^4x^3 + 3L^3x^3 - L^2x^5 \\ 20L^2x^3 - 30Lx^4 + 12x^5 \\ -8L^3x^3 + 14L^2x^4 - 6Lx^5 \\ L^4x^3 - 2L^3x^4 + L^2x^5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6666E-1 \\ 3.3333E-2 \\ 4.1666E-2 \\ -6.9388E-18 \end{Bmatrix}$$

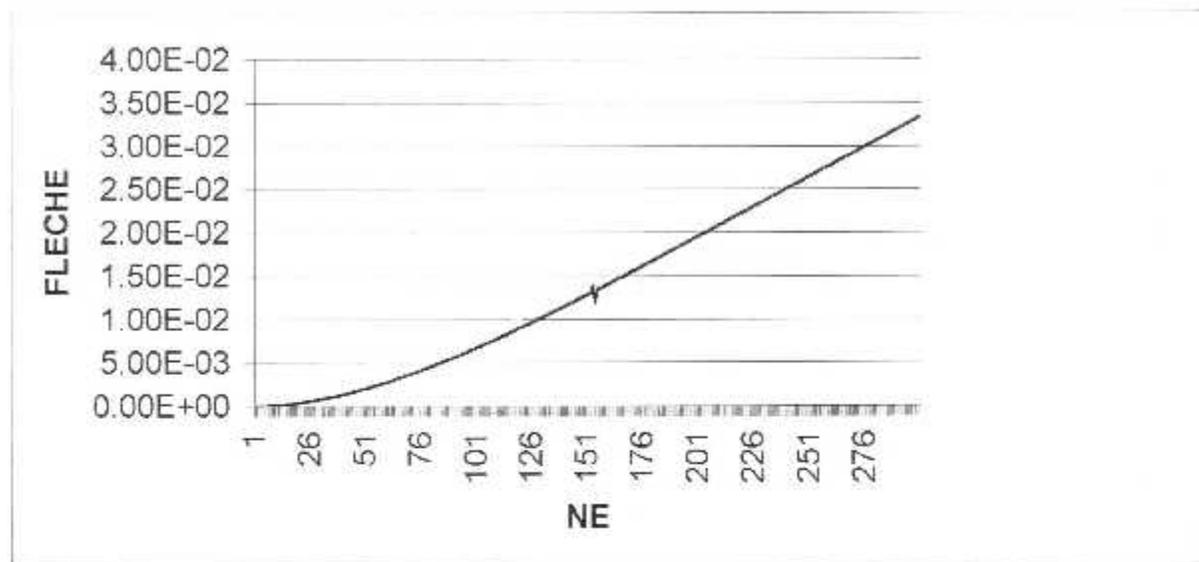
**Elément type LAGRANGE 6ddl trois nœuds**

$$V(x) = \frac{1}{L^5} \cdot \begin{Bmatrix} L^5 - 23L^3x^2 - 66L^2x^3 - 68Lx^4 + 24x^5 \\ L^5x - 6L^4x^2 + 13L^3x^3 - 12L^2x^4 + 4Lx^5 \\ 16L^3x^2 - 32L^2x^3 + 16Lx^4 \\ -8L^4x^2 + 32L^3x^3 - 40L^2x^4 + 16Lx^5 \\ 7L^3x^2 - 34L^2x^3 + 52Lx^4 - 24x^5 \\ -L^4x^2 + 5L^3x^3 - 8L^2x^4 + 4Lx^5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.2760E-2 \\ 3.9062E-2 \\ 3.3333E-2 \\ 4.1666E-2 \end{Bmatrix}$$



Figure(V-1) : graphe de la fleche pour les trois éléments(NF,-1)

## 1-Avec NE=200



Figure(V-2) : graphe de la flèche pour les trois éléments(NE=200)

## V-2-4 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons validé les trois programmes mis au point pour calculer la flexion des poutres

(programme avec un élément type Hermite 4 degrés de libertés 2 nœuds ;  
 programme avec élément type Hermite haute précision 6ddl 2 nœuds ;  
 programme avec l'élément type Lagrange haute précision 6ddl 3 nœud.)

- les trois modèles développés (élément finis type Hermite 4ddl2n,6ddl2n, élément finis type Lagrange 6ddl3n) sont bons, aussi bien dans sa formulation théorique qu'au point de vue précision numérique ; ceci bien entendu dans les limites des validations entreprises.
- Les résultats des programmes obtenus constituent des prévisions fidèles des solutions exactes du problème,
- Une représentation approchée des déplacements au moyen de l'expression  $v(x) = [F(X)] \cdot \{q\}$  conduisait à la limite à la solution exacte lorsque la taille des éléments diminuait.

Le raisonnement correspondant est en effet très simple : puisque le développement est capable, à la limite, de reproduire exactement n'importe quelle fonction de

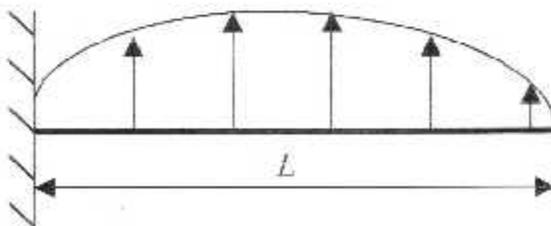
déplacement susceptible de se concevoir à l'intérieur du milieu continu, alors la solution doit à limite, lorsque la taille des éléments tend vers zéro, tendre vers la solution exacte et unique car la solution correspondant à chaque approximation est unique.

- Il existe des cas où la solution exacte est bien obtenue à l'issue d'un nombre seulement fini de subdivisions, ou même dans les cas extrêmes, avec un seul élément comme il est le cas dans les chargements uniformes, du moment que le développement polynomial utilisé dans cet élément peut s'adapter exactement à la solution cherchée c'est le cas pour le chargement réparti triangulaire le développement polynomial de l'élément type Lagrange s'adapte exactement avec la solution cherchée (figure V.1) par contre la solution diverge relativement par rapport à la qualité de précision de l'élément type Hermite 6ddl  $2n$  à fur et à mesure qu'on augmente le nombre des nœuds.
- Même l'élément type Hermite 4ddl  $2n$  à un nombre d'éléments un peu grand relativement le résultat donne une erreur exacte élevée par rapport à l'élément type Hermite 6ddl  $2n$ .
- dans le cas des chargements uniformes l'erreur de discrétisation  $\neq 0$  puisque le vecteur charge élémentaire est un trapèze (peut être représenté avec un seul élément)

### V-3 APPLICATION AVEC DIFFERENTS TYPES DE CHARGEMENTS(CHARGE REPARTIE NON UNIFORME)

Dans ce cas, on ne peut pas avoir la solution exacte, donc tant le nombre d'éléments augmente tant l'erreur de discrétisation diminue, ce qui conduira à une haute qualité de précision.

