

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'AERONAUTIQUE

DEPARTEMENT CONSTRUCTION

OPTION : PROPULSION



Mémoire de fin d'études

**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME
DES ETUDES UNIVERSITAIRES APPLIQUEES**

ELABORATION D'UNE BIBLIOTHEQUE NUMERIQUE
SERVANT A DECRIRE

LES DIFFERENTES FORMES GEOMETRIQUES
DES PROFILS D'AILES UTILISEES EN AERONAUTIQUE

Réalisé par : GOUBI Saad
BEKHITA Yassine

Promoteur : N. BEKKA

Promotion : 2001/2002

Dédicace

Je dédie les fruits de ce mémoire à :

Mes très chers parents pour leurs sacrifices, conseils et l'éducation qu'ils m'ont offerte.

Mes grands parents

Mes frères,

Hamza et Abbas

Mes sœurs,

Insaf, Latifa, Soumia, Halima et Kanza

Mes très chères tentes et oncles
Et particulièrement,

M^{ed} Lamine et Fouad

Mon binôme **Saad** et sa famille

Mes amis,

**Labchar, B.Mohamed, Talea, Abdelouahad, Abdelghani, Haroune,
L.Mohamed, Hassene et Mourad**

Tous ceux qui me sont chers .

Yassine

Dédicace

Je dédie les fruits de ce mémoire à :

Mes très chers parents pour leurs sacrifices, conseils et l'éducation qu'ils m'ont offerte.

Mes frères,

Lazhar, Yamin, Mohamed, Mustapha et Takkidinne

Mes sœurs,

Fatima et Saida

Toutes les familles,

Goubi, , Souici , Zouzou, Saidi, Zhabri, Khallou et Rasema

Et particulièrement,

Les parents de **Linda** ainsi son oncle Djamel

Ma très chère Linda

Mon binôme Yassine et sa famille

Tous mes amis chacun de son nom

Saad

Remerciements

Le travail qu'est l'objet de ce mémoire, a été réalisé à l'Institut d'Aéronautique de Blida, sous la direction de M^r : **BEKKA Nadir**.

Nous tenons à exprimer nos plus vifs et les plus sincères remerciements à notre promoteur M^r : **BEKKA Nadir** pour ces précieux conseils objectifs, et ces directives et pour son assistance à tout moment.

Nous tenons à remercier sincèrement :

- ❖ M^r : **ZEBBICH** ; chargé de cours à l'Institut d'Aéronautique, pour leurs conseils qu'il nous a prodigués.
- ❖ Tous les professeurs qui nous ont tracé le chemin du savoir et prodigué leurs enseignements.
- ❖ Le président et les membres de jury qui ont accepté d'examiner notre travail et d'honorer par leur présence notre soutenance.

On ne peut omettre de remercier tous les membres de la famille **Goubi** et **Bekhta**.

Résumé

Le but de ce présent travail est d'élaborer une bibliothèque numérique servant à décrire les différentes formes géométriques des profils d'ailes utilisés en aéronautique avec une méthode d'interpolation adéquate.

Nous avons appliqué le schéma de splines cubiques pour générer numériquement les différentes formes de profils NACA. Ainsi différentes géométries des profils NACA sont obtenues afin de montrer l'efficacité du schéma choisi.

Abstract

The purpose of this present work is to elaborate a numerical library used to describe the various geometricals forms of the airfoils used in aeronautics with an appropriate method of interpolation.

We have applied the cubic splines scheme for generate numerically the various forms of NACA airfoils. Thus differentes geometrical forms of the NACA airfoils are obtained in order to show the efficiency of this presnte shemme

Sommaire

Remerciement

Dédicaces

Nomenclature

Résumé

Chapitre I : Introduction

I.1 Introduction.....01

I.2 plan du mémoire.....02

Chapitre II : Caractéristiques géométriques relatives aux profils d'ailes et aux voilures

II.1 Définitions géométriques d'un profil d'aile.....04

II.2 Caractéristiques géométriques de forme d'un profil.....04

II.3 Les différentes formes de profil.....06

II.4 Désignation d'un profil.....07

 II.4.1 Série NACA quatre chiffres.....09

 II.4.2 Série NACA cinq chiffres.....10

 II.4.3 LA série modifiée des NACA quatre et cinq chiffres11

 II.4.4 Profils NACA série -1.....12

 II.4.5 Profils NACA série six chiffres12

 II.4.6 Profils NACA série sept chiffres.....13

II.5 Voilure.....14

 II.5.1 Surface de référence.....14

 II.5.2 Caractéristiques géométriques d'une voilure18

Chapitre III : Caractéristiques aérodynamiques relatives aux profils d'ailes et aux voilures

III.1 Les forces en action.....18

III.2 Principes de sustentation.....19

II.2.1 Naissance de la portance.....	19
II.2.2 Répartition des pressions autour d'un profil.....	20
III.3 Résultante aérodynamique.....	20
III.3.1 La portance.....	22
III.3.2 La traînée.....	27
III.4 Polaires.....	31
III.4.1 Définition de la polaire d'Eiffel.....	31
III.3.2 Définition de la polaire de Lilienthal.....	33
III.3.3 Polaire de l'aile et de l'avion complet.....	31
III.5 Moment aérodynamique longitudinal.....	35
III.5.1 Détermination de C_m	36
III.5.2 Courbe de $C_m=f(\alpha)$	36
III.5.3 Courbe de $C_m=f(C_x)$	36
III.5.4 Cas d'un profil à double courbure.....	38
III.6 Centre de poussée.....	39
III.7 Le foyer d'une aile.....	40
Chapitre IV : Méthodes d'approximation et d'interpolation	
IV.1 Le problème.....	41
IV.2 Approximation.....	42
IV.2.1 Approximation rationnelle.....	42
IV.2.2 Approximation au sens des moindres carrés.....	42
IV.3 Interpolation polynomiale.....	45
IV.3.1 Méthode de Lagrange.....	45
IV.3.2 Méthode de Neville-Aitken.....	46
IV.3.3 Méthode de Newton.....	46
IV.4 Interpolation spline.....	48
IV.4.1 Introduction.....	48
IV.4.2 Les splines linéaires et quadratiques.....	48
IV.4.3 Les splines cubiques.....	50

IV.5 Conditions aux limites	51
IV.5.1 Splines cubiques naturelles	51
IV.5.2 Conditions aux limites paraboliques.....	51
IV.5.3 Conditions aux limites de la tangente.....	51
IV.5.4 Conditions aux limites cycliques.....	55
IV.6 Elargissement.....	55

Chapitre V : Résultats et interprétation

V.1 Algorithme de calcul.....	57
V.2 Résultats et interprétation.....	57
V.2.1 Exemple d'application	57
V.2.2 Représentation graphique	62

Conclusion

Bibliographie

Annexe

Nomenclature

Symbole	Signification	Unité
F_x	Force de traînée	N
F_{xi}	Force de traînée induite	N
F_{xp}	Force de traînée de profil	N
F_{xf}	Force de traînée de frottement	N
R	Résultante aérodynamique	N
S	Surface de référence	m^2
B	Envergure de l'aile	m
e_{max}	L'épaisseur relative	
l_m	Corde moyenne	m
h	L'épaisseur maximale	m
ρ	Densité	$\frac{kg}{m^3}$
V_p	La vitesse propre	$\frac{m}{s}$
C_x	Coefficient de traînée	
C_{xi}	Coefficient de traînée induite	
C_{xp}	Coefficient de traînée de profil	
C_{xf}	Coefficient de traînée de frottement	
C_m	Coefficient du moment de tangage	
C_r	Coefficient aérodynamique	
b	Le gradient de pression	
E	Sous espace vectoriel	
M'_A	Moment aérodynamique	
f	La finesse	
k	constante	
φ	La flèche	
Re	Nombre de Reynolds	
(x,y)	Coordonnées cartésiennes	
V	Espace vectoriel	

α	Angle d'incidence nul	degrés
α_0	Angle de portance	degrés
y_0	Equation d'épaisseur	
y_c	Equation de cambrure	
λ	Allongement	

Liste des tableaux

Chapitre II

II.1 Caractéristiques géométriques de certaines voilures.....	
---	--

Chapitre V

V.1 cas d'un cercle	59
V.2.1 les résultats de programme pour NACA 0012 (extrados).....	68
V.2.1 les résultats de programme pour NACA 0012 (intrados).....	69
V.2.1 les résultats de programme pour NACA 747A415 (extrados).....	70
V.2.1 les résultats de programme pour NACA 747A415 (intrados).....	71

Liste des figures

Chapitre II :

II.1. Définition d'un profil	05
II.2. Références du profil.....	05
II.3. Caractéristiques géométriques d'un profil.....	05
II.4. Les différentes formes des profils.....	08
II.5 Effilement	15
II.6. Dièdre d'une aile.....	16
II.7. Flèche d'une voilure.....	17

Chapitre III :

III.1. Forces en action.....	18
III.2. Répartition des pressions.....	20
III.3. Résultante aérodynamique.....	22
III.4. Influence de l'incidence.....	24
III.5. Influence de l'allongement.....	26
III.6. Influence de la flèche	27

III.7. Courbe $C_i=f(\alpha)$	31
III.8. polaire d'Eiffel	32
III.9. Polaire de l'aile et de l'avion complet	33
III.10.a Détermination de la polaire de Lilienthal	34
III.10.b La polaire de Lilienthal	35
III.11. Courbe de $C_m=f(\alpha)$	37
III.12. Courbe de $C_m=f(C_i)$	38
III.13. Courbe de $C_m=f(\alpha)$ d'un profil à double courbure	39
Chapitre V	
V.1 Comparaison entre les trois méthodes d'interpolation par splines pour une fonction donnée	58
V.2a Comparaison de différentes méthodes d'interpolation splines avec la solution exacte (Cas d'un cercle de rayon unité) (N=40 nœuds)	60
V.2b L'effet de l'augmentation de nombre des nœuds utilisé dans le calcul des splines cubiques (N=9, Np=40)	61
V.3 La forme géométrique d'un profil NACA 0006	63
V.4 La forme géométrique d'un profil NACA 0012	63
V.5 La forme géométrique d'un profil NACA 0012-64	64
V.6 La forme géométrique d'un profil NACA 4418	64
V.7 La forme géométrique d'un profil NACA 2412	65
V.8 La forme géométrique d'un profil NACA 23012	65
V.9 La forme géométrique d'un profil NACA 747A 415	66
V.10 La forme géométrique d'un profil NACA 66 ₃ -418	66
V.11 La forme géométrique d'un profil NACA 16-012	67

Chapitre I

Introduction

I.1 Introduction

L'aérodynamique est une science qui étudie l'action de l'air en mouvement pour déterminer les différents aspects de ces actions, notamment les forces, pression et moments qui résultent du déplacement des corps dans l'atmosphère.

L'aérodynamique intervient principalement dans la conception des avions des missiles dont elle définit les formes optimales. Elle joue aussi un rôle d'importance variable dans la construction d'ouvrages fixes comme les ponts, tours ou grands immeubles, dont elle détermine les réactions du vent.

L'étude aérodynamique de l'avion conduit directement à l'étude des caractéristiques des profils d'ailes qui étaient obtenues par des études expérimentales, sur ce plan la soufflerie a été depuis longtemps un instrument de base.

Toutefois, le coût extrêmement élevé des essais expérimentaux a amené les aérodynamiciens à l'utilisation des méthodes numériques très avancées grâce à l'essor de l'outil informatique dans ces dernières années qui a joué un rôle remarquable pour la résolution des problèmes très compliqués.

Les aérodynamiciens déterminent à partir des essais expérimentaux des tableaux contenant des abscisses et des ordonnées données en pour cent de la corde du profil, permettant à décrire les différentes formes géométriques des profils d'ailes utilisés en aéronautique, en particulier les profils de type NACA.

Notre objectif consiste à décrire numériquement la forme géométrique de certains profils d'ailes type NACA par la méthode de lissage des données en

introduisant le schéma « splines cubiques » à partir des tableaux portant les données expérimentales publiées dans les références spécialisées.

La méthode de splines cubiques qui est l'une des procédures d'interpolation des points tabulés, consiste à trouver une fonction continue dont la courbe passe par tous les points d'une liste déterminée à l'avance. On peut aussi trouver par exemple un polynôme de degré égal aux nombres de points moins un passant par tous les points.

Dans notre présent travail, nous avons expliqué la méthode de splines cubiques et ses techniques qui est l'une des méthodes d'interpolation.

1.2 Plan du mémoire

Notre travail est exposé en cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous avons donné un bref historique du développement de l'aérodynamique comme une science qui intervient dans plusieurs domaines spécialement en aéronautique.

Tandis que, dans le deuxième chapitre, on a évoqué les définitions et les caractéristiques géométriques relatives aux profils d'ailes et aux voilures.

Dans le troisième chapitre, on a cité les principales caractéristiques aérodynamiques en se basant sur les profils NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), telles que la résultante aérodynamique et ses composantes, les différents types des polaires, et le moment aérodynamique longitudinal.

Dans le quatrième chapitre, nous avons présenté les principaux types d'approximation et d'interpolation et les techniques de chaque type. En suite on a

exposé le principe de l'interpolation par splines et ses techniques : linéaires, quadratiques et cubiques.

Le cinquième chapitre est le sujet des principaux résultats obtenus par la méthode d'interpolation splines cubiques et leur interprétation.

Finalement notre travail sera accompli par une conclusion générale résumant les principaux aspects et objectifs atteints avec quelques perspectives.

Chapitre II

*Caractéristiques géométriques relatives
aux profils d'ailes et aux voilures*

II.1 Définitions géométriques d'un profil d'aile

On désigne par le profil d'aile, la section de l'aile coupée par un plan parallèle au plan de symétrie de l'avion (**Fig. II.1**).

Le point le plus avant est appelé bord d'attaque alors que le point le plus arrière est appelé bord de fuite. La courbure supérieure d'un profil est appelée extradados, tandis que la courbure inférieure est appelée intrados (**Fig. II.2**).

La corde du profil est la droite qui joint le bord d'attaque et le bord de fuite.

La ligne moyenne est la ligne qui joint les milieux des segments perpendiculairement à la corde.

Sur un profil d'aile on trouve également d'autres références tels que :

- **Angle d'incidence (α)** : C'est l'angle formé par la corde du profil et le vecteur vitesse.
- **Angle de portance nulle** : C'est l'angle d'incidence correspondant à une portance nulle.
- **Angle de calage** : C'est l'angle formé par la corde du profil et l'axe longitudinal de l'avion, il est généralement de l'ordre de 2° à 3° .

II.2. Caractéristiques géométriques de forme d'un profil

- **L'épaisseur maximale** : C'est le plus grand segment perpendiculaire à la corde du profil et elle est notée par la lettre h .
- **L'épaisseur relative** : C'est le rapport de l'épaisseur maximale à la corde du profil et elle est notée par la lettre e_{Max} .

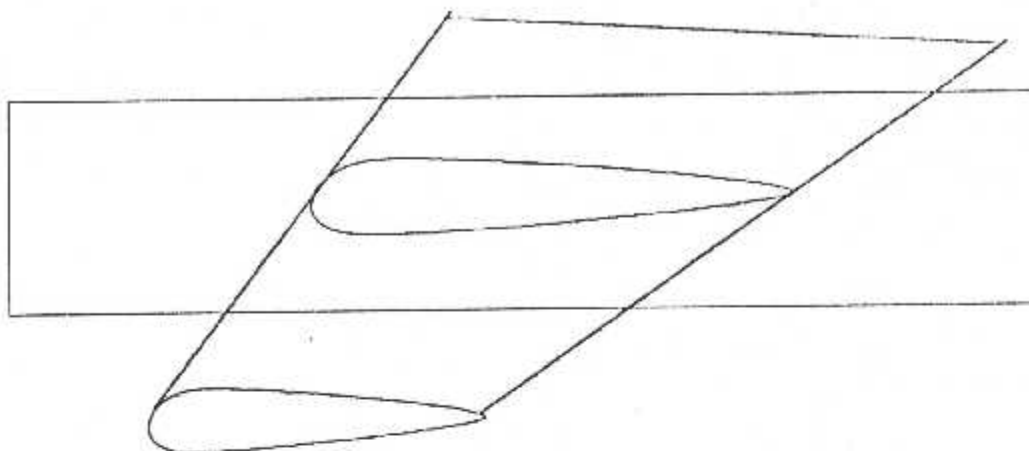


Fig.II.1 : Définition d'un profil d'aile

Bord d'attaque

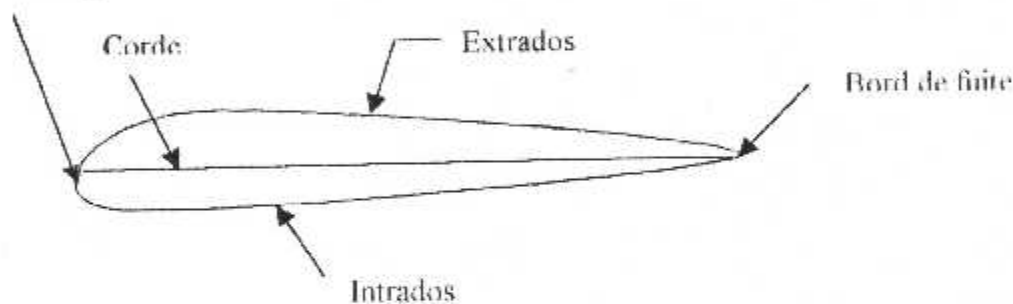


Fig.II.2 : Références d'un profil

Epaisseur maximale

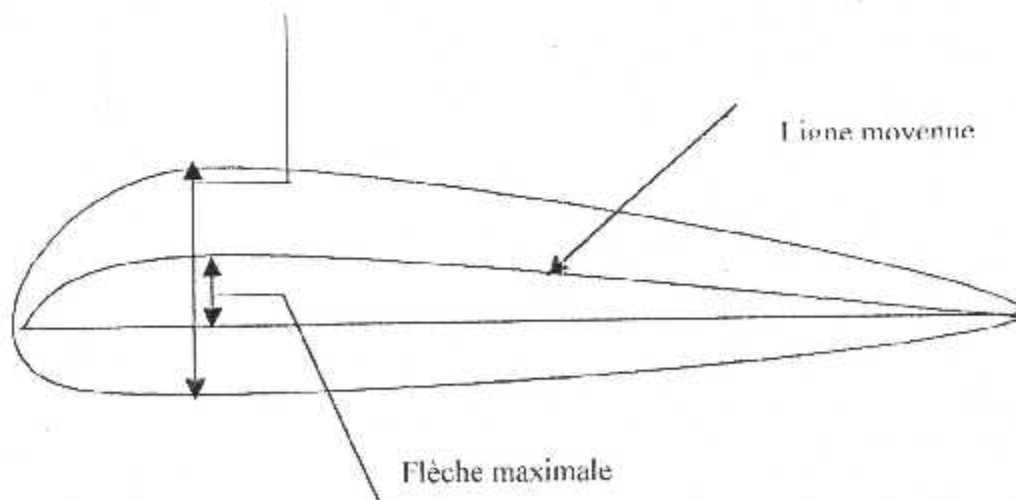


Fig.II.3 : Caractéristiques géométriques d'un profil

Remarque : L'épaisseur relative est comptée en pour cent de la corde, il permet aussi de classer les profils :

- Si $h < 6\%$ le profil est dit mince.
 - Si $6\% < h < 12\%$ le profil est dit semi-épais.
 - Si $h > 12\%$ le profil est dit épais.
- **Flèche maximale :** C'est la distance maximale entre la ligne moyenne et la corde du profil (Fig.11.3).
 - **Courbure relative :** C'est le rapport de la flèche maximale à la corde du profil.

