



UNIVERSITE DE BLIDA  
INSTITUT DE MECANIQUE

## MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par : **Abderrahmane ABDERRAHMANE**

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
**MAGISTER EN GENIE MECANIQUE**  
OPTION : **SCIENCES DES MATERIAUX**

### Thème

**DEVELOPPEMENT D'UN CODE DE CALCUL ET D'ANALYSE DES  
STRUCTURES FISSUREES SOUMISES A DES SOLLICITATIONS  
DE FATIGUE**

Soutenu devant le jury :

Président	Dr N. BACHA	maître de conférences	U.S.T.BLIDA
Examineurs	Dr M. HADJI	maître de conférences	U.S.T.BLIDA
	Dr O. RAHMANI	maître de conférences	U.S.T.ORAN
	Dr K. CHAOUI	maître de conférences	U. ANNABA
Rapporteur	Dr M. GACEB	chargé de cours	U. BOUMERDES

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à exprimer vivement mes remerciements aux termes de respects et de reconnaissances à mon promoteur Mr .M. Gaceb Chargé de Cours à l'Université de Boumerdès pour m'avoir guidé et orienté durant la réalisation de ce modeste travail.*

*J'exprime ma vive gratitude à Mr. N. Bacha Maître de Conférences à l'Université de Blida, pour son aide en matières de documentation et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury.*

*Mes profonds remerciements sont adressés à Mr. M.Hadji Maître de Conférences à l'Université de Blida, pour ses encouragements et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger ce travail.*

*Qu'il me soit d'exprimer ma profonde gratitude à Mr.O.Rahmani Maître de Conférences à l'U.S.T d'Oran et Mr K. Chaoui maître de conférences à l'Université de Annaba, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de juger ce travail.*

*Je remercie également le corps administratif et pédagogique de l'Institut de mécanique, ainsi que tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

---

## ***Résumé***

Suite à l'apparition et l'évolution des micro-ordinateurs, le développement des logiciels a connu un grand succès ces dernières années.

Ce travail a pour objectif principal de développer un code de calcul et d'analyse des structures fissurées sollicitées en fatigue en moyennant de l'environnement Windows pour faciliter l'analyse tout en diminuant les risques d'erreurs par l'utilisation d'un efficace interface utilisateur-machine.

L'application interactive réalisée dans ce cadre constitue un véritable outil d'analyse des structures fissurées en permettant l'édition des données, le choix du modèle de structure fissurée, le choix du matériau et la visualisation graphique de la structure fissurée et la visualisation graphique des résultats.

Plusieurs options de calcul de fatigue sont intégrées, parmi lesquelles figurent le calcul de la longueur critique de la fissure, la charge résiduelle et l'estimation de la durée de vie. L'environnement Windows rend ce logiciel très souple et offre une plate forme pour des évolutions futures.

**DEDICACES**

*A ma mère et mon père*

*A mes frères et mes sœurs*

*A toute la famille*

*A tous mes amis*

## NOMENCLATURE

$\sigma_{nom}$	contrainte nominale
$\sigma_{max}, \sigma_{min}, \sigma_{moy}, \sigma_a$	contrainte maximale, minimale, moyenne et alternée dans un cycle de fatigue
$\tau, \tau_t$	contrainte de cisaillement plan et anti-plan
$E$	module d'élasticité longitudinal
$G_{cis}$	module d'élasticité transversal
$\nu$	coefficient de poisson
$\sigma_e$	limite d'élasticité
$\sigma_R$	contrainte de rupture
$\sigma_D$	limite d'endurance
$D$	Domage
$R$	rapport des contraintes
$K_t$	facteur de concentration de contrainte
$K_f$	facteur effectif de concentration de contrainte
$K_s$	facteur d'état de surface
$K_e$	facteur d'effet d'échelle
$K_p$	facteur de passage
$q$	indice de sensibilité à l'entaille
$\delta_t$	facteur d'adaptation dynamique
$R_t$	rugosité superficielle
$\sigma_{Res}$	contrainte résiduelle
$\Delta\epsilon_e, \Delta\epsilon_p^*, \Delta\epsilon_t$	variation de la déformation élastique, plastique et totale
$\Delta\sigma$	variation de la contrainte.
$K'$	coefficient de résistance cyclique.
$\epsilon'_f$	coefficient de ductilité à la fatigue.
$\sigma'_f$	coefficient de résistance à la fatigue.
$A^\circ$	Angströms

---

$a$	longueur de fissure, demi-longueur de la fissure, profondeur fissure
$c$	deuxième dimension en cas d'une fissure elliptique, semi-elliptique, $\frac{1}{4}$ d'ellipse.
$t$	épaisseur de la plaque
$b$	largeur de la plaque
$d$	profondeur d'entaille
$\rho$	rayon d'entaille
$U$	énergie potentiel du système
$G$	taux de restitution d'énergie
$R$	résistance à l'extension de fissure
$\delta_s, \delta_p$	énergie de surface, énergie de déformation plastique
$[U_x], [U_y], [U_z]$	déplacement des lèvres de fissures en modes I, II et III
$\sigma_y$	champ de contraintes
$U_{ij}$	champ de déplacements
$K_{min}, K_{max}$	minimum et maximum du <i>F.I.C</i>
$f(a/b)$	facteur de correction géométrique
$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$	facteurs de corrections du <i>F.I.C</i>
$K_I, K_{II}, K_{III}$	<i>F.I.C</i> en mode de rupture <i>I, II</i> et <i>III</i>
$K_C$	<i>F.I.C</i> critique en contrainte plane.
$K_{IC}$	<i>F.I.C</i> critique en déformation plane.
$\Delta K$	amplitude du <i>F.I.C</i>
$\beta$	angle dans une fissure elliptique
$f(a)$	fonction d'influence
$r$	rayon d'une zone près du fond de fissure
$r_p$	rayon de la zone plastique au fond de fissure
$a_{eff}$	longueur effective de la fissure
$\Delta K_{eff}$	amplitude du <i>F.I.C</i> effectif
$M_f$	moment de flexion
$T$	couple de torsion
$P$	charge en <i>Newton</i>
$\delta$	déplacement d'ouverture des lèvres de fissures
$J$	intégrale de <i>Rice</i>

---

$S_{min}$	densité d'énergie minimale
$S_C$	densité d'énergie minimale critique
$\theta_0$	direction de propagation
$\Delta K_{th}$	seuil de propagation
$\Delta K_{th0}$	seuil de propagation pour $R = 0$
$\frac{da}{dN}$	taux de propagation de la fissure
$a_0$	longueur initiale de la fissure
$a_1, a_2$	longueur de fissure à la transition <i>I-II</i> et <i>II-III</i> (courbe de propagation)
$a_d$	seuil de détectabilité
$a_p$	longueur de fissure permise
$\frac{da}{dc}$	taux de variation de la profondeur de fissure par rapport à sa longueur
$a_C$	longueur critique de la fissure
$\sigma_p$	contrainte permise
$\sigma_{max C}$	contrainte maximale critique
$N$	nombre de cycle
$N_i$	nombre de cycle d'initiation
$N_p$	nombre de cycle de propagation
$I$	intervalle d'inspection

$S_{min}$	densité d'énergie minimale
$S_C$	densité d'énergie minimale critique
$\theta_0$	direction de propagation
$\Delta K_{th}$	seuil de propagation
$\Delta K_{th0}$	seuil de propagation pour $R = 0$
$\frac{da}{dN}$	taux de propagation de la fissure
$a_0$	longueur initiale de la fissure
$a_1, a_2$	longueur de fissure à la transition <i>I-II</i> et <i>II-III</i> (courbe de propagation)
$a_d$	seuil de détectabilité
$a_p$	longueur de fissure permise
$\frac{da}{dc}$	taux de variation de la profondeur de fissure par rapport à sa longueur
$a_c$	longueur critique de la fissure
$\sigma_p$	contrainte permise
$\sigma_{max C}$	contrainte maximale critique
$N$	nombre de cycle
$N_i$	nombre de cycle d'initiation
$N_p$	nombre de cycle de propagation
$I$	intervalle d'inspection

## ABRÉVIATIONS

<i>MDR</i>	mécanique de la rupture
<i>MLER</i>	mécanique linéaire élastique de la rupture
<i>F.I.C</i>	facteur d'intensité de contrainte
<i>F.P.O</i>	fatigue plastique olygocyclique
<i>M.E.F</i>	méthode des éléments finis
<i>C.P</i>	contrainte plane
<i>D.P</i>	déformation plane
<i>COD</i>	Crack Opening Displacement
<i>HAZ</i>	Heat affected zone
<i>ASTM</i>	American Society for Testing and Materials
<i>ASME</i>	American Society of Mechanical Engineers (U.S.A)
<i>CEGB</i>	Central Electricity Generating Board (U.K)
<i>ECCS</i>	European Convention for Constructional Steelwork (Belgium)
<i>BSI</i>	British standard institution (U.K)
<i>NASA</i>	National Aeronautics and Space Administration (U.S.A)
<i>CETIM</i>	Centre Technique des Industries Mécaniques (France)
<i>JWES</i>	the Japanese Welding Engineering Society (Japan)
<i>ESDU</i>	Engineering Sciences Data Unit (U.K).
<i>RAD</i>	Rapid Application Development
<i>GUI</i>	Graphic User Interface
<i>OLE</i>	Object Library Exchange
<i>CurveExpert.01</i>	logiciel de lissage et d'interpolation
<i>NASA/FLAGROW</i>	code de calcul développé par le centre de la NASA ' NASA Johnson Space Center ' .
<i>NASACRAC</i>	code de calcul développé par l'association " Failure Analysis Associates " sous contrat pour le centre de la NASA "NASA Marshall Space Flight Center"
<i>CLIPS</i>	Générateur des Systèmes Experts de la <i>NASA</i>
<i>ICOM150</i>	rapport de <i>ECCS</i>
<i>WES 2805</i>	rapport de <i>JWES</i>
<i>BSI PD6493</i>	rapport de <i>CEGB</i>
<i>R/H/6 "Revision3</i>	rapport de <i>BSI</i>

## TABLE DES MATIERES

<i>INTRODUCTION</i> .....	1
 <b>CHAPITRE I : MECANIQUE ET MECANISME DE LA RUPTURE PAR FATIGUE</b>	
I.1 Concept de fatigue.....	5
I.2 Essai de fatigue .....	5
I.2.1 Aspect statistique et probabiliste de l'essai de fatigue.....	8
I.3 Diagramme d'endurance.....	9
I.3.1 Fatigue olygocyclique.....	9
I.3.2 Zone d'endurance limitée.....	12
I.3.3 Zone d'endurance illimitée.....	12
I.3.4 Limite d'endurance.....	13
I.3.5 Durée de vie.....	13
I.4 Dommage cumulatif.....	13
I.5 Mécanisme de la fatigue.....	14
I.5.1 Faciès caractéristiques de la rupture par fatigue.....	14
I.5.2 Amorçage des fissures.....	16
I.5.3 Propagation des fissures.....	16
I.5.4 Rupture finale.....	19
I.6 Facteurs d'influence sur le comportement en fatigue.....	19
I.6.1 Facteurs métallurgiques.....	19
I.6.2 Facteurs géométriques.....	20
I.6.3 Conditions de surface.....	22
I.6.4 Conditions de sollicitations.....	23
I.6.5 Effets des contraintes résiduelles.....	25
I.6.6 Influence de la température.....	25
 <b>CHAPITRE II : ANALYSE DES MILIEUX FISSURES</b>	
II.1 Introduction.....	26
II.2 Concept de concentration de contrainte.....	27
II.3 Etat de contrainte.....	29

II.3.1 Etat de contrainte plane ( <i>C.P.</i> ).....	29
II.3.2 Etat de déformation plane ( <i>D.P.</i> ).....	29
II.4 Approche énergétique de <b>Griffith</b> .....	30
II.4.1 Balance énergétique pour les métaux .....	32
II.5 Mécanique linéaire élastique de la rupture ( <i>MLER</i> ) et approche par facteur d'intensité de contrainte ( <i>F.I.C.</i> ) .....	33
II.5.1 Les fissures.....	33
II.5.2 Modes de rupture.....	33
II.5.3 Champs de contrainte et de déplacement au voisinage d'une fissure.....	34
II.5.4 Concept du <i>F.I.C.</i> .....	35
II.5.5 Détermination du <i>F.I.C.</i> .....	36
II.5.5.1 Méthodes analytiques.....	37
II.5.5.2 Méthodes numériques.....	37
II.5.5.3 Méthodes expérimentales.....	37
II.5.6 Solutions relatives au <i>F.I.C.</i> .....	38
II.6 Approche par correction.....	40
II.7 Zone plastique au fond de fissure.....	43
II.8 La ténacité et le <i>F.I.C.</i> critique $K_{IC}$ .....	45
II.8.1 détermination expérimentale et l'utilisation pratique du $K_{IC}$ .....	47
II.9 Limitation de <i>MLER</i> .....	48
II.10 Critères de rupture.....	49
II.10.1 Critères de rupture en <i>mode I</i> .....	49
II.10.1.1 Critère énergétique.....	49
II.10.1.2 Critère basé sur le <i>F.I.C.</i> .....	49
II.10.1.3 Critère du déplacement des lèvres de fissure ( <i>C.O.D.</i> ) .....	50
II.10.1.4 Critère de l'intégral <i>J</i> .....	50
II.10.2 Critères de rupture en <i>mode mixte</i> .....	50
II.10.2.1 Critère de contrainte tangentielle maximale ( <i>Sih-1</i> ).....	50
II.10.2.2 Critère de densité d'énergie de déformation élastique ( <i>Sih-Z</i> ).....	52
II.10.2.3 Critère de <i>Palanyswany</i> et <i>Knauss</i> .....	54

**CHAPITRE III : MODELISATION DES PROBLEMES DE FISSURATION PAR FATIGUE**

III.1 Introduction.....	55
-------------------------	----

IV.3.6	Contrainte critique.....	80
IV.3.7	Vérifier la sûreté de la structure.....	80
IV.3.7	Prédiction de la durée de vie.....	81
IV.3.7.1	Durée d'initiation.....	81
IV.3.7.2	Durée de propagation.....	81
IV.3.8	Analyse de propagation.....	83
IV.4	Plan de contrôle de la rupture.....	84
IV.4.1	Inspection périodique.....	84
IV.4.2	Sûreté intégrée (Fail Saif) .....	85
IV.4.3	Durée de vie sûre.....	85
IV.4.4	Destructive inspection par des essais d'épreuves (Proof Test).....	85
IV.5	Coefficient de sécurité.....	86

**CHAPITRE V : PROGRAMMATION ET IMPLEMENTATION DE L'INTERFACE  
UTILISATEUR-MACHINE**

V.1	Méthodes de calcul numériques.....	87
V.2	Développement du programme.....	88
V.3	Structure du programme.....	89
V.4	Optimisation et modification du programme.....	89
V.5	Organigrammes.....	90
V.6	Implémentation de l'interface Utilisateur-Machine.....	96
V.6.1	Menu principale.....	96
V.6.2	Modèle de structure fissurée.....	96
V.6.3	Introduction des données.....	98
V.6.4	Matériau.....	99
V.6.5	Choix d'un Critère de rupture.....	101
V.6.6	Calculs numériques.....	101
V.6.7	Analyse de propagation.....	101
V.6.8	Expertise des ruptures par fatigue.....	103
VI	Applications et discussions.....	104
	<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>113</b>

## LISTES DES FIGURES

Fig. 1.1	Chargement variable dans le temps.....	6
Fig. 1.2	Cycle de contrainte de fatigue.....	6
Figure. 1.3	Différents cas de sollicitation de fatigue.....	7
Fig. 1.4	Courbe de fatigue ou courbe S-N.....	7
Fig. 1.5	Courbe d'endurance en fonction de la probabilité de rupture.....	8
Fig. 1.6	Différentes zones d'une courbe S-N.....	9
Fig. 1.7	Courbe de <b>Coffin-Manson</b> .....	10
Fig. 1.8	Courbes de fatigue pour quelques matériaux.....	13
Figure. 1.9	L'endommagement en fatigue d'après <b>Miner</b> .....	14
Fig. 1.10	Faciès caractéristiques d'une rupture par fatigue.....	15
Fig. 1.11	Stries et lignes d'arrêts dus au caractère progressif du phénomène de fatigue	16
Fig. 1.12	Bandes de glissement et microfissures le long des lignes de glissement.....	17
Fig. 1.13	Formation d'Intrusions et d'Extrusion en cas d'un chargement cyclique.....	17
Fig. 1.14	Stades de propagation .....	18
Fig. 1.15	Influence de la contrainte moyenne.....	23
Fig. 2.1	Concentration de contrainte au voisinage d'un défaut elliptique.....	28
Fig. 2.2	Comportement au fond de fissure en état de C.P.....	29
Fig. 2.3	Comportement au fond de fissure en état de D.P.....	30
Fig. 2.4	Fissure centrale dans une plaque infinie (problème de Griffith).....	30
Fig. 2.5	Modes de rupture.....	33
Fig. 2.6	Utilisation de la M.E.F pour une structure fissurée.....	37
Fig. 2.7	Méthode de superposition des F.I.C.....	40
Fig. 2.8	Zone plastique au fond de la fissure.....	43
Fig. 2.9	Zone plastique selon l'état de contrainte (mode I).....	44
Fig. 2.10	Zone plastique en mode II et III.....	44
Fig. 2.11	Variation du F.I.C critique en fonction de l'épaisseur.....	46
Fig. 2.12	Variation de la ténacité en fonction de limite d'élasticité.....	48
Fig. 2.13	Contrainte tangentielles près du fond de fissure.....	51
Fig. 2.14	Contrainte tangentielles près du fond de fissure(3D).....	52

Fig. 3.1	Champ de contrainte au voisinage d'une entaille.....	56
Fig. 3.2	Contour d'intégration pour les intégrales de <b>Rice</b> et de <b>Bui</b> .....	60
Fig.3.3	Courbe de propagation des fissures en fatigue.....	61
Fig.3.4	Phénomène de fermeture de la fissure.....	64
Fig.4.1	Assimilation des défauts internes à des fissures elliptiques (Code ASME)....	71
Fig.4.2	Assimilation des défauts débouchantes à la surface à des fissures..... semi-elliptiques (Code ASME).....	71
Fig.4.3	Prendre en compte de l'interaction entre les fissures coplanaires..... (Code ASME).....	73
Fig. 4.4	Assimilation des défauts selon les Codes WES 2805 et BSI PD6493.....	73
Fig.5.1	Options du programme.....	90
Fig.5.2	Choix du modèle de structure fissurée.....	91
Fig.5.3	Analyse de propagation.....	92
Fig.5.4	Durée de vie.....	95
Fig.5.5	Menu principale.....	96
Fig.5.6	Barre d'outils.....	96
Fig.5.7	Sélection des paramètres de la structure fissurée.....	97
Fig.5.8	Sélection du modèle de la structure fissurée.....	97
Fig.5.9	Approche par correction.....	98
Fig.5.10	Approche par correction (concentration de contrainte).....	98
Fig.5.11	Introduction des données.....	99
Fig.5.12	Recherche d'un matériau dans la table de données.....	99
Fig 5.13	Table de données des propriétés des matériaux.....	100
Fig.5.14	Introduire ou charger les données.....	100
Fig.5.15	Choix du critère de rupture.....	101
Fig.5.16	Calcul numérique.....	102
Fig.5.17	Fiche d'analyse de propagation.....	103
Fig.5.19	Influence de la surface libre sur l'amplitude du F.I.C.....	108
Fig5.20	Influence du type de sollicitation l'amplitude du F.I.C.....	108
Fig.5.21	Influence du bord de la fissure sur l'amplitude du F.I.C.....	108
Fig.5.22	Influence du l'état de chargement sur l'amplitude du F.I.C.....	108
Fig.5.23	Influence de la profondeur d'entaille sur l'amplitude du F.I.C.....	108
Fig.5.24	Influence du rayon d'entaille sur l'amplitude du F.I.C.....	108

Fig5.25	Influence du type de fissure sur le nombre de cycles à la rupture.....	109
Fig.5.26	Influence du type de sollicitation sur le nombre de cycles à la rupture.....	109
Fig.5.27	Influence de l'état du chargement sur le nombre de cycles à la rupture.....	109
Fig.5.28	Influence du type de sollicitation sur le nombre de cycles à la rupture.....	109
Fig.5.29	Influence de la contrainte maximale sur le nombre de cycles à la rupture...	109
Fig.5.30	Influence du rapport R sur le nombre de cycles à la rupture.....	109
Fig.5.31	Influence de la profondeur d'entaille sur la durée de vie.....	110
Fig.5.32	Influence du rayon d'entaille sur la durée de vie.....	110
Fig.5.33	Influence de l'état de contrainte sur la charge maximale critique .....	110
Fig.5.34	Influence de la nature du chargement sur la charge maximale critique.....	110
Fig.5.35	Influence de la surface libre sur la charge maximale critique.....	110
Fig.5.36	Effet du bord de fissure sur la charge maximale critique .....	110
Fig.5.37	Influence de la profondeur d'entaille sur la charge maximale critique .....	111
Fig.5.38	Influence du rayon d'entaille sur la charge maximale critique.....	111

## LISTES DES TABLEAUX

Tab 1.1	Données relative à la constante $d'$ dans la relation de <b>Neuber</b> .....	22
Tab 2.1	Contrainte locale selon le type de concentrateur de contrainte.....	42
Tab 4.1	Analyse de propagation.....	84
Tab 5.1	Données de la plaque fissurée.....	104
Tab 5.2	Influence de la taille initiale de la fissure sur les paramètres de la rupture... ..	104
Tab 5.3	Influence de l'épaisseur de la pièce sur les paramètres de la rupture.....	105
Tab 5.4	Résultats de calcul pour quatre modèles de structures fissurées.....	106
Tab 5.5	Influence du type de chargement sur les paramètres de la rupture.....	106
Tab 5.6	Résultats de calcul par <i>Fatigue Analysis</i> pour une fissure centrale.....	111
Tab 5.7	Comparaison des résultats de calcul pour une fissure centrale .....	111
Tab 5.8	Comparaison des résultats de calcul pour une fissure débouchante en traction.	112
Tab 5.9	Comparaison des résultats de calcul pour une fissure débouchante en flexion	112

## INTRODUCTION

La rupture des métaux est un problème aussi vieux que les métaux. Les études et les recherches dans ce domaine demeurent un sujet d'actualité et continuent de donner des résultats de plus en plus intéressants mais le problème est loin d'être totalement résolu. L'expérience a montré que la majorité des ruptures survenant dans les structures dont la plupart sont des ruptures soudaines sont dues à des sollicitations de fatigue. L'amorçage des fissures par fatigue se produit en générale à des niveaux de contraintes très inférieurs à la limite d'élasticité et sans déformation plastique notable. De telles ruptures ne sont donc pas détectées d'avance et surviennent brusquement et peuvent être de ce fait très dangereuses.

L'analyse des structures fissurées a pour but principal d'éviter les ruptures brutales catastrophiques et d'assurer le fonctionnement normal de la structure dans la durée de vie envisagée.

La théorie d'élasticité et la résistance des matériaux sont la base des règles de calcul des pièces de machines ou des constructions, son objectif principal est la prévision des grandes déformations. Elles supposent que le matériau est parfaitement continu, sans vide ni fissure et la déformation aura lieu sans que ces derniers apparaissent. On sait cependant que les matériaux ne sont pas parfaits et des défauts peuvent toujours exister et que les efforts alternés peuvent provoquer des fissures dans les zones de concentration de contrainte. Une approche traditionnelle à la conception basée sur la contrainte admissible est à proscrire ou du moins s'avère insuffisante en cas de sollicitations cycliques.

*A. Wöhler* a introduit le terme fatigue dans les années 1840-1850 pour décrire les ruptures dues à des charges cycliques après la première rupture due à des charges répétées qui a touché l'industrie de chemin de fer allemande dans les années 1850-1860. *A. Wöhler* a perforé plusieurs laboratoires d'essai de fatigue sous charges répétées. Les expériences réalisées dans ces laboratoires étaient consacrées à l'étude des ruptures des rails de chemin de fer et sont considérées

comme les premières études systématiques de la fatigue. Ainsi *A. Wöhler* est appelé le père des essais systématiques de la fatigue, il est arrivé à ce que suit :

- Introduire le concept du diagramme *S-N* et la notion de la limite de fatigue.
- A partir d'un diagramme *S-N* la durée de vie décroît avec l'augmentation de l'amplitude de contraintes.
- Au-dessous d'une certaine amplitude de contrainte il n'y aura pas de rupture quel que soit le nombre de cycles.
- En cas de la fatigue l'intervalle des contraintes maximales et minimales est aussi important que la contrainte maximale.