#### POUTRE ENCASTREE AVEC CHARGE REPARTIE DEMI CIRCULAIRE



Il s'agit d'une poutre déformable encastree avec une charge réparti demi circulaire  
Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre est :

Longueur :  $L=1$

Chargement  $b$  à l'encastrement :  $b_{enc}=1$

Module de young :  $E=1$

Moment d'inertie:  $I=1$

- **Les données de programme**

Les caractéristiques géométriques et mécaniques de la poutre.

NE :=nombre d'élément maillage

B(xx) :=La fonction de chargement (dans ce cas  $b(XX)=DSIN(PI*XX/ALPOUTRE)$ )

- **Etape d'exécution :**

1. varier le nombre d'éléments NE de 1 a 550
2. représenter le graphe d'évolution de la flèche au bout libre en fonction de nombre d'élément NE :
3. graphe de l'évolution de la flèche pour chaque nœuds(poste de traitement)

- **Calcul avec l'élément 4ddl deux nœuds**

NE    Y(flèche au bout libre)

2	5.729166115721000E-002
5	7.138541978023542E-002
10	7.324204418670362E-002
15	7.358134134698884E-002
20	7.369975957309043E-002
30	7.378423728847357E-002
50	7.382745541273827E-002
80	7.384226379519422E-002
100	7.384568075830436E-002
120	7.384753779428140E-002
130	7.384816310047265E-002
150	7.384905560879666E-002
180	7.384988391413501E-002
200	7.385023621441951E-002
230	7.385058820097870E-002
250	7.385077644263992E-002
300	7.385108859276078E-002

- **Calcul avec l'élément 6ddl deux nœuds**

NE    Y(flèche au bout libre)

2	5.729166115721016E-002
5	7.138541978024898E-002
10	7.324204418688753E-002
15	7.358134134732525E-002
20	7.369975957482429E-002
30	7.378423728532220E-002
50	7.382745543011852E-002
80	7.384226438424828E-002
100	7.384568102318796E-002
120	7.384753737136877E-002
130	7.384815956320566E-002
150	7.384905814645065E-002
180	7.384988186014901E-002
200	7.385023865207006E-002
230	7.385060816197658E-002
250	7.385078300810413E-002
300	7.385111925975159E-002

**poste de traitement**

le but de poste c'est de faire un graphc de l'évolution de la flèche non seulement au nœuds mais entre les nœuds aussi

POUTRE ENCASTRE(charge repartie demi circulaire)

ELEMENT FINIS 2 NOEUDS 6 DEGRES DE LIBERTE

LONGUEUR DE LA POUTRE= 1.000000000000000  
 MODULE DE YOUNG= 1.000000000000000  
 MOMENT DINERTIE= 1.000000000000000  
 NOMBRE DELEMENT 300  
 NOMBRE DE NOEUD 301  
 RAND AK AVANT INTRODUIRE LES CL 903

Derive de moment	la fleche	rotation
2.945963711302686E-006	1.470109349381647E-006	8.812403727579285E-004
2.927755263291764E-006	5.867862531350227E-006	1.756586344539948E-003
2.907987093985079E-006	1.317361227409001E-005	2.626038399733359E-003
2.888352062338868E-006	2.336771346020393E-005	3.489597346286318E-003
2.868709270008025E-006	3.643052420378130E-005	4.347264315153656E-003
2.849071708258211E-006	5.234240692699717E-005	5.199040760209982E-003
2.829439453346604E-006	7.108372943624876E-005	6.044928458088983E-003
2.809813664735472E-006	9.263486599770068E-005	6.884929507987824E-003
2.790195410225792E-006	1.169761984121217E-004	7.719046331437167E-003
2.770585764425404E-006	1.440881170888956E-004	8.547281672035615E-003
2.750985800356977E-006	1.739510221190873E-004	9.369638595148831E-003
2.731396590035916E-006	2.065453243474483E-004	1.018612048757336E-002
2.711819204293664E-006	2.418514464432419E-004	1.099673105716548E-002
2.692254712665378E-006	2.798498239697729E-004	1.180147433243422E-002
2.672704183271376E-006	3.205209064525015E-004	1.260035466209964E-002
2.305303285708827E-006	1.575221111922309E-003	2.667322783294239E-002
2.286253098621633E-006	1.665271573004755E-003	2.735025021090618E-002
2.267238772154036E-006	1.757589274755482E-003	2.803357378239634E-002
2.248261314093647E-006	1.852155239768053E-003	2.870520975865564E-002
2.229321728190391E-006	1.948950528507972E-003	2.937116965143157E-002
2.210421014034430E-006	2.047956240312275E-003	3.003146527171616E-002
2.191560166961766E-006	2.149153514384852E-003	3.068610872844767E-002
1.252089027368658E-007	3.819185707128652E-002	7.805504692565929E-002
1.212006703980859E-007	3.845210044944820E-002	7.809081510755374E-002
1.172750308568449E-007	3.871246110687517E-002	7.812541791460452E-002
1.134313372925648E-007	3.897293519982015E-002	7.815887983255078E-002
1.096689337258431E-007	3.923351896584536E-002	7.819122514904571E-002
1.059871554755530E-007	3.949420872313794E-002	7.822247795097682E-002
1.023852289819630E-007	3.975500086983629E-002	7.825266212183943E-002
3.802809926043301E-008	4.603669727212220E-002	7.871477181189845E-002
7.013819279024681E-009	5.286659716010848E-002	7.885997979672280E-002
6.415391851986358E-009	5.312946686347138E-002	7.886181855280277E-002
5.851815266874038E-009	5.339234242038757E-002	7.886349334971542E-002
1.045880658500757E-009	5.707297338052821E-002	7.887476136633960E-002
8.812975825088861E-010	5.733588966491152E-002	7.887500311863964E-002
4.940164603677971E-012	6.101675485469084E-002	7.887588396993459E-002
1.498037789489992E-012	6.127967446833334E-002	7.887588416385571E-002
2.097655697257411E-013	6.154259408224160E-002	7.887588417462789E-002
6.800496062237407E-015		

## **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail n'était que de faire comprendre comment on les construit (un élément), . Il suffit de retenir que choisir un élément c'est à la fois :

- Choisir une forme de maille
- Choisir la place des nœuds dans la maille
- Choisir une interpolation sur l'élément

*Les fonctions d'interpolation, leurs dérivées, et leurs intégrales sur l'approximation  $e$  sont alors déterminées par les valeurs aux nœuds.(conditions aux limites)*

Le choix de l'élément est délicat : c'est un compromis entre la qualité de la solution approchée et le coût du calcul. Il est plus facile d'approcher une courbe avec des polynômes de degré 2 qu'avec des segments de droite ; et plus le nombre de mailles est grand, plus la courbe est facile à approcher.

Par contre, le nombre de nœuds (et donc le nombre d'inconnues) augmente avec le degré d'interpolation et le nombre de mailles.