11.3 Les différentes formes de profil

- **Profil biconvexe symétrique :**

Un profil est dit biconvexe symétrique quand l'extrados et l'intrados sont convexes et symétriques par rapport à la corde dans ce cas, la ligne moyenne et la corde sont confondues, la flèche ainsi que la courbure relative sont nulles (Fig.11.4.a).

- **Profil biconvexe dissymétrique :**

Pour ce type de profil, la cambrure de l'extrados est plus accentuée que celle de l'intrados.

Mentionnant aussi que l'angle de portance nulle est généralement de l'ordre de -2° à -3° . Ce type de profil est plus employé pour les ailes d'avion (Fig.11.4.b).

- **Profil plan convexe :**

Dans ce type de profils l'extrados est convexe et l'intrados est plan (Fig.II.4c).

- **Profil creux :**

Sur ce type de profils l'extrados est convexe par contre l'intrados est concave. Ce type de profils est généralement utilisé pour les planeurs, aubes de turbine et dispositifs de bord d'attaque (Fig. II. 4d).

- **Profil à double courbure :**

Ces profils sont auto-stables, contrairement aux autres types qui sont instables et nécessitant un empennage horizontal pour la stabilité longitudinale de l'avion (Fig.II.4. e).

- **Profile laminaire :**

C'est un profil mince, biconvexe symétrique, bord d'attaque à lame de couteau. Il est utilisé aux grandes vitesses (Fig. II .4 f).

II.4 Désignation d'un profil

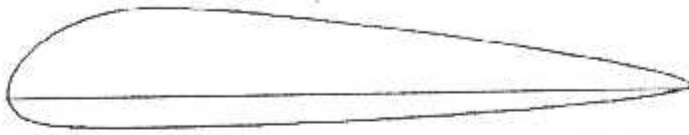
Les principaux pays constructeurs d'avion disposent de toute une gamme de profils :

- En Allemagne les profils GOTTINGEN (GOT).
- En France les profils EIFFEL.
- En Grande Bretagne les profils RAF.
- Aux U.S.A les profils CLARCK et NACA.

Les profils les plus étudiés et les plus utilisés dans la recherche aéronautique sont les profils NACA.



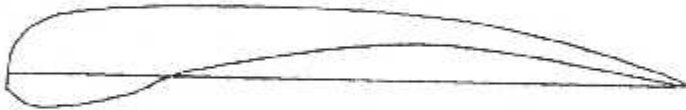
a) Profil biconvexe symétrique



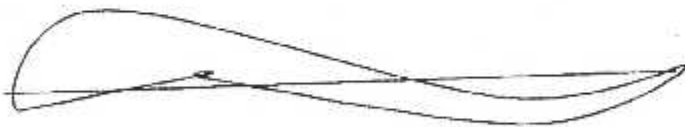
b) Profile biconvexe dissymétrique



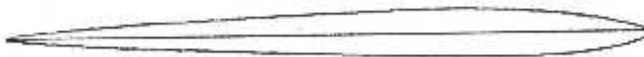
c) Profil plan convexe



d) Profil creux



e) Profil à double courbure



f) Profil laminaire

Fig.II.4 : Les différentes formes des profils

Les profils NACA sont caractérisés par la séparation des effets de courbure et de la distribution d'épaisseur et dont les résultats expérimentaux sont performants à un nombre de Reynolds élevé.

II.4.1 Série NACA quatre chiffres

La première famille des profils NACA, a été la série NACA quatre chiffres. La distribution d'épaisseur pour ce type de profil est donnée par la relation suivante :

$$\pm y_e = \left(\frac{e_{\max}}{0.20} \right) (0,2969 \sqrt{x} - 0,1260 x - 0,3516 x^2 + 0,2843 x^3 - 0,1015 x^4) \quad (II.1)$$

h : L'épaisseur maximale exprimée comme une fraction de la corde.

Le rayon du bord d'attaque est :

$$r_e = 1,1019 e^2 \quad (II.2)$$

La forme des lignes moyennes est exprimée analytiquement comme deux arcs d'une parabole tangents à la position de l'ordonnée maximale de la ligne moyenne.

Les équations définissant les lignes moyennes sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_c = \frac{m}{p^2} (2px - x^2) \text{ en amont de la position maximale.} \\ \text{et} \\ y_c = \frac{m}{(1-p)^2} [(1-2p) - 2px - x^2] \text{ en aval de la position maximale} \end{array} \right. \quad (II.3)$$

Où m est l'ordonnée maximale de la ligne moyenne exprimée en fraction de la corde.

p : la position de l'ordonnée maximale.

Pour le profil série NACA quatre chiffres, le premier entier indique la valeur maximale de la cambrure en pour cent de la corde. Le second chiffre indique en

dixième de la corde la position de la cambrure maximale à partir du bord d'attaque. Les deux derniers entiers indiquent l'épaisseur maximale en pour cent de la corde.

Exemple : Pour le profil NACA 2415, la cambrure maximale est de 2% de la corde localisée à 0,4 de la corde à partir du bord d'attaque et l'épaisseur maximale est égale à 15% de la corde.

Note : Un profil sans cambrure où la ligne moyenne coïncide avec la corde est un profil symétrique comme NACA 0012, NACA 0024, ... etc.

II.4.2 Série NACA cinq chiffres

Pour les profils NACA cinq chiffres la distribution d'épaisseur est identique à celle des profils NACA quatre chiffres.

Les lignes moyennes sont définies par deux équations afin de produire des configurations ayant la courbure approximativement décroissante à partir du bord d'attaque vers l'arrière. Ces équations sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_c = \frac{1}{6} k_1 (x^3 - 3mx^2 + m^2(3-m)x) & \text{pour } 0 \leq x \leq m \\ y_c = \frac{1}{6} k_1 m^3 (1-x) & \text{pour } m \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (II.4)$$

Les valeurs de m et k_1 sont données et variables dépendant de la position de la cambrure maximale.

Pour cette série, le premier chiffre indique le coefficient de portance en le multipliant par (3/20). Le deuxième et le troisième chiffre indiquent à partir du bord d'attaque la position de cambrure maximale en pour cent de la corde en les multipliant

par (1/2). Les deux derniers chiffres donnent l'épaisseur maximale en pour cent de la corde.

Exemple : Pour le profil NACA 23012, le coefficient de portance est de 0,3, la cambrure maximale est de 15 % de la corde et l'épaisseur maximale est égale à 12% de la corde du profil.

II.4.3 La série modifiée des NACA quatre et cinq chiffres

Les modifications importantes pour les deux séries, consistent à la variation systématique de la distribution d'épaisseur. Ces modifications sont indiquées par deux chiffres situés après le tiret comme NACA 0012-64 ou NACA 23012-64.

Le premier chiffre après le tiret indique la grandeur relative du rayon du bord d'attaque qui varie comme le carré de ce chiffre sauf pour les valeurs supérieures à huit (8), pour lesquelles la variation devient arbitraire. Le second chiffre indique la position de l'épaisseur maximale en dixième de la corde.

Les épaisseurs modifiées sont définies par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \pm y_c = a_0 \sqrt{x} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 & \text{en avant de la position de l'épaisseur maximale} \\ \pm y_c = d_0 + d_1 (1-x) + d_2 (1-x)^2 + d_3 (1-x)^3 & \text{en arrière de la position de l'épaisseur maximale} \end{cases}$$

Les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 sont déterminés à partir des conditions suivantes :

- Epaisseur maximale.
- Position de l'épaisseur maximale.
- Rayon du bord d'attaque.

- Rayon de courbure au point d'épaisseur maximale.

Les coefficients d_0, d_1, d_2, d_3 sont déterminés à partir des conditions suivantes :

- Epaisseur maximale.
- Position de l'épaisseur maximale.
- Les coordonnées du bord de fuite.
- Angle de bord de fuite.

II.4.4 Profils NACA série-1

Les profils NACA série-1 sont la première famille des profils ayant une faible traînée et une grande vitesse critique et cela dans le but de répondre à l'une des exigences de la couche limite laminaire.

Ce type de profils est caractérisé par des petits rayons de bord d'attaque et relativement de grands angles de bord de fuite. Pour ce type de profils la pression minimale est située à 60% de la corde à partir du bord d'attaque.

Les profils NACA série-1 sont désignés par cinq chiffres, par exemple pour le NACA 16-212, le premier chiffre représente le numéro de la série. Le second chiffre indique la distance en dixième de la corde à partir du bord d'attaque de la position de la pression minimale pour une portance nulle. Le premier chiffre après le tiret indique la signification de la cambrure exprimée en terme du coefficient de portance en dixième. Les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur maximale en pour cent de la corde.

II.4.5 Profils NACA série six chiffres

Les données concernant la distribution d'épaisseur pour ce type de profils sont similaires aux données des profils NACA quatre chiffres, excepté que l'ordonnée pour

le rapport d'épaisseur intermédiaire peut ne pas être correctement obtenue par variation des ordonnées tabulées proportionnelles aux rapports d'épaisseurs. Le changement des ordonnées par un facteur produira des formes satisfaisantes si la variation de rapports d'épaisseurs est petite.

Les lignes moyennes communément utilisées avec la série NACA six chiffres produisent un changement uniforme le long de la corde, à partir du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite.

Les profils NACA série six sont généralement désignés par six chiffres avec une indication de type de la ligne moyenne utilisé. Par exemple, dans la désignation NACA65₃-218, $a=0,5$, le premier chiffre indique la désignation de la série. Le deuxième chiffre indique la position du point de pression minimal tout au long et en dixième de la corde. Le premier chiffre qui suit la virgule donne la distribution du coefficient de portance en dixième dans la quelle la distribution de la pression est uniforme sur le profil. Le premier chiffre après le tiret représente le coefficient de portance en dixième au point de conception.

Les deux derniers chiffres indiquent l'épaisseur maximale en pour cent de la corde.

La désignation $a=0,5$ indique le type de ligne moyenne utilisée. Si "a" n'est pas donné donc c'est une ligne moyenne uniforme ($a=1$).

Notons qu'ils existent d'autres désignations pour ce type de profils.

II.4.6 Profils NACA série sept chiffres

Les profils NACA série sept chiffres sont caractérisés par un nombre de Reynolds d'écoulements laminaires possibles sur les deux surfaces du profil.

Ces profils permettent un faible coefficient du moment de tangage et relativement avec un grand coefficient de portance.

Les profils NACA série sept chiffres sont définis par la désignation suivante :
NACA 747A315.

Le premier chiffre désigne le numéro de la série. Le deuxième chiffre indique la mesure sur la surface supérieure en dixième de la corde à partir du bord d'attaque, du gradient de la pression favorable pour l'extrados. Le troisième chiffre indique la mesure sur la surface inférieure en dixième de la pression favorable pour l'intrados. La signification des trois derniers chiffres est identique à celle des profils NACA série 6.

La lettre de la série "A" désigne les différents types de profils ayant des paramètres correspondant à la même désignation numérique. Par exemple, un second profil ayant le même gradient de pression favorable sur les deux surfaces (supérieure et inférieure) du profil, le même rapport d'épaisseur que celui du profil d'aile original, mais ayant une ligne moyenne ou une distribution d'épaisseur différente, sera désigné par lettre de la série B.

II.5. Voilure

II.5.1 Surface de référence (S) :

Par convention, la surface de référence d'un profil est la surface projetée sur un plan horizontal des deux ailes et de la partie du fuselage comprise entre ces deux ailes.

II.5.2 Caractéristiques géométriques d'une voilure

Sur les avions, le profil diffère au fur et à mesure que l'on s'éloigne du fuselage. On dit que l'aile est vrillée. Il faut distinguer le vrillage géométrique et le vrillage aérodynamique.

Il y a vrillage géométrique quand le profil reste semblable à lui-même le long de l'aile, seul l'angle de calage varié.

Il y a vrillage aérodynamique quand la courbure du profil varie le long de l'aile.

Généralement les profils de référence, sont choisis au niveau de l'encastrement de l'aile dans le fuselage. Le calage diminue de l'emplanture à l'extrémité de l'aile.

- **Envergure d'une aile (B) :**

C'est la longueur B d'une extrémité de la voilure à l'autre comptée perpendiculairement à l'axe longitudinal de l'avion.

- **Corde moyenne géométrique :**

La corde étant plus grande à l'emplanture qu'aux extrémités, on définit une profondeur moyenne l_m par le rapport :

$$l_m = \frac{S}{B} = \text{surface de référence} / \text{envergure}$$

- **Effilement :**

$$\text{Effilement} = \frac{h}{l_2}$$

En général, corde et épaisseur relative varient de l'emplanture à l'extrémité de l'aile (Fig.II.5).

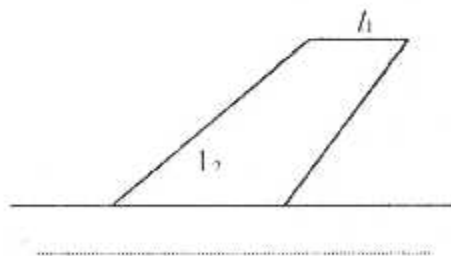


FIG.II.5 : Effilement

• **Allongement λ :**

L'allongement d'une aile est défini par le rapport :

$$\lambda = \frac{B}{l_m} = \frac{B^2}{S}$$

Cette grandeur sans dimension, joue un rôle important dans l'étude de la traînée induite.

Ordre de grandeur : $\lambda=4$ à 6 pour avions de chasse
 $\lambda=6$ à 10 pour transporteurs et bombardiers
 $\lambda=15$ à 30 pour les planeurs

	Concorde	Air bus
B(m)	25.6	45.0
S(m ²)	420	260
λ	1.6	7.8

• **Dièdre géométrique d'une voilure :**

C'est l'angle que fait le plan des cordes de chaque aile (plan de l'aile) avec le plan horizontal perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion. Le dièdre peut être positif, négatif ou nul.

Le dièdre a une influence sur la stabilité latérale d'un avion (Fig.II.6)



Fig.II.6 : Dièdre d'une aile

- **Flèche d'une voilure :**

C'est l'angle formé entre une ligne de référence longitudinale de la voilure et la perpendiculaire au plan de symétrie de l'avion. Elle est exprimée en degré, peut être >0 , <0 ou nulle (**Fig.II.7**). La flèche a une influence sur la stabilité de route d'un avion. De plus, la flèche permet de retarder l'apparition des phénomènes de compressibilité pour les avions avoisinant les vitesses du son.

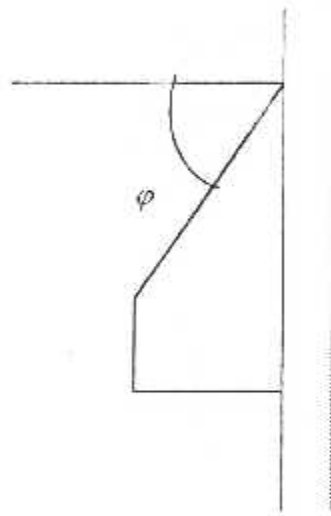


Fig.II.7 Flèche d'une voilure

Chapitre III

*Caractéristiques aérodynamiques relatives
aux profils d'ailes et aux voilures*

III.1 Les forces en action

L'aérodynamique appliquée a pour objectif la mesure et la prédiction des propriétés aérodynamiques des corps en mouvement dans l'air.

En un point P quelconque, ces forces sont de deux types :

- La force de pression qui agit perpendiculairement à la surface du corps.
- La force de frottement qui agit tangentiellement.

Pour l'étude de ces forces, il revient au même de considérer l'air en mouvement autour du corps immobile ou le corps en mouvement dans l'air immobile.

a) Les forces de pression :

Lorsqu'une molécule de gaz (constituant de l'air) heurte la surface du corps avec une certaine vitesse, elle transfère à celui-ci une certaine quantité de mouvement. Ce transfert est à l'origine d'une pression, dont on montre qu'elle est proportionnelle à cette quantité de mouvement et au nombre de molécules heurtant une unité de surface du corps par unité de temps (Fig. III .1.).

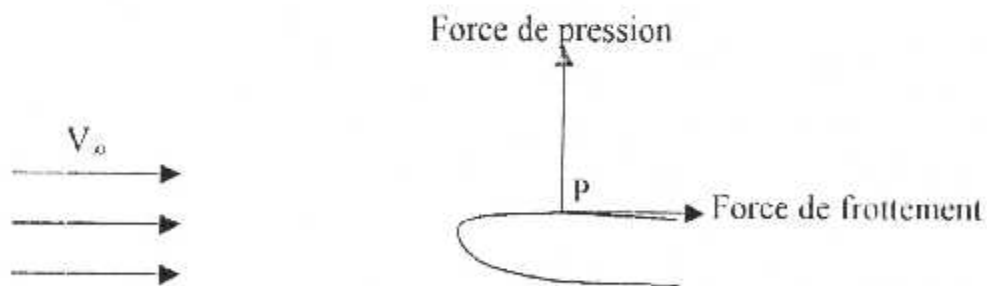


Fig.III.1 Forces en action

b) Les forces de frottement :

Du fait de sa viscosité, l'air est ralenti au voisinage de la surface du corps, la zone de ralentissement est appelée couche limite.