L'approche basée sur l'endurance est devenue très utile dans la conception des pièces soumises à la fatigue. Le traitement du phénomène de la fatigue par la méthode d'endurance ne donne cependant, aucun renseignement sur la croissance des fissures et seul le stade d'amorçage est correctement pris en compte, ce qui ne répond pas au besoin des domaines exigeant un haut niveau de fiabilité.

En 1950 *Irwin* a introduit la notion du facteur d'intensité de contrainte (*F.I.C.*). Après quelques années *Paris* a montré que la vitesse de propagation de fissure est mieux décrite en utilisant l'amplitude du *F.I.C.* Par conséquent le *F.I.C.* a été accepté comme la base de la mécanique linéaire élastique de la rupture (*MLER*), pour l'analyse de propagation des fissures et la prédiction de la durée de vie.

En 1960 et après la rupture catastrophique de l'aéronef *F-111* due à une rupture fragile des composants contenant des défauts, ainsi que d'autres ruptures dans *U.S Air Force Planes* l'utilisation du concept de la mécanique de la rupture est devenue exigé dans le programme B-1A « *Bomber development* » de 1970. Ce programme inclut la prédiction de la propagation de fissure basée sur une dimension initiale de la fissure. L'utilisation de la mécanique de la rupture comme outil d'analyse de fatigue est aujourd'hui bien établi par la pratique.

Par conséquent, le besoin d'une grande fiabilité dans une large gamme de structures industrielles (aéronautique, maritime, nucléaire, ...etc.) a nécessité l'amélioration des techniques d'analyse du comportement des fissures particulièrement sous chargement cyclique. Ceci a entraîné plusieurs recherches dans ce domaine pour avoir un outil d'analyse sous forme d'un code de calcul facile à utiliser.

Dans l'analyse des structures fissurées sollicitées en fatigue les informations suivantes sont à rechercher : la sûreté de la structure sous les chargements de service, la longueur critique de la fissure, la charge résiduelle et la durée de vie résiduelle.

L'objet principal de notre travail est de donner des réponses quantitatives aux problèmes spécifiques concernant les structures fissurées notamment les questions concernant :

- La contrainte résiduelle en fonction de la longueur de fissure, et qui peut être supportée sans risque de rupture.
- La longueur critique tolérée de la fissure sous les chargements de service.
- La durée de propagation de la fissure d'une valeur initiale détectable à une valeur maximale permise.
- La durée de vie d'une structure lorsque certains défauts préexistants sont supposés.
- La définition d'un intervalle de temps d'inspection permettant le contrôle efficace de l'extension de ces fissures.

Comme contribution dans ce domaine nous avons essayé d'élaborer un programme d'analyse et de calcul des structures fissurées sollicitées en fatigue. Afin qu'il soit généralisé pour une large configuration de structures fissurées, systèmes de contrainte et des matériaux différents, nous avons essayé de recueillir et d'organiser plusieurs résultats analytiques, numériques et expérimentaux concernant les données des propriétés cycliques des matériaux, les facteurs d'intensité de contrainte, les courbes de propagation de fissures et les procédures d'analyse de propagation des fissures, et les incorporer dans le programme.

Des outils mathématiques appropriés sont utilisés pour prédire le comportement correct des structures fissurées lorsque des charges dynamiques sont appliquées.

Notre programme nous permet de :

- Mieux dimensionner les structures industrielles durant la conception pour parer aux problèmes de rupture par fatigue.
- Accélérer les analyses et les calculs de routine se rapportant au phénomène de fatigue.
- Prendre les bonnes décisions concernant l'aptitude des structures fissurées à continuer leur service sous chargement cyclique.
- Déterminer des informations contribuant dans l'établissement du plan de contrôle et de maintenance.

Ainsi le programme procède à faire l'analyse de propagation des fissures sous chargement cyclique dans les conditions linéaire élastique en utilisant les lois de la mécanique linéaire élastique de la rupture *MLER*.

Pour mener à bien notre travail nous avons suivi le plan de travail suivant :

Dans le chapitre I une investigation théorique sur le phénomène de fatigue est présentée. Le mécanisme d'initiation et de propagation des fissures sous des chargements de fatigue, l'estimation de la limite d'endurance, l'estimation de la durée de vie basée sur l'approche traditionnelle ainsi que les différents facteurs d'influences sont traités.

Le chapitre II considère les notions fondamentales de la mécanique de la rupture, notamment le calcul du facteur d'intensité de contrainte et les critères de ruptures.

Le chapitre III est consacré à la modélisation des problèmes de fatigue par la mécanique de la rupture. Les différentes lois de propagation des fissures sont traitées.

Dans le chapitre IV sont développées les équations fondamentales pour la prévision et la prévention de la rupture par fatigue.

Au chapitre V nous citons les contraintes de développement du programme, les différents algorithmes de calcul et l'implémentation de l'interface utilisateur-machine. Des applications sont faites à la fin du chapitre.

Cette étude est clôturée par une conclusion générale en donnant les perspectives de recherche dans ce domaine.

## CHAPITRE I

### MECANIQUE ET MECANISME DE LA RUPTURE PAR FATIGUE

L'expérience industrielle montre que les ruptures de pièces de machines ou de structures en fonctionnement normal sont le plus souvent dues à la fatigue. Son caractère progressif qui conduit souvent à une rupture brutale, en fait un phénomène de rupture grave et dangereux qui doit être pris en considération à l'étape de conception et durant l'utilisation de n'importe quelle pièce ou organe de machine. Citons quelques accidents dus à ce phénomène [1] :

1954 : Deux avions Comet se brisèrent en vol à haute altitude (ruptures par fatigue ont pris naissance sur des trous de rivets)

1977 : Accident d'un BOING 707-300 à l'USAKA (perte en fatigue d'un empennage horizontal).

1979 : Accident d'un DC10 à CHICAGO (perte en fatigue de l'attache arrière du moteur)

Et dans la même période (1950-1970) des centaines d'incidents concernant des réservoirs sous pression, des ponts, des pièces de machine ou outillage mécanique, où quelques-unes étaient spectaculaires et meurtrières [2].

#### I.1 CONCEPT DE FATIGUE :

On entend par fatigue ou endommagement par fatigue la modification nocive des propriétés des matériaux consécutive à l'application de cycles d'efforts. La répétition de ces efforts un grand nombre de fois peut amener à la rupture même sous des contraintes apparentes bien inférieures à la résistance à la traction et même à la limite d'élasticité, ce qui en fait le danger [3,4].

D'une façon générale, il y' aura rupture par fatigue toutes les fois que l'on est en présence d'efforts variables dans le temps (Fig.1.1).

#### I.2 ESSAI DE FATIGUE :

L'essai de fatigue le plus simple consiste à imposer à une éprouvette une sollicitation périodique (généralement sinusoïdale), et d'enregistrer le nombre de cycles  $N$  au bout duquel la rupture se produit. Les contraintes sont définies par l'amplitude maximale atteinte au cours d'un cycle  $\sigma_a$ , par la valeur moyenne de la contrainte  $\sigma_{moy}$ , et par le rapport de la contrainte minimale à la contrainte maximale  $R$ , tels que :

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (1-1)$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Les termes utilisés en fatigue sont décrits par la figure 1.2

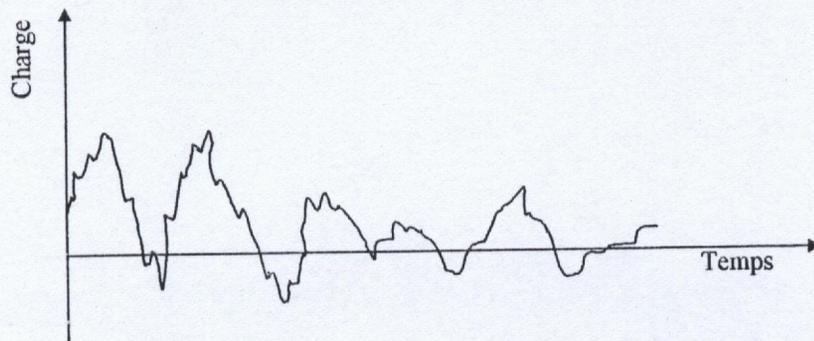


Fig. 1.1 Chargement variable dans le temps

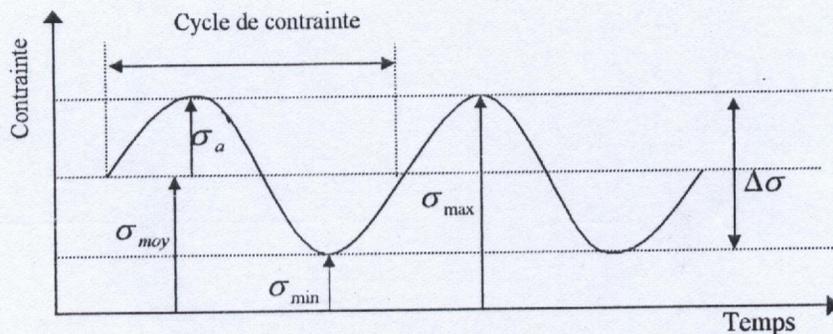


Fig. 1.2 Cycle de contrainte de fatigue

La contrainte moyenne est appelée contrainte statique et l'amplitude de la contrainte est appelée contrainte dynamique. Selon les valeurs relatives de ces composantes, on distingue les différents cas de sollicitations :

- Sollicitations alternées (Fig. 1.3.a)
- Sollicitations répétées (Fig. 1.3.b)
- Sollicitations ondulées (Fig. 1.3.c)

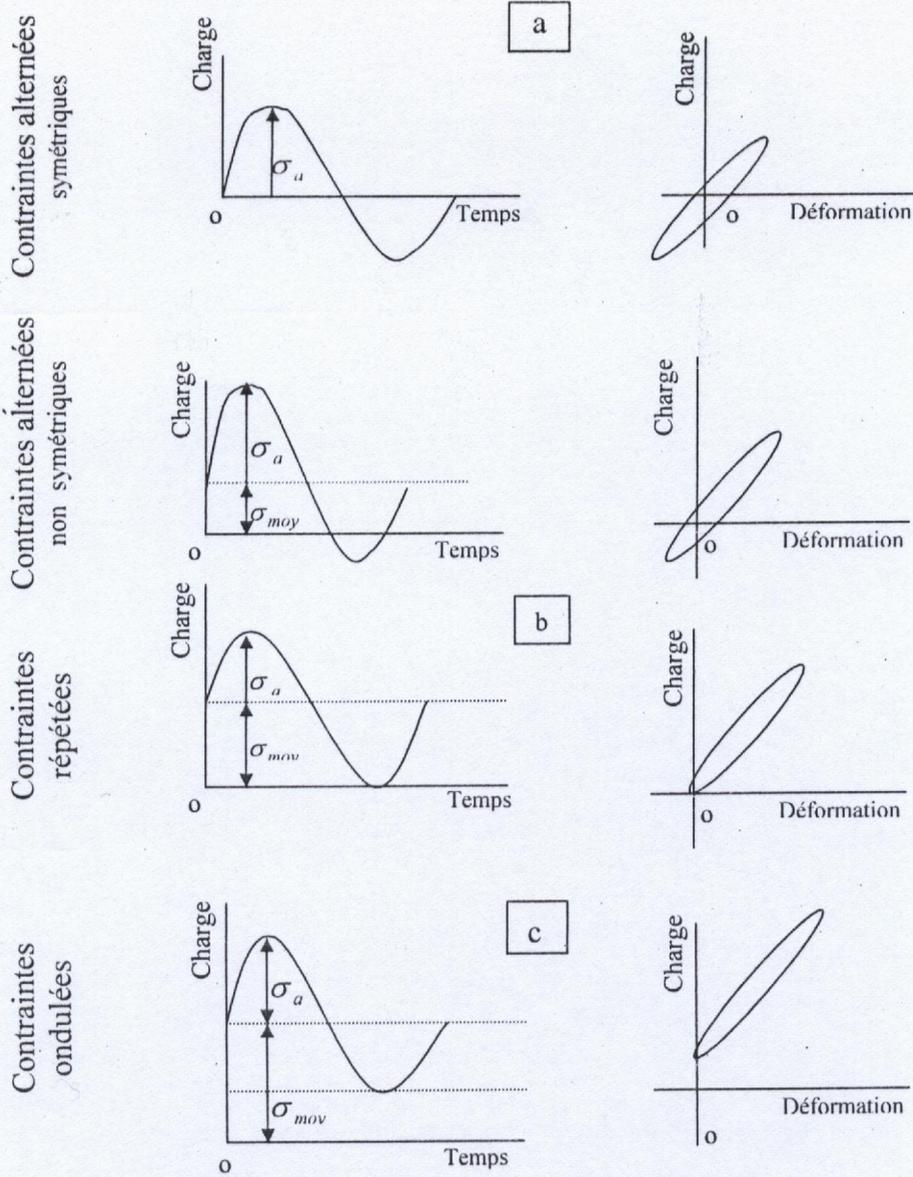


Figure.1.3 Différents cas de sollicitation de fatigue [4,5]

A partir d'un lot important d'éprouvettes soumises à différentes amplitudes de contraintes  $\sigma_a$  on obtient une courbe dite courbe de fatigue ou d'endurance (Fig.1.4).

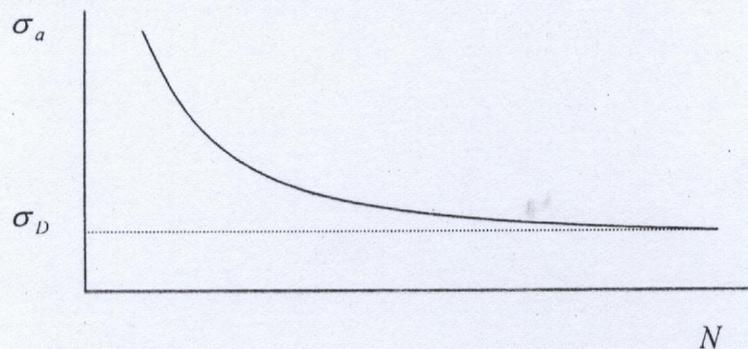


Fig.1.4 Courbe de fatigue ou courbe S-N [5]

### 1.2.1 ASPECT STATISTIQUE ET PROBABILISTE DE L'ESSAI DE FATIGUE :

Le phénomène de fatigue est de nature probabiliste marquée par des écarts-types importants. En ce qui concerne le nombre de cycle, des éprouvettes identiques tirées de la même coulée, usinées et essayées avec le plus soin rompent à des nombres de cycles très différents lorsqu'elles sont toutes soumises à un effort variable de même amplitude [1,5,6], pour cela les courbes de fatigue sont généralement représentées en fonction de la probabilité de rupture c'est à dire la courbe de la contrainte en fonction du nombre de cycle paramétré en probabilité de rupture  $P$  (Fig.1.5).

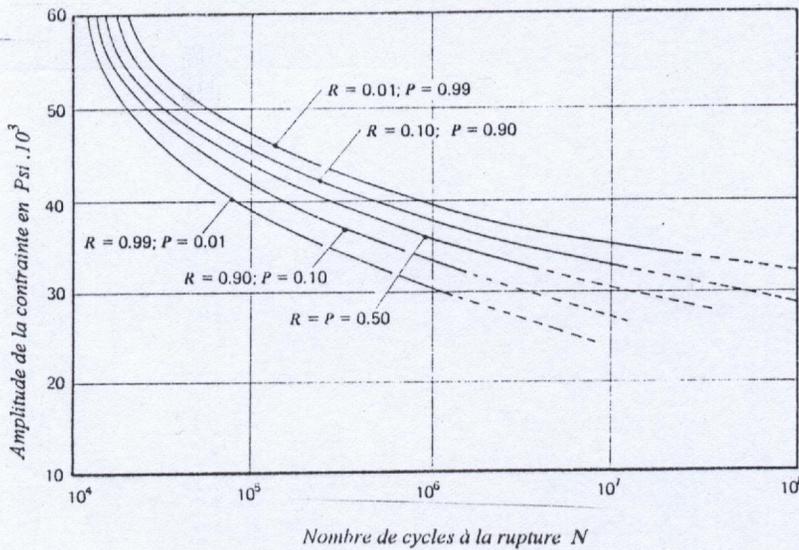


Fig. 1.5 Courbe d'endurance en fonction de la probabilité de rupture  $P$  [5]

Notons que la dispersion des résultats des essais de fatigue est un fait d'expérience et provient en effet de nombreuses causes [6] :

- L'hétérogénéité du matériau
- Tolérances d'usinage
- Tolérances de montage sur machine
- Défauts superficiels
- Variation de température
- Présence des contraintes résiduelles
- Milieu au cours de l'essai

A cause de cela, la durée de vie pour une contrainte donnée est représentée par une bande ou distribution du nombre de cycle qu'on peut réduire en précisant tous les paramètres cités au-dessus.

### I.3 DIAGRAMME D'ENDURANCE :

La durée de vie d'une pièce mécanique est caractérisée par le nombre de cycles à la rupture  $N$ . La courbe d'endurance, connue sous les noms, courbe de *Whöler*, courbe  $S-N$  ou courbe de fatigue représente la variation des contraintes dynamiques en fonction du nombre de cycles à la rupture, les contraintes appliquées sont portées en ordonné et le nombre de cycles en échelle logarithmique ou normale est porté en abscisse (Fig.1.6).

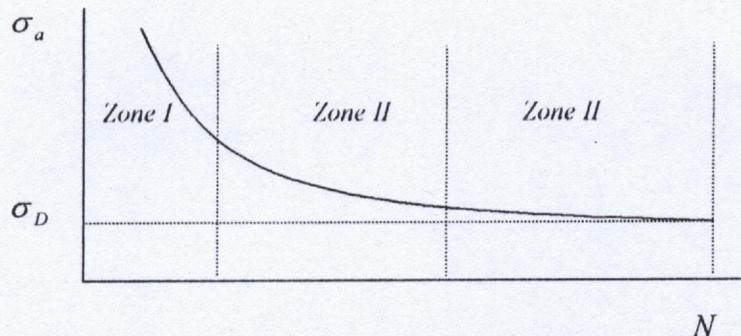


Fig.1.6 Différentes zones d'une courbe  $S-N$  [7]

Sur une courbe d'endurance on peut distinguer trois zones [4,7] :

- Une zone de fatigue oligocyclique, sous fortes contraintes, où la rupture survient après un très petit nombre d'alternances et elle est précédée d'une déformation plastique notable (*zone I*).
- Une zone de fatigue ou d'endurance limitée, où la rupture est atteinte après un nombre de cycle qui croît avec la diminution de la contrainte (*zone II*).
- Une zone d'endurance illimitée ou zone de sécurité, sous faibles contraintes pour lesquelles la rupture ne se produit pas avant la durée de vie envisagée pour la pièce (*zone III*).

#### I.3.1 FATIGUE PLASTIQUE OLYGOCYCLIQUE (F.P.O) :

Ce domaine correspond à des contraintes élevées supérieures à la limite d'élasticité du matériau, tel que la rupture survient après un très petit nombre de cycles ( $1/4 < N < 10^4 - 10^5$ ). La F.P.O présente deux caractéristiques fondamentales [4] :

- Elle est plastique, tel qu'une déformation plastique significative se produit à chaque cycle.
- Elle est oligocyclique, tel que les matériaux ont une endurance finie a ce type de sollicitation.

L'intérêt des études de la fatigue plastique olygocyclique réside principalement dans deux domaines :

- Dimensionnement est conception des appareils dans les industries avancés (aéronautique, production d'énergie ... etc.)
- Analyse approfondie du comportement des matériaux afin de mieux comprendre les phénomènes métallurgiques complexes.

Le comportement des matériaux en *F.P.O* est décrit généralement par des courbes représentant la contrainte en fonction de la déformation et des courbes représentant les déformations en fonction du nombre de cycle. Les premières courbes sont appelées courbes de consolidation cyclique ou d'hysteresis et les deuxièmes, courbes de résistance (Fig.1.7).

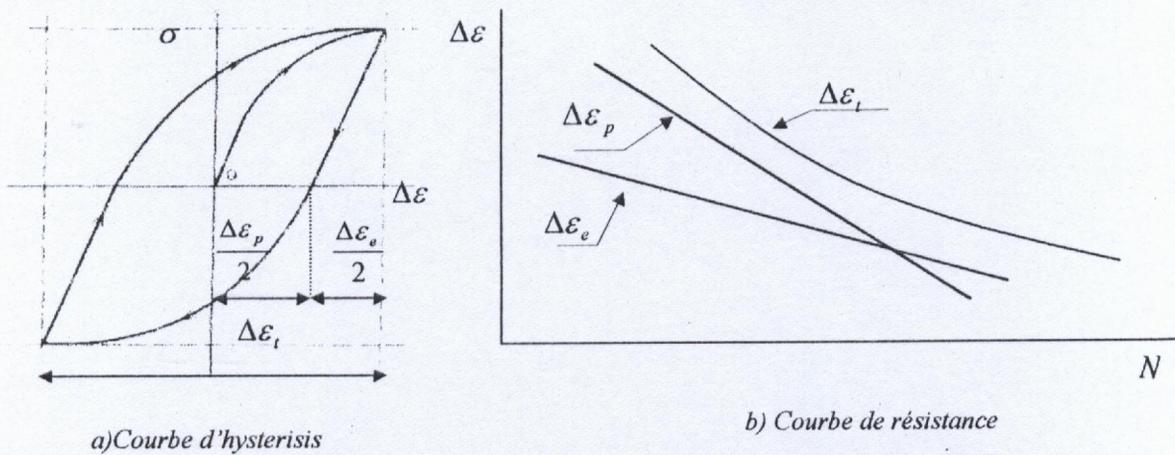


Fig.1.7 Courbe de Coffin-Manson [8]

Dans les courbes d'hysteresis, les courbes sont en général différentes d'un cycle au suivant, puis se stabilisent au bout d'un certain nombre de cycles [5,9]. Ces courbes connues sous le nom de *Coffin-Manson* représentent des données essentielles pour choisir un modèle de comportement cyclique. Il est de même pour contrôler le phénomène de *F.P.O* par la conception basée sur le contrôle de déformation (conception à durée de vie finie basée sur le contrôle de déformation). La formulation mathématique est décrite dans les sections suivantes.

### 1.3.1.1 Consolidation cyclique :

La courbe contrainte vs déformation (Fig.1.7.a) est très souvent représentée par la formulation suivante [10] :

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left( \frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{1/n'} \quad (1-2)$$

$E$  Module d'élasticité longitudinal ou module de *Young*.

$n'$  Coefficient de durcissement par déformation cyclique.

$K'$  Coefficient de résistance cyclique.

$\Delta\varepsilon_e$  Variation de la déformation élastique.

$\Delta\varepsilon_p$  Variation de la déformation plastique.

$\Delta\varepsilon_t$  Variation de la déformation totale.

Tel que la variation  $\Delta$  signifié la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

Pour une pièce entaillée les contraintes et les déformations locales peuvent être exprimées en fonction du facteur de concentration de contrainte  $K_t$  par la relation de *Neuber* [10,11] :

$$\Delta\varepsilon_t \cdot \Delta\sigma = \frac{(\Delta\sigma_{nom} \cdot K_t)^2}{E} \quad (1-3)$$

*Topper* et *al* proposent de remplacer  $K_t$  par  $K_f$  dans la relation (1-3) [10] :

$$\Delta\varepsilon_t \cdot \Delta\sigma = \frac{(\Delta\sigma_{nom} \cdot K_f)^2}{E} \quad (1-4)$$

$K_f$  : Facteur effectif de concentration de contrainte.

$\Delta\sigma_{nom}$  : Variation de la contrainte nominale.

### 1.3.1.2 Résistance à la F. P.O :

*Manson-Coffin* a montré qu'une relation puissance relie la déformation plastique et la déformation élastique au nombre de cycle  $N$ , tel qu'il trouve [1,9,10] :

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2.N)^b + \varepsilon'_f (2.N)^c \quad (1-5)$$

$\varepsilon'_f$  : Coefficient de ductilité à la fatigue.

$c$  : Exposant de ductilité à la fatigue.

$\sigma'_f$  : Coefficient de résistance à la fatigue.

$b$  : Exposant de résistance à la fatigue.