La taille du système d'équations à résoudre (et donc le temps de résolution) peut devenir très grande. Pour fixer les idées, on peut retenir que pour un algorithme de résolution par une méthode directe, le temps de résolution est proportionnel au cube du nombre d'inconnues. Sans qu'on puisse le chiffrer exactement, on peut dire que les éléments de faible degré d'interpolation demandent un maillage plus fin que les éléments de degré plus élevé pour obtenir une « précision équivalente ». Il faut donc se préoccuper de cette question dès la phase de maillage, et l'examen d'une solution approchée peut parfois amener à recommencer un calcul avec un maillage et/ou des interpolations différentes.

Nous avons validé les trois programmes mis au point pour calculer la flexion des poutre

(programme avec un élément type Hermite 4 degrés de libertés 2 nœuds ;  
programme avec élément type Hermite haute précision 6ddl 2 nœuds ;  
programme avec l'élément type Lagrange haute précision 6ddl 3 nœud.)

- les trois modèles développés (élément finis type Hermite 4ddl2n,6ddl2n, élément finis type Lagrange 6ddl3n) sont bons , aussi bien dans sa formulation théorique qu'au point de vue précision numérique ; ceci bien entendu dans les limites des validations entreprises.

- Les résultats des programmes obtenus constituent des prévisions fidèles des solutions exactes du problème,
- Une représentation approchée des déplacements au moyen de l'expression  $v(x) = [F(X)] \cdot \{q\}$  conduisait à la limite à la solution exacte lorsque la taille des éléments diminuait.

Le raisonnement correspondant est en effet très simple : puisque le développement est capable, à la limite, de reproduire exactement n'importe quelle fonction de déplacement susceptible de se concevoir à l'intérieur du milieu continu, alors la solution doit à la limite, lorsque la taille des éléments tend vers zéro, tendre vers la solution exacte et unique car la solution correspondant à chaque approximation est unique ,

- Il existe des cas où la solution exacte est bien obtenue à l'issue d'un nombre seulement fini de subdivisions, ou même dans les cas extrêmes, avec un seul élément comme il est le cas dans les chargements uniformes, du moment que le développement polynomial utilisé dans cet élément peut s'adapter exactement à la solution cherchée c'est le cas pour le chargement réparti triangulaire le développement polynôme de l'élément type Lagrange s'adapte exactement avec la solution cherchée (figure V.1) par contre la solution diverge relativement par rapport à la qualité de précision de l'élément type Hermite  $6ddl \ 2n$  à fur et à mesure qu'on augmente le nombre des nœuds.
- Même l'élément type Hermite  $4ddl \ 2n$  à un nombre d'éléments un peu grand relativement le résultat donne une erreur exacte élevée par rapport à l'élément type Hermite  $6ddl \ 2n$ .

## **BIBLIOGRAPHIES**

## BIBLIOGRAPHIES

- [1] J.Szmelter, *The energy method of networks of arbitrary shape in problems of the theory of elasticity*, proc.I.U.T.A.M.,symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity(ed. W.Olszak),Pergamon Press, 1959
- [2] G. DHATT,G. TOUZOT, *Une Présentation De La Méthode Des Elément Fins*, DEUXIEME EDITION MALOINE S.A, EDITEUR , PARIS 1984
- [3] R.Courrant, *variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration* , Bull. Math. Soc., 49, 1-23, 1943
- [4] R. L. Fox and E. L. Stanton, *Developments in structural analysis by direct energy minimization* , J.A.I.A.A., 6, 1036-44, 1968.
- [5] W. A. NASH, 'RESISTANCE DES MATERIAUX I'
- [6] B. DEMIDOVITH et LMARRON, 'Eléments de Calcul numérique', EDITION MIR, MOSCOU, 1987
- [7] T. ZEBBICHE, , ' Eléments finis', Cours 4 em Année Ingénieur Aéronautique, Option Structure, Institut d'Aéronautique, Université de Blida

## ANNEXE 1

PROGRAMME DE FLEXION( élément 4ddl deux nœuds)

```

C
C  CALCULE DE DEPLACEMENT ROTATION D UNE POUTRE CHARGEMENT
C  REPARTIE QUELCONQUE AVEC UN ELEMENT HERLITE 4DDL 2N
C
PROGRAM FLEXION
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AKE
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ AIN
COMMON /BK10/ b1,b2
C
C  DECLARATION DES VARIABLE
C
DOUBLE PRECISION AK(1000,1000),AKE(4,4),AKR(1000,1000),PK(4)
DOUBLE PRECISION XP(1000),p(1000),pr(1000),x(1000),AL
DOUBLE PRECISION ALPOUTRE,b_enc
DOUBLE PRECISION YOUNG,AIN
INTEGER NE,NN,N
INTEGER nr, i,h
C
C  DECLARATION DES FONCTIONS
C
INTEGER LIGNE
C
C  CORP DE PROGRAMME PRINCIPAL
C
open(UNIT=1,FILE='FMEF.DAT',STATUS='UNKNOWN')
WRITE(1,*)'POUTRE ENCASTRE(charge repartie triangulaire)'
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)'ELEMENT FINIS 2 NOEUDS 4 DEGRES DES LIBERCE '
WRITE(1,*)
WRITE(*,*)'NE='
READ(*,*)NE
NN=NE+1
N=2*NN
C
C  CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUE ET MECANQUES DE LA POUTRE
C
ALPOUTRE=1.d0
AL=ALPOUTRE/NE
p_enc=1.d0
AIN=1.d0
YOUNG=1.d0
C
WRITE(*,*)'N=',N
WRITE(1,*)'LONGUEUR DE LA POUTRE=',ALPOUTRE
WRITE(1,*)'MODULE DE YOUNG=',YOUNG
WRITE(1,*)'MOMENT D'INERTIE=',AIN
WRITE(1,*)'LA CHARGE b',b
WRITE(1,*)'NOMBRE DELEMENT',NE
WRITE(1,*)'NOMBRE DE NOEUD',NN
WRITE(1,*)'RAND AK AVANT INTRODUIRE LES CL',N
WRITE(1,*)
C
C  CONDITIONS AU LIMITE
C
XP(1)=1
XP(2)=1
DO 322 i=3,n
XP(i)=0
322 CONTINUE
C
DO 320 i=1,n
DO 320 j=1,n
AKR(i,j)=0.d0
320 CONTINUE
C
C  REMPLISSAGE DE MATRICE AK
C
-DO 200 L=1,NE
CALL ELEM