La couche limite est une zone de faible épaisseur (quelques centimètres pour l'avion) où les effets de viscosité sont prépondérants.

Elle prend naissance du point d'arrêt puis se développant jusqu'au bord de fuite.

La couche limite a pour effet aussi d'augmenter la courbure réelle du corps.

III.2 Principes de sustentation

III.2.1 Naissance de la portance

Lorsqu'une aile placée dans un flux d'air celui-ci se divise au niveau de la partie avant de l'aile (bord d'attaque) en deux parties ; l'une s'écoule sur le dessus de l'aile (l'extrados) et l'autre sur le dessous de l'aile (l'intrados). Une loi aérodynamique montre que le flux supérieur et le flux inférieur doivent se rejoindre à la partie arrière de l'aile (bord de fuite). Le profil de l'aile étant conçu de telle sorte que l'extrados soit plus courbé que l'intrados, le flux d'air passant à l'extrados doit s'accélérer pour rejoindre le flux d'air qui passe par l'intrados et qui a parcouru un chemin plus court.

A partir de la loi de Bernoulli, on peut montrer que l'augmentation de vitesse à l'extrados se traduit également par une diminution de la pression de l'air et inversement pour l'intrados.

En résumé, la portance de l'aile est due à une aspiration au niveau de l'extrados qui crée une force dirigée vers le haut.

III.2.2 Répartition des pressions autour d'un profil

La répartition des pressions qui résultent de l'écoulement, est représentée par des flèches qui partent du profil en dépression, ou qui y arrivent en surpression. (Fig.III.2).

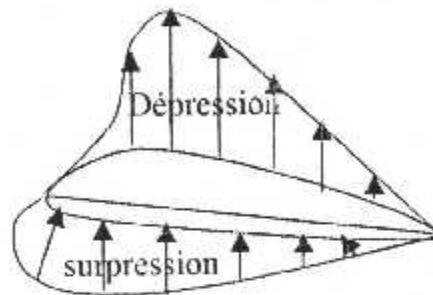


Fig.III.2 Répartition des pressions autour d'un profil

III. 3 Résultante aérodynamique

La force appelée « résultante aérodynamique » qui s'exerce sur l'aile dépend des propriétés du profil, du carré de la vitesse de l'écoulement d'air, de l'angle d'incidence du profil par rapport à l'écoulement et de la surface de l'aile.

1 Facteurs influant sur la résultante aérodynamique :

a) Paramètres subis :

- la masse volumique de l'air
- la forme de l'aile
- la surface à l'aire (de référence)
- la courbure du profil

b) Paramètres pilotes :

- la vitesse
- l'angle d'incidence

2 Origine :

C'est la somme des forces de :

- surpression d'intrados
- dépression d'extrados
- frottement sur le profil dû à la viscosité de l'air

L'ensemble de ces forces constitue la résultante aérodynamique.

3 Caractéristique :

- point d'application : centre de poussée
- direction oblique vers l'arrière
- sens : oblique, vers l'arrière, du centre de poussée vers l'extrados
- intensité : $R = \frac{1}{2} \rho V_p^2 S C_R$ obtenue en soufflerie pour différentes angles d'attaque α
- Un coefficient aérodynamique c qui dépend de :
 - la forme du profil
 - l'état du profil
 - l'incidence α
 - La compressibilité

4) Composantes de la résultante R :

La résultante R se décompose en deux forces (**Fig.III.3**).

- L'une perpendiculaire à l'écoulement de l'air ; la portance F_y .
- L'autre parallèle à l'écoulement de l'air ; la traînée F_x .

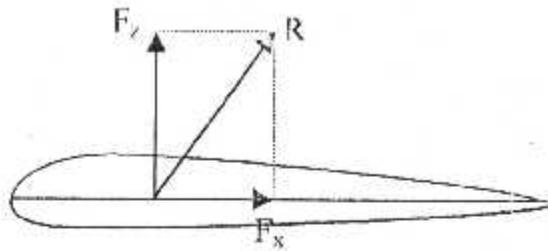


Fig.II.3 : Composantes de la résultante aérodynamique

III.3.1 La portance

• Caractéristiques définies expérimentalement :

La portance est la composante de la résultante aérodynamique perpendiculaire à la vitesse.

- point d'application : centre de poussée
- direction : perpendiculaire à l'écoulement de l'air, pris en amont du profil
- sens : du centre de poussée vers l'extrados.
- intensité : $F_z = \frac{1}{2} \rho V_p^2 S C_z$

Le coefficient aérodynamique C_z dépend de plusieurs paramètres.

• Détermination de C_z :

A partir de la valeur de la portance F_z obtenue en soufflerie, le coefficient de portance C_z est déterminé expérimentalement pour un profil donné en faisant varier l'angle d'attaque α (Fig.III.3.1).

$$C_z = \frac{2F_z}{\rho.S.v_p^2}$$

Ain si, le coefficient de portance dépend d'autres paramètres ;

- l'incidence α (essentiellement en incompressible)
- la forme du profil : courbure et épaisseur relatives
- l'état de la surface du profil
- la forme de l'aile ; allongement, flèche et géométrie
- nombre de Reynolds
- la compressibilité

1) Influence de l'incidence :

Des paramètres énoncés ci dessus, l'incidence est le plus variable au cours des différentes phases du vol. En soufflerie la valeur de C_z est déterminée pour chaque valeur de α

La courbure obtenue pour les incidences usuelles (Fig.III.4) est de la forme :

$$C_z = a + b\alpha$$

Pour un profil biconvexe dissymétrique la courbe de $C_z = f(\alpha)$ peut être tracée.

Remarque

- Cette courbe est linéaire pour $-12^\circ < \alpha < +15^\circ$
- C_z passe par un maximum (≈ 1.08 pour $\alpha = 18^\circ$)
- C_z passe par un minimum (≈ -0.8 pour $\alpha = -15^\circ$)
- Pour $\alpha = 0$, $C_z = a$
- $C_z = 0$ pour $\alpha = -1^\circ$
- La pente de la courbe représente le gradient de portance « b »

$$b = \frac{\Delta C_z}{\Delta \alpha} \quad (\alpha \text{ exprimée en degrés ou en radian})$$

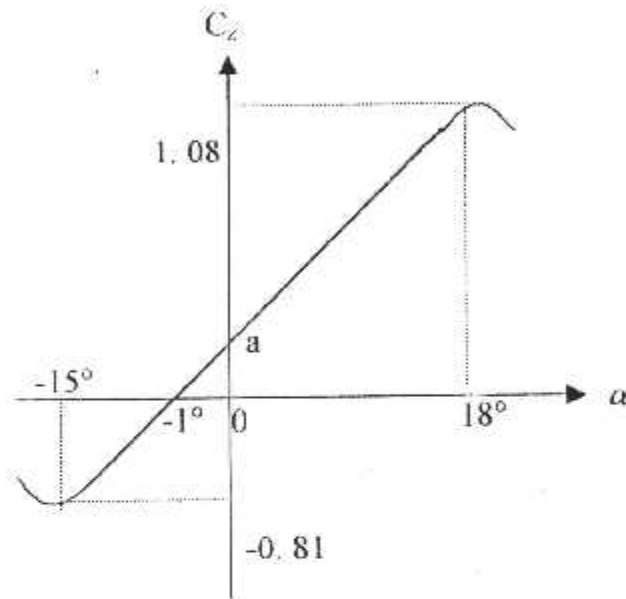


Fig.III.4 : Influence de l'incidence pour un profil NACA 23012.

2) Influence de la forme du profil :

Deux grandeurs essentielles caractérisant la forme du profil :

- la courbure relative
- l'épaisseur relative

La courbure relative, lorsqu'elle augmente :

- diminue α_0 de quelques degrés
- ne change guère le gradient de portance $\frac{\Delta C_z}{\Delta \alpha}$
- augmente le $C_{z \max}$

l'épaisseur relative, lorsqu'elle augmente :

- ne change (ou peu) α_0
- diminue le gradient de portance $\frac{\Delta C_z}{\Delta \alpha}$
- augmente le $C_{z, \max}$

3) Influence de l'état de surface :

pour une surface de profil présentant des aspérités :

- α_0 ne change pas
- le gradient de portance diminue
- le $C_{z, \max}$ diminue

4) Influence de l'allongement :

les variations d'allongement ne modifient pas :

- α_0
- $C_{z, \max}$. (on constate cependant expérimentalement une légère augmentation du $C_{z, \max}$ avec λ qui augmente)

les variations d'allongement modifient :

- le gradient de portance $b = \frac{\Delta C_z}{\Delta \alpha}$ qui augmente lorsque λ augmente
- l'incidence de $C_{z, \max}$ diminue si λ augmente
- à α donnée, si λ augmente donc C_z augmente (Fig.III.5)

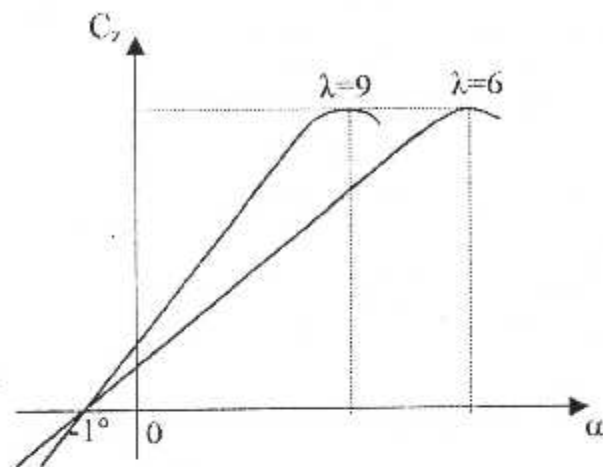


Fig.III.5 : Influence de l'allongement pour un profil NACA 23012

5) Influence de la flèche :

La flèche de la voilure ne change pas :

- α_0
- $C_{z \max}$ (on constate cependant expérimentalement une légère diminution de $C_{z \max}$ aux fortes flèches)

La flèche, lorsqu'elle augmente :

- dégrade le gradient de portance
- augmente l'incidence de $C_{z \max}$ (avion très cabré à l'atterrissage)

(Fig.III.6)

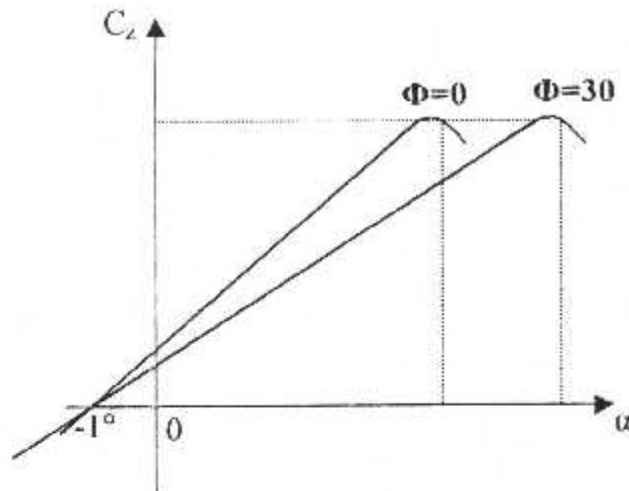


Fig.III.6 : Influence de la flèche pour un profil NACA 23012

6) Influence du nombre de Reynolds Re :

Plus le nombre de Reynolds Re est important, plus la couche limite turbulente est importante

III.3.2 La traînée

Le caractère visqueux des fluides réels entraîne l'apparition d'une force de traînée qui s'oppose au mouvement de l'aile.

Les aérodynamiciens distinguent deux types de traînée dans l'écoulement des fluides réels.

1) La traînée de frottement : qui résulte de la composante tangentielle du vecteur contrainte à la surface du corps solide. Elle provient uniquement des contraintes visqueuses à la paroi.

2) La traînée de pression : qui résulte de la composante normale du vecteur contrainte à la paroi ce qui correspond usuellement au champ de pression pariétal.

- **Effet des formes des corps :** la forme d'un objet qui se déplace dans l'air a une énorme influence sur la traînée induite.

L'écoulement de l'air varie selon la forme du profil.

Les profils rectangulaires et sphériques provoquent une forte perturbation d'écoulement d'air. Les filets d'air s'écoulent très mal et nuisent à l'avancement. L'écoulement aérodynamique est optimal avec une forme profilée telle qu'y'est dessinée une aile d'avion ; les filets d'air se déplacent de part et d'autre de l'aile avec minimum de perturbations.

- **Caractéristiques définies expérimentalement :**

La traînée F_x est la composante de la résultante aérodynamique parallèle à la vitesse.

- point d'application : centre de poussée
- direction : parallèle à l'écoulement de l'air pris en amont du profil
- sens : du centre de poussée vers le bord de fuite
- intensité : $F_x = \frac{1}{2} \rho V_p^2 S C_x$

- **Détermination du coefficient de traînée C_x :**

Comme pour la portance, il est plus commode de raisonner sur C_x . On peut le déterminer par la formule :

$$C_x = \frac{2.F_x}{\rho.S.v_p^2}$$

Cependant C_x dépend de :

- l'incidence (essentiellement)
- la forme du profil (courbure et épaisseur relatives)
- l'état de la surface du profil

- nombre de Reynolds
- la compressibilité

• Origine de la traînée :

- la traînée de forme du profil F_{xR}
- la traînée de frottement F_{xF}
- la traînée induite F_{xI}

Nous étudions deux types de coefficient de traînée :

- $C_{xP} = C_{xR} + C_{xF}$ coefficient de traînée de profil
- C_{xI} coefficient de traînée induite
- $C_x = C_{xI} + C_{xP}$ (le C_x total, en incompressible)

• Le coefficient de traînée de profil C_{xP}

Les caractéristiques essentielles d'un profil sont :

- l'épaisseur relative
- la courbure relative

Ces deux paramètres lorsqu'ils augmentent engendrent un accroissement de la traînée de forme et de la traînée de frottement.

La traînée de forme est évidemment plus importante pour l'avion complet que pour l'aile seule.

• Le coefficient de traînée induite C_{xI}

La traînée induite par la portance est la conséquence du mode de sustentation de l'avion ; la portance implique une traînée induite.

En effet, la sustentation est assurée par la diminution de pression à l'extrados et par l'augmentation de pression à l'intrados.

Il s'ensuit que :

- à l'extrémité de chaque aile, l'air se divise de l'intrados vers l'extrados donnant naissance à des tourbillons appelés « **tourbillons marginaux** »

- au bord de fuite, les filets d'air d'intrados et d'extrados se présentent suivant des directions différentes. Ceci donne naissance à des tourbillons tout le long du bord de fuite.

Ces tourbillons sont appelés « **tourbillons libres** ». Ces tourbillons absorbent de l'énergie et créent une forte résistance (traînée induite).

La valeur du C_{xi} est donnée pour une aile en plan elliptique par la relation de PRANDTL

$$C_{xi} = \frac{C_z^2}{\pi\lambda}$$

La traînée induite sera d'autant plus importante que :

- C_z sera élevé (Δp intrados /extrados grand)aux grands angles d'attaque.
- l'allongement λ sera faible (pour une aile de grande envergure, les déviations d'intrados et d'extrados seront moins important et par suite les tourbillons libres moins intenses).
- dépend essentiellement de la forme en plan de l'aile C_x (elliptique, rectangulaire...etc.)

- Courbe de $C_x = f(\alpha)$:

La courbe $C_x = f(\alpha)$ possède approximativement la forme d'une parabole pour les incidences α . Elle ne coupe pas l'axe des α , donc quelque soit l'incidence de l'aile, on ne pourra jamais annuler la traînée (**Fig.11.7**).

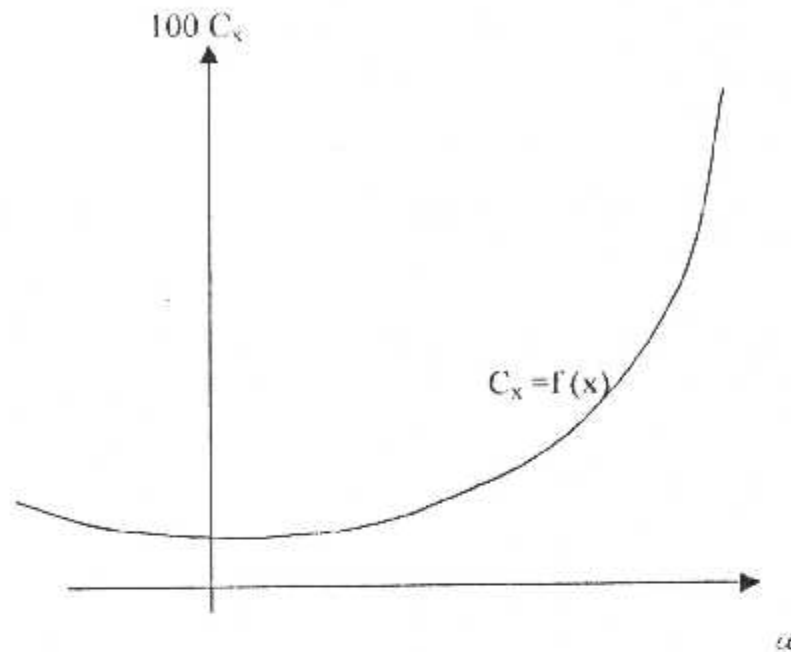


Fig.III.7 : Courbe de $c_x = f(\alpha)$ pour un profil NACA 23012

III.4 Polaires

Deux types de polaires :

- EIFFEL
- LILIENTHAL

III.4.1 Définition de la polaire d'EIFFEL

Le physicien Eiffel a appelé polaire la courbe donnant les variations de C_z en fonction de C_x dans un système lié à la vitesse. Cette représentation graphique résume en une seule courbe les deux courbes vues précédemment :

$$C_z = f(\alpha) \text{ et } C_x = f(\alpha)$$

• **Détermination :**

Dans ce système lié à la vitesse, faisons varier α , (Fig.III.8).