L'influence de la contrainte moyenne est introduit dans la formule suivante [9,11] :

$$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_{moy}}{E} (2.N)^b + \varepsilon'_f (2.N)^c \quad (1-6)$$

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma'_f - \sigma_{moy}}{E} (2.N)^b + \varepsilon'_f (2.N)^c \quad (1-6)$$

### 1.3.1.3 Vitesse de propagation des fissures :

La vitesse de propagation des fissures dans le domaine des faibles durées de vie est donnée par la relation suivante [4] :

$$\frac{da}{dN} = B.a.(\Delta \varepsilon_p)^\alpha \quad (1-7)$$

$a$  : Longueur de la fissure.

$B, \alpha$  : Constantes du matériau.

$da/dN$  : Vitesse de propagation.

### 1.3.2 ZONE D'ENDURANCE LIMITEE :

Dans cette zone la rupture apparaît après un nombre limité de cycles  $10^5$ - $10^7$  sans être accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble mesurable, le nombre de cycles à la rupture  $N$  croît avec la décroissance de la contrainte, une très bonne représentation de cette zone est faite par *Whöler* tel qu'il relie  $N$  à  $\sigma_a$  par la relation suivante [11] :

$$\log N = c_1 - c_2 \sigma_a \quad (1-8)$$

*Bastenaire* introduit  $\sigma_D$  par la relation suivante [4] :

$$N + B = A.e^{\frac{-c(\sigma_a - \sigma_D)}{\sigma_a - \sigma_D}} \quad (1-9)$$

$\sigma_D$  : Limite d'endurance.

$c, c_1, c_2, B, A$  Sont des constantes du matériau.

### 1.3.3 ZONE D'ENDURANCE ILLIMITEE (ZONE DE SECURITE) :

Dans cette zone les ruptures ne se produisent pas avant un nombre de cycles supérieur à la durée de vie envisagée de la pièce, généralement supérieur à  $10^7$ - $3.10^7$  cycles. Dans de nombreux cas, la courbe de *Whöler* comporte une branche asymptotique qui correspond à la limite d'endurance ou limite de fatigue  $\sigma_D$ , cette asymptote n'est pas remarquée en cas des alliages

d'Aluminium ou en cas de la fatigue-corrosion [4,5]. La figure 1.8 représente les courbes d'endurance pour quelques matériaux.

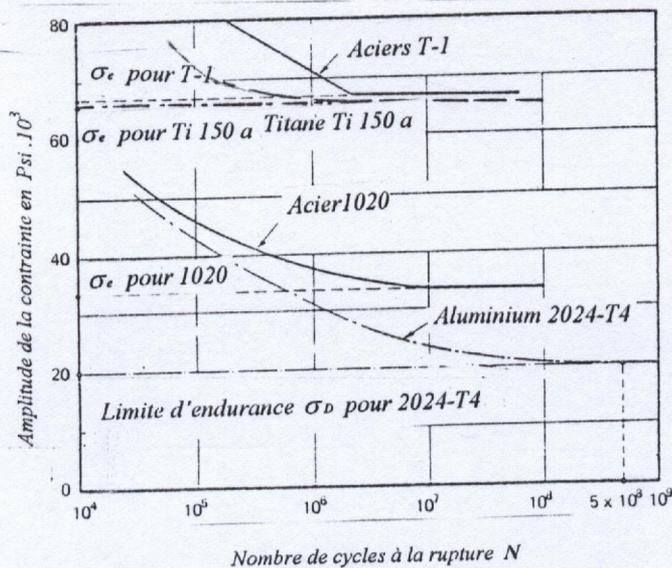


Fig.1.8 courbes de fatigue pour quelques matériaux [5].

### 1.3.4 LIMITE D'ENDURANCE ( $\sigma_D$ ) :

La limite d'endurance théorique est la limite supérieure de l'amplitude de contrainte qui peut être appliquée indéfiniment sans amener à la rupture, elle n'existe pas toujours. La limite conventionnelle ou limite de fatigue c'est l'amplitude de contrainte pour laquelle la rupture est constatée après un nombre de cycles fini  $N$  appelé censure [11].

En pratique la détermination de la limite d'endurance pose un problème particulier par suite du caractère aléatoire des ruptures de fatigue ce qui nécessite des méthodes statistiques. La limite d'endurance est généralement déterminée pour une probabilité de 50% de rupture [7].

### 1.3.5 DUREE DE VIE :

C'est le nombre de cycles nécessaires pour que la pièce se rompe pour un cycle de contrainte ( $\sigma_a, \sigma_{moy}$ ) donné [7].

### 1.4 DOMMAGE CUMULATIF :

En pratique, le plus souvent les pièces sont soumises en service à des sollicitations variables qui ne gardent pas la même amplitude, mais qui peuvent avoir différents niveaux d'amplitude, au cours de la durée de vie (Fig.1.9).

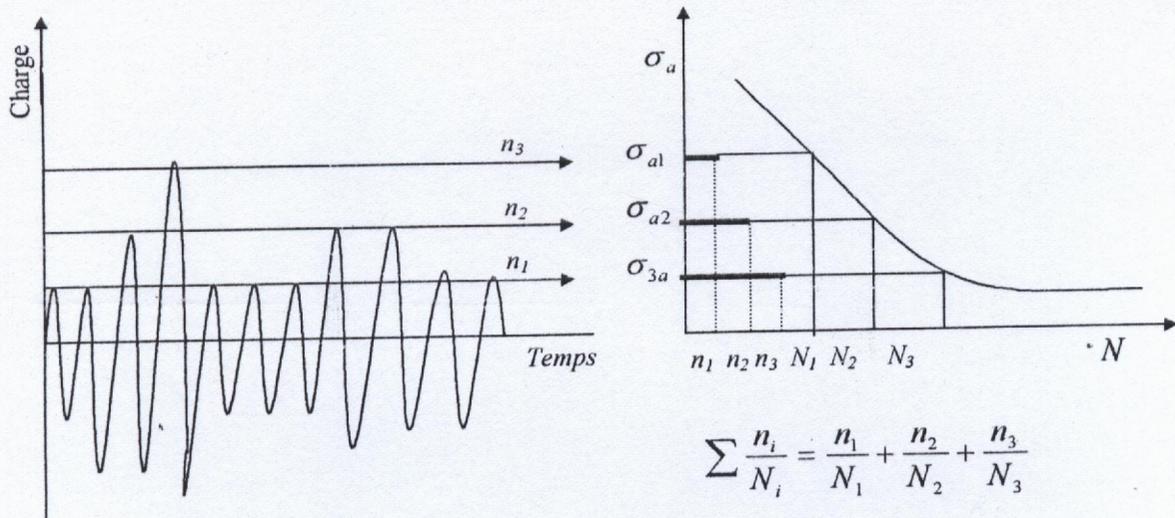


Figure.1.9 L'endommagement en fatigue d'après Miner

**Miner** a proposé d'exprimer l'endommagement partiel  $D_i$  en fonction du nombre de cycle  $n_i$  sous lequel la structure est sollicitée sous une amplitude constante  $\sigma_a$  et le nombre de cycles à la rupture sous ce chargement  $N_i$  tel que [5,8] :

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (1-10)$$

L'expression de **Miner** s'appuie en tout premier lieu sur la connaissance de la courbe de **Whöler**, tel que le  $N_i$  est déterminé à partir de la courbe d'endurance en considérant l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$ . Selon **Miner**, la rupture de la pièce intervient lorsque l'histoire des sollicitations qu'elle a subies a entraîné des endommagements partiels dont la somme est égale à 1 [8] :

$$\sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (1-11)$$

$k$  est le nombre des différents niveaux de contraintes.

L'expression (1-11) définit la rupture de la pièce soumise à un chargement d'amplitude variable.

## I.5 MECANISME DE LA FATIGUE :

### I.5.1 FACIES CARACTERISTIQUES DES RUPTURES EN FATIGUE :

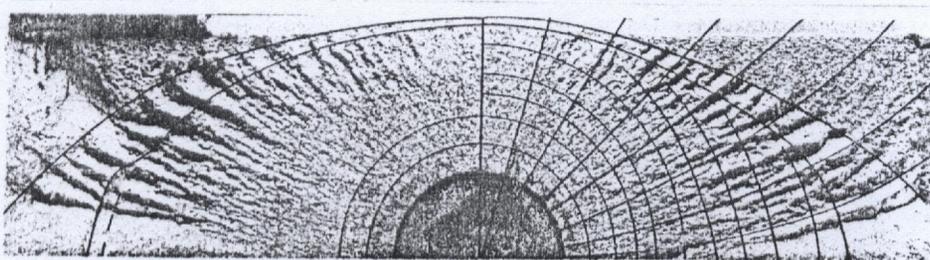
L'examen attentif des surfaces de rupture est une opération d'une grande importance dans le développement d'un produit ou l'expertise d'une rupture, car elle permet de mettre en évidence toute faiblesse caractéristique de la pièce accidentée. Par ailleurs elle est capable de nous indiquer

les causes de rupture qui nous permettront ensuite de chercher les remèdes nécessaires à appliquer pour que cet état de fait soit supprimé.

A l'échelle macroscopique, la surface de cassure présente deux zones d'importances variables selon l'amplitude des contraintes et la nature du matériau [1,4,7] et un ou plusieurs sites d'amorçage [2,9]. La première zone correspond à la zone de fatigue ou zone de propagation, elle est lisse, soyeuse et présente un aspect maté par suite du battement des deux bords de la fissure. La deuxième zone est la zone de rupture finale ou brutale qui correspond à l'apparition de l'ouverture brutale de la fissure lorsque la section travaillant est trop réduite, elle est sombre avec un faciès à grains [1,9].

A faible grossissement, la surface de rupture présente des lignes concentriques correspondant aux alternances de chargement et de repos ou encore aux changements d'amplitude de chargement (lignes d'arrêts), et des lignes normales aux précédentes qui divergent à partir de l'amorce de la fissure. En associant les deux lignes on peut facilement localiser à coup l'origine de la fissuration [2,4,7]. Une surface de rupture typique est représentée dans la figure 1.10.

A partir des sections respectives des deux zones en présence (fatigue et rupture), il est éventuellement possible et ceci reste valable pour tous les types de sollicitations de juger la sévérité des sollicitations [7]. En effet, pour un matériau de faibles ou moyennes caractéristiques, une faible section de rupture finale indique un niveau de sollicitation proche de la limite d'endurance, donc des modifications mineures à réaliser sur la pièce. En revanche une importante section de rupture finale va induire de profondes modifications. Dans la plupart du temps, l'examen macroscopique permet de détecter la zone d'amorçage, le sens de propagation et la nature et le niveau du chargement [4,7].



*Fig. 1.10 Faciès caractéristiques d'une rupture par fatigue [4]*

A l'échelle microscopique, la fissure de fatigue est principalement transgranulaire [4,9,7]. Il est possible d'observer des stries qui apparaissent entre les lignes d'arrêts et de même courbure et cela pour des vitesses de fissurations faibles ( $10^{-5}$  -  $10^{-3}$  mm/c) (Fig.1.11).

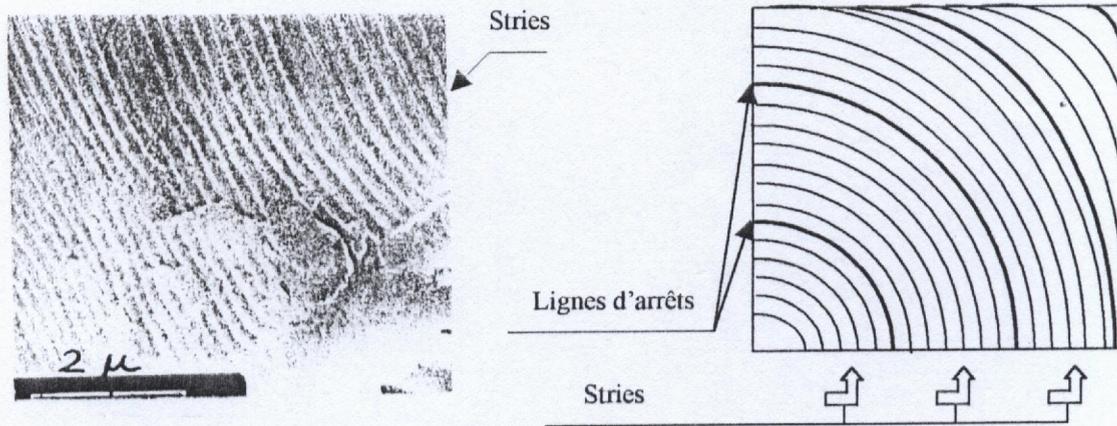


Fig.1.11 Stries et lignes d'arrêts dus au caractère progressif du phénomène de fatigue [2,4]

*Forsyth* et *P.Rabbe* ont pu mettre en évidence la correspondance entre une strie et un cycle de chargement [4,9]. L'aspect strié n'est pas le seul observable sur la surface de rupture par fatigue, et dans certains cas ne correspond qu'à une très petite portion de cette surface. Dans les alliages durs ou à des vitesses de fissuration élevées, de larges plages planes non striées sont observées qui correspondent à des décohésions statiques, telles que clivage. Dans ce cas l'avance de la fissure de fatigue est irrégulière d'un cycle à un autre [4].

### 1.5.2 AMORÇAGE DES FISSURES DE FATIGUE :

En général, s'il n'existe pas de défaut interne notable, l'amorçage des fissures se produit à la surface. *Forsyth* justifie cela pour les raisons suivantes [4,12] :

- Les dislocations sont plus mobiles en surface qu'au cœur.
- La surface est un site préférentiel pour la génération des dislocations.
- La surface est soumise à l'agressivité de l'environnement.

Du point de vue structural, lorsqu'un métal ductile est sollicité en fatigue, des glissements auront lieu au début dans les grains dont les plans cristallographiques sont orientés dans la direction de la contrainte de cisaillement maximale, entraînant la formation des bandes de glissement [4,9].

A fort grossissement, des lignes de glissement, ont été bien remarquées dans des bandes de glissement. *P.Rabbe* a pu mettre en évidence la présence de microfissures le long des lignes de glissement (Fig.1.12).

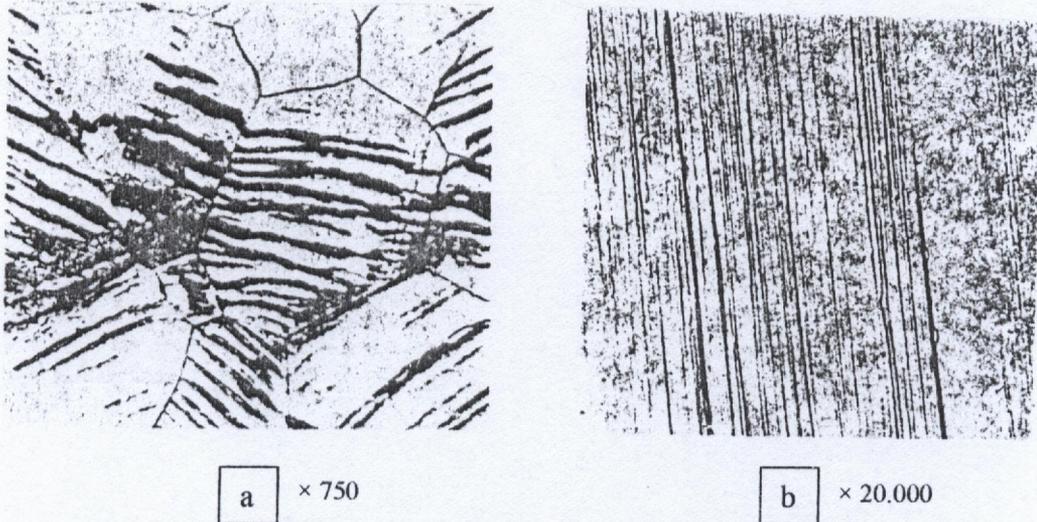


Fig.1.12 a) Bandes de glissement b) microfissures le long des linges de glissement [4]

Avec l'augmentation du nombre de cycles ces bandes de glissement se multiplient et se renforcent et deviennent persistantes, c'est à dire qui ne disparaissent pas par un simple polissage. Ces bandes persistantes sont caractéristiques de la fatigue et leur rôle est essentiel dans l'endommagement irréversible des métaux.

En effectuant des coupes transversales à travers les bandes de glissement *Forsyth* a remarqué la formation d'intrusions (plans de glissement n'atteindront pas la surface) et d'extrusions (plans de glissement dépassants la surface) qui conduisent à l'apparition des microfissures, ce mécanisme est appelé mécanisme d'intrusion-extrusion (Fig.1.13).

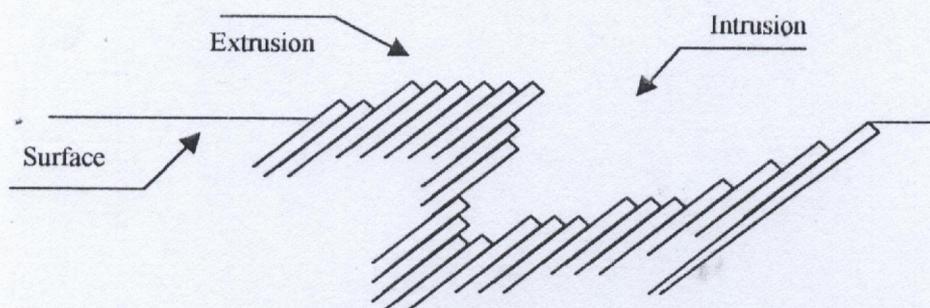


Fig.1.13 Formation d'Intrusions et d'Extrusion en cas d'un chargement cyclique [5]

Il y n'a cependant pas toujours formations d'intrusions et d'extrusions. Les fissures peuvent naître des irrégularités de surface engendrées par les bandes de glissement ou de succession de creux et de bosses allongées dans le sens des directions de glissement actives [4]. Ce relief s'accroît avec l'augmentation du nombre de cycles et conduit à la formation des microfissures.

Les bandes de glissement ne sont pas les seuls sites d'amorçage. Les inclusions sont également des sites d'amorçage du fait des concentrations des contraintes qu'elles entraînent. De plus la cohérence de l'interface matrice-inclusion est mise en cause. Dans ce cas, l'amorçage des fissures dépend de la quantité, de la taille, de la nature et de la répartition des inclusions, ainsi que leur forme par rapport à la direction des efforts [13].

Le mécanisme de la fatigue dans les métaux à haute résistance ou durs ne contient pas la formation des bandes de glissement. Des microfissures naissent directement et se développent le long des plans de contrainte de tension [2].

### 1.5.3 PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE :

L'amorçage des fissures est suivi, en général, d'une propagation transgranulaire, en restant dans le plan de glissement initial ou elles sont apparues. Ce stade a été défini par *Forsyth* comme étant le *stade I* de propagation des fissures [9].

Généralement, dans le *stade I* les fissures se propagent dans le plan de la contrainte de cisaillement maximal. A une certaine profondeur les fissures changent de direction et quittent le plan de la contrainte de cisaillement maximal pour le plan de la contrainte de tension maximale, c'est le *stade II* de propagation (Fig.1.14)[5,14].

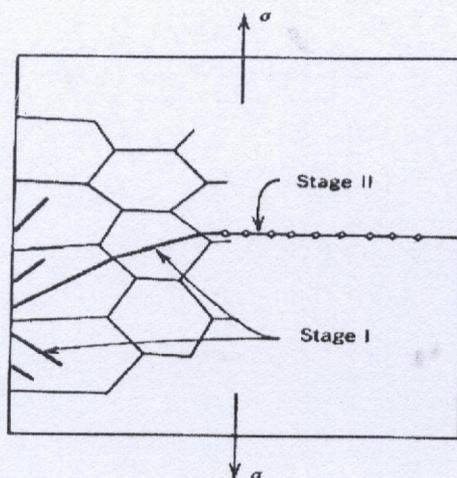


Fig.114 Stades de propagation [5]

Le *stade I* est limité à la région jouxtant la surface (quelques grains sous la surface), il est caractérisé par son faciès d'aspect fragile dépourvu de stries et par l'orientation de la fissure typique d'un processus de cisaillement. La surface fissurée dans ce stade est très restreinte par rapport à la surface totale de rupture. Néanmoins, ce stade représente une portion importante de la durée de vie, surtout en cas d'une taille de grain fine et d'une faible contrainte où la vitesse d'accroissement de la fissure est de quelques dizaines d'Angströms ( $\text{Å}/\text{cycle}$ ) seulement [4].

Le *stade I* n'existe pas toujours. En effet, la fissure peut s'amorcer directement en *stade II*, surtout en présence de grosses inclusions ou dans le cas d'usinages grossiers. La transition du *stade I* au *stade II* est attribué de la diminution de la contrainte de cisaillement et à l'augmentation de la contrainte normale [5].

La fissuration en *stade II* est généralement transcritalline. La fissure se propage en première approximation selon une section droite où la surface de rupture comporte des stries caractéristiques de la fatigue [5]. Seul un très petit nombre de fissures atteint ce stade de propagation. En effet dès qu'une fissure dépasse suffisamment ses voisines, elle empêche leur propagation par suite de l'effet de décharge qu'elle provoque derrière elle. Cette fissure devient la fissure de fatigue qui conduira à la ruine de la pièce [4,11].

Dans ce stade toute la déformation accompagnant chaque cycle se localise à l'extrémité de la fissure. Par la suite l'effet de concentration de contrainte provoque la propagation de la fissure à travers la zone déformée qui la précède [10]. C'est à ce stade que des contrôles de la pièce permettent de détecter la fissure qui va conduire à la ruine et d'agir en conséquence (remplacement, réparation, surveillance) [11].

#### **1.5.4 RUPTURE FINALE :**

La rupture finale ou brutale de la pièce se produit quand la taille de la fissure ou le niveau de contrainte atteint sa phase critique. Selon le matériau et les conditions de service la rupture finale se produit d'une façon ductile ou fragile [5,7].

### **1.6 FACTEURS D'INFLUENCES SUR LE COMPORTEMENT EN FATIGUE :**

Plusieurs facteurs peuvent influencer le comportement des pièces en fatigue.

#### **1.6.1 FACTEURS METALLURGIQUES :**

Dans cette catégorie sont inclus tous les facteurs liés à la nature du métal qui constitue la pièce, à son élaboration et à sa mise en forme, ainsi qu'aux traitements thermiques subis par la

pièce, la présence de défauts internes introduit des possibilités de concentration locale des contraintes qui vont diminuer l'endurance de la pièce [11]. En conséquence les métaux doivent être d'autant plus propres que l'on cherche une résistance et une endurance plus élevées. Dans la bibliographie nous n'avons pas trouvé un facteur qui quantifie l'influence de ces facteurs.

### 1.6.2 FACTEURS GEOMETRIQUES :

L'influence de ces facteurs intervient par les dimensions des pièces (effet d'échelle) et surtout par leurs formes (effet d'entaille).

#### 1.6.2.1 Effet d'échelle :

L'effet d'échelle en fatigue procède de l'observation suivante : à contrainte nominale égale, plus les dimensions d'une pièce croissent, plus sa résistance à la fatigue diminue. L'effet d'échelle est défini comme étant le rapport de la limite d'endurance d'une pièce donnée  $\sigma_D$  à celle d'une pièce de faibles dimensions choisie comme référence et usinée dans les mêmes conditions  $\sigma_{D0}$  [7].

$$K_e = \frac{\sigma_D}{\sigma_{D0}} \quad (1-12)$$

La connaissance de ce coefficient pour un matériau et une dimension donnée de la pièce permet à l'ingénieur de calculer la limite d'endurance prévisible  $\sigma_D$  en fonction de la limite d'endurance du matériau [11].

$$\sigma_D = K_e \cdot \sigma_{D0} \quad (1-13)$$

L'approche théorique basée sur l'étude du gradient de contrainte, l'effet de volume ou par les deux en même temps, reste très limitée. Des abaques déterminés empiriquement sont utilisés pour déterminer  $K_e$  (*Annexe A*).

#### 1.6.2.2 Effet d'entaille :

Le terme entaille est utilisé pour désigner une discontinuité imposée ou accidentelle dans la forme ou hétérogénéité du matériau.

##### 1.6.2.2.1 Facteur théorique de concentration de contrainte $K_t$ :

$K_t$  est défini comme étant le rapport de la contrainte maximale réelle au fond d'entaille à la contrainte dans la section nette. Ce facteur théorique est fonction de la géométrie et de sollicitation et permet de déterminer l'amplification de la contrainte en fond d'entaille [7].

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (1-14)$$

$\sigma_{nom}$  : Contrainte nominale.

$\sigma_{max}$  : Contrainte au voisinage de l'entaille.