```

```

lpos=2*(L-1)
DO 210 i=1,4
DO 220 j=1,4
C WRITE(*,*) 'i=',i,'j',j
C WRITE(*,*) 'AKE=',AKE(i,j)
C WRITE(*,*)
AK(lpos+i,lpos-j)=AK(lpos+i,lpos+j)+AKE(i,j)
C WRITE(*,*) 'lpos=',lpos
C WRITE(*,*) AK(ipos-i-1,ipos+j-1)
220 CONTINUE
210 CONTINUE
200 CONTINUE
C
DO 332 I=1,N
P(I)=0.0
332 CONTINUE
C
DO 300 L=1,NE
X1=(L-1)*AL
X2=X1+AL
b1=b(X1)
b2=b(X2)
CALL CHARGE
DO 333 I=1,4
LPOS=2*(L-1)
P(LPOS+I)=P(LPOS+I)+PK(I)
333 CONTINUE
300 CONTINUE
C
CALL filtre (AK,XP,P,N,AKR,PR,mr)

C WRITE(1,*) 'RAND DE AKR APRES INTRODUIRE LES CL',mr
C WRITE(*,*) 'mr=',mr
C WRITE(*,*)
C DO 310 i=1,mr
C WRITE(*,*) (AKR(i,j),j=1,mr)
c310 CONTINUE
C WRITE(*,*) 'PR='
C WRITE(*,*) (PR(i),i=1,mr)

WRITE(*,*)
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C
C Nom :
C GAUSS
C
C Fonctionnalité :
C Procédure de résolution d'un système linéaire
C
C Entrée(s) :
C akr : matrice carrée
C mr : dimension de akr
C pr : vecteur
C
C Sortie(s) :
C X : vecteur
C -> : .T. si le pivot s'est effectué correctement
C .F. si le système n'est pas soluble
C
cccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
i = 1
900 IF (i .GE. mr) GOTO 910
h = LIGNE (akr, mr, i)
IF (h .EQ. 0) goto 900
IF (i .NE. h) THEN
CALL ECHANG (akr, mr, mr, i, h, akr)
CALL ECHANG (pr, mr, i, i, h, pr)
ENDIF
CALL PIVOTE (h, akr, mr, pr, i)
i = i + 1
GO TO 900
910 CONTINUE
CALL TRIANG (akr, mr, pr, i, X)
C WRITE(1,*) 'LA DEFLEXION NODAL
C do 1 i=1,mr
c1 WRITE (*,*)x(i)
C write(*,*) 'mr=',mr
C write(*,*)

```

```

DOUBLE PRECISION AK(1000,1000),AKR(1000,1000)
DOUBLE PRECISION p(1000),XP(1000),pr(1000)
INTEGER mr,i,j,N,m
mr=0
DO 99 i=1,N
  IF(XP(i).eq.1) goto 99
  mr=mr+1
  pr(mr)=p(i)
  m=0
  DO 77 j=1,N
    IF(XP(j).eq.1) goto 77
    m=m+1
    AKR(mr,m)=AK(i,j)
77  CONTINUE
99  CONTINUE
write(*,*) 'mr=',mr,' m-',m
pause
RETURN
END
#####
C
C  Nom :
C  LIGNE
C
C  Fonctionnalité :
C  Procédure de recherche de la ligne de pivot akr
C  l'étape n
C
C  Entrée(s) :
C  akr : matrice carrée
C  mr : dimension de akr
C  n : colonne de recherche
C
C  Sortie(s) :
C  -> : ligne de pivot (0 si celle-ci n'existe pas)
#####
C
C  INTEGER FUNCTION LIGNE (akr, mr, n)
C  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C  DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000)
C  INTEGER mr, n, h
C  h = n
400 IF (.NOT. ((h.LE.mr) .AND. (akr(h, n) .EQ. 0))) GO TO 410
C  h = h + 1
C  GO TO 400
410 CONTINUE
C  IF (h .GT. mr) h = 0
C  LIGNE = h
C  RETURN
C  END
#####
C
C  Nom :
C  ECHANG
C
C  Fonctionnalité :
C  Procédure de permutation de deux lignes d'une
C  matrice ou d'un vecteur
C
C  Entrée(s) :
C  akr : matrice / vecteur
C  mr, n : dimension
C  k, l : lignes akr permuter
C
C  Sortie(s) :
C  pr : matrice / vecteur
#####
C
C  SUBROUTINE ECHANG (akr, mr, n, k, l, pr)
C  IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C  DOUBLE PRECISION akr(1000,1000), pr(1000,1000)
C  DOUBLE PRECISION t
C  INTEGER mr, n, k, l, j
C  CALL DUPLIQ(akr, mr, n, pr)
C  DO 600 j=1, n
C  t = akr(k, j)
C  pr(k, j) = akr(l, j)
C  pr(l, j) = t

```

```
600 CONTINUE
RETURN
END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C Nom :
C PIVOTE
C
C Fonctionallite :
C Procédure de permettant d'effectuer le pivot akr
C l'étape i
C
C Entrée(s) :
C h : étape du pivot
C akr : matrice carrée
C mr : dimension de akr
C pr : matrice / vecteur
C o : nombre de colonnes de pr
C
C Sortie(s) :
C akr : matrice
C pr : matrice / vecteur
C
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
SUBROUTINE PIVOTE (h, akr, mr, pr, o)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000), pr(1000, 1000)
INTEGER i, j, mr, o, h
DOUBLE PRECISION piv, t
piv = akr(h, h)
DO 700 i=h+1, mr
t = akr(i, h)
akr(i, h) = 0
```

```
C
C Boucle de pivot de akr
C
DO 700 j=h+1, mr
akr(i, j) = akr(i, j) - akr(h, j)*t/piv
700 CONTINUE
```

```
C
C Boucle de pivot de akr
C
DO 710 j=1, o
pr(i, j) = pr(i, j) - pr(h, j)*t/piv
710 CONTINUE
720 CONTINUE
RETURN
END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C Nom :
C TRIANG
C
C Fonctionallite :
C Procédure de résolution d'un système triangulaire
C
C Entrée(s) :
C akr : matrice triangulaire
C mr : dimension de akr
C pr : matrice / vecteur
C n : nombre de colonnes de pr
C
C Sortie(s) :
C X : matrice / vecteur
C
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
SUBROUTINE TRIANG (akr, mr, pr, n, X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000), pr(1000, 1000), X(1000, 1000)
INTEGER mr, n, i, j, k
DOUBLE PRECISION z
DO 820 k=1, n
X(mr, k) = pr(mr, k) / akr(mr, mr)
DO 810 i=mr-1, 1, -1
t = 0
DO 800 j=i+1, mr
z = t + X(j, k) * akr(i, j)
```

```
800 CONTINUE
X(i, k) = (pr(i, k) - t) / akr(i, i)
810 CONTINUE
820 CONTINUE
RETURN
END
```

cc

```
C Nom :
C   DUPLIQ
C
C Fonctionnalité :
C   Procédure de duplication matricielle / vectorielle
C
C Entrée(s) :
C   akr : matrice / vecteur
C   mr, n : dimension
C
C Sortie(s) :
C   pr : matrice / vecteur
C
```

cc

```
SUBROUTINE DUPLIQ (akr, mr, n, pr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(1000,1000), pr(1000,1000)
INTEGER mr, n, i, j
DO 510 i=1, mr
DO 500 j=1, n
pr(i, j) = akr(i, j)
500 CONTINUE
510 CONTINUE
RETURN
END
```