La polaire graduée en incidence α son allure sensiblement parabolique permet d'écrire :

$$C_x = C_{xp} + \frac{C_z^2}{\lambda\pi} \quad \text{ou} \quad C_x = a + b C_z^2$$

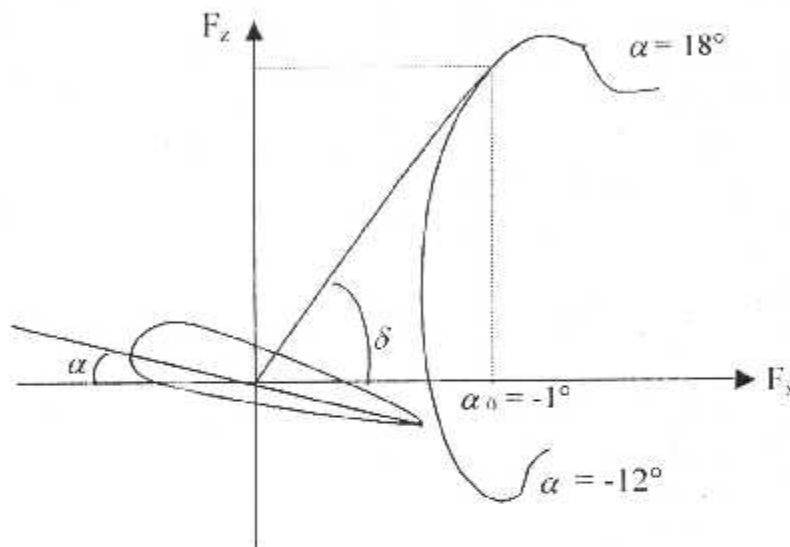


Fig.III.8 : Polaire d'Eiffel pour un profil NACA 23012

• **Points remarquables de fonctionnement :**

- α de C_z max. ($+18^\circ$), C_z max. $-1,08$
- α de $C_z=0$ implique que $\alpha_0 = -1^\circ$
- α de C_x min ($+1^\circ$), C_x min $=0,01$
- α de finesse maximale ($+4,5^\circ$)

• **La finesse :**

La finesse constitue la caractéristique qui jauge les performances d'un avion. Elle mesure le rapport entre la portance et la traînée.

Par définition, la finesse est donnée par la formule :

$$f = \frac{F_z}{F_x} = \frac{C_z}{C_x} = \operatorname{tg} \delta$$

Remarque : A chaque point de la polaire correspond α , C_x , C_z et f .

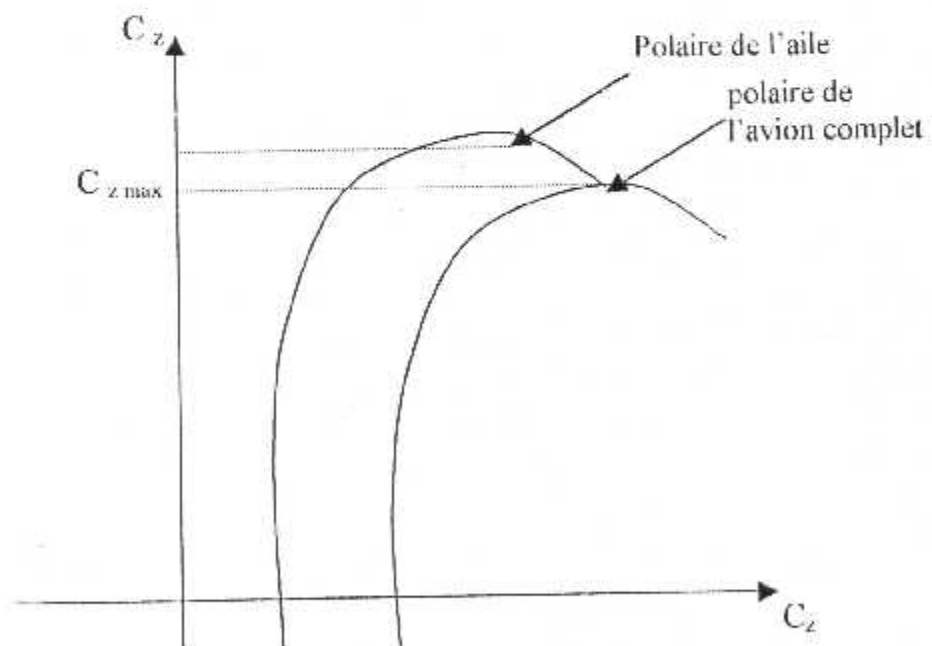
III.4.2 Polaire de l'aile et de l'avion complet

La différence entre la polaire de l'avion complet et la polaire de l'aile correspond au C_x dû au fuselage et à la présence des empennages (Fig.III.9).

Le C_x est exclusivement un C_x de forme et d'état de surface du fuselage.

La légère chute du C_z est due au fait que l'empennage horizontal est souvent déporteur.

Remarque : S'il s'agit d'un avion équipé de groupe motopropulseur le $C_{z \max}$ peut être supérieur au $C_{z \max}$ de l'aile seule, compte tenu du soufflage de la voilure par les hélices.



FigIII.9 Polaire de l'aile et de l'avion complet

III.4.3 Définition de la polaire de LILIENTHAL

La décomposition de la résultante aérodynamique se fait, non plus dans un système lié à la vitesse (EIFFEL), mais dans un système d'axes lié au profil (Fig.III.10.a).

• Détermination :

Il peut être utile de connaître la position de la résultante aérodynamique R par rapport au profil. Il suffit de calculer les coefficients C_{x1} et C_{z1} projection de C_{x1} respectivement sur la corde du profil et la normale à cette corde.

La résultante aérodynamique fait avec l'axe des abscisses (corde du profil) un angle $\delta + \alpha$ (δ si le système est lié à la vitesse).

La polaire de LILIENTHAL s'obtient donc à partir de la polaire d'EIFFEL en faisant subir à chaque point une rotation de l'incidence α de ce point autour de zéro (Fig.III.10.b).

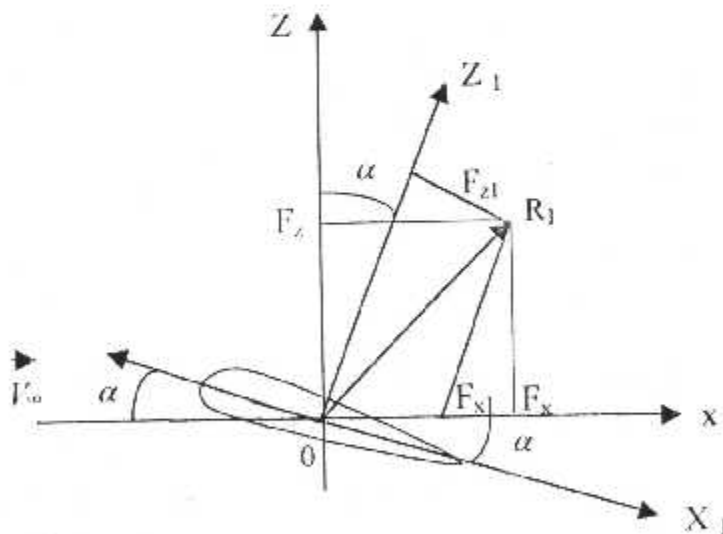


Fig.III.10.a : Détermination de la polaire de Lilienthal

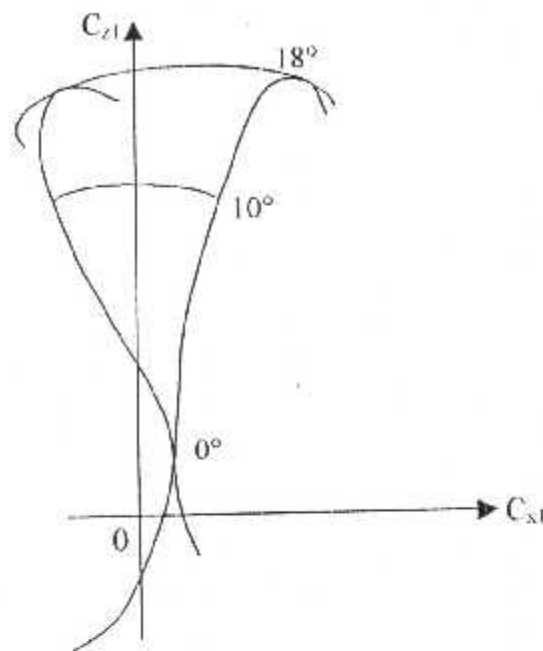


Fig.III.10b : Polaire de Lilienthal

III.5 Moment aérodynamique longitudinal

Du point de vue de la stabilité statique, les éléments suivants de l'avion sont les plus déterminants :

- la voilure
- l'empennage horizontal
- le fuselage
- l'empennage vertical

Nous considérons une voilure seule formée d'un profil à simple courbure

A chaque position d'équilibre correspond un moment aérodynamique M'_1 et une incidence α .

Le moment aérodynamique le plus intéressant est le moment de tangage (dont le coefficient de moment est noté C_m), car c'est lui qui conditionne l'équilibre longitudinal.

Le coefficient aérodynamique C_m dépend de :

- la forme du profil
- l'état du profil
- de l'incidence

On démontre que : $M'_A = \frac{1}{2} \cdot S \cdot V_p^2 \cdot C_m \cdot \rho$ et qu'elle est une équation homogène, (lest la corde de référence).

III.5.1 Détermination de C_m

A partir de l'expression du moment obtenue en soufflerie, le coefficient de moment est donc expérimentalement déterminé pour un profil donné en faisant varier α .

D'où :

$$C_m = \frac{2M'_A}{\rho \cdot S \cdot V_p^2 \cdot l}$$

III.5.2 Courbe de $C_m = f(\alpha)$

La courbe est construite pour chaque valeur α du profil de référence à simple courbure (Fig.III.11).

Par convention, le moment est :

- cambreur si $C_m > 0$
- piqueur si $C_m < 0$

III.5.3 Courbe de $C_m = f(C_x)$

Nous avons $C_x = f(\alpha)$ et $C_m = f(\alpha)$, nous pouvons déduire le tracé de $C_m = f(C_x)$ (Fig.III.12).

- Cette courbe est linéaire
- L'incidence d'équilibre est négative

- Cette courbe passe par un maximum
- Equation de la courbe dans sa partie linéaire est :

$$C_{m_A} = C_{m0} - k C_z$$

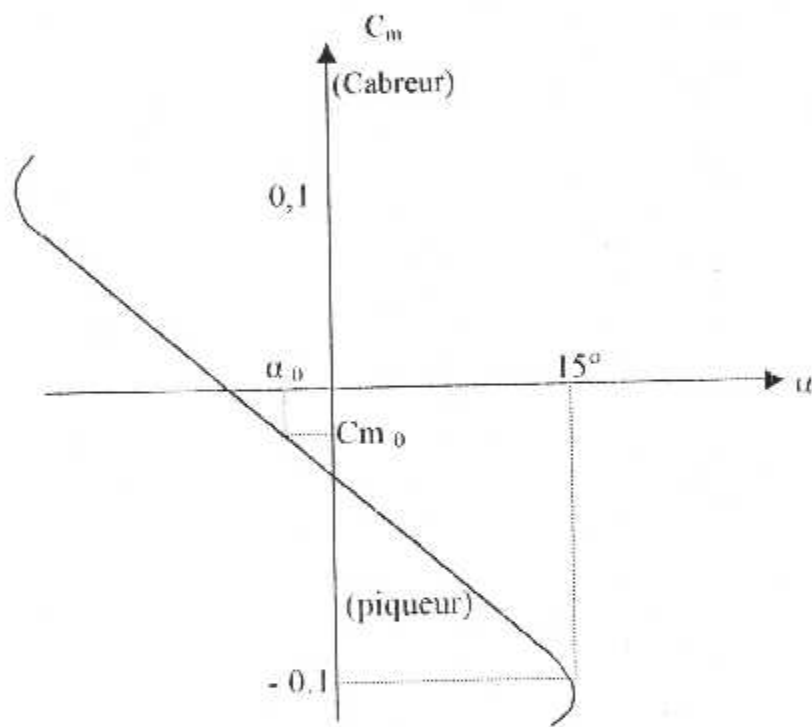


Fig.III.11 : Courbe de $C_m=f(\alpha)$ pour un profil NACA 23012

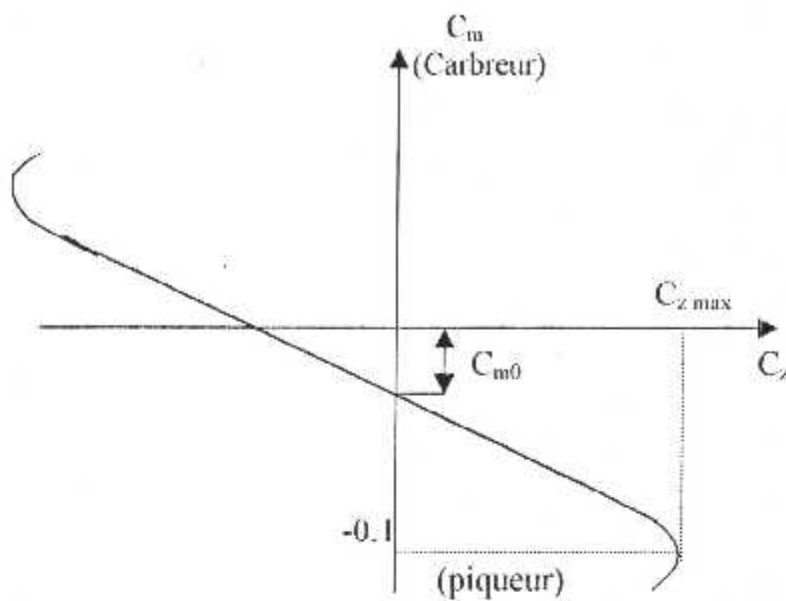


Fig.III.12 : Courbe de $C_m=f(C_z)$ pour un profil NACA 23012

III.5.4 Cas d'un profil à double courbure

Nous admettons que ce qui est démontré pour un profil à double courbure l'est pour une aile à simple courbure munie d'un empennage horizontal (Fig.III.13)

La stabilité dépend également de la position de trois points importants sur la corde de référence à savoir :

- le centre de gravité
- le centre de poussée
- le foyer

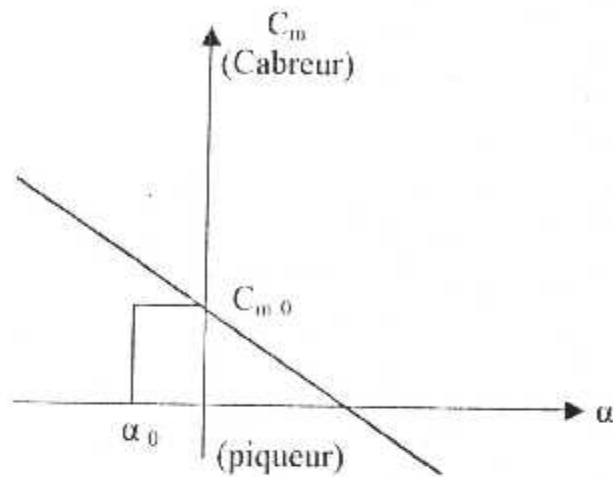


Fig.II.13 Courbe de $C_m = f(\alpha)$ d'un profil à double courbure

III.6 Centre de poussée

On appelle centre de poussée, le point d'application de la résultante aérodynamique.

• Détermination :

La position du centre de poussée est en fonction de la corde du profil, du coefficient de portance et du coefficient de moment de tangage correspond à la portance nulle, elle est donnée par :

$$\frac{d}{l} = \frac{C_{m0}}{C_l} + k$$

A une corde du profil donnée :

- profil à C_m positif, le centre de poussée recule pour des incidences croissantes.

- profil à C_m négatif, le centre de poussée avance pour des incidences croissantes.
- le centre de poussée est un point non fixe, mais qu'est confondu avec le centre de gravité en vol de croisière.

III.7 Le foyer d'une aile

Le foyer aérodynamique, ne confonde pas avec le centre de poussée, est le point où le moment longitudinal est constant à C_{m_0} , lorsque l'incidence varie.

- Le foyer avion :

Pour un avion, la voilure plus fuselage et l'empennage ont tous les deux des foyers.

On démontre qu'il existe un foyer N appelé neutre autour du quel le moment de tangage de l'avion conserve une valeur constante ($C_{m_N} > 0$).

Chapitre IV

Méthodes d'approximation et d'interpolation

IV.1 Le problème

▪ Problème général de l'approximation :

Etant donnée une fonction $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, définie soit de façon discrète, soit de façon continue, on cherche à déterminer une autre fonction $g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, de forme donnée, qui, en un certain sens, approche le mieux possible la fonction f .

▪ Cas particulier : interpolation

On considère les abscisses :

$$x_i, \quad i = 0, \dots, n. \quad (\text{IV.1})$$

f est une fonction telle que :

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (\text{IV.2})$$

Les points (x_i, y_i) sont les points d'interpolation.

Le problème consiste à construire une fonction g , de forme donnée, qui prend aux points d'interpolation les mêmes valeurs que f .

Le cas le plus courant est celui de l'*interpolation polynomiale* pour lequel la fonction g est un polynôme $P_n(x)$, de degré $\leq n$:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (\text{IV.3})$$

Une généralisation de l'interpolation polynomiale est l'*interpolation spline* pour laquelle la fonction interpolante est une fonction continue $S(x)$, dérivable sauf aux points d'interpolation, constituée de morceaux de polynômes de degré p ($< n$ et en

général petit) dont les dérivées se raccordent, jusqu'à un certain rang $< p$, aux points d'interpolation.

IV.2 Approximation

On peut citer deux types d'approximation

- approximation rationnelle
- approximation au sens des moindres carrés

IV.2.1 Approximation rationnelle :

Approximation de Padé :

On approche la fonction $f(x)$ donnée par une fraction rationnelle $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, où $P_n(x)$ et $Q_m(x)$ sont des polynômes de degré n et m respectivement, tels que le développement limité au voisinage de α de $f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ait son terme constant ainsi que les termes en $(x - \alpha)$, $(x - \alpha)^2$, $(x - \alpha)^{n+m}$, nuls.

Le calcul consiste à identifier à 0 ces $n+m+1$ termes (Voir l'annexe A pour l'exemple).

IV.2.2 Approximation au sens des moindres carrés :

• Cas général :

Soient u_0, u_1, \dots, u_n , $n+1$ éléments d'un espace vectoriel V , linéairement indépendants, E le sous-espace vectoriel de V engendré par ces vecteurs, et $f \in V$.