#### 1.6.2.2.2 Facteur effectif de concentration de contrainte $K_f$ :

$K_f$  est défini comme étant le rapport de la limite d'endurance  $\sigma_D$  d'un échantillon lisse à celle d'un échantillon possédant des foyers de concentration de contrainte  $\sigma'_D$ , en considérant la même section de travail [7,9].

$$K_f = \frac{\sigma_D}{\sigma'_D} \quad (1-15)$$

$\sigma_D, \sigma'_D$  étant des contraintes nominales.

$K_f$  est un coefficient expérimental calculé à partir des essais de fatigue réalisés sur la pièce elle-même et dans les conditions de fonctionnement de celle-ci, il est fonction de  $K_t$  et des caractéristiques du matériau. Il est constaté que  $K_f$  est généralement inférieur à  $K_t$  [7].

#### 1.6.2.2.3 Indice de sensibilité à l'entaille et facteur d'adaptation dynamique :

Au niveau de la conception, il est nécessaire de pouvoir estimer la limite d'endurance  $\sigma_D$  de la pièce entaillée avec le maximum de précision. Pour passer de la théorie ( $K_t$ ) à la pratique ( $K_f$ ) les deux facteurs sont reliés par un coefficient appelé indice de sensibilité à l'entaille  $q$  [8,11] :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (1-16)$$

Pour plus de précision, A. BRAND a proposé de remplacer  $q$  par un facteur d'adaptation dynamique (en fatigue) noté  $\delta_t$  tel que [7,11] :

$$\delta_t = \frac{K_f}{K_t} \quad (1-17)$$

$q, \delta_t$  Sont déterminés à partir des abaques qui les relient aux caractéristiques mécaniques, généralement  $\sigma_R$  (Annexe A). Ces indices ( $q, \delta_t$ ) permettent de déterminer  $K_f$ , donc la limite d'endurance d'une pièce entaillée sans avoir à réaliser des essais.

L'estimation de  $K_f$  à partir des abaques reportés en *Annexe A* est spécifique aux aciers.

*Neuber* propose une relation générale donnée par [9,11] :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{d'/\rho}} \quad (1-18)$$

$d'$  est une caractéristique du matériau.

$\rho$  rayon d'entaille.

	Aciers			Alliages d'Aluminium		
$\sigma_R$	500	1000	2000	150	300	600
$d'$	0.25	0.08	$2 \cdot 10^{-4}$	2	0.6	0.4

*Tab 1.1 Données relatives à la constante  $d'$  dans la relation de Neuber [9].*

### 1.6.3 CONDITIONS DE SURFACE :

Lors de l'usinage d'une pièce mécanique la création d'une rugosité superficielle s'accompagne toujours d'une modification de l'état structural des couches superficielles du matériau. La prise en compte de cette modification de la structure superficielle dans un calcul n'a jamais été maîtrisée, on ne s'intéresse ici qu'à l'influence de la rugosité superficielle sur la limite d'endurance. L'influence de l'état de surface sur la limite d'endurance des pièces mécaniques soumises à la fatigue est caractérisée par un facteur d'état de surface  $K_s$  tel que [11] :

$$K_s = \frac{\sigma_{Ds}}{\sigma_D} \quad (1-19)$$

$\sigma_{Ds}$  : Limite de fatigue de l'éprouvette de la pièce étudiée.

$\sigma_D$  : Limite de fatigue de l'éprouvette de la pièce étudiée dont l'état de surface est choisi comme référence.

#### 1.6.3.1 Rugosité superficielle :

Il existe de très nombreux critères définissant la microgéométrie de la surface  $R_a, R_t$ . En fatigue le critère  $R_t$  est généralement utilisé.  $R_t$  représente la hauteur entre le point le plus haut et le creux le plus profond du profil filtré. C'est ce critère qui rend le mieux compte de la profondeur d'entaille maximale qui risque de conduire à l'amorçage d'une fissure [7].

### 1.6.3.2 Détermination de $K_s$ :

Généralement  $K_s$  est déterminé à partir des abaques donnant  $K_s$  en fonction de la résistance à la rupture du matériau  $\sigma_R$  paramétrés par la rugosité superficielle  $R_t$ . Dans la bibliographie il y a un grand nombre de diagrammes qui sont malheureusement très divers et conduisent pour une même pièce à des valeurs de  $K_s$  très dispersées.

Le *CETIM* [7] a tracé un nouveau diagramme à partir des résultats bibliographiques les plus utilisables et les plus récents (pour les aciers), qui permet de déterminer  $K_s$  à partir de  $\sigma_R$ . Ce diagramme est cependant limité à une valeur de  $R_t = 30 \mu m$ . D'autres abaques peuvent être utilisés pour une valeur de  $R_t$  allant jusqu'à  $500 \mu m$  (*Annexe A*).

### 1.6.4 CONDITIONS DE SOLLICITATIONS :

Les conditions d'application des sollicitations cycliques en service ont une grande influence sur la résistance à la fatigue.

#### 1.6.4.1 Influence de la contrainte moyenne :

L'augmentation de la contrainte moyenne ou contrainte statique réduit la résistance aux sollicitations dynamiques d'un matériau. En effet pour une durée de vie donnée, l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  diminue quand  $\sigma_{moy}$  augmente (Fig. 1.15) [10].

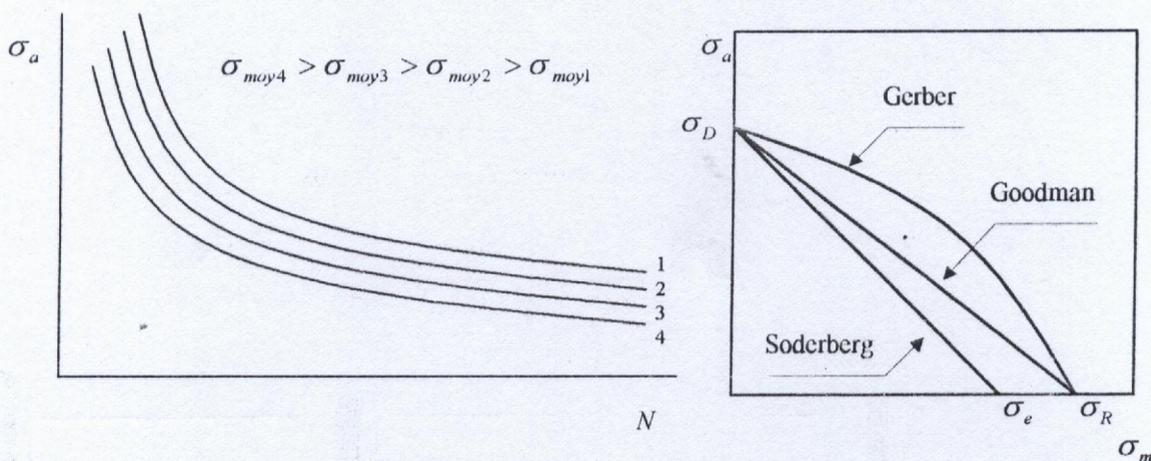


Fig.1.15 Influence de la contrainte moyenne [8,10]

Plusieurs modèles ont été proposés pour introduire cette influence. Parmi ces modèles on peut citer [8]:

$$\text{Goodman :} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_R} = 1 \quad (1-20)$$

$$\text{Gerber :} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \left( \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_R} \right)^2 = 1 \quad (1-21)$$

$$\text{Soderberg :} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_e} = 1 \quad (1-22)$$

#### 1.6.4.2 Influence de la nature des efforts :

Pour un matériau donné la résistance à la fatigue varie en fonction du type d'effort. Les résultats d'essais montrent généralement que les valeurs des limites d'endurance diminuent quand on passe de la flexion plane à la flexion rotative puis à la traction-compression et en fin à la torsion [4,7].

L'influence du type de sollicitation est exprimée par un facteur de passage  $K_p$  tel que [7,11] :

$$K_p = \frac{\sigma_{Dsol}}{\sigma_{DFR}} \quad (1-23)$$

$\sigma_{Dsol}$  : Limite d'endurance pour une sollicitation donnée.

$\sigma_{DFR}$  : Limite d'endurance en flexion rotative.

En prenant une valeur de  $K_p = 1$  comme référence pour la flexion rotative (*F.R.*), le passage à un autre type de sollicitation se fait par  $K_p$  tel que [4,7,11] :

$$\text{Flexion plane} \quad : \quad K_p = 1.05$$

$$\text{Traction-Compression} \quad : \quad K_p = 0.9 \quad (1-24)$$

$$\text{Torsion} \quad : \quad K_p = 0.6$$

Les essais de fatigue sont généralement réalisés en flexion rotative et le facteur de passage nous permet d'estimer  $\sigma_D$  lorsque notre pièce est soumise à une sollicitation autre que la *F.R.*

### **1.6.5 EFFETS DES CONTRAINTES RESIDUELLES :**

Aux contraintes appliquées se superpose l'effet des contraintes résiduelles dues à l'usinage ou à des traitements thermiques. Les contraintes résiduelles de tension peuvent aggraver dangereusement les pointes de contraintes, tandis que des précontraintes de compression permettent d'augmenter le taux de travail admissible [11]. La prise en compte des contraintes résiduelles dans un calcul de fatigue se fait en supposant une contrainte statique additionnelle à la contrainte moyenne telle que [11] :

$$\sigma'_{moy} = \sigma_{moy} + \sigma_{res} \quad (1-25)$$

$\sigma_{Res}$  : contrainte résiduelle.

### **1.6.6 INFLUENCE DE LA TEMPERATURE :**

La limite d'élasticité et la résistance à la traction diminuent lorsque la température s'élève, il en sera de même pour la limite d'endurance qui leur est proportionnelle. A plus haute température, il peut y avoir fluage, ce qui entraîne une baisse rapide de la limite apparente d'endurance [1,4].

Les facteurs cités ont une influence importante sur la tenue en service des pièces ou structures. Pour un calcul convenable de l'endurance il est nécessaire de spécifier et d'introduire leurs effets.

## CHAPITRE II

### ANALYSE ELASTIQUE DES MILIEUX FISSURES

#### II.1 INTRODUCTION :

La théorie d'élasticité et la résistance des matériaux sont la base des règles de calcul des pièces de machines ou des constructions, son objectif principal est la prévision des grandes déformations. Elles supposent que le matériau est parfaitement continu, sans vide ni fissure et la déformation aura lieu sans que ces derniers apparaissent. Il est cependant généralement admis que les matériaux ne sont pas parfaits et que des défauts peuvent toujours exister et que les efforts alternés peuvent provoquer des fissures dans les zones de concentration de contrainte.

Les ruptures soudaines en domaine élastique sans déformation importante préalable semblent surprenantes. Il a été, néanmoins constaté que l'origine de ces ruptures était toujours au voisinage de défauts notamment des vides ou des fissures. A la première réflexion, il apparaît que les calculs habituels de la mécanique des milieux continus ne peuvent prévoir ces ruptures puisqu'ils supposent l'absence de tout défaut.

La mécanique de la rupture (*MDR*) est une nouvelle discipline dans la science des matériaux qui a été introduite pour résoudre de tels problèmes. Elle s'intéresse essentiellement aux phénomènes de rupture à l'échelle macroscopique, et aux ruptures survenant sans déformation plastique remarquable, spécialement en présence des défauts dans le matériau ou des discontinuités géométriques dans la structure.

Le comportement du matériau dans la zone dans laquelle la rupture s'élabore est déterminé par un seul paramètre qui caractérise l'intensité des contraintes et des déformations. Ce paramètre est appelé le facteur d'intensité de contrainte (*F.I.C*) [15]. L'application industrielle de la *MDR* consiste à la détermination expérimentale des valeurs critiques de ce facteur auxquelles sont comparées les valeurs déterminées par calculs pour les constructions en service.

Les idées sur les phénomènes de rupture s'étaient précisées depuis l'énoncé énergétique général de *Griffith* en 1920, passant par la formulation par *Irwin* en 1956 et finalement la définition des *F.I.C* [15].

L'application industrielle de la *MDR* surtout dans l'étude des problèmes de rupture des navires, cellules d'avions et d'éléments de fusées avait conduit *Irwin* à formuler les bases de la théorie et à donner des solutions pratiques [15].

Selon *Griffith* l'instabilité se produit lorsque l'énergie potentielle mécanique libérée par l'extension d'une fissure dépasse l'énergie absorbée par cette extension [2,15,16]. *Irwin* a généralisé le calcul énergétique de *Griffith* et défini le *F.I.C* faisant la synthèse de la géométrie et du chargement et admettant l'existence d'une valeur critique du *F.I.C* qui peut être considérée comme une propriété du matériau [2, 9,15]. Il a montré par ailleurs que la théorie purement élastique était insuffisante dans le traitement des constructions fissurées en aciers de construction à caractère élasto-plastique. Il propose alors qu'il fallait prévoir une correction qui admet que l'extension s'élabore dans une petite zone plastique au fond de fissure, et traiter le reste du corps par la théorie élastique.

Les travaux réalisés en *MDR* ont abouti à la définition de 3 principaux axes de recherche :

- Paramètres mécaniques d'une fissure
- Propriétés de ténacité des matériaux
- Critères de ruptures

## II.2 CONCEPT DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE :

Dans plusieurs applications, il est remarqué que des ruptures catastrophiques surviennent dans les structures où la contrainte de travail est bien inférieure à la limite d'élasticité [4,5,17]. Il a été constaté que ces ruptures ont généralement lieu à cause de l'amplification des contraintes dans des régions particulières de la structure et cela par la présence des défauts tels que, rainures, microfissures, vides et d'autres discontinuités géométriques. Si ces discontinuités ont une géométrie bien définie, il est possible de caractériser l'intensité de contrainte au voisinage de la discontinuité en utilisant la notion de concentration de contrainte tel que [2,17] :

$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{nom} \quad (2-1)$$

$\sigma_{nom}$  : Contrainte nominale calculée en supposant la plaque sans défaut.

$\sigma_{\max}$  : Contrainte au voisinage de la discontinuité

$K_t$  : Facteur de concentration de contrainte

Cette approche est satisfaisante pour des discontinuités bien définies. Cependant si la discontinuité est une fissure ou le rayon de la courbure  $\rho$  est proche de zéro, **Inglis** a remarqué que  $K_t$  tend vers l'infini [2], tel qu'illustré par une plaque tendue présentant un défaut elliptique (Fig. 2.1).

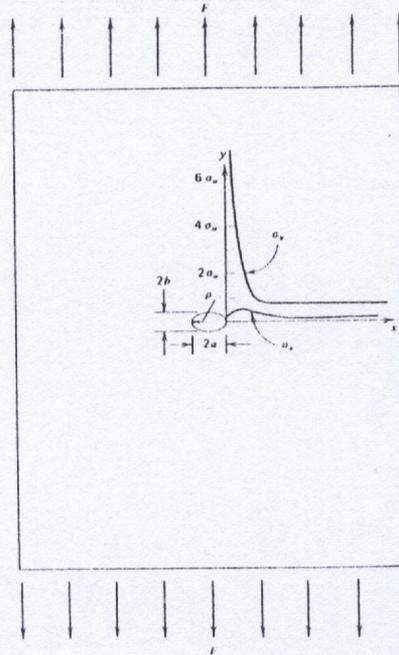


Fig. 2.1 Concentration de contrainte au voisinage d'un défaut elliptique.

La contrainte au voisinage de défaut est exprimée par [15,17] :

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{2a}{b} + 1 \right) \sigma_{\text{nom}} \quad (2-2)$$

Soit, en introduisant le rayon de la courbure  $\rho = b^2/a$  dans l'équation (2-2)

$$\sigma_{\max} = (1 + 2\sqrt{a/\rho}) \cdot \sigma_{\text{nom}} \quad (2-3)$$

En comparant (2-3) et (2-1) :

$$K_t = (1 + 2\sqrt{a/\rho})$$

Pour des fissures tranchantes :

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow K_t \Rightarrow \infty$$

Cette approche n'a pas de sens puisque le matériau quel qu'il soit ne peut en aucun cas supporter une contrainte infinie sans rupture ou plastification. Par conséquent une autre approche est nécessaire pour analyser le comportement des structures contenant des fissures ou imperfections tranchantes d'où l'apparition de la mécanique de la rupture.

### II.3 ETAT DE CONTRAINTE :

Il est remarqué expérimentalement qu'un matériau présente un comportement ductile dans les plaques minces, cependant il se rompt d'une façon brutale dans les plaques épaisses. Par ailleurs une transition ductile-fragile est observée dans le cas des matériaux ductiles avec des sections très épaisses et une transition fragile-ductile dans le cas des matériaux à haute résistance avec des très faibles sections [18], d'où l'importance de l'épaisseur des pièces dans la résistance à la rupture du matériau qui est connue sous le terme ténacité.

#### II.3.1 ETAT DE CONTRAINTE PLANE (C.P) :

Considérons une plaque mince avec une petite fissure sollicitée en traction dans la direction  $y$  (Fig.2.2). Etant donné qu'il y a un volume du matériau perdu dans la fissure, la contrainte normalement supportée par ce volume est transférée à la région du fond de la fissure, entraînant une augmentation de contrainte près de la fissure. Par conséquent, une contrainte locale est développée dans la direction  $x$ , dans la direction  $z$  la plaque peut être déformée transversalement à cause de la petite épaisseur, d'où la déformation  $\varepsilon_z \neq 0$  et la contrainte  $\sigma_z \approx 0$ , cet état est nommé condition de contrainte plane.

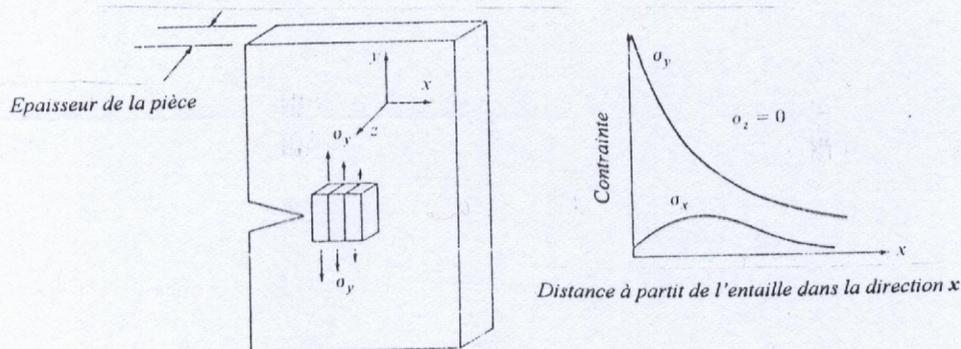


Fig.2.2 Comportement au fond de fissure en état de C.P [18].

#### II.3.2 ETAT DE DEFORMATION PLANE (D.P) :

Avec le même raisonnement, mais pour une plaque épaisse (Fig.2.3), une contrainte se développe dans la direction  $z$  au milieu de l'épaisseur à cause de la résistance du matériau environnant à la déformation transversale, et le matériau n'est pas libre à se contracter donc,  $\varepsilon_z \approx 0$  d'où l'appellation condition de déformation plane.

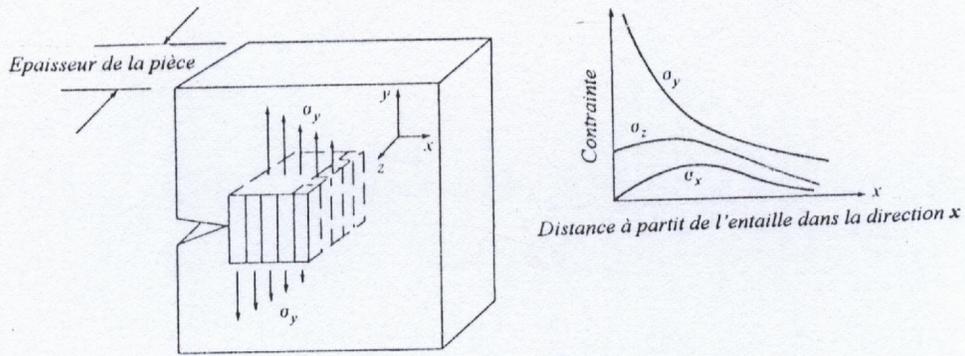


Fig.2.3 Comportement au fond de fissure en état de D.P [18].

Par conséquent, pour un matériau donné, on a une condition de C.P dans les plaques minces et un état de D.P dans les plaques épaisses.

**II.4 APPROCHE ENERGETIQUE DE GRIFFITH :**

*Griffith* est le premier qui a développé l'analyse du comportement des structures fissurées. Dans ses hypothèses il considère que le matériau est continu au sens macroscopique, et admet l'existence des fissures. Il considère cependant que toute l'énergie libérée par l'extension d'une fissure est absorbée par la création de nouvelles surfaces. En outre si une extension libère plus d'énergie qu'elle n'en absorbe, la fissure est instable [15,17]. Pour bien présenter cette approche, considérons une plaque infinie contenant une fissure centrale de longueur  $2a$  (Fig. 2.4).

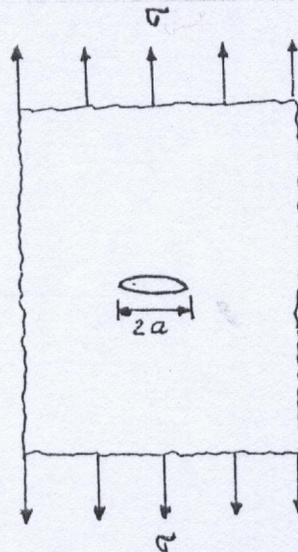


Fig. 2.4 Fissure centrale dans une plaque infinie (problème de Griffith).

L'énergie potentielle totale du système  $U$  peut être représentée par [16] :

$$U = U_0 - U_a + U_s \tag{2-4}$$

$U_0$  : l'énergie élastique de la plaque sans fissure

$U_a$  : la diminution de l'énergie élastique causée par l'introduction de la fissure.

$U_\delta$  : l'augmentation de l'énergie de surface causée par la formation de nouvelles surfaces.

**Griffith**, en utilisant une analyse de contrainte initialement développée par **Inglis** [16,17] a montré que :

$$U_a = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a^2}{E_1} \quad (2-5)$$

Tel que :

$$E_1 = E \quad C.P \quad ; \quad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad D.P \quad (2-6)$$

$\nu$  : coefficient de Poisson

Ainsi, la dissipation d'énergie par déchirure est proportionnelle à la surface déchirée et à une constante du matériau [16,17] :

$$U_\delta = 4 \cdot \delta_s \cdot a \quad (2-7)$$

$\delta_s$  : énergie de surface par unité d'épaisseur.

L'équilibre est obtenu quand  $U$  est minimale, donc :  $\frac{dU}{da} = 0$

Remplaçant dans l'équation (2-4) :

$$\frac{dU_0}{da} - \frac{dU_a}{da} + \frac{dU_\delta}{da} = 0$$

L'énergie  $U_0$  est constante d'où :

$$\frac{dU_0}{da} = 0 \Rightarrow \frac{dU_a}{da} = \frac{dU_\delta}{da}$$

Après dérivation on aboutit à :

$$\frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E_1} = 2 \cdot \delta_s \quad (2-8)$$

Posant :

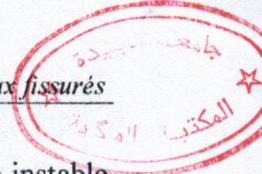
$$G = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E_1} \quad , \quad R = 2 \cdot \delta_s \quad (2-9)$$

$G$  représente le taux de restitution d'énergie ou la force d'extension de la fissure.

$R$  représente l'énergie de surface nécessaire pour une petite extension de la fissure.

Mettant les expressions de (2-9) dans (2-8) on obtient :

$$G = R \quad (2-10)$$



Par conséquent, la relation (2-10) représente la condition de stabilité, la propagation instable de la fissure aura lieu lorsque  $G \geq R$  et la rupture survient quand  $G$  atteint une valeur critique constante notée  $G_c$ . Pour l'état de D.P cette valeur est notée  $G_{IC}$ , et peut être considérée comme une propriété du matériau.

Réarrangeant l'équation (2-8) nous obtenons :

$$\sigma \sqrt{a} = \left[ \frac{2E_1 \delta_s}{\pi} \right]^{1/2} \quad (2-11)$$

Comme  $E_1, \delta_s$  sont des constantes du matériau l'équation (2-11) peut être écrite sous la forme :

$$\sigma = \frac{C}{\sqrt{\pi a}} \quad (2-12)$$

L'équation (2-11) montre que l'extension de la fissure est gouvernée par la contrainte nominale et les propriétés du matériau, tel que la fissure se propage si  $\sigma \sqrt{a}$  atteint une valeur critique qui peut être mesurée expérimentalement en utilisant la contrainte de rupture.