## ANNEXE 2

PROGRAMME DE FLEXION( élément 6ddl deux nœuds)

```

C
C
C   CALCULE DE DEPLACEMENT ROTATION D UNE POUTRE CHARGEMENT
C   REPARTIE QUELCONQUE AVEC UN ELEMENT HERLITE 6DDL 2N
C
PROGRAM FLEXION
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AK3
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ AIN
COMMON /BK10/ h1,b2
C
C   DECLARATION DES VARIABLE
C
DOUBLE PRECISION AK(4000,4000),AKE(6,6),AKR(4000,4000),PK(6)
DOUBLE PRECISION XP(4000),p(4000),pr(4000),x(4000),AL
DOUBLE PRECISION ALPOUTRE,b_enc
DOUBLE PRECISION YOUNG,AIN
INTEGER N3,NN,N
INTEGER m, l,h
C
C   DECLARATION DES FONCTIONS
C
INTEGER LIGNE
C
C   CORE DE PROGRAMME PRINCIPAL
C
open(UNIT=1,FILE='xxxFMF.DAT',STATUS='UNKNOWN')
WRITE(1,*)'POUTRE ENCASTRE(charge repartie triangulaire)'
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)'ELEMENT FINIS 2 NOEUDS 6 DEGRES DE LIBERTE '
WRITE(1,*)
WRITE(*,*)'NE='
READ(*,*)NE
NN=NE+1
N=3*NN
C
C   LES CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUE ET MECANIQUE DE LA POUTRE
C
ALPOUTRE=1.d0
AL=ALPOUTRE/NE
b_enc=1.d0
AIN=1.d0
YOUNG=1.d0
C
WRITE(*,*)'N=',N
WRITE(1,*)'LONGUEUR DE LA POUTRE=',ALPOUTRE
WRITE(1,*)'MODULE DE YOUNG=',YOUNG
WRITE(1,*)'MOMENT DINERTIE=',AIN
WRITE(1,*)'LA CHARGE b',b
WRITE(1,*)'NOMBRE DELEMENT',NE
WRITE(1,*)'NOMBRE DE NOEUD',NN
WRITE(1,*)'RAND AX AVANT INTRODUIRE LES CL',N
WRITE(1,*)
C
C   VECTEUR CONDITIONS AUX LIMTES
C
XP(1)=1
XP(2)=1
XP(3)=0
DO 322 i=4,n
XP(i)=0
322 CONTINUE
C
DO 320 i=1,n
DO 320 j=1,n
AKR(i,j)=0.d0
320 CONTINUE
C
C   REMPLISSAGE DE MATRICE AK

```

```

DC 200 L=1,NE
CALL ELEM
lpos=3*L-2
DO 210 i=1,6
DO 220 j=1,6
C WRITE(*,*) 'i=',i,'j',j
C WRITE(*,*) 'AKE=',AKE(i,j)
C WRITE(*,*)
AK(lpos+i-1,lpos+j-1)=AK(lpos+i-1,lpos+j-1)+AKE(i,j)
C WRITE(*,*) 'lpos=',lpos
C WRITE(*,*) AK(lpos+i-1,lpos+j-1)
220 CONTINUE
210 CONTINUE
200 CONTINUE
C
DO 332 I=1,N
P(I)=0.0
332 CONTINUE
C
C REEMPLISSAGE VECTEUR CHARGE
C
DO 300 I=1,NE
X1=(I-1)*AL
X2=X1+AL
b1=b(X1)
b2=b(X2)
CALL CHARGE
DO 333 I=1,6
LPOS=3*I-2
P(LPOS+I-1)=P(LPOS+I-1)+PK(I)
333 CONTINUE
300 CONTINUE
C
CALL Filter (AK,XP,P,N,AKR,PR,mr)

C WRITE(1,*) 'RAND DE AKR APRES INTRODUIRE LES CL',mr
C WRITE(*,*) 'mr=',mr
C WRITE(*,*)
DO 310 i=1,mr
C WRITE(*,*) (AKR(i,j),j=1,mr)
c310 CONTINUE
C WRITE(*,*) 'PR='
C WRITE(*,*) (PR(i),i=1,mr)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C Nom :
C CAUSS
C
C Fonctionnalité :
C Procédure de résolution d'un système linéaire
C
C Entrée(s) :
C akr : matrice carrée
C mr : dimension de akr
C pr : vecteur
C
C Sortie(s) :
C X : vecteur
C -> : .T. si le pivot s'est effectué correctement
C .F. si le système n'est pas soluble
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
i = 1
900 IF (i .GE. mr) GOTO 910
h = LIGNE (akr, mr, i)
IF (h .EQ. 0) goto 900
IF (i .NE. h) THEN
CALL ECHANG (akr, mr, mr, i, h, akr)
CALL ECHANG (pr, mr, 1, i, h, pr)
ENDIF
CALL PIVOTE (h, akr, mr, pr, 1)
i = i + 1
GO TO 900
910 CONTINUE
CALL TRIANG (akr, mr, pr, 1, X)
C WRITE(*,*) 'LA DEFLEXION NODAL '
C WRITE (*,*) (X(i),i=1,mr)
C write(*,*) 'mr=',mr

```

```

c   write(*,*)
C
do 444 j=1,mr-1/2
lpos=j*3-1
444 x(j)=x(lpos)

do 1 i=1,mr/3
1   write(*,*)x(i)
1000 format(3x,F12.5,2x)

STOP
END

C
C   FONCTION DE CHARGE
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION b(XX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
b=b_enc*(1-XX/ALPOUTRE)
RETURN
END

C
C   MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE
C
SUBROUTINE ELEM
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AKE
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ AIN
DOUBLE PRECISION AKE(6,6),AL

c
AKE(1,1)=1200.d0
AKE(1,2)=600.d0*AL
AKE(1,3)=30.d0*AL*AL
AKE(1,4)=-1200.d0
AKE(1,5)=600.d0*AL
AKE(1,6)=-30.d0*AL*AL

C
AKE(2,2)=384.d0*AL*AL
AKE(2,3)=-22.d0*AL*AL*AL
AKE(2,4)=-600.d0*AL
AKE(2,5)=216.d0*AL*AL
AKE(2,6)=-8.d0*AL*AL*AL

C
AKE(3,3)=6.d0*AL*AL*AL*AL
AKE(3,4)=-30.d0*AL*AL
AKE(3,5)=6.d0*AL*AL*AL
AKE(3,6)=-AL*AL*AL*AL

C
AKE(4,4)=1200.d0
AKE(4,5)=-600.d0*AL
AKE(4,6)=30.d0*AL*AL

C
AKE(5,5)=384.d0*AL*AL
AKE(5,6)=-22.d0*AL*AL*AL

c
AKE(6,6)=6.d0*AL*AL*AL*AL

c
DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,I-1
AKE(I,J)=AKE(J,I)
10 CONTINUE

C
DO 20 I=1,6
DO 20 J=1,6
AKE(I,J)=AKE(I,J)*YOUNG*AIN/(70.d0*AL**3)
20 CONTINUE

RETURN
END

C
C   VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE
C
SUBROUTINE CHARGE
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK2/ AL