La meilleure approximation \bar{u} de f sur E est :

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^n a_i u_i \quad (IV.4)$$

où les a_i sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{i=0}^n a_i \langle u_i, u_j \rangle = \langle f, u_j \rangle \quad j = 0, \dots, n \quad (IV.5)$$

- **Approximation polynomiale discrète :**

On considère les abscisses x_i , $i = 0, \dots, p$. f est une fonction telle que :

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, p \quad (IV.6)$$

On veut approcher l'ensemble discret de points (x_i, y_i) par un polynôme de degré n :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (IV.7)$$

Donc:

$$u_0 = x^n, u_1 = x^{n-1}, \dots, u_{n-1} = x, u_n = 1 \quad (IV.8)$$

(E est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$)

Le produit scalaire est défini par:

$$(g, g_2) = \sum_{i=0}^p g_i(x) g_2(x_i) \quad (IV.9)$$

Les a_i sont solutions du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^{2n} & \sum x_i^{2n-1} & \sum x_i^{2n-2} & \dots & \dots & \sum x_i^n \\ \sum x_i^{2n-1} & \sum x_i^{2n-2} & \dots & \dots & \dots & \sum x_i^{n-1} \\ \sum x_i^{2n-2} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \sum x_i & \vdots \\ \sum x_i^n & \dots & \dots & \dots & \sum x_i & p+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i x_i^n \\ \sum y_i x_i^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

(cas $n = 1$: droite de régression)

(Voir l'annexe A pour l'exemple)

- Approximation polynomiale continue :

On veut approcher sur un intervalle donné $[a, b]$ une fonction donnée f par un polynôme de degré n :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Donc :

$$u_0 = x^n, u_1 = x^{n-1}, \dots, u_{n-1} = x, u_n = 1$$

(E est l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$)

Le produit scalaire est défini par :

$$(g_1, g_2) = \int_a^b w(x) g_2(x) g_1(x) \quad (\text{IV.10})$$

($w(x)$ fonction poids)

(Voir l'annexe A pour l'exemple)

- **Approximation trigonométrique :**

Analogue à l'approximation polynomiale; un polynôme trigonométrique de degré n est défini par :

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (\text{IV.11})$$

Donc :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \cos x, \quad u_2 = \sin x, \quad u_3 = \cos 2x, \quad u_4 = \sin 2x, \dots$$

$$u_{2n-1} = \cos nx, \quad u_{2n} = \sin nx$$

Dans le cas de l'approximation continue, le produit scalaire est défini par :

$$(g_1, g_2) = \int_0^{2\pi} g_1(x) g_2(x) dx \quad (\text{IV.12})$$

(voir l'annexe A pour l'exemple)

IV.3 Interpolation polynomiale :

IV.3.1 Méthode de Lagrange :

- **Principe :**

On calcule le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire des *polynômes de Lagrange*.

- **Algorithme :**

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^n y_l L_l(x) \quad (\text{IV.13})$$

$$L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)} \quad i=0, \dots, n \quad (IV.14)$$

avec $L_i(x)$ est le polynôme de Lagrange (Voir l'annexe B pour l'exemple)

IV.3.2 Méthode de Neville-Aitken :

- Principe

On calcule le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ à l'aide d'une formule de récurrence.

- Algorithme :

Initialisation :

$$P_{i,i}(x) = y_i \quad i = 0, \dots, n \quad (IV.15)$$

Itération :

$$P_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,j}(x) - (x - x_j)P_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \quad j > i$$

Le polynôme d'interpolation est :

$$P_n(x) = P_{0,n}(x) \quad (IV.16)$$

(Voir l'annexe B pour l'exemple)

IV.3.3 Méthode de Newton :

- Principe :

On calcule le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de polynômes de base :

$$P_n(x) = D_{0,0} + (x-x_0)D_{0,1} + (x-x_0)(x-x_1)D_{0,2} + \dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})D_{0,n} \quad (IV.17)$$

les coefficients D_{ij} étant les *différences divisées*, calculées par récurrence.

- **Algorithme :**

Calcul des différences divisées :

Initialisation :

$$D_{ii} = y_i, \quad i = 0, \dots, n \quad (IV.18)$$

Itération :

$$D_{ij} = \frac{D_{i+1,j} - D_{i,j-1}}{x_j - x_i}, \quad i=0, \dots, n, j=1, \dots, n, j \neq i \quad (IV.19)$$

Calcul du polynôme d'interpolation :

$$b_0(x) = D_{0,n}$$

$$b_1(x) = D_{0,n-1} + b_0(x) (x-x_{n-1})$$

$$b_2(x) = D_{0,n-2} + b_1(x) (x-x_{n-2}) \quad (IV.20)$$

$$b_{n-1}(x) = D_{0,1} + b_{n-2}(x) (x-x_1)$$

$$b_n(x) = D_{0,0} + b_{n-1}(x) (x-x_0); \quad P_n(x) = b_n(x)$$

(Voir l'annexe B pour un exemple d'explication).

IV.4 Interpolation spline

IV.4.1 Introduction

Le lissage des données consiste à aboutir, à partir d'une série de mesures effectuées à intervalles réguliers ou non, une approximation de la valeur qu'aurait eu une mesure faite entre ces intervalles.

Une application évidente du lissage est l'interpolation graphique, c'est cet exemple que nous traiterons à l'aide des splines. L'interpolation consiste à trouver une fonction continue dont la courbe passe par tous les points d'une liste déterminée à l'avance. Il est possible de trouver par exemple un polynôme de degré égal aux nombres de points moins un, passant par tous les points.

Dans le cas des splines, on considérera une série $n+1$ points dont les coordonnées sont (x_i, y_i) . On cherchera alors une fonction pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ reliant les points i et $i+1$: il faut ainsi déterminer n fonctions afin de former la fonction d'interpolation.

Préparatifs :

On définit tout de suite h_i comme suit, pour simplifier les futures expressions :

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Les expressions suivantes seront également beaucoup utilisées.

$$\begin{aligned} f'_r &= f'_i(x_i) \\ f'_l &= f'_i(x_i) \end{aligned} \tag{IV.21}$$

IV.4.1 Les splines linéaires et quadratiques :

Il existe plusieurs types de spline : les splines linéaires qui sont simplement les droites reliant chacun des points d'arrêt, les splines quadratiques qui sont des polynômes de degré 2, et les splines cubiques que nous développerons ultérieurement.

L'intérêt des splines quadratiques par rapport aux splines linéaires est d'obtenir une fonction d'interpolation lisse, elle est continûment dérivable.

Les formules permettant de trouver les n équations des splines interpolant notre liste de points, sont données directement :

a) spline linéaire :

$$f_i(x) = y_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + y_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (\text{IV.22})$$

b) spline quadratique:

$$f_i(x) = f_i' \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} - f_{i-1}' \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + n \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad (\text{IV.23})$$

Les inconnues f_i' et n étant déterminées en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} f_i' - 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f_{i-1}' \\ n = y_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2} f_i' \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Il ne reste alors plus qu'à faire un choix arbitraire pour déterminer totalement toutes les inconnues. Ce choix se fait en général avec $f_0' = f_1'$.

IV.4.2 Les splines cubiques :

Les splines cubiques font intervenir, pour chaque intervalle un polynôme du troisième degré, la courbe d'interpolation est donc elle aussi lisse (dérivée première continue) et la dérivée seconde est également continue.

Les courbes splines cubiques simulent le comportement d'une latte de bois, à laquelle est imprimée une certaine forme à l'aide de piquets (les points d'arrêt). La déformation de la latte entre deux piquets est nulle, c'est à dire par un polynôme du troisième degré.

Nous avons donc n polynômes cubiques que nous allons écrire sous la forme :

$$\begin{cases} B(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

Détermination :

On appelle fonction spline cubique d'interpolation de f sur les m abscisses x_1, \dots, x_m , la fonction g unique, deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et telle que $g'(a) = g''(b) = 0$, qui vérifie la propriété d'interpolation $g(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, m$, dont la restriction à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$, est un polynôme $p_i(x)$ de degré trois tel que $B(x_i) = B(x_{i-1})$, $B'(x_i) = B'(x_{i-1})$, $B''(x_i) = B''(x_{i-1})$, si $i \geq 2$.

pour déterminer la fonction g et démontrer son unicité, on procède de la manière suivante :

On pose $\sigma_i = g''(x_i)$ $i = 1, \dots, n$

$$\text{On a donc } \begin{cases} \sigma_i = p_i''(x_i) \\ \sigma_{i+1} = p_i''(x_{i+1}) \end{cases} \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (\text{IV.26})$$

On sait qu'il existe un polynôme unique de degré ≤ 1 qui prend les valeurs σ_i et σ_{i+1} sur les deux abscisses x_i et x_{i+1} ; ce polynôme et le polynôme d'interpolation par les points (x_i, σ_i) et (x_{i+1}, σ_{i+1}) .

Il en résulte que P_i'' est le polynôme d'interpolation sur ces deux points. Sous la forme de Lagrange, il s'écrit :

$$\left\{ P_i''(x) = \sigma_i \frac{x - x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} + \sigma_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right. \quad (IV.27)$$

en posant : $h = x_{i+1} - x_i$, on a donc :

$$\left\{ P_i''(x) = \sigma_i \frac{x - x_{i+1}}{h} + \sigma_{i+1} \frac{x - x_i}{h} \right.$$

En intégrant deux fois la relation précédente, on obtient :

$$P_i(x) = \sigma_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{6h} + \alpha_i (x_{i+1} - x) + \sigma_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{6h} + \beta_i (x - x_i) \quad (IV.28)$$

où α_i et β_i sont deux constantes réelles ;

$$\text{on a donc : } \begin{cases} g(x_i) = y_i \\ g(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \quad \text{d'où } \begin{cases} P_i(x_i) = y_i \\ P_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \end{cases} \quad (IV.29)$$

on a donc :

$$\begin{cases} y_i = \sigma_i \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6h} + \alpha_i (x_{i+1} - x_i) \\ y_{i+1} = \sigma_{i+1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6h} + \beta_i (x_{i+1} - x_i) \end{cases} \quad (IV.30)$$

soit :

$$\begin{cases} y_i = \sigma_i \frac{h_i^2}{6} + \alpha_i h \\ y_{i+1} = \sigma_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + \beta_i h \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha_i = \frac{y_i}{h_i} - \sigma_i \frac{y_i}{6} \\ \beta_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \sigma_{i+1} \frac{h_i}{6} \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

Il en résulte que :

$$P_i(x) = \sigma_i \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h} + \sigma_{i+1} \frac{(x-x_i)^3}{6h} + \left[\frac{y_i}{h} - \sigma_i \frac{h}{6} \right] (x_{i+1}-x) + \left[\frac{y_{i+1}}{h} - \sigma_{i+1} \frac{h}{6} \right] (x-x_i) \quad (\text{IV.32})$$

D'où :

$$P_i'(x) = \sigma_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{-2h} + \sigma_{i+1} \frac{(x-x_i)^2}{2h} - \left[\frac{y_i}{h} - \sigma_i \frac{h}{6} \right] + \left[\frac{y_{i+1}}{h} - \sigma_{i+1} \frac{h}{6} \right] \quad (\text{IV.33})$$

Donc : pour $i = 2, \dots, m-1$, on a :

$$\begin{cases} P_i'(x) = \sigma_i \frac{(x_{i+1}-x)^2}{-2h} - \left[\frac{y_i}{h} - \sigma_i \frac{h}{6} \right] + \left[\frac{y_{i+1}}{h} - \sigma_{i+1} \frac{h}{6} \right] \\ P_{i+1}'(x) = \sigma_i \frac{(x-x_{i+1})^2}{-2h_{i+1}} - \left[\frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} - \sigma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} \right] + \left[\frac{y_i}{h_{i+1}} - \sigma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} \right] \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

Soit :

$$\begin{cases} P_i'(x) = -\sigma_i \frac{h_i}{3} - \sigma_{i+1} \frac{h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \\ P_{i+1}'(x) = \sigma_i \frac{h_{i+1}}{3} + \sigma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{y_i}{h_{i+1}} \end{cases} \quad (\text{IV.35})$$

Et comme $P_i'(x) = H_i'(x)$ on en déduit :

$$-\sigma_i \frac{h_i}{3} - \sigma_{i+1} \frac{h_i}{6} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} = \sigma_i \frac{h_{i+1}}{3} + \sigma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{y_{i+1}}{h_{i+1}} + \frac{y_i}{h_{i+1}} \quad (\text{IV.36})$$

D'où :

$$\sigma_{i+1} \frac{h_{i+1}}{6} + \sigma_i \frac{h_{i+1} + h_i}{3} + \sigma_{i-1} \frac{h_i}{6} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (IV.37)$$

Comme $\sigma_0 = 0$ et $\sigma_m = 0$, les $n = m-2$ relations précédentes forment un système linéaire très diagonal symétrique non homogène [S] d'ordre n .

Ce système linéaire s'écrit matriciellement $[A] \{Z\} = \{B\}$, en posant :

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 \\ e_1 & d_2 & e_2 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & e_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & e_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Où :

$$\begin{cases} d_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{3}, \quad i=1, \dots, n \\ e_i = \frac{h_{i+1}}{6}, \quad i=1, \dots, n-1 \\ b_i = \frac{(y_{i+1} - y_i)(h_{i+1} + 2h_i) - (y_i - y_{i-1})h_i}{h_i h_{i+1}}, \quad i=1, \dots, n-1 \\ Z_i = \sigma_{i+1}, \quad i=1, \dots, n \end{cases} \quad (IV.38)$$

Comme la fonction g coïncide sur $[x_i, x_{i+1}]$ avec un polynôme $P_i(x)$ de degré 3, $i=1, \dots, m-1$, les trois conditions : $P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i)$, $P'_i(x_i) = P'_{i-1}(x_i)$ et $P''_i(x_i) = P''_{i-1}(x_i)$, $i = 2, \dots, m-1$, impliquent que g est deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$.

IV.5 Conditions aux limites

IV.5.1 Splines cubiques naturelles :

On appelle spline cubique naturelle, les courbes splines satisfaisants les conditions suivantes :

$$\begin{cases} P_1''(X_0) = 0 \\ P_n''(X_n) = 0 \end{cases} \quad (IV.39)$$

IV.5.2 Conditions aux limites paraboliques :

Pour compléter le système des σ_j , on a utilisé les conditions aux limites dites naturelles, selon les quelles les dérivées secondes aux extrémités s'annulaient. Les splines naturelles que l'on obtient alors présentent une déformation rectiligne au voisinage des extrémités, il peut parfois être plus intéressant d'utiliser d'autres conditions :

$$\begin{cases} P_1'' = \frac{2}{h_1 + h_2} \left(\frac{y_0 - y_1}{h_1} + \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right) \\ P_n'' = \frac{2}{h_{n-1} + h_n} \left(\frac{y_{n-2} - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{y_{n-2} - y_{n-1}}{h_n} \right) \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (IV.40)$$

Ainsi pour les conditions aux limites paraboliques, on a introduit $P_a(x)$ et $P_b(x)$ deux paraboles interpolant les trois premiers et les trois derniers points. On fixe alors σ^a et σ_b égales aux dérivées secondes de ces paraboles obtenus respectivement en x_0 et x_n .

IV.5.3 Conditions aux limites de la tangente :

On peut appliquer ces conditions lorsque que l'on connaît les valeurs des dérivées aux extrémité de l'intervalle de l'interpolation que l'on appellera $P_1' = P_n'$.

Ce type de conditions peut par exemple être intéressant pour interpoler la courbe d'une fonction donnée sur un certain intervalle, mais nécessitant pour son tracé des calculs trop compliqués en faisant appel à des fonctions inaccessibles.

IV.5.4 Conditions aux limites cycliques :

Ce dernier type de condition convient pour les fonctions périodiques, si l'intervalle d'interpolation correspond à une période de la fonction, alors on peut appliquer les conditions suivantes pour déterminer les inconnues :

$$\begin{cases} P_n(x_n) = P_1(x_n) \\ P_n'(x_n) = P_1'(x_n) \\ P_n''(x_n) = P_1''(x_n) \end{cases} \quad (IV.41)$$

IV.6 Elargissement :

Les splines présentés permettent souvent de réaliser une interpolation satisfaisante, mais parfois des conditions plus nombreuses peuvent être nécessaires pour affiner cette interpolation, ou les courbes splines quadratiques et cubiques ne donnent peut être pas un lissage intéressant ou sont tout simplement inexploitables.

Splines sous forme paramétrique et splines dans l'espace :

Un des inconvénients de la méthode présentée que les abscisses des points d'arrêt croissent avec leur indice. Il n'est ainsi pas possible d'interpoler une courbe paramétrée passant plusieurs fois par la même abscisse. On peut tout de même transformer la méthode de manière à réaliser une interpolation à la fois sur les abscisse et les ordonnées.

Il suffit de ce fixer un paramètre t qui remplacera notre x . $A t_i$ correspondra en réalité i , et on chercha deux fonctions d'interpolation sur l'intervalle $[t, t+1]$ qui au paramètre associeront l'abscisse et l'ordonnée du point.

Avec le même raisonnement, il est possible d'étendre la méthode à des espaces de dimension supérieure à 2, pour chaque dimension on calculera une fonction d'interpolation.

Autre types :

On peut enfin citer d'autres fonctions, en particulier les splines quadratiques, elles utilisent des polynômes de degré quatre.

Il est aussi possible de trouver à partir d'une liste de $n+1$ points d'arrêt un polynôme passant par chacun de ces points, de degré égale à n .

Chapitre V

Résultats et interprétation

V.1 Algorithme de calcul

La méthode utilisée pour confirmer la validité des résultats obtenus par le programme réalisé consiste à décrire les différentes formes géométriques des profils d'ailes utilisés en aéronautique.

Dans cette étude, on a développé un programme informatique édité en Fortran.

L'algorithme de calcul est le suivant :

- 1) Choix du profil
- 2) Lecture des coordonnées du profil stockées dans un fichier « .dat » obtenues à partir de la référence [1].
- 3) Introduction du nombre des points sur l'extrados et sur l'intrados.
- 4) Génération de la matrice [A] et le vecteur {B} en appliquant la méthode des « splines cubiques »
- 5) Résolution du système d'équations linéaires $[A] \cdot \{X\} = \{B\}$.
- 6) Réévaluation de la nouvelle forme du profil avec un maillage plus fin.
- 7) Affichage des résultats.