#### II.4.1 BALANCE ENERGETIQUE POUR LES METAUX :

En effet, la théorie de *Griffith* n'est valable que pour les matériaux fragiles, car  $R$  est égale à l'énergie de surface seulement pour les matériaux fragiles, comme les verres et les céramiques, tandis que les matériaux ductiles n'obéissent pas à cette théorie du fait que la rupture dans les métaux s'élabore dans une zone de déformation plastique au fond de fissure [16,17]. Pour adapter cette approche aux matériaux ductiles *Irwin* et *Orowan* ont proposé une modification de la théorie de *Griffith* tel que : " la résistance du matériau à l'extension de la fissure pour les matériaux ductiles est égale à la somme de l'énergie de surface et l'énergie de déformation plastique accompagnant cette extension " [17].

D'après cette définition et à partir de l'équation (2-9) l'expression de  $R$  pour les métaux devient :

$$R = 2(\delta_s + \delta_p)$$

Cependant, pour les métaux  $\delta_p \gg \delta_s$  donc  $R \approx 2\delta_p$  et l'équation (2-8) devient :

$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E_1} = 2\delta_p$$

A l'état critique :

$$\frac{\pi \sigma^2 a}{E_1} = 2 \delta_p = G_{Ic} = R \quad (2-13)$$

L'approche énergétique à l'extension de la fissure définit les conditions nécessaires pour l'instabilité d'une fissure tranchante idéale. Cette approche ne convient pas pour l'analyse de l'extension stable des fissures tel que celle qui aura lieu sous chargement cyclique ou fissuration par corrosion [17].

## II.5 MLER ET APPROCHE PAR FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE :

La technologie de *MLER* est basée sur une approche analytique qui relie la grandeur du champ de contrainte au voisinage du fond de fissure à la contrainte nominale appliquée, à la dimension, forme et orientation de la fissure et aux propriétés du matériau et cela grâce à la notion du facteur d'intensité de contrainte.

### II.5.1 LES FISSURES :

Dans la pratique les fissures s'initient à partir des défauts reliés à l'élaboration du matériau comme les défauts de fonderie (craques, retassures, vides...) et à partir des accidents de forme dans la géométrie de la structure, tels qu'elles peuvent être rencontrées sous plusieurs forme simple et complexes. On distingue les fissures superficielles, les fissures internes sous forme semi-elliptique, elliptique ou en coin... etc., ces fissures sont généralement planes, c'est-à-dire que leurs deux faces sont très voisines d'un plan moyen et se rejoignent selon un bord.

### II.5.2 MODES DE RUPTURE :

Tous les systèmes de contrainte au fond de fissure peuvent être dérivés de trois modes de déplacements relatives aux deux surfaces de la fissure comme il est illustré sur la figure 2.5.

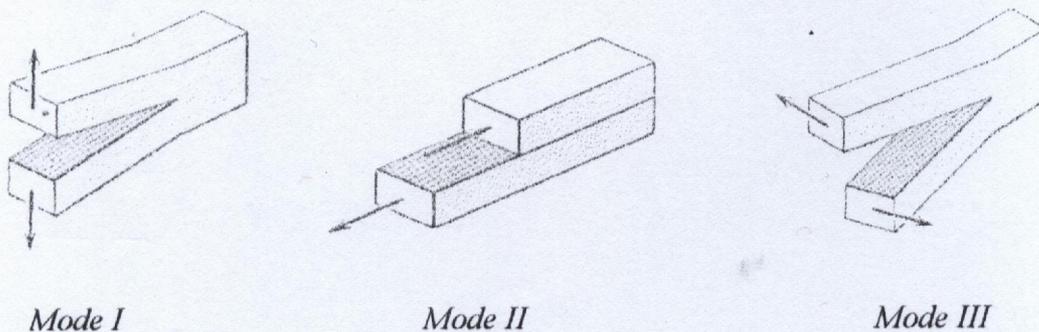


Fig. 2.5 Modes de rupture

□ Mode d'ouverture (*Mode I*) :

Ce mode correspond à une sollicitation par traction perpendiculaire au plan de la fissure. Les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement l'une par rapport à l'autre.

□ Mode de cisaillement plan (*Mode II*) :

Ce mode correspond à un cisaillement parallèle au plan de la fissure et perpendiculaire au fond de fissure. Les surfaces de la fissure se déplacent parallèlement l'une par rapport à l'autre et perpendiculairement au fond de fissure.

□ Mode de cisaillement anti-plan (*Mode III*) :

Il correspond à un cisaillement parallèle au plan de la fissure, et parallèle au fond de fissure. Les surfaces de la fissure se déplacent parallèlement l'une par rapport à l'autre et parallèlement au fond de fissure.

### II.5.3 CHAMP DE CONTRAINTE AU VOISINAGE D'UNE FISSURE :

Selon les modes de ruptures prédéfinis, trois types de champ de contrainte peuvent être définis pour l'analyse des contraintes et des déplacements au voisinage de la fissure. *Irwin* en utilisant une analyse développée par *Westergaard* [11,17] a trouvé que les champs de contrainte pour les trois modes de rupture dans le cas d'un problème plan peuvent être sous la forme (*Annexe B*) :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + \dots \quad (2-14)$$

$$U_{ij} = K \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{ij}(\theta) + \dots$$

$K$  représente le facteur d'intensité de contrainte.

L'analyse dimensionnelle montre que  $K$  est une fonction linéaire de la contrainte et la racine d'une caractéristique de la longueur. A partir de l'équation (2-12) cette longueur représente la longueur de la fissure. Le *F.I.C* rassemble les paramètres de chargement et de la géométrie et représente l'intensité du champ de contrainte autour de la fissure, *Irwin* le définit comme suit :

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2-15)$$

Où  $\sigma$  représente une contrainte de traction en *mode I* et une contrainte de cisaillement plan et anti-plan en *mode II* et *mode III* respectivement.

### II.5.4 CONCEPT DU F.I.C :

Etant donné que l'approche énergétique est pratiquement difficile, surtout la mesure de la déformation plastique  $\delta_p$ , **Irwin** a proposé l'approche par *F.I.C*. A partir de la théorie d'élasticité il a montré que les facteurs d'intensité de contrainte pour les milieux fissurés plans pour les trois modes de rupture peuvent être définie par les champs de contrainte et de déplacement définis précédemment [16] :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right) \quad (2-16)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{yz} \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right)$$

□ En *C.P*  $C_2 = 1$

□ En *D.P*  $C_2 = 1 - \nu^2$

$[U_x], [U_y], [U_z]$  représentent les déplacements des lèvres de la fissure pour les trois modes de rupture (*Annexe B*).

Par conséquent, si on connaît les expressions des champs de contraintes et de déplacements on peut déterminer les *F.I.C* et inversement la connaissance des valeurs du *F.I.C* permet de déterminer complètement les champs de contraintes ou de déplacements dans la structure fissurée considérée comme élastique.

Physiquement  $K_I, K_{II}, K_{III}$  est interprété comme l'intensité de charge transmise à travers la région du fond de fissure par l'introduction de la fissure dans la pièce saine. Par conséquent, la valeur du *F.I.C* est affectée par la contrainte appliquée, la forme et les dimensions de la fissure, la configuration de la structure et le mode de déformation.

**Irwin** a trouvé que pour un matériau donné la rupture survient quand le *F.I.C* atteint une valeur critique  $K_C$  qui représente la ténacité du matériau. Ceci est conforme aux résultats de **Griffith** (2-12) [17], la relation entre  $K_I$  et  $K_C$  est similaire à la relation de la contrainte avec la

contrainte admissible [15,17], la connaissance de ce paramètre pendant le service est important dans la prédiction de la rupture dû au phénomène de fatigue.

Le taux de libération d'énergie ou la force d'extension de la fissure  $G$  calculée par *Irwin* en mode I est reliée au *F.I.C* par [15,16] :

$$G = \frac{1}{E_1} K_I^2 \quad (2-17)$$

A l'état critique :

$$\square \text{ En } D.P : \quad G = G_{IC} = \frac{1}{E_1} K_{IC}^2 \quad (2-18)$$

$$\square \text{ En } C.P : \quad G = G_C = \frac{1}{E_1} K_C^2$$

$K_{IC}, K_C$  représente les *F.I.C* critique en *D. P* et en *C.P* respectivement.

$G_{IC}, K_{IC}, K_C$  sont déterminés expérimentalement par les essais de ténacité.

L'utilisation du *F.I.C* comme paramètre pour modéliser le comportement au fond de fissure le plus simple possible, en introduisant toutes les variables qui ont une signification comme longueur de fissure  $a$ , état de contrainte, ténacité, température...etc., et comme paramètre pour caractériser l'extension des fissures est le principe fondamental de la *MLER* et qui le rend un paramètre très important dans la *MDR*. Grâce à cela a commencé le grand succès dans la prévention des ruptures catastrophiques [5,16].

## II. 5.5 DETERMINATION DU *F.I.C* :

La détermination du *F.I.C* pour un problème de fissures constitue une grande partie de la solution dans la *MLER*. Depuis l'introduction de la *MDR* plusieurs efforts ont été faits pour la dérivation du *F.I.C*. Ainsi plusieurs méthodes ont été développées afin d'approcher au problème. Dans le cas des structures de géométrie simple des méthodes analytiques sont utilisées, mais pour des structures complexes des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis (*M.E.F*) sont nécessaire. Des notions mathématiques approfondies sont essentielles pour utiliser ces méthodes. Des méthodes directes sont aussi utilisées (méthodes expérimentales, méthode de superposition).

### II. 5.5.1 Méthodes analytiques :

L'utilisation des méthodes analytiques consiste à chercher une fonction de contrainte pour trouver une solution exacte du problème, mais ceci est seulement possible dans les cas simples des plaques.

### II. 5.5.2 Méthodes numériques :

Dans les méthodes numériques, spécialement en *M.E.F* pour obtenir la distribution des contraintes au voisinage de la fissure, la structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments finis liés entre eux uniquement aux nœuds se trouvant sur la frontière de chaque élément. Les forces entre éléments peuvent être transmises seulement via les points nodaux (Fig.2.6).

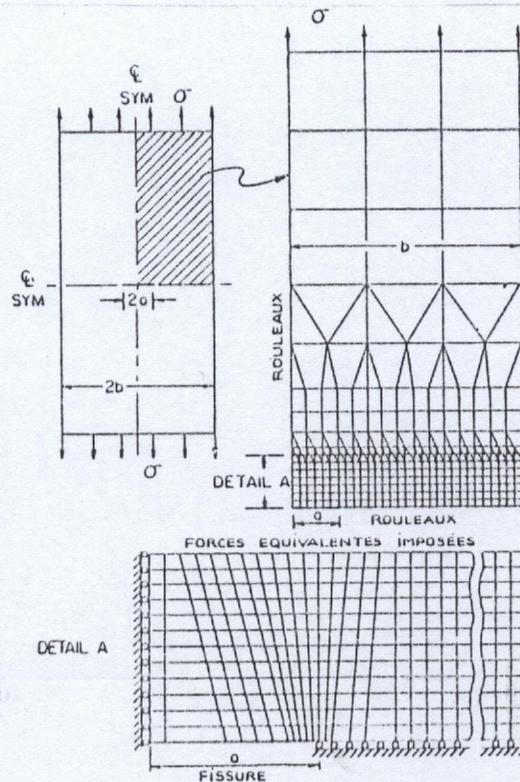


Fig. 2.6 Utilisation de la M.E.F pour une structure fissurée [2]

La méthode des éléments finis dans son application dans la *MDR* nécessite une précaution, surtout, dans le choix du maillage, de la forme d'éléments, de la fonction approximative et des déplacements au voisinage de la fissure et ceci à cause de la singularité de contrainte.

### II.5.5.3 METHODES EXPERIMENTALES :

Plusieurs méthodes expérimentales sont utilisées pour la détermination du *F.I.C* citons :

- Les techniques de photoélasticité

- Méthode par ultrasons
- Méthode des jauges extensométriques
- Méthode de complaisance
- Méthode de l'émission acoustique

### II.5.6 SOLUTIONS RELATIVES AU F.I.C :

En effet la solution de  $K$  donnée par (2-15) est strictement valide pour une plaque infinie. La géométrie de la plaque finie a une grande influence sur le champ de contraintes au fond de fissure, donc l'expression du facteur d'intensité de contrainte pour différentes géométries des pièces et différents types de fissures est obtenue en modifiant la solution générale par l'introduction des facteurs de corrections pour des applications pratiques [16]. La forme générale de l'expression modifiée du F.I.C est [2,11,16,19] :

$$K = f(a/b) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (2-19)$$

$f(a/b)$  est une fonction non dimensionnelle, qui contient  $a/b$  comme variable principale. Elle représente les paramètres sans dimension qui définissent la géométrie du solide, la fissure et le chargement.  $f(a/b)$  a été l'objet de plusieurs investigations. Plusieurs relations entre le F.I.C et différentes configurations de pièces, formes de fissures et conditions de chargement ont été publiées. Grâce à cela nous avons fait une petite bibliothèque des solutions du F.I.C qui servira comme base de données dans la réalisation du code de calcul (*Annexe C*).

Selon des recherches récentes [19], il faut ajouter à  $f(a/b)$  d'autres facteurs de corrections, un facteur qui tient compte de la concentration de contrainte et un facteur de correction pour une largeur finie (si les solutions sont données pour une largeur infinie ou semi-fini), (2-19) devient :

$$K = f(a/b) \cdot w(a) \cdot K_t \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a}$$

$w(a)$  : Facteur de correction pour une largeur finie de la pièce.

$K_t$  : Concentration de contrainte autour de la fissure.

Cette dernière peut être réécrite sous la forme :

$$K = f(a) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (2-20)$$

Telle que  $f(a)$  englobe tous ces facteurs de corrections, on note que dans **Annexe C** sont données quelques solutions pour des structures infinies et semi-infinies où il fallait prévoir une correction  $w(a)$ . Exposant la solution pour une fissure elliptique.

**II.5.6.1 Fissures elliptiques :**

Les fissures s'initient généralement à la surface du fait des discontinuités géométriques et dans les angles vifs. Pratiquement si la pièce est épaisse, la fissure prend la forme semi-elliptique ou un quart d'ellipse à la surface, puis elle croit sur toute l'épaisseur [6]. Les solutions de ces types de fissures constituent une grande importance pour les applications pratiques de la *MLER* [6]. *Irwin* initialement a dérivé une expression du *F.I.C* pour une fissure elliptique chargée en mode I (Fig.C.17), tel que [2,16,17,20] :

$$K_I = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\Phi} \left( \sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4}$$

$\Phi$  C'est un intégrale elliptique de deuxième espèce.

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} \cdot d\beta \quad \text{tel que} \quad k^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

$\Phi$  est développé sous forme d'une série tel que :

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{4} \frac{c^2 - a^2}{c^2} - \frac{3}{64} \left( \frac{c^2 - a^2}{c^2} \right)^2 + \dots \right]$$

En négligeant les termes de deuxième ordre on aboutit à la relation finale du *F.I.C* :

$$K_I = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}} \left( \sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4}$$

Le *F.I.C* pour une fissure elliptique est maximal pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , donc l'expression du *F.I.C* devient :

$$K_I = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}}$$

Pour une fissure circulaire  $a = c$  :

$$K_I = \frac{2}{\pi} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a}$$

En présence des surfaces libres il faut faire la correction correspondante en multipliant  $K_I$  par le facteur de correction correspondant. Pour les fissures semi-elliptiques un facteur de 1.12 est à ajouter pour la correction de la surface libre [2,16]. Pour une fissure sous forme d'un quart d'ellipse qui coupe deux surfaces, la correction de 1.2 est utilisée [16]. Si la fissure croit vers l'intérieur du matériau le facteur peut être diminué de 1.12 ou 1.2 à 1, de plus s'il y a d'autres corrections, ces dernières doivent être inclus [16].

### II.5.6.2 Principe de superposition du F.I.C :

Ce principe est utilisé pour estimer les F.I.C pour les problèmes moins compliqués, avec le même mode de rupture *I*, *II* ou *III*. Les structures fissurées peuvent être soumises à plusieurs types de chargement. Comme en *mode I* par exemple, la structure peut être soumise à la traction et à la flexion. Le F.I.C est estimé en faisant la sommation des F.I.C des cas simples en présence (Fig.2.7).

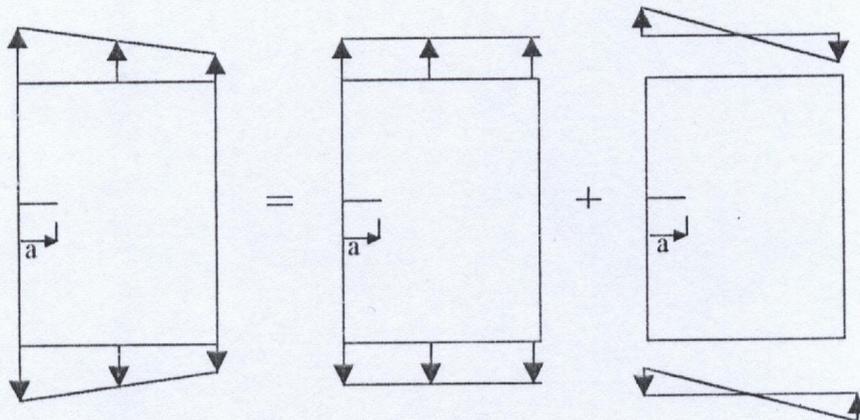


Fig. 2.7 Méthode de superposition des F.I.C

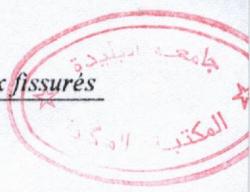
Dans quelques circonstances, la fissure prend une forme irrégulière. Dans ce cas, l'estimation du F.I.C fait recours à l'une des méthodes citées ci-dessus.

### II.6 APPROCHE PAR CORRECTION :

Cette approche consiste à supposer que toute situation puisse se ramener au problème de *Griffith*, cela en appliquant cinq facteurs de correction tel que le F.I.C devient [2,21] :

$$K_I = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot F_5 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (2-21)$$

$F_1$  tient compte de la surface libre à l'origine de la fissure.



$F_2$  tient compte de l'existence de la surface libre vers laquelle se dirige la fissure.

$F_3$  considère la forme réelle de la fissure.

$F_4$  introduit l'effet de la concentration de contrainte.

$F_5$  tient compte de la zone plastique au fond de fissure.

### II.6.1 FACTEUR DE CORRECTION $F_1$ :

Selon quatre distributions de contrainte sur la fissure : uniforme, variation linéaire, concentrée à l'origine et variation parabolique, la figure C.35 (*Annexe C*) résume les valeurs à considérer pour ce facteur en cas des fissures traversante, semi-circulaire ou en quart de cercle. Pour des fissures elliptiques, *Paris* et *Irwin* proposent [21] :

$$F_1 = 1.211 - 0.186\sqrt{a/c} \quad (2-22)$$

### II.6.2 FACTEUR DE CORRECTION $F_2$ :

L'effet de la largeur finie pour une distribution uniforme de la contrainte et une fissure traversante sollicitée en traction est donnée selon le type de fissure [2,21]:

Fissure centrale (Fig.C.2) :

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos(\pi a/2b)}} \quad (2-23)$$

Fissure débouchante (Fig.C.4) :

$$F_2 = \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}} \quad (2-24)$$

Si la flexion est autorisée :

$$F_2 = \frac{0.752 + 2.02(a/b) + 0.37[1 - \sin(\pi a/2b)]^3}{1.122 \cos(\pi a/2b)} \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}} \quad (2-25)$$

Si la flexion n'est autorisée qu'au niveau de la fissure :

$$F_2 = \frac{1.122 - 0.561(a/b) + 0.085(a/b)^2 + 0.18(a/b)^3}{1.122\sqrt{1-(a/b)}} \quad (2-26)$$

Pour un chargement concentré à l'origine :

$$F_2 = (1.297 - 0.297 \cdot \cos(\pi a / 2b)) \sqrt{\frac{\pi(a/b)}{\sin \pi(a/b)}} \quad (2-27)$$

Lorsque la flexion n'est pas permise, et

$$F_2 = \frac{1}{1.3} \left[ \frac{3.52}{(1-(a/b))^{3/2}} - \frac{4.35}{(1-(a/b))^{1/2}} + 2.13 \cdot (1-a/b) \right] \quad (2-28)$$

Lorsque la flexion est totalement autorisée.

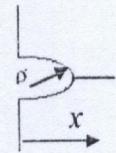
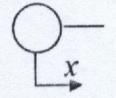
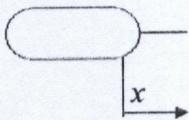
En cas des fissures non traversantes on peut admettre que  $F_2 = 1.0$  [2].

### II.6.3 FACTEUR DE CORRECTION $F_3$ :

Ce facteur est donné dans la section II.5.6.1 et l'Annexe C.

### II.6.4 FACTEUR DE CORRECTION $F_4$ :

L'effet de la concentration de contrainte est pris en compte en considérant le facteur d'intensité de contrainte locale où la contrainte nominale est remplacée par la contrainte locale. [9,19,22] :

Entaille Selon <i>Neuber</i>	$\sigma_y = \sigma_{max} \sqrt{\frac{\rho}{\rho + 4x}} \quad (2-29)$	
Trou	$\sigma_y = \sigma_{nom} [1 + 0.5(\rho/x)^2 + 1.5(\rho/x)^4] \quad (2-30)$	
Lumière	$\sigma_y = \sigma_{max} \left( \frac{0.5\rho}{0.5\rho + x} \right)^{1/2} \quad (2-31)$	

Tab.2.1 Contrainte locale selon le type de concentrateur de contrainte[9,22]

$\sigma_{max}$  est donnée par (2-1),  $K_t$  est fonction de la forme de l'entaille (*Annexe A*).

Les relations (2-29) et (2-31) doivent cependant être considérées rationnellement dans la région proche de l'entaille de façon à ce que  $\sigma_y \geq \sigma_{nom}$  et  $\sigma_y \approx \sigma_{nom}$  à mesure que l'on s'éloigne du fond de l'entaille.

Dans notre cas la distance  $x$  est exprimée en fonction de la longueur de fissure  $a$ .

**II.6.5 FACTEUR DE CORRECTION  $F_5$  :**

L'effet de la zone plastique au fond de fissure est donné dans la section qui suit.

**II.7 ZONE PLASTIQUE :**

La distribution élastique des contraintes dans la région proche du fond de fissure est donnée par les équations (2.14) et montre que quand le rayon  $r$  tend vers zéro la contrainte tend vers l'infini, c'est-à-dire il y a une singularité de la contrainte au fond de fissure. Et comme les métaux se déforment plastiquement, lorsque la contrainte dépasse la limite d'élasticité, **Irwin** a montré qu'une zone plastique se forme dans la pointe de la fissure et estime que la forme de cette zone est circulaire (Fig.2.8).

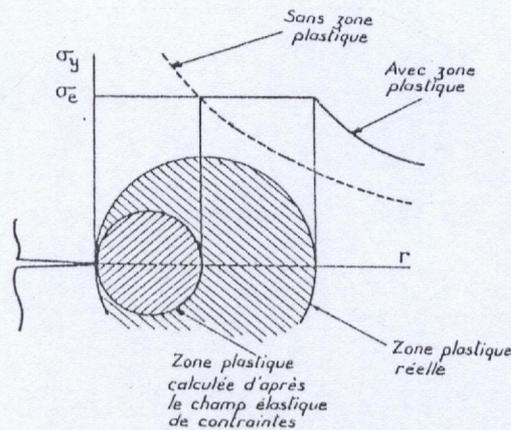


Fig. 2.8 Zone plastique au fond de la fissure [2]

En effet il est extrêmement difficile de donner une propre description des dimensions et de la forme de la zone plastique du fait de l'influence de l'état de contrainte et d'autres paramètres. Plusieurs modèles ont été proposés pour décrire cette zone, selon le modèle d'**Irwin**, le rayon de la zone plastique peut être relié au *F.I.C* et à la limite d'élasticité par la relation ci-après :

□ En *C.P* :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \tag{2-32}$$

□ En *D.P* :

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2$$

$\sigma_e$  : Limite d'élasticité

Selon d'autres chercheurs [15], la zone plastique en *mode I* est constituée de deux ailes. Le **Dr Rice** en utilisant la *M.E.F* à trouvé :

$$r_y = 0.15 \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2, \quad r_x = 0.036 \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2$$

$r_y, r_x$  Représentent les rayons de la zone plastique suivant les axes  $x$  et  $y$ .

Le développement de la déformation plastique au fond de fissure dépend fortement de l'état de contrainte, une plus grande déformation plastique est développée en *C.P* qu'en *D.P* (Fig.2.9).