```

```
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
COMMON /BK10/ b1,b2
DOUBLE PRECISION PK(6),AL,b_enc
```

```
PK(1)=(300*b1+120*b2)*AL/840
PK(2)=(52*b1+32*b2)*AL**2/840
PK(3)=(4*b1+3*b2)*AL**3/840
PK(4)=(120*b1+300*b2)*AL/840
PK(5)--(32*b1+52*b2)*AL**2/840
PK(6)=(3*b1+4*b2)*AL**3/840
```

```
RETURN
END
```

```
C
C ELIMINATION DES COLONES ET DES LIGNES SUIVANT LE VECTEUR XP
C
```

```
SUBROUTINE filtr (AK,XP,p,N,AKR,pr,mr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION AK(4000,4000),AKR(4000,4000)
DOUBLE PRECISION p(4000),XP(4000),pr(4000)
INTEGER mr,i,j,N,m
```

```
mr=0
DO 99 i=1,N
  IF(XP(i).eq.1) goto 99
  mr=mr+1
  pr(mr)=p(i)
  m=0
  DO 77 j=1,N
    IF(XP(j).eq.1) goto 77
    m=m+1
    AKR(mr,m)=AK(i,j)
```

```
77 CONTINUE
99 CONTINUE
c write(*,*) 'mr=',mr,' m=',m
c pause
RETURN
END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C
C Nom :
C LIGNE
C
C Fonctionnalité :
C Procédure de recherche de la ligne de pivot akr
C l'étape n
C
C Entree(s) :
C akr : matrice carree
C mr : dimension de akr
C n : colonne de recherche
C
C Sortie(s) :
C -> : ligne de pivot (0 si celle-ci n'existe pas)
C
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
INTEGER FUNCTION LIGNE (akr, mr, n)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(4000,4000)
INTEGER mr, n, h
h = n
400 IF (.NOT. ((h.LE.mr) .AND. (akr(h, n) .EQ. 0))) GO TO 410
h = h + 1
GO TO 400
410 CONTINUE
IF (h .GT. mr) h = 0
LIGNE = h
RETURN
END
```

```
CCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C
C Nom :
C ECHANG
C
C Fonctionnalité :
C Procédure de permutation de deux ligne d'une
C matrice ou d'un vecteur
```

```

C
C Entree(s) :
C   akr : matrice / vecteur
C   mr, n : dimension
C   k, l : lignes akr permuter
C
C Sortie(s) :
C   pr : matrice / vecteur
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE ECHANG (akr, mr, n, k, l, pr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(4000,4000), pr(4000,4000)
DOUBLE PRECISION t
INTEGER mr, n, k, l, j
CALL DUPLIQ(akr, mr, n, pr)
DO 500 j=1, n
t = akr(k, j)
pr(k, j) = akr(l, j)
pr(l, j) = t
500 CONTINUE
RETURN
END

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   Nom :
C   PIVOTE
C
C   Fonctionallite :
C   Procédure de permettant d'effectuer le pivot akr
C   l'etape i
C
C   Entree(s) :
C   h : etape du pivot
C   akr : matrice carree
C   mr : dimension de akr
C   pr : matrice / vecteur
C   o : nombre de colonnes de pr
C
C   Sortie(s) :
C   akr : matrice
C   pr : matrice / vecteur
C

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE PIVOTE (h, akr, mr, pr, o)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(4000, 4000), pr(4000, 4000)
INTEGER i, j, mr, o, h
DOUBLE PRECISION piv, t
piv = akr(h, h)
DO 700 i=h+1, mr
t = akr(i, h)
akr(i, h) = 0
C
C   Boucle de pivot de akr
C
DO 700 j=h+1, mr
akr(i, j) = akr(i, j) - akr(h, j)*t/piv
700 CONTINUE
C
C   Boucle de pivot de pr
C
DO 710 j=1, o
pr(i, j) = pr(i, j) - pr(h, j)*t/piv
710 CONTINUE
720 CONTINUE
RETURN
END

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C   Nom :
C   TRIANG
C
C   Fonctionallite :
C   Procédure de resolution d'un systeme triangulaire
C
C   Entree(s) :

```

```
C      akr : matrice triangulaire
C      mr  : dimension de akr
C      pr  : matrice / vecteur
C      n   : nombre de colonnes de pr
```

```
C      Sortie(s) :
C      X : matrice / vecteur
```

```
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
SUBROUTINE TRIANG (akr, mr, pr, n, X)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(4000, 4000), pr(4000, 4000), X(4000, 4000)
INTEGER mr, n, i, j, k
DOUBLE PRECISION t
DO 820 k=1, n
X(mr, k) = pr(mr, k) / akr(mr, mr)
DO 810 i=mr-1, 1, -1
t = 0
DO 800 j=i+1, mr
t = t + X(i, k) * akr(i, j)
800 CONTINUE
X(i, k) = (pr(i, k) - t) / akr(i, i)
810 CONTINUE
820 CONTINUE
RETURN
END
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
C      Nom :
C      DUPLIQ
C
C      Fonctionnalité :
C      Procedure de duplication matricielle / vectorielle
C
C      Entree(s) :
C      akr : matrice / vecteur
C      mr, n : dimension
C
C      Sortie(s) :
C      pr : matrice / vecteur
C
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
SUBROUTINE DUPLIQ (akr, mr, n, pr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION akr(4000,4000), pr(4000,4000)
INTEGER mr, n, i, j
DO 510 i=1, mr
DO 500 j=1, n
pr(i, j) = akr(i, j)
500 CONTINUE
510 CONTINUE
RETURN
END
```