V.2 Résultats et interprétation

V.2.1 Exemple d'application:

- Cas général

On considère une spline d'interpolation $S(x)$ telle que :

$$S(1)=4, S(3)=2, S(4)=8, S(7)=5, S(11)=6 \text{ et } S(13)=7$$

On détermine la forme de $S(x)$ en 50 points de l'intervalle [1, 13].

La figure (V.1) donne une idée de la courbe d'interpolation obtenue par chaque technique (spline linéaire, quadratique et cubique).

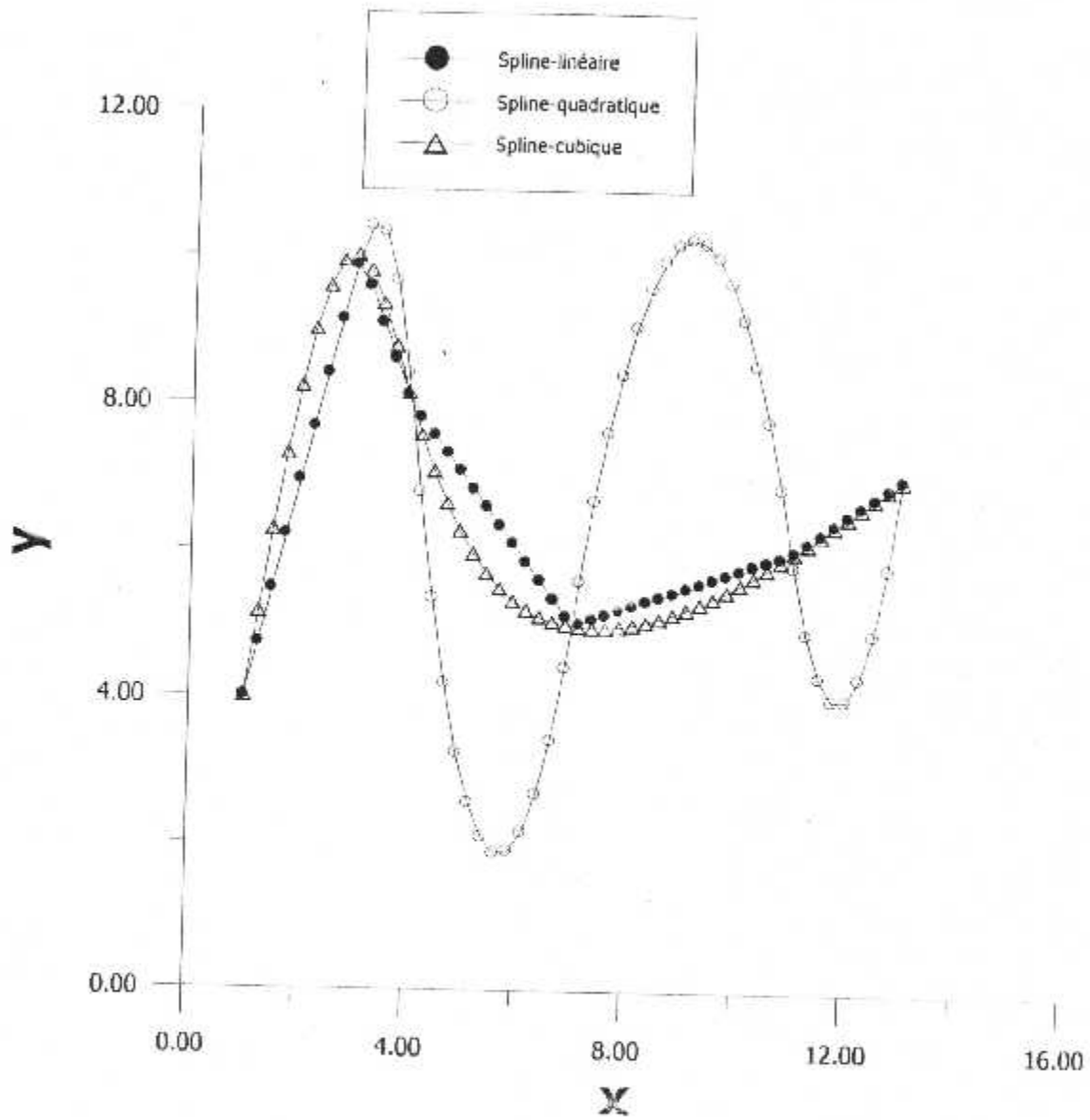


Fig.V.1 Comparaison entre les trois méthodes d'interpolation par splines pour une fonction donnée par le tableau (Table.V.1) (NP=50 Nœuds)

- Cas d'un cercle

A fin de montrer la validité des programmes réalisés des différentes techniques d'interpolation splines et de comparer entre eux, on a appliqué maintenant toute la méthode mise en évidence à une liste de points.

On considère une liste de 9 points d'un cercle de centre (0,0) et de rayon égal à 1 (voir le tableau suivant).

L'équation de ce cercle est donnée par la formule :

$$x^2 + y^2 = 1$$

x	-1	-0.5	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1
y	0	0.86	1	0.86	0	-0.86	-1	-0.86	0

Commentaires

D'après la figure (V.2a), on remarque que la représentation avec les splines linéaires est simplement des droites reliant chaque deux points d'arrêt. Tandis que les splines quadratique qui sont des polynômes de degré deux (2) ne donnent pas un bon lissage.

Cependant, les bons résultats sont obtenus par la méthode d'interpolation splines cubiques qui intervienne pour chaque intervalle un polynôme de troisième degré et on remarque que la forme obtenue par cette dernière est très proche de celle obtenue par l'équation analytique exacte d'un cercle.

On remarque aussi que l'erreur entre les deux tracés devient de plus en plus négligeable en augmentant le nombre de points utilisés dans le calcul de l'interpolation par des splines cubiques (voir Fig.V.2b).

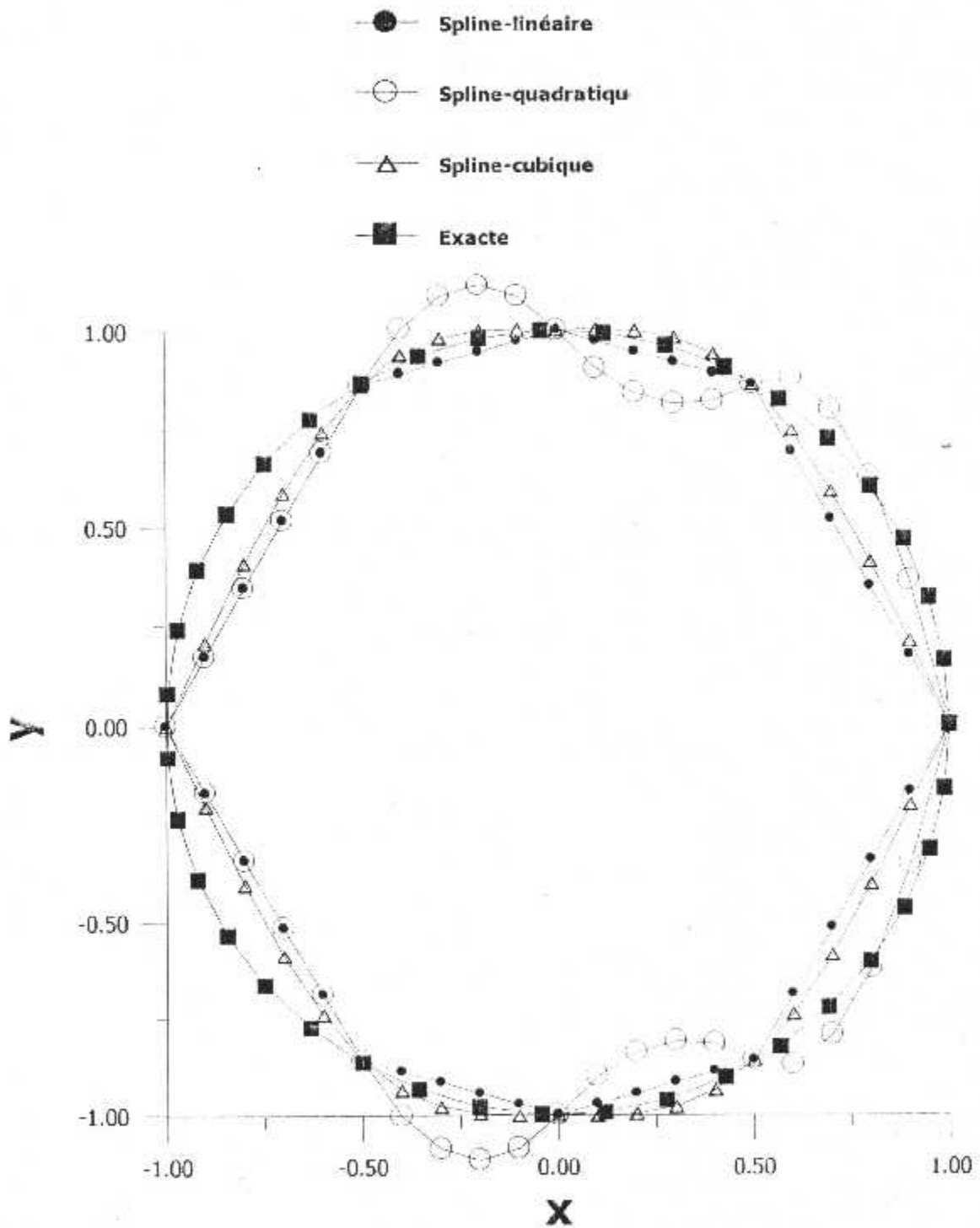


Fig.V.2 Comparaison de différentes méthodes d'interpolation par splines avec la solution exacte (cas d'un cercle de rayon unité) (NP= 40 nœuds)

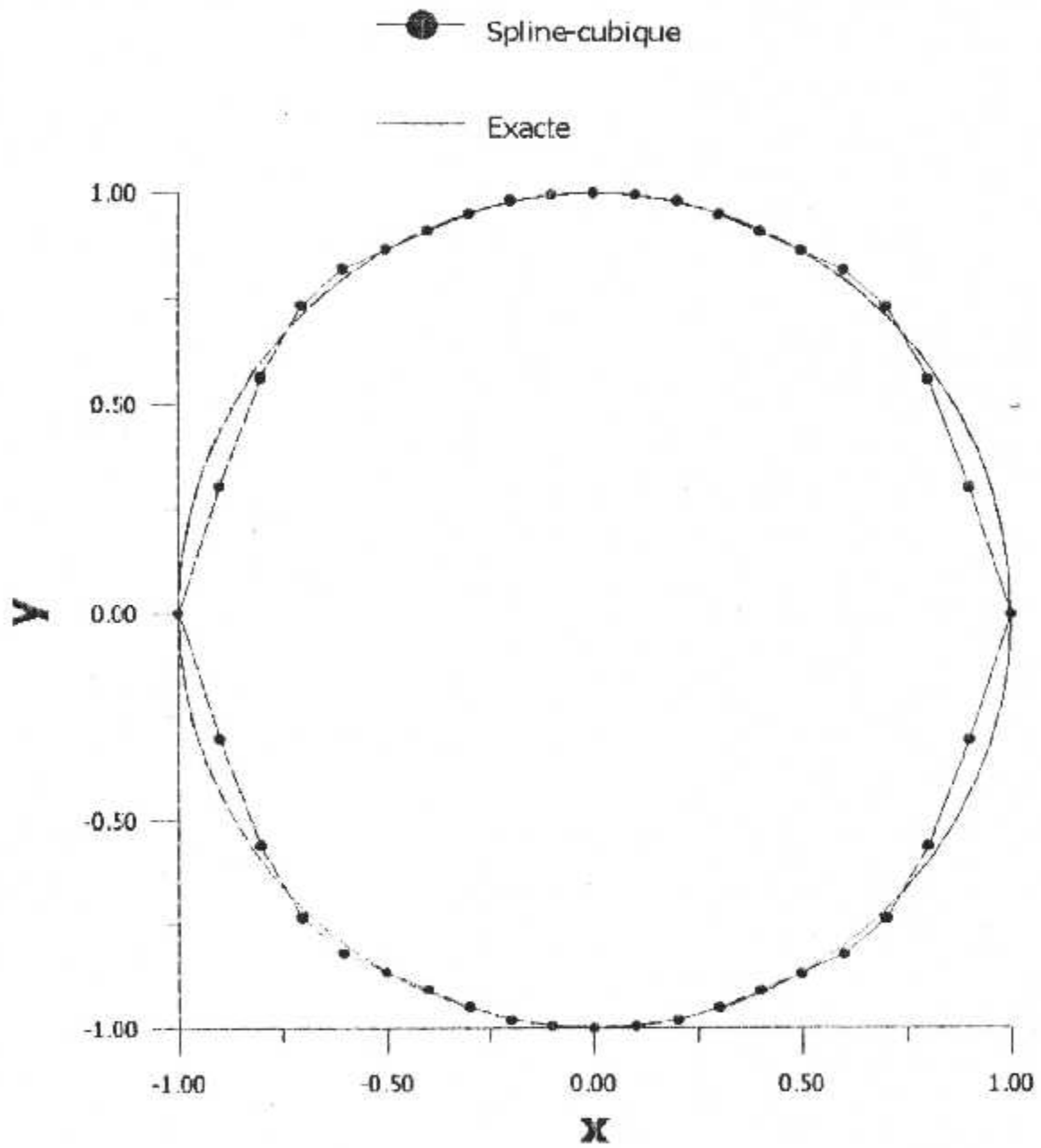
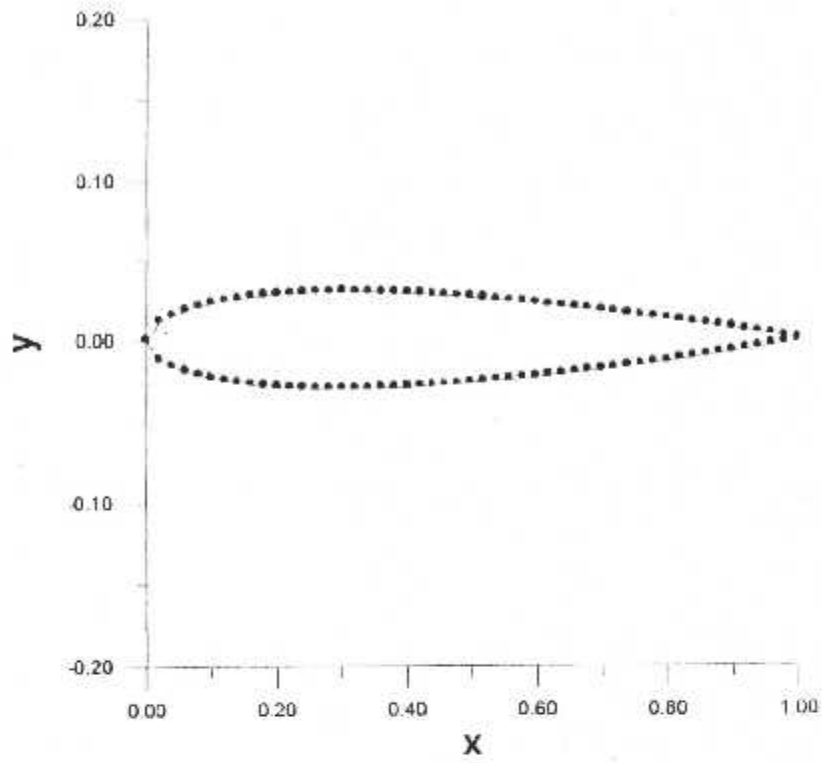


Fig.V.2b L'effet de l'augmentation de nombre des nœuds utilisée dans le calcul des splines cubiques ($N=9$, $N_p=40$)

V.2.3 Représentation graphique

A fin d'atteindre l'objectif de ce présent travail, on a testé certaines formes géométriques de profils NACA obtenus par l'application de la méthode splines cubiques.

On a choisi un nombre de points sur l'extrados et l'intrados égal à 100 pour chaque forme géométrique.