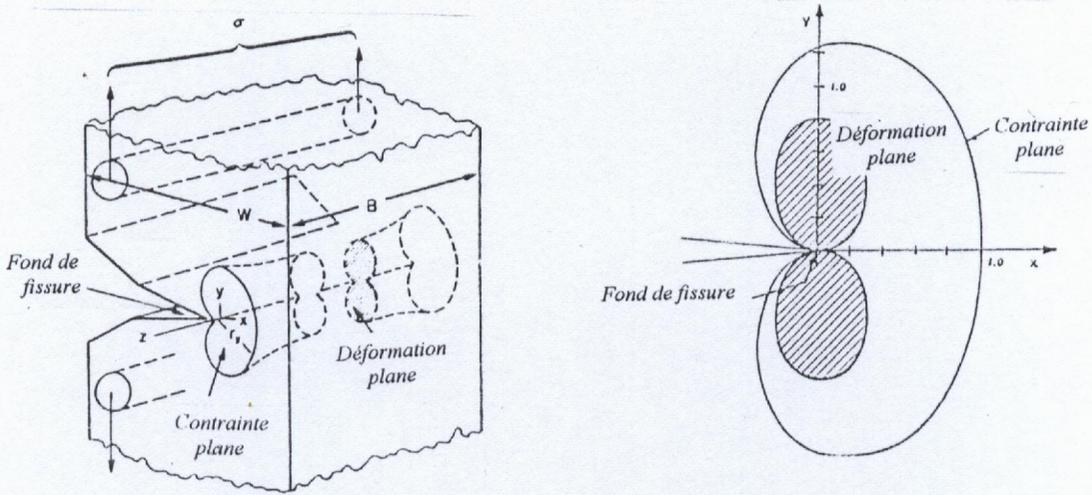


Fig. 2.9 Zone plastique selon l'état de contrainte (mode I) [16]

Dans le *mode II* la zone plastique est allongée dans la direction de propagation. En *mode III* la forme est circulaire (Fig.2.10).

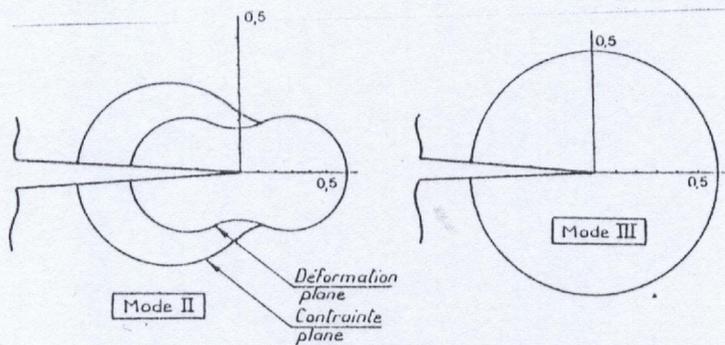


Fig. 2.10 Zone plastique en mode II et III [2]

La différence de la taille de la zone plastique  $r_p$  d'un état de *C.P* à un état de *D.P* est due au fait que, lorsque la plaque fissurée est mince la contrainte transversale reste faible, de sorte que la zone plastique est plus large, ce qui réduit la fragilité.

La correction du *F.I.C* en prenant compte la zone plastique, se fait en considérant une longueur effective de la fissure [2,15,16] :

$$a_{eff} = a + r_p \quad (2.33)$$

Le *F.I.C* devient alors :

$$K_{eff} = f(a_{eff}) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a_{eff}} \quad (2.34)$$

Dans ce cas la valeur du *F.I.C* est obtenue par approximation successive, car la taille de la zone plastique elle-même est une fonction du *F.I.C*. Cette correction est seulement applicable si la zone plastique est petite devant les dimensions de la pièce. Si la zone plastique devient trop grande on doit alors utiliser la théorie élasto-plastique.

En cas de sollicitations de fatigue les dimensions de la zone plastique sont plus faibles, il est remarqué expérimentalement trois zones différentes devant une fissure de fatigue [4].

- Une première zone, la plus éloignée du fond de fissure, dans laquelle les déformations sont essentiellement élastiques.
- Une deuxième zone plastifiée lors de l'ouverture de fissure, dans laquelle les déformations sont faibles et uniformes.
- Une troisième zone où l'amplitude de la contrainte est de l'ordre de  $2\sigma_e$ , la plastification se produit sous l'effet de la fermeture de la fissure et les déformations sont importantes, en particulier à proximité immédiate du fond de fissure.

Selon *Paris* [14,23] cette zone est exprimée par :

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\Delta K_I}{2\sigma_e} \right) \quad (2.35)$$

*Rice* propose la relation suivante [14,23] :

$$r_p = 0.4 \left( \frac{\Delta K_I}{2\sigma_e} \right) \quad (2.36)$$

$\Delta K = K_{Imax} - K_{Imin}$ , Avec  $K_{Imax}, K_{Imin}$  représentent les valeurs maximale et minimale du *F.I.C* calculé en considérant  $\sigma_{max}, \sigma_{min}$  respectivement.

## II.8 LA TENACITE ET LE F.I.C CRITIQUE :

Pour des raisons technologiques et économiques, les matériaux à haute résistance ont connu une grande utilisation, surtout dans l'industrie aéronautique où il est demandé un rapport

résistance/poids maximum, dans l'industrie automobile, équipement de chemin de fer et pièces des machines tournantes et cela pour économiser de l'énergie, tout en utilisant la méthode de conception où la contrainte est limitée inférieure à la limite d'élasticité (utilisée pour les matériaux ductiles et moins résistants). Par suite, il y a eu plusieurs ruptures catastrophiques [1,18], ces ruptures étaient brutales sans déformation plastique détectable. Un nouveau critère de conception basé sur le concept de ténacité est développé pour ce type des matériaux surtout en présence de zones de concentration de contrainte et de fissures.

La ténacité d'un matériau est représentée par la résistance à la rupture fragile. Quand un matériau se rompt sans déformation locale détectable il est fragile. Cependant, si une déformation plastique considérable survient avant la rupture il est ductile [18]. Pour éviter les ruptures fragiles il est conseillé d'utiliser les matériaux tenaces et d'éviter les matériaux extrêmement fragiles. La ténacité d'un matériau est représentée par son facteur d'intensité de contrainte critique.

Le  $F.I.C$  critique dépend de l'état de contrainte et de l'épaisseur de la pièce. D'après la figure 2.11, en cas de  $D.P$  le matériau est susceptible à la rupture fragile, par conséquent les plaques minces ont une grande ténacité. Avec l'augmentation de l'épaisseur le  $F.I.C$  tend vers la limite  $K_{IC}$ , c'est le  $F.I.C$  critique en  $D.P$  considéré comme une propriété du matériau mesurant sa ténacité.

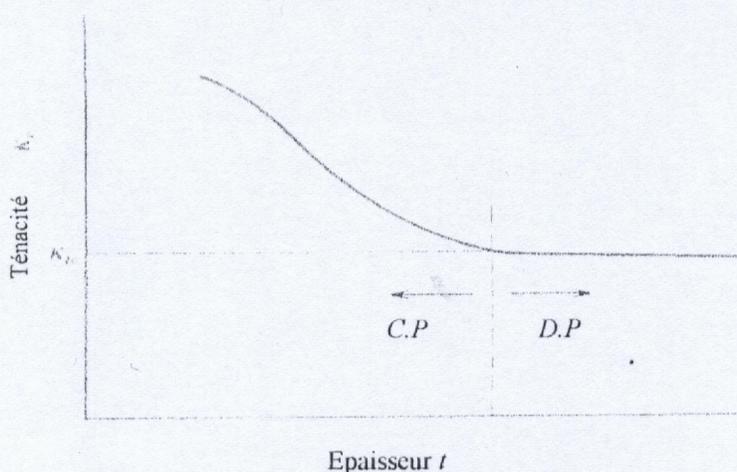


Fig. 2.11 Variation du  $F.I.C$  critique en fonction de l'épaisseur [14,17]

Pour les petites valeurs de l'épaisseur l'état de  $C.P$  est plus favorable, le  $F.I.C$  est noté  $K_C$ .

Le  $K_C$  peut être relié à  $K_{IC}$  par la relation empirique suivante [2,10] :

$$K_c^2 = K_{IC}^2 \left[ 1 + \frac{1.4}{t^2} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_e} \right)^4 \right] \quad (2-37)$$

La relation (2-37) est valable uniquement lorsque la différence  $K_c - K_{IC}$  est faible [2,10].

La ténacité du matériau dépend de plusieurs facteurs [9] :

- Le matériau
- La température
- le taux de déformation
- l'environnement de travail
- l'épaisseur de la pièce
- la longueur de la fissure
- les sollicitations

### II.8.1 DETERMINATION EXPERIMENTALE ET UTILISATION PRATIQUE DU F.I.C :

Dans les essais de ténacité, pour déterminer le  $K_{IC}$  il faut avoir l'état de déformation plane, pour cela l'ASTM [15,16,19] recommande de vérifier les conditions suivantes :

$$a, t \geq 2.5 \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 ; \quad b \geq 50 \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad (2-38)$$

Avec des éprouvettes dont les dimensions  $a$ ,  $t$ ,  $b$  si le  $K_I$  vérifie les conditions (2.38), c'est bon si non, il faut changer les dimensions et refaire l'essai jusqu'à ce qu'elles soient vérifiées. Les solutions  $K_I$  peuvent être utilisées dans deux directions :

- Choix du matériau pour les applications particulières, spécialement les matériaux aérospatiaux à haute résistance.
- Utiliser  $K_I$  comme paramètre pour assurer l'état de C.P à haute énergie de rupture.

Plusieurs critères ont été proposés, le plus simple est relié à la limite d'élasticité et l'épaisseur (through thickness yeild critrerion) tel que [16] :

$$K_{IC} \geq \sigma_e \cdot \sqrt{t} \quad (2.39)$$

Cette relation donne l'augmentation désirée de la ténacité avec l'augmentation de la limite d'élasticité et l'épaisseur de la plaque pour obtenir la rupture en état de C.P.

D'une manière similaire à la variation de la ductilité avec la limite d'élasticité, la ténacité des métaux diminue quand  $\sigma_e$  augmente (Fig.2.12), donc si on utilise des matériaux à haute résistance ( $\sigma_e$ ), pour minimiser le poids ou les dimensions des pièces, les dimensions des fissures qui doivent être tolérées seront très petites.

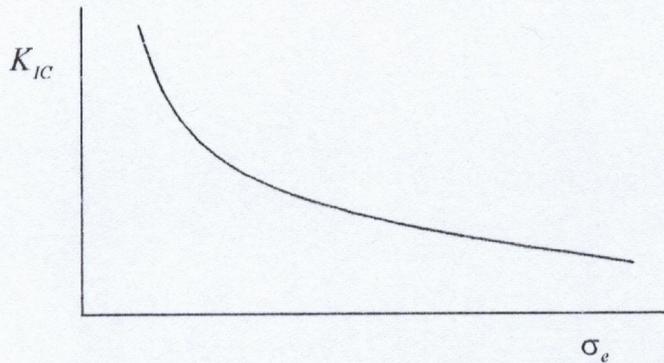


Fig.2.12 Variation de la ténacité en fonction de limite d'élasticité [18]

## II.9 LIMITATION DE LA MLER :

Les concepts de la *MLER* ne sont valables que dans le cas [2,24] :

- D'un matériau isotrope ayant un comportement élastique parfaitement plastique.
- Où la taille de la zone plastique est très petite par rapport à la longueur de la fissure et aux dimensions de la structure.
- La contrainte nominale est inférieure à la limite d'élasticité ou à  $0.8\sigma_e$ .

Selon les recommandations de l'*ASTM* citées précédemment (2-38) les dimensions ( $a$ ,  $t$ ) des éprouvettes utilisées dans les essais de ténacité sont tels que [2] :

- En *C.P* :  $t, a > 50r_p$
  - En *D.P* :  $t, a > 17r_p$
- (2.40)

Ce critère peut être utilisé quelle que soit la structure considérée, en cas de non-vérification de ce critère une correction du *F.I.C* est nécessaire [2].

Depuis son développement le *F.I.C* donne des prédictions faibles tant que  $\sigma < \sigma_e$ . Les études récentes liées à la rupture et à la fatigue viennent de le confirmer [19], de manière que les dimensions de la zone plastique représente une fraction substantielle de la longueur de la fissure.

En *mode III* **Rice** a montré que lorsque  $\sigma > 0.3\sigma_c$ , l'estimation de la rupture par  $K_{III}$  devient non représentative [19].

Tant que les sollicitations sont assez faibles, monotones croissantes ou périodiques, l'effet de la plasticité peut être négligé et la *MLER* continue d'être assez bonne approximation de la réalité physique. Par contre pour des sollicitations importantes et fortement variables les effets d'histoire liés aux surcharges ne peuvent être modélisés qu'avec la prise en compte, d'une manière ou d'une autre, de la plasticité [20].

## II.10 CRITERES DE RUPTURE :

La prévention des ruptures catastrophiques constitue un vrai problème dans le domaine industriel. Plusieurs recherches ont été entamées et qui se poursuivent pour développer des critères de rupture fiables permettant de bien contrôler les structures industrielles en service.

### II.10.1 CRITERES DE RUPTURE EN MODE I :

#### II.10.1.1 Critère énergétique :

L'instabilité de la fissure, donc la rupture se produit si l'accroissement de l'énergie de déformation est supérieur à l'énergie absorbée dans cette extension [15].

A partir de l'équation (2.13) on trouve :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{E_1 G_{IC}}{\pi a}} \quad , \quad a_c = \frac{E_1 G_{IC}}{\pi \sigma^2} \quad (2.41)$$

$a_c$  est la longueur critique de la fissure à partir de laquelle commence la propagation instable sous la contrainte de chargement  $\sigma$ .

$\sigma_c$  est la contrainte critique sous laquelle aura lieu une rupture fragile de la structure avec une fissure de longueur  $2a$ .

#### II.10.1.2 Critère basé sur le F.I.C :

Dans le cas d'un problème plan en *mode I*, la rupture intervient quand le facteur d'intensité de contrainte atteint une valeur critique  $K_{IC}$  ou la fissure devient instable et s'étend brusquement dans sa propre direction.

$$K_I \geq K_{IC} \quad (2.42)$$

### II.10.1.3 Critère du déplacement d'ouverture des lèvres de fissure (C.O.D) :

Le déplacement d'ouverture des lèvres de fissure  $\delta$  (C.O.D) est par définition l'écartement des lèvres de fissure à la frontière de la zone plastique [ 21].

$$\text{En C.P} \quad \delta = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{K_I^2}{\sqrt{3}\sigma_e} \quad (2-43)$$

$$\text{En D.P} \quad \delta = \frac{4}{\pi E} \frac{K_I^2}{\sqrt{3}\sigma_e} \quad (2-44)$$

La rupture selon ce critère apparaît lorsque  $\delta > \delta_c$ , tel que  $\delta_c$  est une caractéristique du matériau.

### II.10.1.4 Critère de l'intégral J :

Pour les matériaux à comportement élasto-plastique *Rice* a défini un critère d'intégral  $J$  relié au C.O.D par [21] :

$$\text{En C.P} \quad J = \frac{\pi}{4} \sigma_e \delta \quad (2-45)$$

$$\text{En D.P} \quad J = \frac{\pi}{4} \sqrt{3} \sigma_e \delta \quad (2-46)$$

La rupture aura lieu selon ce critère si  $J$  atteint une valeur critique  $J_{IC}$  caractéristique du matériau.

## II.10.2 CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE :

Pour les problèmes plans sollicités en mode mixte, la fissure ne se propage pas dans sa propre direction. Le critère de bifurcation exige donc une relation entre les *F.I.C*  $K_I, K_{II}, K_{III}$  et le  $K_{IC}$ . Plusieurs critères de bifurcation ont été proposés. Ces derniers sont basés sur le *F.I.C* équivalent  $K_e = f(K_I, K_{II}, K_{III})$ , qui doit être comparé à un *F.I.C* critique équivalent  $K_{eC}$ . Dans l'absence d'un critère qui fait l'unanimité, nous avons adopté les plus utilisés.

### II.10.2.1 Critère basé sur la contrainte tangentielle maximale (sih-1) :

Ce critère a été proposé par *Erdogan* et *Sih* en 1963. Selon leurs travaux [2,15,21] :

- La fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta 0}$  est maximale.
- La fissure devient instable lorsque :

$$\sigma_{r\theta} \sqrt{2\pi r} = K_{IC} \quad (2.47)$$

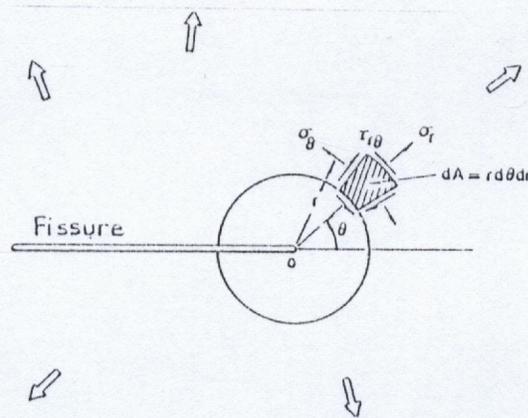


Fig.2.13 Contrainte tangentielle près du fond de fissure

Les contraintes sont fournies par les relations [2] :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} [K_I (3 - \cos\theta) \cdot \cos\theta / 2 + K_{II} (3 \cos - 1) \cdot \sin\theta / 2] \\ \sigma_\theta &= \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} [K_I (1 + \cos\theta) \cdot \cos\theta / 2 - K_{II} (3 \sin\theta) \cdot \cos\theta / 2] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi r}} [K_I \sin\theta \cdot \cos\theta / 2 + K_{II} (3 \cos - 1) \cdot \cos\theta / 2] \end{aligned} \quad (2.48)$$

La première hypothèse se traduit par :

$$\sigma_{\theta\theta=\theta_0} > 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} > 0 \text{ ou } \tau_{r\theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad (2.49)$$

compte tenu des équations (2.48) et (2.49) on déduit :

$$\cos\theta_0 / 2 \cdot [K_I \sin\theta_0 + K_{II} (3 \cos\theta_0 - 1)] = 0$$

La solution de cette équation \$\theta\_0\$ constitue l'angle de bifurcation :

$$\text{tg}\theta_0 = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \quad (2.50)$$

On cherche \$\theta\_0\$ pour la deuxième hypothèse :

$$\sigma_{r\theta} \sqrt{2\pi r} = K_{IC}$$

La rupture est obtenue selon ce critère pour :

$$\frac{K_I}{K_{IC}} \cdot \cos \frac{3\theta_0}{2} - \frac{K_{II}}{K_{IC}} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \cdot \sin \theta_0 = 1 \quad (2.51)$$

Cette condition correspond à la rupture fragile par fissuration brutale dans la direction  $\theta_0$  en milieu élastique linéaire. Selon ce critère, pour le mode II pur :

$$K_{II} = 0.87K_{IC} \quad (2.52)$$

Ce critère peut être généralisé pour les problèmes en 3D tel que, la rupture se produit lorsque [2] :

$$\sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_{\theta\theta}(\theta_0, \phi_0) = K_{IC} \quad (2.53)$$

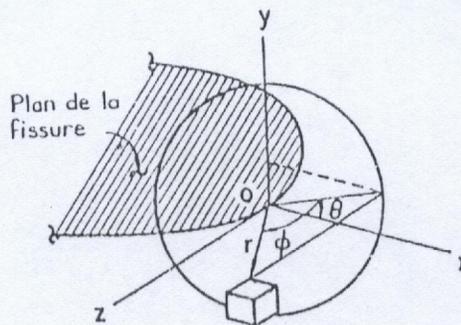


Fig.2.14 Contrainte tangentielles près du fond de fissure(3D).

Les angles  $\theta_0$  et  $\phi_0$  sont alors calculés par résolution des équations :

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad , \quad \sigma_{rr} = 0$$

### II.10.2.2 Critère de densité d'énergie de déformation minimale (sih-2) :

Ce critère appelé sih-2, proposé par **Sih** en 1972 est basé sur trois hypothèses [2,15,21] :

- La propagation de la fissure se fait dans la direction de densité d'énergie de déformations minimale  $S_{\min}(\theta_0, \phi_0)$  définie par les angles  $\theta_0$  et  $\phi_0$  tels que :

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \frac{\partial S_\theta}{\partial \phi} = 0 \quad (2.54)$$

- L'instabilité se produit lorsque la densité d'énergie de déformation dans la direction  $(\theta_0, \phi_0)$  précédemment définie atteint une valeur critique  $S_c$  caractéristique du matériau.
- La fissuration subcritique se fait de telle sorte que le fond de fissure suit des lignes d'énergie de déformation  $\frac{dw}{dv}$  constante. L'énergie de déformation  $w$  est donnée par :

$$\frac{dw}{dv} = \frac{a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2}{16\pi G_{cis} \cdot r \cdot \cos \phi}$$

$$a_{11} = (k - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \quad ; \quad a_{12} = (2 \cos\theta - k + 1) \cdot \sin \theta \quad (2.55)$$

$$a_{22} = (k + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3 \cos\theta - 1) \quad ; \quad a_{33} = 4$$

$G_{cis}$  : module de cisaillement

$$\text{En D.P} \quad k = 3 - 4\nu \quad (2.56)$$

$$\text{En C.P} \quad k = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

La densité d'énergie de déformation est donnée par [2,25] :

$$S = r \cdot \frac{dw}{dv}$$

Pour les problèmes plans  $S$  est comme suit [25] :

$$S = \frac{a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2}{16\pi G_{cis}} \quad (2.57)$$

La valeur de  $S_c$  s'obtient en considérant le cas limite du *mode I* pur, pour lequel  $S = S_c$  qui doit s'identifier au critère  $K_I = K_{IC}$ .

Donc de (2.55) et (2.57)  $S$  en *mode I* devient :

$$S = a_{11}K_I^2 = (k - \cos\theta)(1 + \cos\theta) \frac{K_I^2}{16\pi \cdot G_{cis} \cdot r \cdot \cos \phi}$$

Les équations (2.54) sont satisfaites pour  $\theta_0 = \phi_0 = 0$ , par conséquent :

$$S_{min} = \frac{1-2\nu}{4.\pi.G_{cis}} K_I^2$$

Pour un état de *D.P.*, à l'instabilité nous obtenons :

$$S_{min} = S_c = \frac{1-2\nu}{4.\pi.G_{cis}} K_{IC}^2 \quad (2.58)$$

Selon ce critère la rupture survient lorsque :

$$S \geq S_c \quad (2.59)$$

En cas du mode *mixte I+ II* la rupture est obtenue selon ce critère pour :

$$\frac{4.G_{cis}}{1-2\nu} \left[ a_{11} \left( \frac{K_I}{K_{IC}} \right)^2 + 2a_{12} \left( \frac{K_I K_{II}}{K_{IC}^2} \right) + a_{22} \left( \frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 \right] = 1 \quad (2.60)$$

Ce critère est particulièrement séduisant à cause de sa généralité et de sa simplicité d'emploi [25].

### II.10.2.3 Critère de Palanyswany et Knauss :

Ce critère est proposé par *Palanyswany* et *Knauss* en 1975 [2,15], il s'écrit comme suit :

$$\frac{K_I}{K_{IC}} + \frac{3}{2} \left( \frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 = 1 \quad (2.61)$$

En mode *II* pour ( $K_I = 0$ ) :

$$\frac{3}{2} \left( \frac{K_{II}}{K_{IC}} \right)^2 = 1 \Rightarrow K_{II} = \sqrt{3/2} . K_{IC} \Rightarrow K_{IIc} = 0.82 K_{IC} \quad (2.62)$$

La relation (2.62) est proche de celle trouvée par *Sih* (2.52)

Dans le cas d'un chargement de fatigue les conditions d'instabilité sont définies sous la contrainte maximale  $\sigma_{max}$ , par conséquent les facteurs d'intensité de contrainte ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ) sont remplacés par les *F.I.C* maximums ( $K_{I max}, K_{II max}, K_{III max}$ ) dans les critères de ruptures.

Ces critères en une grande importance dans la *MDR* tels qu'ils ont utilisés dans l'analyse pour le calcul de certains paramètres de rupture.

## CHAPITRE III

### MODELISATION DES PROBLEMES DE FISSURATION PAR FATIGUE (APPLICATION DE LA MDR)

#### III.1 INTRODUCTION :

Dans plusieurs situations, la prévention d'une rupture catastrophique ne dépend pas seulement de la connaissance des conditions nécessaires à une rupture brutale, mais aussi de l'aptitude de prédire le taux de croissance des défauts ou des fissures déjà existantes dans une structure donnée.