## ANNEXE 3

PROGRAMME DE FLEXION( élément 6ddl trois nœuds)

```

C
C CALCULE DE DEPLACEMENT ROTATION D UNE POUTRE CHARGEMENT
C REPARTIE QUELCONQUE AVEC UN ELEMENT LAGRANGE 6DEG 3N
C
PROGRAM FLEXION
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AXE
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ AIN
COMMON /BK10/ d1,b2

C
C DECLARATION DES VARIABLE
C
DOUBLE PRECISION AK(1000,1000),AKE(6,6),AKR(1000,1000),PK(6)
DOUBLE PRECISION XP(1000),p(1000),pr(1000),x(1000),AL
DOUBLE PRECISION ALPOUTRE,b_enc
DOUBLE PRECISION YOUNG,AIN
INTEGER NE,NN,N,SN
INTEGER nr, i,h

C
C DECLARATION DES FONCTIONS
C
INTEGER LIGNE

C
C CORP DE PROGRAMME PRINCIPAL
C
open(UNIT=1,FILE='xxxPMEF.DAT',STATUS='UNKNOWN')
WRITE(1,*)'POUTRE ENCASTRE(charge repartie triangulaire)'
WRITE(1,*)
WRITE(1,*)'ELEMENT FINIS 3 NOEUDS 6 DEGRES DE LIBERTE '
WRITE(1,*)
WRITE(*,*)'NE='
READ(+,*)NF
NN=NE+1
SN=NN-1
N=2*(NN+SN)

C
C CARACTERISTIQUE MECANIQUE ET GEOMETRIQUE DE LA POUTRE
C
ALPOUTRE=2.d0
AL=ALPOUTRE/NE
b_enc=1.d0
AIN=1.d0
YOUNG=1.d0

C
WRITE(*,*)'N=',N
WRITE(1,*)'LONGUEUR DE LA POUTRE-',ALPOUTRE
WRITE(1,*)'MODULE DE YOUNG=',YOUNG
WRITE(1,*)'MOMENT DINERTIE=',AIN
C
WRITE(1,*)'LA CHARGE b',b
WRITE(1,*)'NCMBRE DELEMENT',NE
WRITE(1,*)'NCMBRE DE NOEUD',NN
WRITE(1,*)'RAND AK AVANT INTRODUIRE LES CL',N
WRITE(1,*)

C
C CCNDITIONS AUX LIMITES
C
XP(1)=1
XP(2)=1
DO 322 i=3,n
XP(i)=0
322 CONTINUE

C
DO 320 i=1,n
DO 320 j=1,n
AKR(i,j)=0.d0
320 CONTINUE

C
C REMPLISSAGE DE MATRICE AK
C
DO 200 L=1,NE
CALL FIEM
lpcs=4*(L-1)

```

```

DO 210 i=1,6
DO 220 j=1,6
C WRITE(*,*) 'i=',i,'j',j
C WRITE(*,*) 'AKE=',AKE(i,j)
C WRITE(*,*)
AK(lpos+i,lpos+j)=AK(lpos-i,lpos+j)+AKE(i,j)
C WRITE(*,*) 'lpos=',lpos
C WRITE(*,*) AK(ipos+i-1,ipos-j-1)
220 CONTINUE
210 CONTINUE
200 CONTINUE
C
DO 332 I=1,N
P(I)=0.C
332 CONTINUE
C
DO 300 I=1,NE
X1=(L-1)*AL
X2=X1-AL
b1=b(X1)
b2=b(X2)
CALL CHARGE
DO 333 I=1,6
LPOS=4*(L-1)
P(LPOS+I)=P(LPOS+I)+PK(I)
333 CONTINUE
300 CONTINUE
C
CALL filtr (AK,XP,P,N,AKR,PR,mr)

WRITE(1,*) 'RAND DE AKR APRES INTRODUIR LES CL',mr
C WRITE(*,*) 'mr=',mr
C WRITE(*,*)
C DO 310 i=1,mr
C WRITE(*,*) (AKR(i,j),j=1,mr)
c310 CONTINUE
C WRITE(*,*) 'PR='
C WRITE(*,*) (PR(i),i=1,mr)

WRITE(*,*)
i = 1
900 IF (i .GE. mr) GOTO 910
h = LIGNE (akr, mr, i)
IF (h .EQ. 0) goto 900
IF (i .NE. h) THEN
CALL ECHANG (akr, mr, mr, i, h, akr)
CALL ECHANG (pr, mr, 1, i, h, pr)
ENDIF
CALL PIVOTE (h, akr, mr, pr, 1)
i = i + 1
GO TO 900
910 CONTINUE
CALL TRIANG (akr, mr, pr, 1, X)
WRITE(*,*) 'LA DEFLEXION NODAL '
WRITE (*,*) (x(i),i=1,mr)
C write(*,*) 'mr=',mr
C write(*,*)
C
C do 444 j=1,mr/2
C lpos=j*2-1
c444 x(j)=x(lpos)

C write(*,*) (x(i),i=1,mr/2)
1000 format(3x,F12.5,2x)

STOP
END

C
C COURBE DE CHARGE
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION b(XX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK4/ b enc,ALPOUTRE
b=b enc*(1-XX/ALPOUTRE)
RETURN
END

```

```

C   MAIRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE
C
SUBROUTINE ELEM
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK1/ AKE
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ ATN
DOUBLE PRECISION AKE(6,6),AL

AKE(1,1)=5092.d0
AKE(1,2)=1138.d0*AL
AKE(1,3)=-3584.d0
AKE(1,4)=1920.d0*AL
AKE(1,5)=-1508.d0
AKE(1,6)=242.d0*AL

AKE(2,2)=332.d0*AL*AL
AKE(2,3)=-896.d0*AL
AKE(2,4)=320.d0*AL*AL
AKE(2,5)=-242.d0*AL
AKE(2,6)=38.d0*AL*AL

AKE(3,3)=7168.d0
AKE(3,4)=0.d0
AKE(3,5)=-3584.d0
AKE(3,6)=896.d0*AL

AKE(4,4)=1280.d0*AL*AL
AKE(4,5)=-1920.d0*AL
AKE(4,6)=320.d0*AL*AL

AKE(5,5)=5092.d0
AKE(5,6)=-1138.d0*AL

AKE(6,6)=332.d0*AL*AL

DO 10 I=1,6
DO 10 J=1,I-1
AKE(I,J)=-AKE(J,I)
CONTINUE

DO 20 I=1,6
DO 20 J=1,6
AKE(I,J)=AKE(I,J)*YOUNG*ATN/(35.d0*AL*AL*AL)
CONTINUE
RETURN
END

```

```

C   VECTEUR CHARGE ELEMANTAIRE
C
SUBROUTINE CHARGE
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK4/ b_enc,ALPOUTRE
COMMON /BK10/ B1,b2
DOUBLE PRECISION PK(6),AL,b_enc

PK(1)={(b2*19/420)+(b1*79/420)}*AL
PK(2)={(b2*2/420)+(b1*5/420)}*AL**2
PK(3)={(b2*112/420)+(b1*112/420)}*AL
PK(4)={(b2*8/420)+(-b1*6/420)}*AL**2
PK(5)={(b2*79/420)+(b1*19/420)}*AL
PK(6)={(-b2*5/420)+(-b1*2/420)}*AL**2

RETURN
END

```

```

C   ELIMINATION DES LIGNES ET DES COLONES A PARTIR DE XP
C
SUBROUTINE filter (AK,XP,p,N,AKR,pr,mr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION AK(1000,1000),AKR(1000,1000)
DOUBLE PRECISION p(1000),XP(1000),pr(1000)
INTEGER mr,;,1,N,m
mr=0
DO 99 i=1,N