FigV.3 La forme géométrique d'un profil NACA 0006

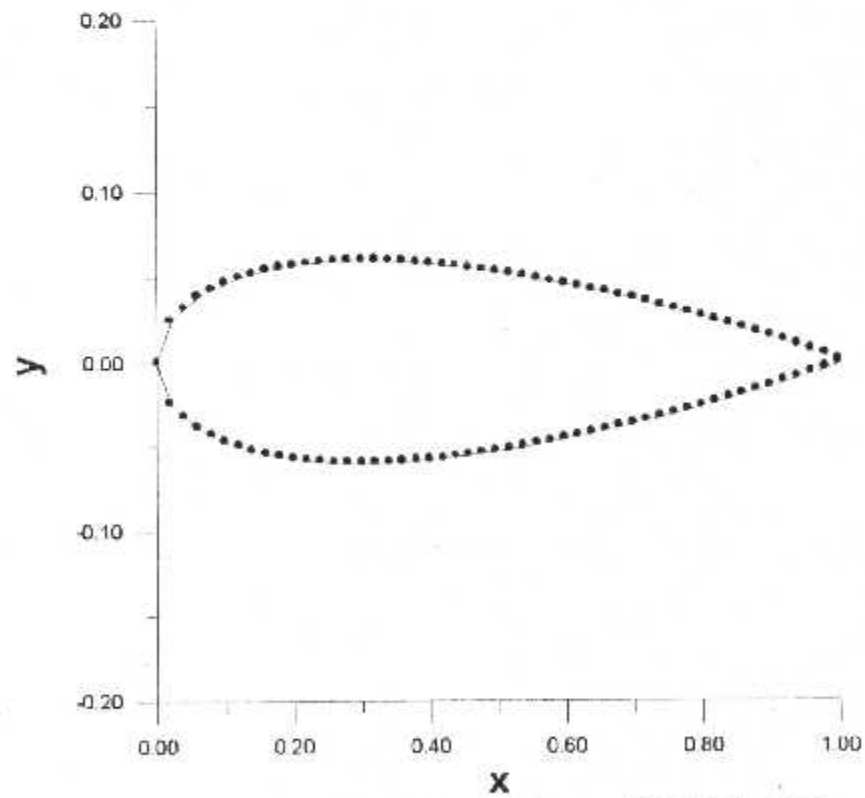


Fig.V.4 La forme géométrique d'un profil NACA 0012

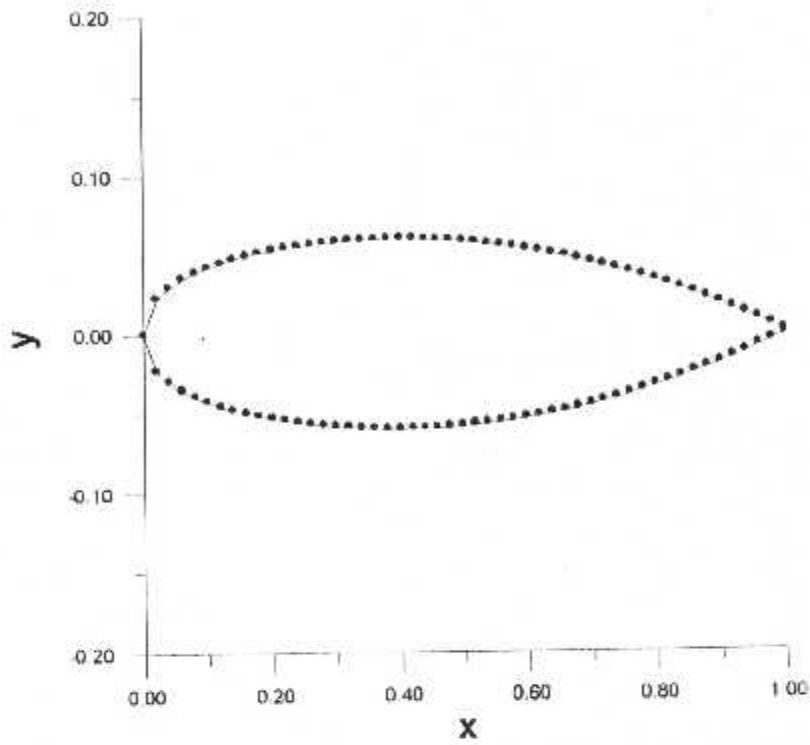


Fig.V.5 La forme géométrique d'un profil NACA 0012-64

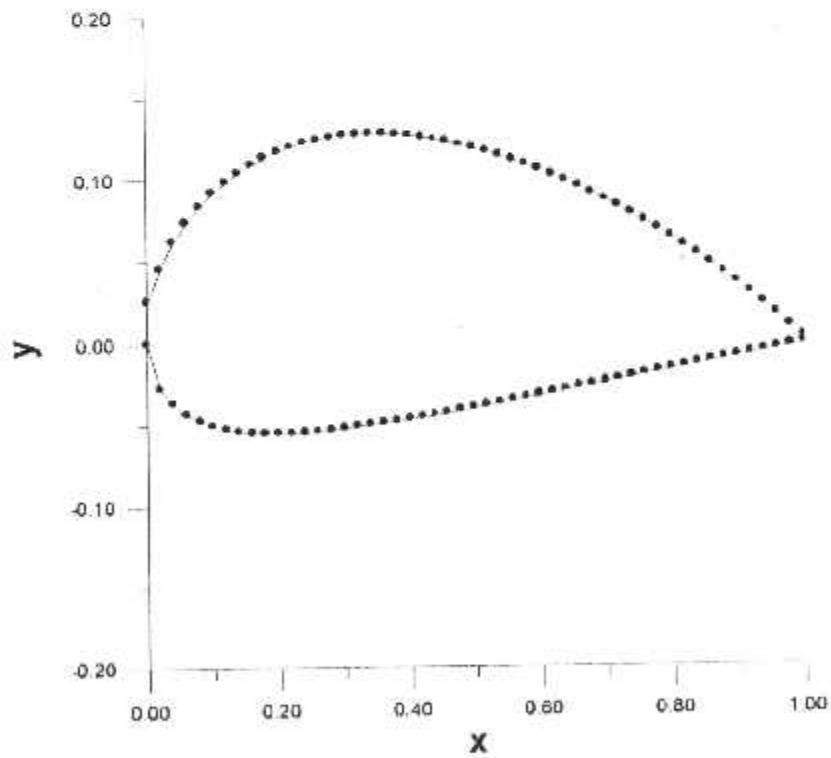


Fig.V.6 La forme géométrique d'un profil NACA 4418

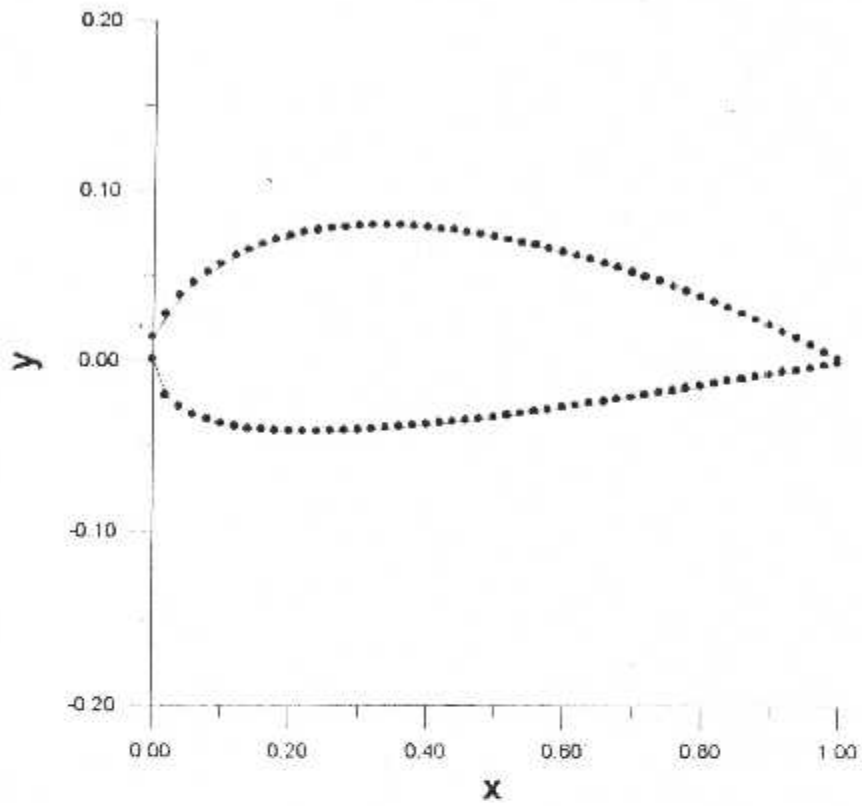


Fig.V.7 La forme géométrique d'un profil NACA 2412

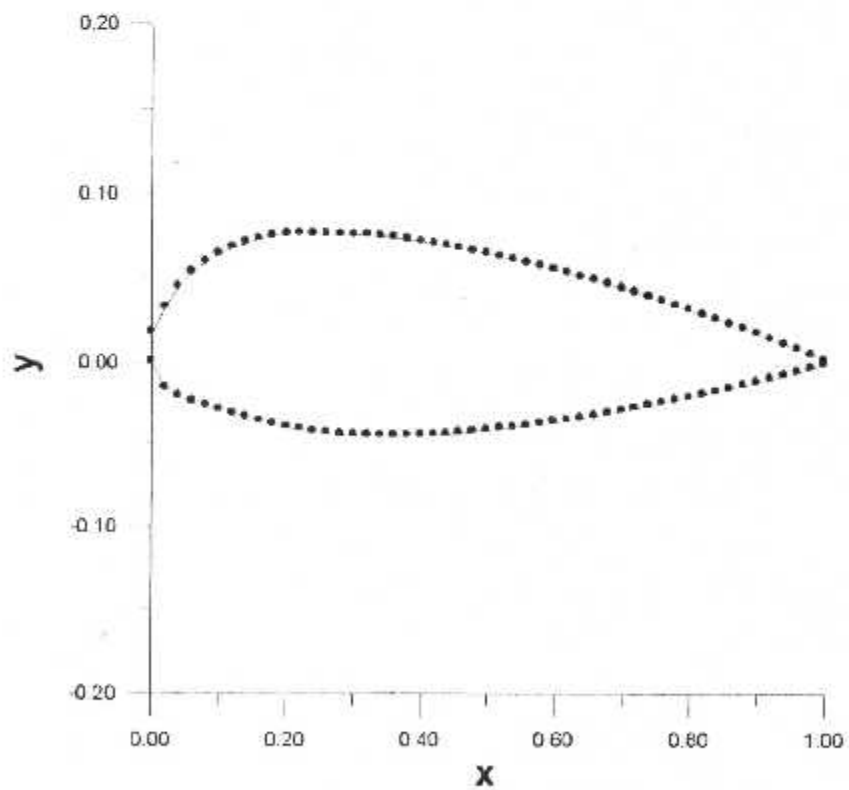


Fig.V.8 La forme géométrique d'un profil NACA 23012

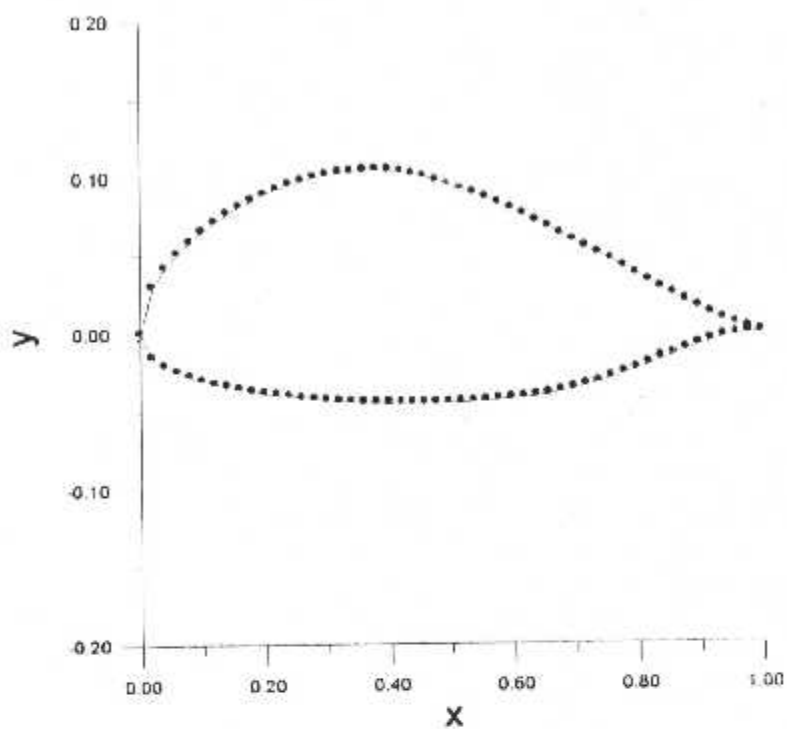


Fig.V.9 La forme géométrique d'un profil NACA 747a415

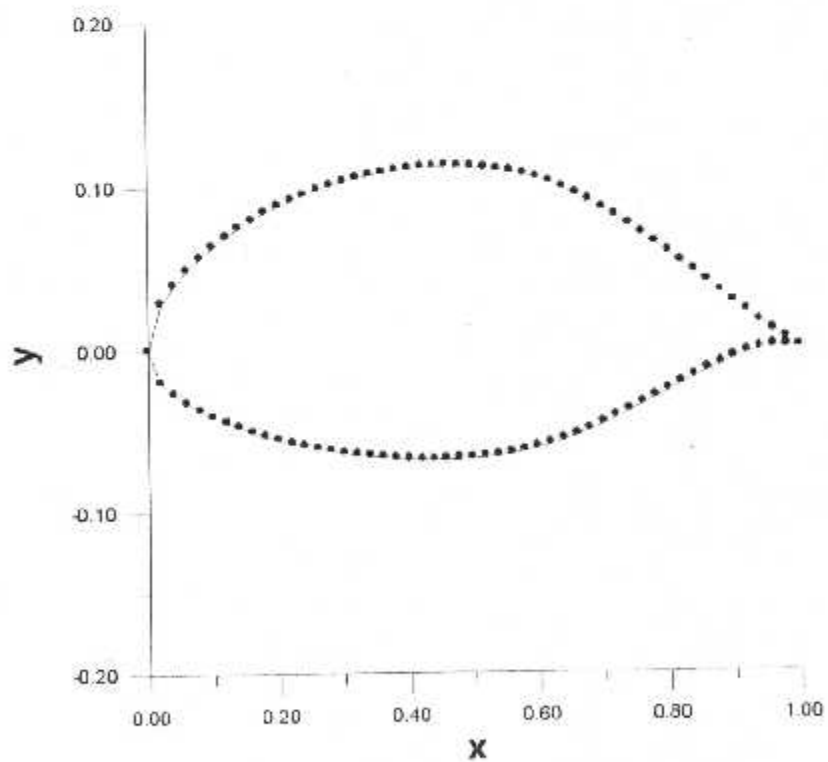


Fig.V.10 La forme géométrique d'un profil NACA 66₃-418

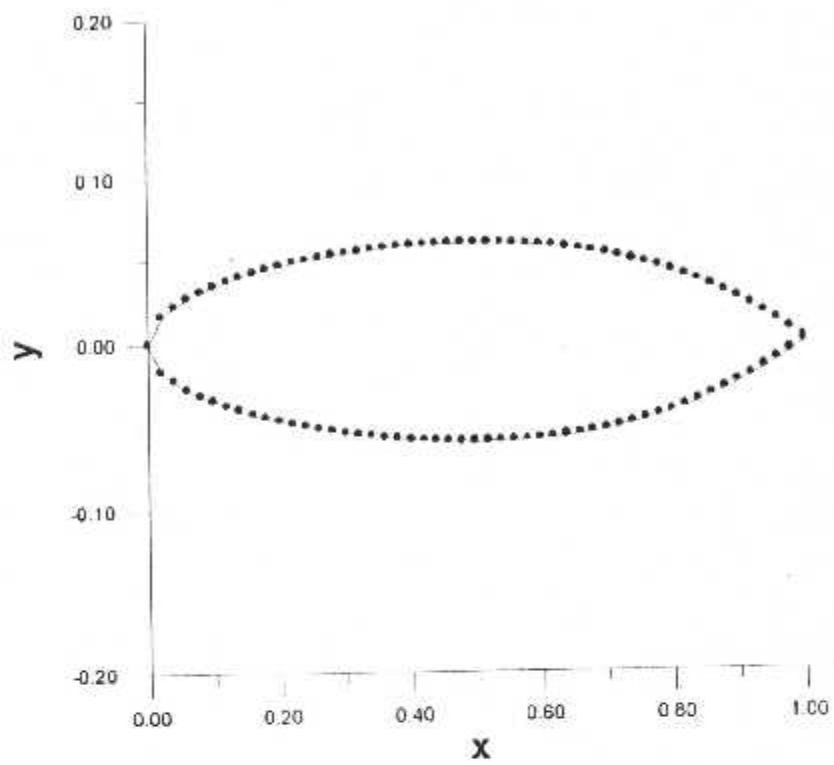


Fig.V.11 La forme géométrique d'un profil NACA 16-012

x/c	y/c
0.0000000E+00	0.0000000E+00
2.0000000E-02	2.4207134E-02
4.0000000E-02	3.1917995E-02
6.0000002E-02	3.8504272E-02
8.0000001E-02	4.3045035E-02
1.0000000E-01	4.6830001E-02
1.1999999E-01	4.9913749E-02
1.4000000E-01	5.2392017E-02
1.5999999E-01	5.4409348E-02
1.7999999E-01	5.6056416E-02
2.0000000E-01	5.7370007E-02
2.1999999E-01	5.8383840E-02
2.3999997E-01	5.9128856E-02
2.5999999E-01	5.9635007E-02
2.8000000E-01	5.9926140E-02
2.9999998E-01	6.0019999E-02
3.1999999E-01	5.9933173E-02
3.4000000E-01	5.9678661E-02
3.5999998E-01	5.9268552E-02
3.7999999E-01	5.8714967E-02
4.0000000E-01	5.8030003E-02
4.1999998E-01	5.7224822E-02
4.3999999E-01	5.6306791E-02
4.5999997E-01	5.5282360E-02
4.7999995E-01	5.4157948E-02
5.0000000E-01	5.2939999E-02
5.1999998E-01	5.1634609E-02
5.3999996E-01	5.0246512E-02
5.5000000E-01	4.8780113E-02
5.7999998E-01	4.7239810E-02
5.9999996E-01	4.5630007E-02
6.2000000E-01	4.3954676E-02
6.3999998E-01	4.2216134E-02
6.5999996E-01	4.0416255E-02
6.8000000E-01	3.8556915E-02
6.9999998E-01	3.6640000E-02
7.1999996E-01	3.4667173E-02
7.4000000E-01	3.2639199E-02
7.5999999E-01	3.0556648E-02
7.7999997E-01	2.8420066E-02
8.0000001E-01	2.6229998E-02
8.1999999E-01	2.3986803E-02
8.3999997E-01	2.1690583E-02
8.5999995E-01	1.9340845E-02
8.7999999E-01	1.6937398E-02
8.9999997E-01	1.4480000E-02
9.1999995E-01	1.1966547E-02
9.3999999E-01	9.3875771E-03
9.5999997E-01	6.7327356E-03
9.7999995E-01	4.0128612E-03
1.0000000	1.2600000E-03