Le traitement du phénomène de la fatigue par la méthode d'endurance ne donne aucun renseignement sur la croissance des fissures et seul le stade d'amorçage est correctement pris en compte [17,25]. Ceci ne répond pas au besoin des domaines exigeants un haut niveau de fiabilité (Aéronautique, spatial, nucléaire... etc.).

L'application de la *MDR* à la fatigue date des années cinquante, soit, cent ans après que *Whöler* eut proposé sa méthode d'endurance qui reste très utilisée [17]. Les concepts de la *MDR* sont très utiles dans la prédiction et la corrélation du comportement de la propagation des fissures de fatigue. Par conséquent, les deux approches sont complémentaires et la prévision de la tenue à la fatigue est étudiée dans les deux stades.

#### III.2 INITIATION DE LA FISSURE DE FATIGUE :

La prévision précise du comportement en fatigue des pièces mécaniques demande de pouvoir apprécier le nombre de cycles précédant l'amorçage dans une zone de déformation plastique ou un défaut de fabrication. En général l'amorçage des fissures résulte de la concentration de déformation plastique. Pour évaluer le stade d'amorçage dans une structure plusieurs auteurs se réfèrent à une notion de microfissures. Expérimentalement le nombre de cycles d'amorçage  $N_i$  est défini pour une longueur de fissure de l'ordre de 0.1 mm [4,17]. En effet cette dimension peut être détectée assez facilement et correspond par ailleurs à une taille de défaut comparable à la taille du grain de nombreux aciers. De telle façon que dès qu'une fissure atteint une profondeur voisine de cette dimension, elle se propage régulièrement à travers la section [4].

Le nombre de cycles nécessaires à l'initiation d'une fissure de fatigue dépend essentiellement de l'acuité du défaut sur lequel elle prend naissance. En effet les champs de contrainte cités dans l'*Annexe B* ne sont valides que pour une fissure aiguë. Le champ de contrainte au voisinage d'une entaille elliptique ou parabolique de rayon  $\rho$  soumise à une contrainte normale  $\sigma$  a été développé par *Creager* et *Paris*, les expressions suivantes sont obtenues [2,17] :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2)(1 - \sin \theta / 2 \cdot \sin 3\theta / 2) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos 3\theta / 2 \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2)(1 + \sin \theta / 2 \cdot \sin 3\theta / 2) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \cos 3\theta / 2 \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\sin \theta / 2 \cdot \cos \theta / 2 \cdot \cos 3\theta / 2) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{\rho}{2r}\right) \sin 3\theta / 2\end{aligned}\quad (3-1)$$

$r, \theta$  Sont définis par la figure ci-après.

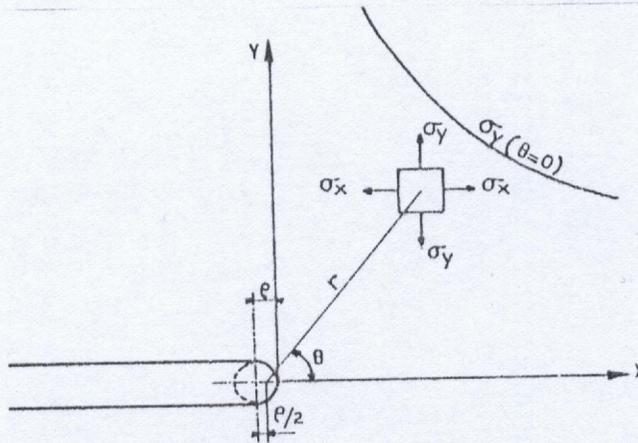


Fig. 3.1 Champ de contrainte au voisinage d'une entaille

Dans cette équation  $K_I$  représente le *F.I.C* existant au fond d'une fissure de même longueur et soumise au même chargement que l'entaille considérée [2]. Ainsi la singularité de contrainte dans l'entaille est centrée dans la zone de rayon  $\rho/2$  (Fig.3.1), tel que lorsque  $r = \rho/2$  la contrainte maximale vaut [2,17] :

$$\sigma_{\max} = K_I \cdot \sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{K_I}{\sqrt{\rho}}$$

Et la variation de la contrainte maximale :

$$\Delta\sigma_{max} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta K_I}{\sqrt{\rho}} \quad (3-2)$$

Cette équation suggère que le paramètre de l'initiation de la fissure de fatigue soit le rapport  $(\Delta K_I / \sqrt{\rho})$ . En effet il existe une valeur limite de ce rapport notée  $(\Delta K / \sqrt{\rho})_{th}$  au-dessous de laquelle ne s'initie aucune fissure [2,17,19]. Ce seuil de non-initiation peut être corrélé aux caractéristiques de traction des matériaux. Plusieurs tentatives expérimentales ont été faites pour le corrélérer à la limite d'élasticité. La meilleure équation généralisée pour les aciers sollicités à des rapports de contrainte  $R = -1$  à  $R = 0.5$  est donnée par l'équation [17] :

$$\left( \frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}} \right)_{th} = 10 \cdot \sqrt{\sigma_e} \quad (3-3)$$

Lorsque les valeurs de  $(\Delta K / \sqrt{\rho})$  sont supérieures au seuil ainsi défini, il y' aura initiation d'une fissure de fatigue sur le défaut considéré. Le nombre de cycles nécessaires à l'initiation de cette fissure est évalué par la méthode fondée sur le *F.I.C* tel que pour une entaille aiguë ( $\rho < 0.2 \text{ mm}$ ) dans une plaque de largeur supérieure à  $20 \text{ mm}$  et d'épaisseur supérieure à  $5 \text{ mm}$ ,  $N_i$  est une fonction simple de l'amplitude *F.I.C.* *Jack* et *Price* ont trouvé pour l'acier doux [2,4] :

$$N_i = \frac{2.9 \times 10^8}{(\Delta K)^4} \quad (3-4)$$

$\Delta K$  est en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$

### III.3 SEUIL DE PROPAGATION :

Le seuil de propagation  $\Delta K_{th}$  est défini par l'amplitude du *F.I.C* au-dessous de laquelle une fissure préexistante ne peut plus progresser dans un matériau [4,17,19]. Cela a été remarqué expérimentalement quand l'amplitude du *F.I.C*  $\Delta K$  diminue faiblement jusqu'à atteindre la valeur asymptotique  $\Delta K_{th}$  pour laquelle il devient très difficile de mettre expérimentalement en évidence une avancée de la fissure [4]. Pratiquement elle est définie selon les codes *ECOM150* de *ECCS* et *R/H/6 "Révision 3"* de *CEGB* comme la valeur de l'amplitude du *F.I.C* pour une vitesse de propagation de  $da/dN = 10^{-10} \text{ m/cycles}$  [19].

L'importance de ce seuil de propagation dans le calcul de certaines structures soumises à de très fortes exigences de sécurité (par exemple les réacteurs nucléaires) est l'une des causes qui poussent les spécialistes à l'étude de ce phénomène. Cette propriété pouvait être dépendre de plusieurs paramètres en particulier le rapport de contrainte  $R$ .

### III.3.1 ESTIMATION DU SEUIL DE PROPAGATION :

L'influence du rapport  $R$  sur  $\Delta K_{th}$  peut se traduire par la relation générale [4,26] :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \cdot f(R) \quad (3-5)$$

Où  $\Delta K_{th0}$  est la valeur de  $\Delta K_{th}$  lorsque  $R = 0$  et  $f(R)$  est une fonction de  $R$ .

Plusieurs équations théoriques ou empiriques ont été proposées pour la fonction  $f(R)$ .

**Klesnil et Lukas** ont proposé cette relation empirique pour les aciers au carbone [4] :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} (1 - R)^\delta \quad (3-6)$$

Selon **Benvers** [4],  $\delta = 1$  pour les aciers au carbone de structure ferrito-perlitiques,  $\delta = 0.5$  à  $0.8$  pour les alliages d'Al, de Ti et de cuivre à l'air-ambient, en général  $\delta \approx 0.7$ .

**Pook et Frost** ont proposé la relation suivante [19] :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \cdot \left[ \frac{1 - R}{1 + R} \right]^{1/2} \quad (3-7)$$

**McEvily** a proposé une relation de type [2] :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \frac{1.2}{1 + 0.2 \cdot (1 - R / (1 + R))} \quad (3-8)$$

Dans **BSI PD6493** [19] on trouve pour les aciers au carbone :

$$\Delta K_{th} = 6 - 4.55R$$

Dans **R/H/6 "Révision 3"** on trouve pour les aciers où  $\sigma_e < 620 \text{ MPa}$  [19] :

$$\Delta K_{th} = (5 - K_{\min}) \quad 0 < K_{\min} < 3 \quad \text{et} \quad \Delta K_{th} = 2 \quad K_{\min} > 3 \quad (\text{MPa} \sqrt{m})$$

Comme la variation de  $\Delta K_{th}$  en fonction de  $R$  est établie généralement avec certitude, Il est recommandé d'un point de vue de sécurité d'appliquer la relation suivante [4,19] :

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0} \cdot (1 - R) \quad (3-9)$$

Cette relation est intégrée dans le code de calcul **NASA/FLAGROW** pour des valeurs de  $R > 0$ .

La notion du seuil de propagation apparaît aujourd'hui comme un fait d'expérience et peut être considérée comme une caractéristique du matériau et ne pourra plus être négligé dans le calcul de structures où les exigences de sécurité sont élevées.

### III.3.2 PARAMETRES D'INFLUENCES SUR $\Delta K_{th}$ :

Plusieurs paramètres peuvent avoir une influence plus ou moins marquée sur le seuil de propagation et conduire à des variations relativement importantes sur ce seuil. L'augmentation de la taille de grain conduit à un seuil de propagation plus élevé. L'intensité de cet effet dépend essentiellement du matériau. A l'opposé, le seuil de propagation chute avec l'augmentation de la limite d'élasticité ou la limite d'endurance [4,19].

### III.4 PROPAGATION DES FISSURES :

Plusieurs considérations telles que l'influence des défauts, le contrôle non destructif, la maintenance des structures font que la connaissance de la croissance de fissures est un sujet d'intérêt. L'application des charges cycliques est une cause principale de l'extension de la fissure avec des charges ne causant pas de rupture si elles sont monotones ou statiques [25,27].

Beaucoup de chercheurs ont tenté d'établir des lois empiriques de fissuration par fatigue pour caractériser l'influence des différents paramètres sur la vitesse de fissuration. En pratique, il est constaté que la vitesse de propagation des fissures est une fonction de la longueur de la fissure, de l'amplitude de contrainte appliquée, de la fréquence, de la température, de l'environnement, de la géométrie de la pièce et de l'histoire de fissuration [16,19,27].

#### III.4.1 TENTATIVES DE DECRIRE LA PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE :

Trois variables sont couramment utilisées pour caractériser le comportement à la fissuration des matériaux, tel que l'accroissement de la longueur ou de la surface de la fissure par cycle est exprimé en fonction du *F.I.C.*, de l'intégrale de *Rice J* ou en fonction du taux de restitution d'énergie *G*. Les différentes expressions proposées à cet effet sont de plus en plus moins complexes selon qu'elles rendent compte ou non des paramètres d'influences.

##### III.4.1.1 Facteur d'intensité de contrainte :

Les *F.I.C.* sont des quantités qui caractérisent la singularité de la contrainte au voisinage de la pointe de fissure comme il a été défini dans le chapitre 2.

### III.4.1.2 Intégrale $J$ de Rice et Bui :

L'intégral  $J$  est une approche un peu moins locale et consiste à définir des intégrales de contour  $\Gamma$  qui expriment la variation d'énergie potentielle du solide pour un accroissement de fissure.

$$J = \int_{\Gamma} \left[ w n_x - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right] ds$$

$$I = \int_{\Gamma} \left[ -w^* n_x - u_i n_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} \right] ds$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij}^* = \frac{\partial w^*}{\partial \sigma_{ij}}$$

$\vec{n}$  : La normale à  $\Gamma$

$w$  : L'énergie de déformation

$w^*$  : L'énergie complémentaire

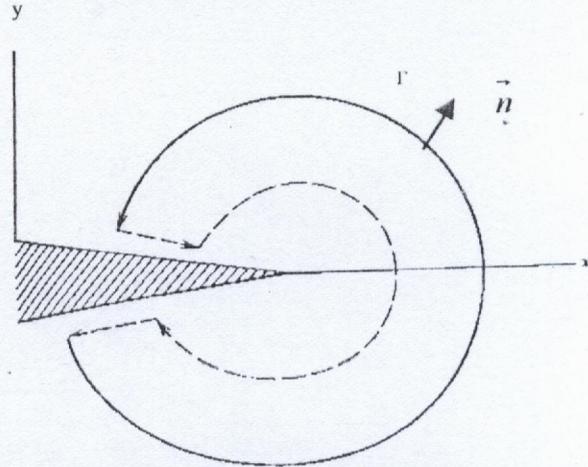


Fig. 3.2 Contour d'intégration pour les intégrales de Rice et de Bui [ 3]

L'analyse de *Westergaard* pour les problèmes plans a donnée [28] :

► En *C.P* 
$$J = I = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \tag{3-10}$$

► En *D.P* 
$$J = I = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

### III.4.1.3 Taux de restitution d'énergie :

C'est une approche plus globale qui exprime le transfert d'énergie élastique libérée par le solide fissuré lors d'un accroissement de fissure  $G$  et disponible pour créer cet accroissement par décohesion de la matière. L'intérêt de ce concept introduit initialement par *Griffith* est qu'il permet une généralisation de la *MLER* pour les comportements élasto-plastique et visco-élasto-plastique.

### III.4.2 COURBE DE PROPAGATION :

Expérimentalement, il est constaté que la variation de la vitesse de propagation  $da/dN$  en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  peut être représentée typiquement par la figure 3.3 [9,14,19] :

$da/dN$  en fonction de  $\Delta K$  est généralement donnée par une échelle log-log.

Cette courbe peut être divisée en trois zones ou régions selon la mécanique d'extension de la fissure.

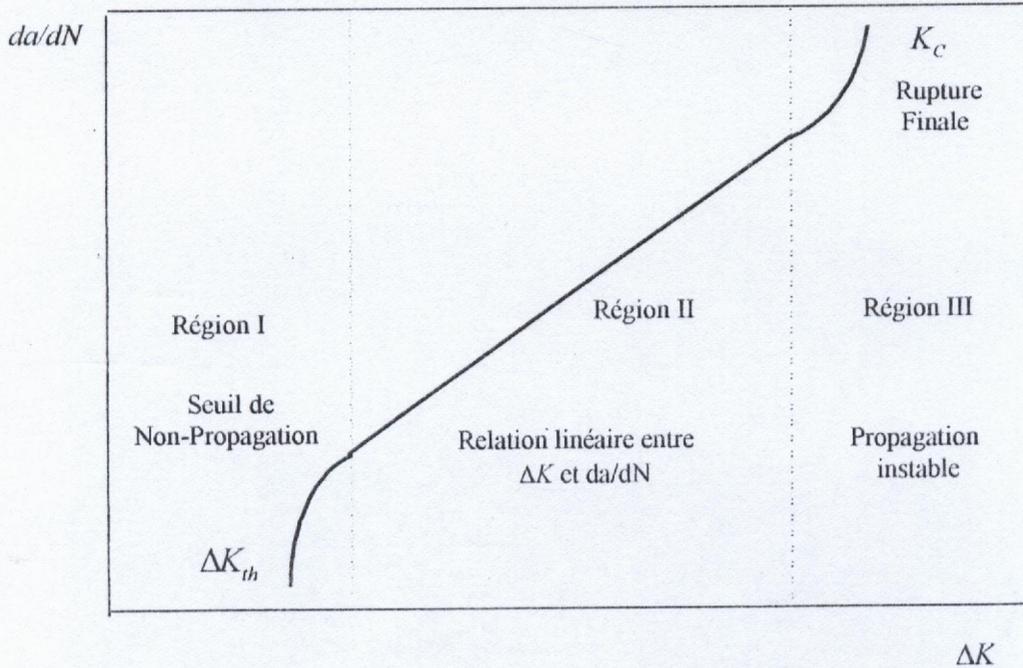


Fig.3.3 Courbe de propagation des fissures en fatigue [19]

□ *Région I :*

Elle correspond au seuil de propagation  $\Delta K_{th}$ , en dessous duquel il n'y a pas de propagation [6,20]. Toutes les études faites mettent en évidence la notion de  $\Delta K_{th}$ . Au-dessus de cette valeur le taux de propagation  $da/dN$  augmente relativement avec l'augmentation de  $\Delta K$ .

□ *Région II :*

Dans cette région il y a généralement une relation linéaire entre  $da/dN$  et  $\Delta K$  [16,17,19].

□ *Région III :*

Dans ce stade le taux de propagation s'approche à une asymptote quand la valeur maximale du F.I.C  $K_{max}^*$  devient égale à  $K_c$ . Cette région correspond au dernier stade qui se termine par la rupture brutale de la structure.

Le comportement de propagation des fissures de fatigue illustré dans la figure 3.3 est généralement le même dans la plupart des cas. Les mieux connus sont pour des faibles valeurs de  $R$  [17,19]. Généralement les alliages d'Aluminium ont des taux de propagation supérieurs à celles des alliages de Titane et des aciers pour la même valeur de  $\Delta K$  [16].

La possibilité de  $\Delta K$  pour corréler les données du taux de propagation dépend largement de la contrainte alternée causant la propagation qui doit être inférieure à la limite d'élasticité et de la dimension de la zone plastique qui doit être elle-même très inférieure à la longueur de la fissure [16]. Les bases de données des courbes de propagation sont très utiles dans la pratique. Pour la conception et le contrôle des structures et des pièces ou éléments de machine, elles sont utilisées par exemple dans la conception des avions et des systèmes d'énergie nucléaire pour une durée de vie finie. De plus elles sont utilisées pour la sélection des matériaux. Cependant, ces courbes ne fournissent pas d'informations précises quand plusieurs facteurs interviennent [9].

### III.4.3 MODELES OU LOIS DE FISSURATION PAR FATIGUE :

La modélisation des problèmes de fissuration tente de décrire par une approche théorique, semi-empirique ou entièrement empirique le taux de propagation des fissures et la mise en équation des effets de tous les paramètres qui contrôlent la propagation afin de constituer un modèle ou une loi de fissuration. Ceci est cependant loin d'être établi, et en pratique seulement quelques paramètres peuvent être contrôlés.

La première tendance a été d'adopter les relations empiriques ou les modèles phénoménologiques qui décrivent, le plus correctement possible l'effet de certains paramètres sur la vitesse de propagation par le *F.I.C.* Ces modèles tentent de décrire par une approche empirique les variations constatées expérimentalement sous les hypothèses suivantes [4,24] :

- Un milieu bidimensionnel élastique linéaire
- Un chargement simple (*mode I* pur)
- Des sollicitations extérieures périodiques

#### III.4.3.1 Modèle de Paris :

En 1963 *Paris* et *Erdogan*, en utilisant les notions du *F.I.C* développé par *Irwin* proposaient une loi qui demeure la plus utilisée en pratique. Cette loi relie l'amplitude du *F.I.C*  $\Delta K$  au taux de propagation par la relation suivante [2,4,19] :

$$\frac{da}{dN} = C_p \cdot (\Delta K)^{m_p} \quad (3-11)$$

$C_p$ ,  $m_p$  sont les constantes de *Paris* et dépendent du matériau.

Le modèle de *Paris* est bien établi dans la *zone II* de la courbe de propagation, pour cela il est utilisé dans plusieurs codes de calcul, tels que *ICOM150*, *R/H/6 "Revision3"*, *WES*, *ESDU* [19], pour décrire la croissance des fissures de fatigue dans la *zone II* de la courbe de propagation. Cependant il ne décrit pas non plus le comportement de fissure dans les conditions suivantes [19] :

- La décroissance de  $da/dN$  qui aura lieu à des petites valeurs de  $\Delta K$
- L'accélération qui aura lieu lorsque  $K_{\max}$  est supérieure à  $0.7K_C$
- L'effet de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  ou du rapport des contraintes  $R$
- L'effet d'autres paramètres (température, environnement... etc.)

### III.4.3.2 l'effet de la contrainte moyenne et le Modèle de Forman :

L'effet de la contrainte moyenne s'introduit par le rapport  $R$ . La loi de **Forman** [4,19,29] contient cette variable et permet, de plus, de rendre compte de la rupture fragile par la condition à la limite :  $K_{\max} \rightarrow K_C$  quand  $da/dN \rightarrow \infty$

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_F \cdot \Delta K^{m_F}}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (3-12)$$

$C_F, m_F$  sont les constantes de **Forman** dépendants du matériau.

Cette relation a été bien vérifiée pour les alliages d'Aluminium surtout les nuances 7075-T6 et 2024-T3, mais ne décrit pas le comportement des aciers où l'influence du rapport  $R$  est moins marquée que prévue par cette relation [7]. **Frost** recommande cette loi pour les aciers inoxydables surtout lorsque la contrainte moyenne est élevée [19]. Généralement cette relation est utilisée dans la pratique ( $R/H/6$ , *ESDU*) pour décrire la propagation dans la zone III de la courbe de propagation. **Walker** a introduit l'effet de  $R$  et  $K_{\max}$  en proposant le modèle suivant [21] :

$$\frac{da}{dN} = C_W \cdot [(1-R)^n K_{\max}]^{m_W} \quad (3-13)$$

$C_W, m_W$  sont les constantes de **Walker** dépendants du matériau.

### III.4.3.3 Intégration du seuil de propagation $\Delta K_{th}$ dans les lois de propagation :

Plusieurs chercheurs ont tenté d'intégrer l'effet de  $\Delta K_{th}$  dans les lois de propagation pour mieux décrire le comportement des fissures à faibles vitesses de propagation lorsque  $\Delta K$  tend vers  $\Delta K_{th}$ . **Sperr** [4,19], constate que la relation de **Forman** ne remplit pas cette condition, et propose une relation pour intégrer simultanément l'effet de  $R$  et  $\Delta K_{th}$ , qui est décrite par :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_{SP} \cdot (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_{SP}}}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (3-14)$$

$C_{SP}, m_{SP}$  sont les constantes de **Sperr** dépendants du matériau.

Cette loi est vérifiée pour les Aciers à haute résistance, mais pour une faible gamme de vitesses.

**McEvily** propose la relation suivante pour les alliages à faible résilience [2] :

$$\frac{da}{dn} = \frac{C_{Ev}}{E} (\Delta K - \Delta K_{th})^2 \left( 1 + \frac{\Delta K}{K_C - \Delta K / (1-R)} \right) \quad (3-15)$$

$C_{Ev}$  est une constante du matériau.

Plusieurs chercheurs ont vérifié empiriquement que la courbe de propagation dans la région du seuil et bien décrite par [19] :

$$\frac{da}{dN} = C_s (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_s} \quad (3-16)$$

$C_s, m_s$  sont des constantes du matériau.

Cette loi est adoptée par les codes *ICOM150* et *R/H/6* dans la zone I.

#### III.4.3.4 Plasticité au fond de fissure et modèle d'Elber :

Une fissure de fatigue diffère d'une fissure mécanique idéale par ce qu'elle crée une zone de déformation plastique résiduelle lors de sa propagation (Fig. 3.4). Dans les années 1970, **Elber** découvre le phénomène de fermeture de la fissure qui survient comme conséquence de la plasticité au fond de fissure et observe que la fissure de fatigue ne se propage pas lorsqu'elle est fermée, elle est seulement ouverte pour une portion du cycle  $U$ .