```

```

        IF(XP(i).eq.1) goto 99
        nr=nr+1
        pr(nr)=p(i)
        m=0
        DO 77 j=1,N
            IF(XP(j).eq.1) goto 77
            m=m+1
            AKR(nr,m)=AK(i,j)
77      CONTINUE
99      CONTINUE
c      write(*,*) 'nr=',nr,' m=',m
        pause
        RETURN
        END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C      Nom :
C      LIGNE
C
C      Fonctionallite :
C      Procédure de recherche de la ligne de pivot akr
C      l'étape n
C
C      Entree(s) :
C      akr : matrice carree
C      mr : dimension de akr
C      n : colonne de recherche
C
C      Sortie(s) :
C      -> : ligne de pivot (0 si celle-ci n'existe pas)
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C      INTEGER FUNCTION LIGNE (akr, mr, n)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000)
C      INTEGER mr, n, h
C      h = n
C      400 IF (.NOT. ((h.LE.mr) .AND. (akr(h, n) .EQ. 0))) GO TO 410
C      h = h + 1
C      GO TO 400
C      410 CONTINUE
C      IF (h .GT. mr) h = 0
C      LIGNE = h
C      RETURN
C      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C      Nom :
C      ECHANG
C
C      Fonctionallite :
C      Procédure de permutation de deux ligne d'une
C      matrice ou d'un vecteur
C
C      Entree(s) :
C      akr : matrice / vecteur
C      mr, n : dimension
C      k, l: lignes akr permuter
C
C      Sortie(s) :
C      pr : matrice / vecteur
C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C
C      SUBROUTINE ECHANG (akr, mr, n, k, l, pr)
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DOUBLE PRECISION akr(1000,1000), pr(1000,1000)
C      DOUBLE PRECISION t
C      INTEGER mr, n, k, l, j
C      CALL DUPLIQ(akr, mr, n, pr)
C      DO 600 j=1, n
C      t = akr(k, j)
C      pr(k, j) = akr(l, j)
C      pr(l, j) = t
C      600 CONTINUE
C      RETURN
C      END

```

CC

```
C      Nom :
C      PIVOTE
C
C      Fonctionallite :
C      Procedure de permettant d'effectuer le pivot akr
C      l'etape i
C
C      Entree(s) :
C      h : etape du pivot
C      akr : matrice carree
C      mr : dimension de akr
C      pr : matrice / vecteur
C      o : nombre de colonnes de pr
C
C      Sortie(s) :
C      akr : matrice
C      pr : matrice / vecteur
C
```

CC

```
      SUBROUTINE PIVOTE (h, akr, mr, pr, o)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000), pr(1000, 1000)
      INTEGER i, j, mr, o, h
      DOUBLE PRECISION piv, t
      piv = akr(h, h)
      DO 720 i=h+1, mr
      t = akr(i, h)
      akr(i, h) = 0
C
C      Boucle de pivot de akr
C
      DO 700 j=h+1, mr
      akr(i, j) = akr(i, j) - akr(h, j)*t/piv
700  CONTINUE
C
C      Boucle de pivot de akr
C
      DO 710 j=1, o
      pr(i, j) = pr(i, j) - pr(h, j)*t/piv
710  CONTINUE
720  CONTINUE
      RETURN
      END
```

CC

```
C      Nom :
C      TRIANG
C
C      Fonctionallite :
C      Procedure de resolution d'un systeme triangulaire
C
C      Entree(s) :
C      akr : matrice triangulaire
C      mr : dimension de akr
C      pr : matrice / vecteur
C      n : nombre de colonnes de pr
C
C      Sortie(s) :
C      X : matrice / vecteur
C
```

CC

```
      SUBROUTINE TRIANG (akr, mr, pr, n, X)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION akr(1000, 1000), pr(1000, 1000), X(1000, 1000)
      INTEGER mr, n, i, j, k
      DOUBLE PRECISION t
      DO 820 k=1, n
      X(mr, k) = pr(mr, k) / akr(mr, mr)
      DO 810 i=mr-1, 1, -1
      t = 0
      DO 800 j=i+1, mr
      t = t + X(j, k) * akr(i, j)
800  CONTINUE
      X(i, k) = (pr(i, k) - t) / akr(i, i)
810  CONTINUE
820  CONTINUE
      RETURN
```

END

CC

```
C   Nom :  
C     DUPLIQ  
C  
C   Fonctionallite :  
C     Procedure de duplication matricielle / vectorielle  
C  
C   Entree(s) :  
C     akr : matrice / vecteur  
C     mr, n : dimension  
C  
C   Sortie(s) :  
C     pr : matrice / vecteur  
C
```

CC

```
      SUBROUTINE DUPLIQ (akr, mr, n, pr)  
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)  
      DOUBLE PRECISION akr(1000,1000), pr(1000,1000)  
      INTEGER mr, n, i, j  
      DO 510 i=1, mr  
      DO 500 j=1, n  
      pr(i, j) = akr(i, j)  
530  CONTINUE  
510  CONTINUE  
      RETURN  
      END
```

```

C
do 444 j=1, nr/2
lpos=j*2-1
444 x(j)=x(lpos)
do 1 i=1, nr/2
1 write(1,*)i, x(i)
1000 format(3x, i3, 6x, F12.5, 2x)

STOP
END

C
C FONCTION DE CHARGEMENT
C
DOUBLE PRECISION FUNCTION b(XX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
COMMON /BK4/ b_enc, ALPOUTRE
b=b_enc*(1-XX/ALPOUTRE)
RETURN
END

C
C MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE
C
SUBROUTINE ELEM
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
COMMON /BK1/ AKE
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK5/ YOUNG
COMMON /BK6/ AIN
DOUBLE PRECISION AKE(4,4), AL

AKE(1,1)=12.d0
AKE(1,2)=6.d0*AL
AKE(1,3)=-12.d0
AKE(1,4)=6.d0*AL

AKE(2,2)=4.d0*AL*AL
AKE(2,3)=-6.d0*AL
AKE(2,4)=2.d0*AL*AL

AKE(3,3)=12.d0
AKE(3,4)=-6.d0*AL

AKE(4,4)=4.d0*AL*AL

DO 10 I=1,4
DO 10 J=1, I-1
AKE(I,J)=AKE(J,I)
10 CONTINUE

DO 444 I=1,4
DO 444 J=1,4
AKE(I,J)=AKE(I,J)*YOUNG*AIN/AL**3
444 CONTINUE
RETURN
END

C
C VECTEUR CHARGE ELEMENTAIRE (TRAPEZOIDAL)
C
SUBROUTINE CHARGE
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)
COMMON /BK3/ PK
COMMON /BK2/ AL
COMMON /BK4/ b_enc, ALPOUTRE
COMMON /BK10/ b1, b2
DOUBLE PRECISION PK(4), AL, b_enc

PK(1)={{(b2*3/20)+(b1*7/20)}*AL
PK(2)={{(b2*2/60)+(b1/20)}*AL**2
PK(3)={{(b2*7/20)+(b1*3/20)}*AL
PK(4)={{(-b2/20)+(-b1/30)}*AL**2

RETURN
END

C
C ELIMINATION DES LIGNES ET DES COLONNES SUIVANT LE VECTEUR XP
C
SUBROUTINE filtz (AK, XP, p, N, AKR, pr, nr)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)

```