Profil NACA 0012 (extrados)

x/c	y/c
0.0000000E+00	0.0000000E+00
2.0000000E-02	-2.4207134E-02
4.0000000E-02	-3.1917995E-02
6.0000002E-02	-3.8504272E-02
8.0000001E-02	-4.3045035E-02
1.0000000E-01	-4.6830001E-02
1.1999999E-01	-4.9913749E-02
1.4000000E-01	-5.2392017E-02
1.5999999E-01	-5.4409348E-02
1.7999999E-01	-5.6056416E-02
2.0000000E-01	-5.7370007E-02
2.1999999E-01	-5.8383840E-02
2.3999997E-01	-5.9128856E-02
2.5999999E-01	-5.9635007E-02
2.8000000E-01	-5.9926140E-02
2.9999996E-01	-6.0019999E-02
3.1999999E-01	-5.9933173E-02
3.4000000E-01	-5.9678661E-02
3.5999998E-01	-5.9268552E-02
3.7999999E-01	-5.8714967E-02
4.0000000E-01	-5.8030003E-02
4.1999998E-01	-5.7224822E-02
4.3999999E-01	-5.6306791E-02
4.5999997E-01	-5.5282360E-02
4.7999995E-01	-5.4157948E-02
5.0000000E-01	-5.2939999E-02
5.1999998E-01	-5.1634609E-02
5.3999996E-01	-5.0246512E-02
5.6000000E-01	-4.8780113E-02
5.7999998E-01	-4.7239810E-02
5.9999996E-01	-4.5630007E-02
6.2000000E-01	-4.3954676E-02
6.3999998E-01	-4.2216134E-02
6.5999996E-01	-4.0416255E-02
6.8000000E-01	-3.8556915E-02
6.9999998E-01	-3.6640000E-02
7.1999996E-01	-3.4667173E-02
7.4000000E-01	-3.2639199E-02
7.5999999E-01	-3.0556648E-02
7.7999997E-01	-2.8420066E-02
8.0000001E-01	-2.6229990E-02
8.1999999E-01	-2.3986883E-02
8.3999997E-01	-2.1690583E-02
8.5999995E-01	-1.9340845E-02
8.7999999E-01	-1.6937398E-02
8.9999997E-01	-1.4480000E-02
9.1999995E-01	-1.1966547E-02
9.3999999E-01	-9.3875771E-03
9.5999997E-01	-6.7327356E-03
9.7999995E-01	-4.0128612E-03
1.0000000	-1.2600000E-03

Profil NACA 0012 (intrados)

x/c	y/c
0.0000000E+00	0.0000000E+00
2.0000000E-02	2.9906576E-02
4.0000000E-02	4.1582059E-02
6.0000002E-02	5.0996011E-02
8.0000001E-02	5.8743202E-02
1.0000000E-01	6.5617311E-02
1.1999999E-01	7.1658986E-02
1.4000000E-01	7.6984441E-02
1.5999999E-01	8.1716918E-02
1.7999999E-01	8.5934317E-02
2.0000000E-01	8.9690482E-02
2.1999999E-01	9.3025076E-02
2.3999997E-01	9.5946723E-02
2.5999999E-01	9.8460227E-02
2.8000000E-01	1.0057456E-01
2.9999998E-01	1.0230144E-01
3.1999999E-01	1.0365118E-01
3.4000000E-01	1.0462959E-01
3.5999998E-01	1.0523866E-01
3.7999999E-01	1.0541896E-01
4.0000000E-01	1.0505245E-01
4.1999998E-01	1.0405208E-01
4.3999999E-01	1.0250501E-01
4.5999997E-01	1.0055425E-01
4.7999995E-01	9.8298132E-02
5.0000000E-01	9.5762025E-02
5.1999998E-01	9.2967200E-02
5.3999996E-01	8.9924484E-02
5.6000000E-01	8.6645281E-02
5.7999998E-01	8.3145761E-02
5.9999996E-01	7.9452490E-02
6.2000000E-01	7.5594294E-02
6.3999998E-01	7.1608817E-02
6.5999996E-01	6.7544990E-02
6.8000000E-01	6.3401877E-02
6.9999998E-01	5.9202724E-02
7.1999996E-01	5.4981869E-02
7.4000000E-01	5.0670361E-02
7.5999999E-01	4.6327868E-02
7.7999997E-01	4.1904419E-02
8.0000001E-01	3.7458923E-02
8.1999999E-01	3.2923188E-02
8.3999997E-01	2.8331267E-02
8.5999995E-01	2.3727002E-02
8.7999999E-01	1.9022805E-02
8.9999997E-01	1.4287546E-02
9.1999995E-01	9.4806182E-03
9.3999999E-01	4.6423584E-03
9.5999997E-01	-2.8614038E-04
9.7999995E-01	-5.2270591E-03
1.0000000	-1.0267984E-02

Profil NACA 747a115

x/c	y/c
0.0000000E+00	0.0000000E+00
2.0000000E-02	-1.5387362E-02
4.0000000E-02	-2.0641048E-02
6.0000002E-02	-2.4299366E-02
8.0000001E-02	-2.7261972E-02
1.0000000E-01	-2.9792694E-02
1.1999999E-01	-3.1933695E-02
1.4000000E-01	-3.3794350E-02
1.5999999E-01	-3.5419973E-02
1.7999999E-01	-3.6895281E-02
2.0000000E-01	-3.8206964E-02
2.1999999E-01	-3.9349815E-02
2.3999997E-01	-4.0352240E-02
2.5999999E-01	-4.1257232E-02
2.8000000E-01	-4.2081150E-02
2.9999998E-01	-4.2800632E-02
3.1999999E-01	-4.3396314E-02
3.4000000E-01	-4.3886908E-02
3.5999998E-01	-4.4302290E-02
3.7999999E-01	-4.4640105E-02
4.0000000E-01	-4.4864201E-02
4.1999998E-01	-4.4954600E-02
4.3999999E-01	-4.4946098E-02
4.5999997E-01	-4.4880518E-02
4.7999995E-01	-4.4761657E-02
5.0000000E-01	-4.4569772E-02
5.1999998E-01	-4.4290581E-02
5.3999996E-01	-4.3921905E-02
5.6000000E-01	-4.3461164E-02
5.7999998E-01	-4.2888298E-02
5.9999996E-01	-4.2173951E-02
6.2000000E-01	-4.1298842E-02
6.3999998E-01	-4.0264678E-02
6.5999996E-01	-3.9070889E-02
6.8000000E-01	-3.7665930E-02
6.9999998E-01	-3.5967999E-02
7.1999996E-01	-3.3928042E-02
7.4000000E-01	-3.1585720E-02
7.5999999E-01	-2.8995272E-02
7.7999997E-01	-2.6209598E-02
8.0000001E-01	-2.3280510E-02
8.1999999E-01	-2.0260491E-02
8.3999997E-01	-1.7204192E-02
8.5999995E-01	-1.4166383E-02
8.7999999E-01	-1.1194277E-02
8.9999997E-01	-8.3281844E-03
9.1999995E-01	5.6457221E-03
9.3999999E-01	-3.3667212E-03
9.5999997E-01	-1.7323568E-03
9.7999995E-01	-7.1029114E-04
1.0000000	0.0000000E+00

Profil NACA 747a415

Conclusion

Conclusion

Ce présent travail nous a permis d'exploiter nos connaissances théoriques en aérodynamique et leur application qui a pour objet l'élaboration d'une bibliothèque numérique servant à décrire les différentes formes géométriques des profils d'ailes utilisés en aéronautique, en se basant sur les profils NACA.

Cette bibliothèque pourra être une ressource informatique pour des études éventuelles dans l'aérodynamique pour le calcul des caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes avec des méthodes numériques permettant la simulation des écoulements internes en bidimensionnel. Ainsi pourra être un outil de travail dans l'atelier structure pour la réalisation des différentes géométries des profils d'ailes et des voilures.

Pour ce qui du calcul, on a testé la méthode d'interpolation splines linéaires, quadratiques et cubiques.

La méthode d'interpolation linéaire qui n'est pas lisse mais très efficace si la distance entre les nœuds est petite. La spline de degré deux (2) peut être définie, mais puisqu'il y a uniquement un degré de liberté dans sa définition, il y a un manque de symétrie dans leur détermination avec relation des points de frontières de l'intervalle. De plus, les fonctions résultantes ne sont pas suffisamment lisses. Cependant, en général, la meilleure utilisation spline est celle de splines cubiques qui comporte deux (2) paramètres à choisir, pour donner le comportement aux extrémités de l'intervalle.

Dans le programme de calcul de splines cubiques, l'essentiel du travail, revient à résoudre les systèmes d'équations linéaires.

Il existe deux types de méthodes pour la résolution d'un tel système, les méthodes directes et itératives. Pour un nombre d'équations assez élevé, la

deuxième méthode est plus recommandée. Par contre pour un nombre d'équations assez moins, la première méthode donne des très bons résultats.

Finalement, nous espérons que ce modeste travail pourra être repris et approfondi par l'amélioration du programme utilisé ou d'élargir leur domaine d'application.

Bibliographie

Bibliographie

- [1]. ABOU EL HAJ, and VON DONHOFF
" Théory of wings sections "
Dover, New York 1958
- [2]. DANIEL CAUVIN
" Aérodynamique et Mécanique du vol "
Tome I Edition 1983
- [3]. M^r : MAIDI MOHAMED et M^{elle} HELALI ASSIA
" Détermination des caractéristiques aérodynamiques des profils d'ailes par
la méthode des singularités, intégrale, de profils minces et la méthode de
Theodorsen "
Thèse d'ingénieur, I A B 1999
- [4]. M^r : T. ZEBBICH
" Cours théorique de la méthode splines cubiques"
- [5]. M^r : REZZOUG
" Aérodynamique"
Cours pour la formation d'un T.S.C.A 2001
- [6]. M^r : J. BEUNEU
" Algorithme pour le calcul scientifique"
Université des Sciences et Technologies de Lille
Site web : <http://www.eudil.fr>

ANNEXE

A.1 Approximation rationnelle

Approximation de Padé

Exemple

Calcul d'un approximant de Padé de $f(x) = \text{Log}(1+x)$
avec $n=0, m=3, m=3$.

Calcul de sa valeur pour $x=1$ et $x=2$.

- Calcul de l'approximant

$$\text{Log}(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 + \dots$$

$$F(x) = P_3(x)/Q_3(x) = (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)/(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + 1)$$

En identifiant les termes de degrés 1 à 6 de $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ et

$(x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + 1)$, on obtient :

$$a_0 = 11/60, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, b_0 = 1/20, b_1 = 3/5, b_2 = 3/2$$

$$F(x) = (11/60 x^3 + x^2 + x)/(1/20 x^3 + 3/5 x^2 + 3/2 x + 1)$$

Ou, sous forme de fraction continue :

$$F(x) = \frac{11}{3} - \frac{24}{x + \frac{33}{4} - \frac{\frac{575}{144}}{x + \frac{225}{92} - \frac{\frac{640}{1751}}{x + \frac{36}{23}}}}$$

- Valeur de l'approximant

$$F(1) = 131/189 = 0.6931217$$

$$F(2) = 56/51 = 1.0980392$$

Pour comparaison :

$$\text{Log}(2) = 0.6931472 \Rightarrow \text{erreur} = 2.6e-05$$

$$\text{Log}(3) = 1.0986123 \Rightarrow \text{erreur} = 5.7e-04$$

Remarque :

$$\text{si } S_6(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/5 - x^6/6 :$$

$$S_6(1) = 37/60 = 0.6166667 \Rightarrow \text{erreur} = 7.6e-02$$

$$S_6(2) = -56/10 = -0.56000000 \text{ (série divergente)}$$

A.2 Approximation au sens des moindres carrés

A2.1 Approximation polynomiale discrète

Exemple.

On considère la fonction $f(x) = x^2 + 2x$ sur $[-1, +1]$.

On calcule les valeurs de f aux points d'abscisses $-1, -1/2, 0, 1/2, 1$, et on donne la droite de meilleure approximation discrète de f pour ces 5 points au sens des moindres carrés.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

$$P_1(x) = a_0x + a_1 \quad p = 4$$

Le système linéaire est :

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & p+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i x_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Résolution du système : $a_0 = 2, a_1 = 1/2$

$$P_1(x) = 2x + 1/2$$

A2.2 Approximation polynomiale continue

Exemple

On considère la fonction $f(x) = x^2 + 2x$ sur $[-1, +1]$.

On donne la droite de meilleure approximation continue de f sur cet intervalle au sens des moindres carrés, en prenant pour produit scalaire :

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \int_{-1}^{+1} g_1(x) g_2(x) dx$$

$$P_1(x) = a_0 x + a_1$$

Le système linéaire est :

$$\begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} x^2 dx & \int_{-1}^{+1} x dx \\ \int_{-1}^{+1} x dx & \int_{-1}^{+1} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^{+1} (x^2 + 2x)x dx \\ \int_{-1}^{+1} (x^2 + 2x) dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Résolution du système : $a_0 = 2, a_1 = 1/3$

$$P_1(x) = 2x + 1/3$$

A2.3 Approximation polynomiale trigonométrique

Exemple

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2\pi x + 2$ sur $[0, 2\pi]$.

On donne la meilleure approximation trigonométrique continue de f sur cet intervalle, au sens des moindres carrés, de la forme :

$$S(x) = a_0/2 + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

Le système linéaire est :

$$\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} dx & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos x dx & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin x dx \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos x dx & \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx \\ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin x dx & \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx & \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (x^2 - 2\pi x + 2) dx \\ \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + 2) \cos x dx \\ \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + 2) \sin x dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\pi^3 + 2\pi \\ 4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution du système : $a_0 = 4(1 - \pi^2/3)$, $a_1 = 4$, $b_1 = 0$

$$S(x) = 2(1 - \pi^2/3) + 4 \cos x$$

Interpolation polynomiale

B.1 Méthode de Lagrange

Exemple

On considère le polynôme d'interpolation $P(x)$ tel que :
 $P(0) = 0, P(1)=3, P(3)=5, P(9/2)=4, P(5)=3.$

On calcule la valeur de $P(x)$ en 20 points équidistants de l'intervalle $[0, 5]$.

- **Calcul de $P(2)$**

$$x_0=0, x_1=1, x_2=3, x_3=9/2, x_4=5$$

$$y_0=0, y_1=3, y_2=5, y_3=4, y_4=3$$

$$L_0(2) = ((2-1)(2-3)(2-9/2)(2-5))/((0-1)(0-3)(0-9/2)(0-5)) = -1/9$$

$$L_1(2) = ((2-0)(2-3)(2-9/2)(2-5))/((1-0)(1-3)(1-9/2)(1-5)) = 15/28$$

$$L_2(2) = ((2-0)(2-1)(2-9/2)(2-5))/((3-0)(3-1)(3-9/2)(3-5)) = 5/6$$

$$L_3(2) = ((2-0)(2-1)(2-3)(2-5))/((9/2-0)(9/2-1)(9/2-3)(9/2-5)) = -32/63$$

$$L_4(2) = ((2-0)(2-1)(2-3)(2-9/2))/((5-0)(5-1)(5-3)(5-9/2)) = 1/4$$

$$P(2) = 0*(-1/9) + 3*(15/28) + 5*(5/6) + 4*(-32/63) + 3*(1/4) = 283/63$$

B.2 Méthode de Neville-Aitken

Exemple

On considère le polynôme d'interpolation $P(x)$ tel que :

$$P(0) = 0, P(1)=3, P(3)=5, P(9/2)=4, P(5)=3$$

On calcule la valeur de $P(x)$ en 20 points équidistants de l'intervalle $[0, 5]$.

- **Calcul de $P(2)$**

$$x_0=0, x_1=1, x_2=3, x_3=9/2, x_4=5$$

$$y_0=0, y_1=3, y_2=5, y_3=4, y_4=3$$

$$P_{0,0}(2) = y_0 = 0$$

$$P_{1,1}(2) = y_1 = 3$$

$$P_{2,2}(2) = y_2 = 5$$

$$P_{3,3}(2) = y_3 = 4$$

$$P_{4,4}(2) = y_4 = 3$$

$$P_{0,1}(2) = ((2-0)*3-(2-1)*0)/(1-0) = 6$$

$$P_{1,2}(2) = ((2-1)*5-(2-3)*3)/(3-1) = 4$$

$$P_{2,3}(2) = ((2-3)*4-(2-9/2)*5)/(9/2-3) = 17/3$$

$$P_{3,4}(2) = ((2-9/2)*3-(2-5)*4)/(5-9/2) = 9$$

$$P_{0,2}(2) = ((2-0)*4-(2-3)*6)/(3-0) = 14/3$$

$$P_{1,3}(2) = ((2-1)*17/3-(2-9/2)*4)/(9/2-1) = 94/21$$

$$P_{2,4}(2) = ((2-3)*9-(2-5)*17/3)/(5-3) = 4$$

$$P_{0,3}(2) = ((2-0)*94/21-(2-9/2)*14/3)/(9/2-0) = 866/189$$

$$P_{1,4}(2) = ((2-1)*4-(2-5)*94/21)/(5-1) = 61/14$$

$$P_{0,4}(2) = ((2-0)*61/14-(2-5)*866/189)/(5-0) = 283/63$$

$$P(2) = P_{0,4}(2) = 283/63$$

B.3 Méthode de Newton

Exemple

On considère le polynôme d'interpolation $P(x)$ tel que :

$$P(0) = 0, P(1) = 3, P(3) = 5, P(9/2) = 4, P(5) = 3$$

On calcule la valeur de $P(x)$ en 20 points équidistants de l'intervalle $[0, 5]$.

- Calcul de $P(2)$

$$x_0=0, x_1=1, x_2=3, x_3=9/2, x_4=5$$

$$y_0=0, y_1=3, y_2=5, y_3=4, y_4=3$$

$$D_{0,0} = y_0 = 0$$

$$D_{1,1} = y_1 = 3$$

$$D_{2,2} = y_2 = 5$$

$$D_{3,3} = y_3 = 4$$

$$D_{4,4} = y_4 = 3$$

$$D_{0,1} = (3-0)/(1-0) = 3$$

$$D_{1,2} = (5-3)/(3-1) = 1$$

$$D_{2,3} = (4-5)/(9/2-3) = -2/3$$

$$D_{3,4} = (3-4)/(5-9/2) = -2$$

$$D_{0,2} = (1-3)/(3-0) = -2/3$$

$$D_{1,3} = (-2/3-1)/(9/2-1) = -10/21$$

$$D_{2,4} = (-2-(-2/3))/(5-3) = -2/3$$

$$D_{0,3} = (-10/21-(-2/3))/(9/2-0) = 8/189$$

$$D_{1,4} = (-2/3-(-10/21))/(5-1) = -1/21$$

$$D_{0,4} = (-1/21-8/189)/(5-0) = -17/945$$

$$b_0(2) = -17/945$$

$$b_1(2) = (-17/945)*(2-9/2)+8/189 = 11/126$$

$$b_2(2) = (11/126)*(2-3)-2/3 = -95/126$$

$$b_3(2) = (-95/126)*(2-1)+3 = 283/126$$

$$b_4(2) = (283/126)*(2-0)+0 = 283/63$$

$$P(2) = b_4(2) = 283/63$$

Organigramme