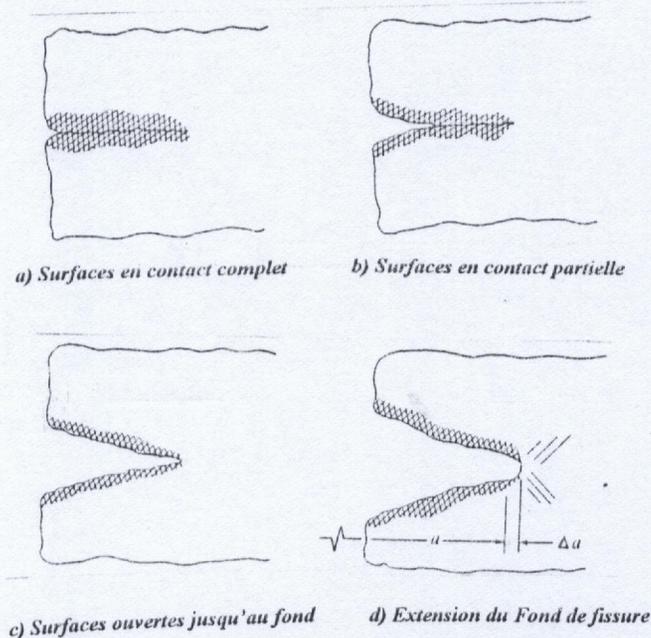


Fig.3.4 Phénomène de fermeture de la fissure[5]

Pour prendre compte de l'effet de fermeture de fissure il a développé le concept du *F.I.C* effectif, dans lequel il propose de remplacer dans le modèle de **Paris** le *F.I.C*  $\Delta K$  par un *F.I.C* effectif  $\Delta K_{eff}$  [4,19] :

$$\frac{da}{dN} = C_{El} \cdot (\Delta K_{eff})^{m_{El}} \quad (3-17)$$

$$\Delta K_{eff} = U \cdot \Delta K \quad (3-18)$$

$C_{El}$ ,  $m_{El}$  sont des constantes d'**Elber** et dépendent du matériau.

$U$  : Représente une portion de cycle au-dessus duquel la fissure est totalement ouverte.

**Elber** propose la relation suivante pour  $U$  [4] :

$$U = 0.5 + 0.4R \quad (3-19)$$

Cette relation est déduite en se basant sur l'alliage d'Aluminium 2024-T3 et pour des valeurs de  $R$  entre  $0.1 < R < 0.7$ . **Schijve** propose la relation suivante [16] :

$$U = 0.55 + 0.35R + 0.1R^2 \quad (3-20)$$

En particulier, pour les alliages d'Aluminium il propose [16] :

$$U = \frac{0.55 - 0.2R - 0.25R^2 - 0.1R^3}{1 - R} \quad (3-21)$$

Les travaux de **Lindley** et **Richards** confirment les travaux d'**Elber**. Ce modèle a une importante application dans les revêtements et les structures des avions [19].

Dans le code de calcul *NASA Data Base for Crack Growth Properties of Materials* une relation plus complexe est utilisée pour le lissage des données expérimentales (**Forman Modifié**) [30] :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \cdot (1-R)^n \cdot (\Delta K)^m \cdot (\Delta K - \Delta K_{th})^p}{[(1-R)K_c - \Delta K]^q} \quad (3-22)$$

$C$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  sont des constantes du matériau.

Selon les valeurs de  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  ce modèle est simplifié :

$$m = p = q = 0 \quad \text{modèle de Paris}$$

$$m = p = 0, q = 1 \quad \text{modèle de Forman}$$

### III.4.3.5 Modèle de Sih :

La loi de **Paris** possède deux insuffisances majeures :

- Elle n'est valable qu'en mode simple de propagation et plus précisément le *mode I*.
- Elle ne fait intervenir qu'un paramètre de chargement (amplitude constante).

Pour résoudre ces deux problèmes, *Sih* a proposé de remplacer dans la loi de *Paris*  $\Delta K$  par  $\Delta S$  [2] :

$$\frac{da}{dN} = C_H \cdot (\Delta S_{\min})^{m_H} \quad (3-23)$$

$C_S, m_S$  sont des constantes du matériau.

$\Delta S_{\min}$  est l'amplitude de  $S$  dans la direction où  $S$  est minimale.

$$\Delta S_{\min} = S_{\min}^{\max} - S_{\min}^{\min} = S(\theta_0, \sigma_{\max}) - S(\theta_0, \sigma_{\min}) \quad (3-24)$$

compte tenu de la définition de  $S$  donnée dans le paragraphe II.9.2, dans le cas du mode mixte *I* et *II* :

$$\Delta S_{\min} = \frac{1}{16\pi G_{cis}} \left[ a_{11}(K_{I \max}^2 - K_{I \min}^2) + 2a_{12}(K_{I \max}K_{II \max} - K_{I \min}K_{II \min}) + a_{22}(K_{II \max}^2 - K_{II \min}^2) \right]$$

Si le *mode III* est en présence on ajoute à cette expression le terme :

$$\frac{a_{33}(K_{III \max}^2 - K_{III \min}^2)}{16\pi G_{cis}} \quad (3-25)$$

Cette loi résout les deux problèmes de la loi de *Paris*. Cependant la loi de *Sih* ne tient pas compte des zones de seuil et de la propagation instable ainsi qu'il est d'un emploi plus délicat que celle de *Paris* car elle nécessite le calcul de l'angle  $\theta_0$ . D'autres chercheurs ont proposé d'utiliser l'amplitude du taux de restitution d'énergie dans la loi de *Paris* [4] :

$$\frac{da}{dN} = C_G \cdot (\Delta G)^{m_G} \quad (3-26)$$

$C_G, m_G$  sont des constantes du matériau.

### III.5 RESULTATS RELATIFS AUX PROPRIETES DE PROPAGATION :

La détermination de la courbe de propagation et les constantes des lois de propagation constitue une grande partie de la résolution du problème de fissuration par fatigue. Plusieurs résultats de recherches concernant les aciers, les alliages d'Aluminium et les alliages de Titane ont montré que le principal paramètre affectant la vitesse de propagation dans la *zone II* (Fig.3.3) est l'amplitude du *F.I.C*  $\Delta K$ , tandis que l'influence des propriétés mécaniques et métallurgiques est presque négligeable à la température ambiante à l'air libre. Citons les modèles proposés [9,10,17] :

Aciers martensitiques : (552 <  $\sigma_e$  < 2068 )

$$\frac{da}{dN} = 1.35 \times 10^{-10} (\Delta K)^{2.25} \quad (3-27)$$

Aciers ferrito- perlitique :

$$\frac{da}{dN} = 6.9 \times 10^{-12} (\Delta K)^{3.0} \quad (3-28)$$

Aciers inoxydables austénitiques :

$$\frac{da}{dN} = 5.6 \times 10^{-12} (\Delta K)^{3.25} \quad (3-29)$$

Ces lois ont été validées par l'*ASTM* pour plusieurs nuances et pour différentes valeurs de  $R$ .

Plusieurs équations ont été proposées pour établir une relation entre les constantes  $C$  et  $m$  de la loi de *Paris* citons :

La relation de *WES 2805* s'écrit [19] :

$$C_p = 5.10^{-8} \cdot 17.27^{-m_p} \quad (3-30)$$

Et celle proposée par *Grugé* [21] :

$$C_p = \frac{1.315 \cdot 10^{-4}}{895.4^{m_p}} \quad (3-31)$$

Quelques résultats concernant les courbes de propagation et les propriétés des matériaux sont citées dans l'*Annexe E*.

### III.6 PROPAGATION DES FISSURES SURFACIQUES :

Les ruptures dans les applications industrielles surviennent dans plusieurs cas à partir des fissures internes et surfaciques qui se propagent dans toutes les directions et prennent des formes irrégulières. Les fissures surfaciques sont caractérisées par la demi-longueur en surface  $c$  et la distance au point maximum en profondeur  $a$  (Fig.C.19). La variation de la forme de fissure est affectée par plusieurs facteurs tel que le mode de chargement, rapport initiale  $a_0/c_0$ , contraintes résiduelles, microstructure, anisotropie du matériau et taille des grains... etc.[27,31].

Dans l'absence des contraintes résiduelles, le rapport  $a/c$  tend vers une valeur de 0.85 en cas des chargements de traction amenant à une forme de fissure d'équilibre correspondante à une fissure semi-elliptique [31]. En flexion, la contrainte varie suivant l'épaisseur tel que la contrainte au fond est inférieure à la contrainte à la surface, par conséquent la propagation en surface est préférée. La modélisation de la propagation en considérant le modèle de *Newman-Raju* pour le calcul du *F.I.C* (*Annexe C*) est donnée selon le type de chargement [31].

**En traction :**

$$\frac{da}{dc} = \left[ \sqrt{\frac{a}{c}} \left[ 1 + 0.3182 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] \right]^{-n_p} \quad (3-32)$$

**En flexion :**

$$\frac{da}{dc} = \left[ \frac{\sqrt{\frac{a}{c}} \left[ 1 + 0.3182 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] H_1}{H_2} \right]^{-n_p} \quad (3-33)$$

$n_p$  : coefficient de **Paris** même celui de (3-11).

$$H_1 = 1 - 0.34 \left( \frac{a}{t} \right) - 0.11 \left( \frac{a}{c} \right) \left( \frac{a}{t} \right)$$

$$H_2 = 1 - \left[ 1.22 + 0.12 \left( \frac{a}{c} \right) \right] \left( \frac{a}{t} \right) + \left[ 0.55 - 1.05 \left( \frac{a}{c} \right)^{0.75} + 0.47 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.5} \right] \left( \frac{a}{t} \right)^2$$

### III.7 FATIGUE-CORROSION :

Il s'agit de l'endommagement d'une structure sous l'effet combiné d'une sollicitation dynamique et d'un milieu agressif dont l'action se traduit par une accélération de la vitesse de propagation en fatigue par rapport à celle notée en milieux inertes. Il est constaté en cas de fatigue-corrosion qu'il existe un seuil du *F.I.C* noté  $K_{I_{sc}}$  au-dessous duquel la fissure ne se propage pas et au-dessus duquel s'étend sans variation de la charge ou sous charge statique [15].

En se basant sur la loi de **Paris**, l'action de la corrosion agit soit uniquement sur le coefficient  $C$ , soit sur les deux coefficients  $C$  et  $m$  simultanément tels que [4,17] :

$$\frac{da}{dN} = C(t) \cdot \Delta K^m \quad (3-34)$$

$$\frac{da}{dN} = C(t) \cdot \Delta K^{m(t)}$$

La vitesse de propagation en milieux corrosifs dépend fortement de la fréquence et de la forme du spectre des sollicitations.

## CHAPITRE IV

### PREVISION ET PREVENTION DE LA RUPTURE PAR FATIGUE

La rupture mécanique est un changement dans les dimensions, la forme ou les propriétés du matériau d'une structure ou d'un élément de machine de façon à les rendre incapables de remplir leur fonction attendue[32]. La rupture de fatigue est une rupture soudaine qui entraîne la séparation de la pièce en deux ou plusieurs morceaux, due à l'application des charges cycliques. La rupture aura lieu après l'initiation et la propagation d'une fissure jusqu'à une valeur critique où la rupture finale se produit brutalement.

Le besoin d'assurer une grande fiabilité dans une large gamme de structures industrielles (aéronautique, maritime, nucléaire, ...etc.) a nécessité l'amélioration de techniques d'analyse du comportement des fissures particulièrement sous chargement cyclique. Plusieurs recherches ont été entreprises dans ce domaine pour avoir un outil d'analyse sous forme d'un code de calcul facile à utiliser.

La prévention de la rupture consiste à fournir des réponses quantitatives aux problèmes spécifiques concernant les structures fissurées plus précisément les questions suivantes se posent :

- Quelle est la contrainte résiduelle qui peut être supportée sans risque de rupture ?
- Quelle est la longueur critique de fissure qui peut être tolérée sous les chargements de service?
- Quelle est la durée de propagation de la fissure d'une valeur initiale détectable à une valeur maximale permise ?
- Quelle est la durée de vie d'une structure quand certains défauts préexistants sont supposés ?
- Comment définir un intervalle du temps d'inspection pour pouvoir contrôler l'extension de ces fissures ?

L'étude que l'on se propose de réaliser a pour objet d'assurer le fonctionnement le plus normal de la pièce conçue pour la durée de vie envisagée sans risque de rupture.

#### IV.1 PARAMETRES D'UN PROBLEME DE FISSURATION PAR FATIGUE :

Pour la résolution d'un problème de fissuration par fatigue on doit définir et choisir les paramètres suivants :

- La géométrie de la structure.
- La configuration de la fissure initiale.
- L'histoire des efforts appliqués.
- La loi de comportement à la déformation.
- Critère de rupture.
- La loi de fissuration du matériau.

##### IV.1.1 FISSURE INITIALE :

La mécanique de la rupture par fatigue suppose l'existence d'une fissure initiale dans la structure étudiée. La fissure initiale est soit une fissure créée par endommagement sous l'effet des chargements cycliques, soit un défaut créé lors d'élaboration du matériau ou lors de la mise en forme. Les dimensions initiales des défauts peuvent être déterminées par différentes méthodes telles que [33] :

- L'inspection.
- Sur la base des limitations connues d'une technique de détection particulière
- L'application des normes imposées par des codes de conceptions.

En pratique, la détection des défauts révèle souvent des formes complexes difficiles à analyser mathématiquement. Pour cela il est d'usage de les simplifier en les assimilant à des formes simples, comme recommandé par la plupart des codes de calcul. Dans la figure 4.1 sont représentées les assimilations données par les codes de calcul *ASME*, *BS*, *WES*. Les dimensions des fissures sont définies selon la figure, pour trois types de fissures [19,24]:

- Fissures traversantes.
- Fissures surfaciques.
- Fissure internes.

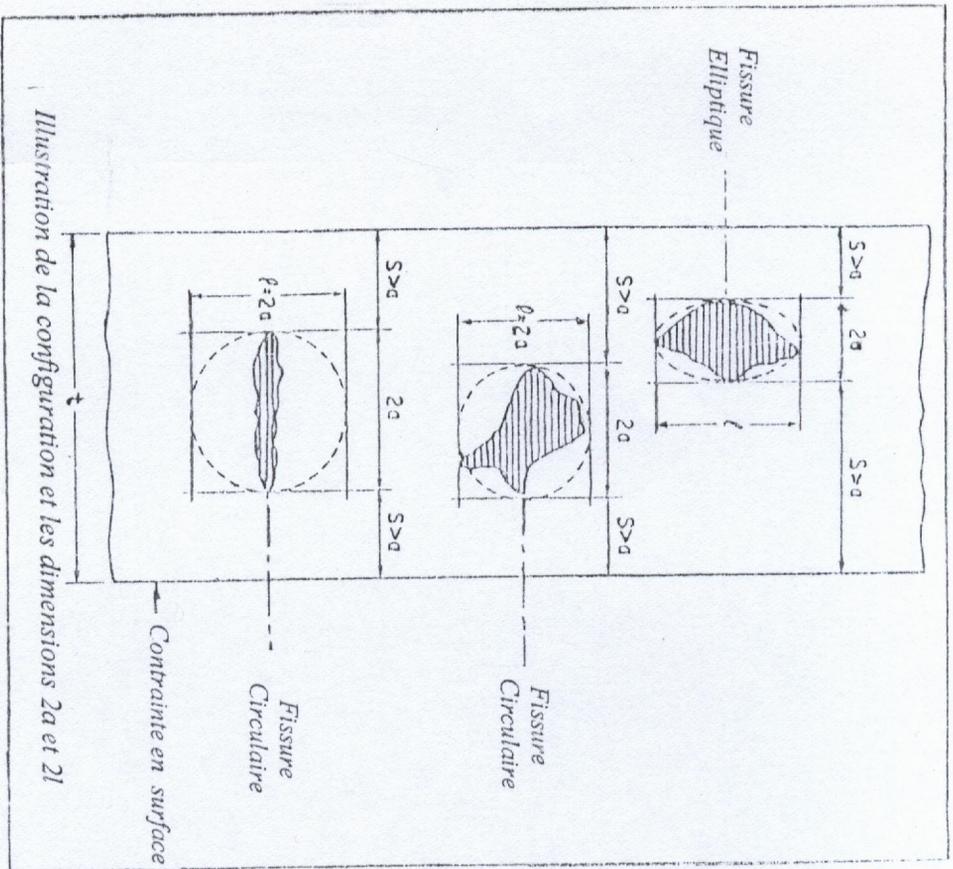


Fig. 4.1 Assimilation des défauts internes à des fissures elliptiques (Code ASME) [19]

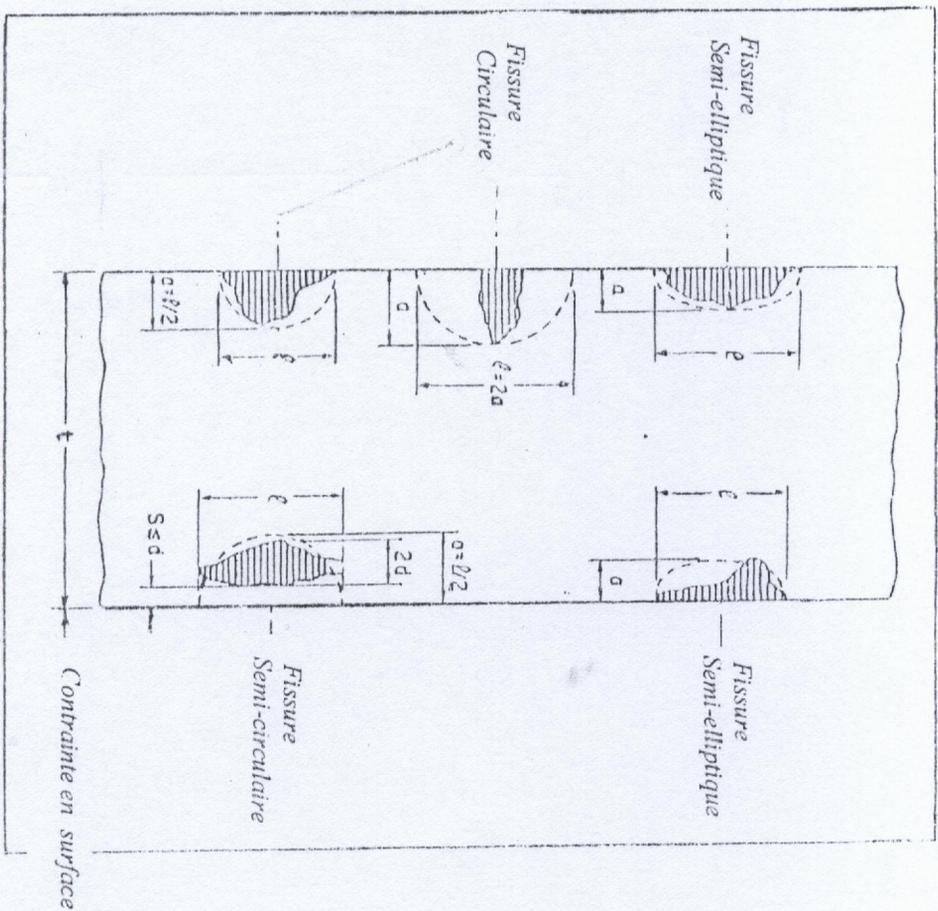


Fig. 4.2 Assimilation des défauts débouchantes à la surface à des fissures semi-elliptiques (Code ASME) [19]

L'interaction entre les fissures est prise en compte dans le code *ASME* pour mieux analyser le problème, tel que les dimensions de la fissure sont améliorées selon la figure 4.2 en cas de défauts coplanaires. La forme et les dimensions de la fissure sont introduites en se basant sur les notions citées précédemment.

#### **IV.1.2 SOLLICITATIONS :**

Si les efforts extérieurs varient en direction, la fissure ne progresse pas dans son plan, Il y' aura bifurcation de la fissure. La condition de charge simple est une condition de non-bifurcation pour les structures qui ne présentent pas de variation brusque de géométrie telles que des trous ou des sur-épaisseurs au voisinage de la fissure. Selon la variation des efforts extérieurs en fonction du temps, on distingue :

- Les efforts périodiques pour lesquelles les lois de fissuration sont bien établies.
- Les efforts d'histoire complexe qui nécessitent la prise en compte des effets de mémoire.
- Les efforts aléatoires dont la loi de fissuration à caractère non-linéaire rend la prévision très difficile.

Dans cette étude les efforts sont considérés comme étant périodiques à amplitude constante.

#### **IV.1.3 MATERIAUX :**

Les matériaux sont représentés par leurs lois de comportement à la déformation qui sont soit élastique linéaire, élasto-plastique, élasto-visco-plastique.

Dans la plupart des cas pratiques, la structure dans son ensemble travaille dans le domaine élastique. Par conséquent seulement les structures travaillants dans le domaine élastique sont considérées. De plus la correction d'*Irwin* pour prendre en compte la zone plastique formée au fond de fissure est adoptée de telle sorte que la *MLER* reste valable est cela en appliquant les conditions de l'*ASTM* (2-38) et (2-40).

#### **IV.1.4 CRITERES DE RUPTURE :**

Le contrôle de la sûreté de la pièce et le calcul des paramètres de la rupture (fissure critique, contrainte critique) se font en appliquant un critère de rupture convenable. Plusieurs critères de ruptures ont été rapportés dans la bibliographie (chapitre 2), certains critères sont spécifiques à certains matériaux ou à une application particulière.

Schématisation du défauts	Critère	Dimension effective
<p>- défauts Surfaceiques Coplanaires</p>	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2$ $L = l_1 + l_2 + s$
<p>Défauts internes Coplanaires</p>	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$ $L = l_2$
<p>Défauts internes Coplanaires</p>	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_2$ $L = l_1 + l_2 + s$
<p>Défauts Surfaceique et internes Coplanaires</p>	$s \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s$ $L = l_1$
<p>Défauts internes Coplanaires</p>	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s_2$ $L = l_1 + l_2 + s_1$
<p>Défauts Surfaceique et internes</p>	$s_1 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$ $s_2 \leq \frac{l_1 + l_2}{2}$	$l = l_1 + l_2 + s_2$ $L = l_1 + l_2 + s_1$

Fig.4.3 Prendre en compte de l'interaction entre les fissures coplanaires (Code ASME)[19]

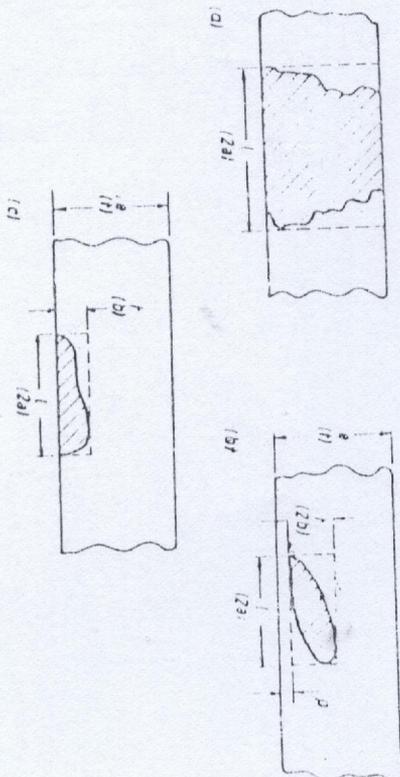


Fig. 4.4 Assimilation des défauts, dimensions entre parenthèses (Code WES 2805) et sans parenthèses (Code BSI PD6493)[19]

- a) Fissures traversantes b) Fissures internes
- c) Fissures Surfaceiques

Pour des sollicitations de fatigue, la contrainte maximale  $\sigma_{max}$  est considérée. En *mode I* pur, le critère basé sur le *F.I.C* critique donné par l'équation (2.42) est appliqué, tel qu'en état de *D.P* la rupture finale se produit lorsque la fissure atteint une longueur critique, telle que :

$$K_I(\sigma_{max}, a_c) = K_{IC} \quad (4-1)$$

Pour un état de contrainte plane le  $K_{IC}$  est remplacé par le  $K_C$ . Pour plus de sécurité quelques auteurs proposent de conserver le  $K_{IC}$  même pour un état de *C.P* [10].

En cas du *mode mixte* le critère basé sur la densité d'énergie de déformation  $S$  donné par l'équation (2-59) est appliqué. Dans ce cas la rupture aura lieu sous chargement maximal pour les modes existants lorsque :

$$S_{min}^{max}(\theta_0, \bar{\sigma}_{max}, a_c) = S_c \quad (4-2)$$

$\bar{\sigma}_{max}$  : Contrainte maximale pour les modes de rupture en présence.

En *mode mixte I et II* ce critère s'écrit :

$$\frac{4G_{cis}}{1-2\nu} \left[ a_{11} \left( \frac{K_{I max}}{K_{IC}} \right)^2 + 2a_{12} \left( \frac{K_{I max} K_{II max}}{K_{IC}^2} \right) + a_{22} \left( \frac{K_{II max}}{K_{IC}} \right)^2 \right] = 1 \quad (4-3)$$

$a_{ij}$  : Sont donné par (2-55) et (2-56).

Ces deux critères sont adoptés pour leurs simplicité, généralité, unanimité et large utilisation dans le domaine industriel [2,25].

De plus plusieurs autres critères de rupture (Chapitre 2) sont implantés dans le programme où l'utilisateur peut faire un choix selon son application.

#### IV.1.5 MODELE DE PROPAGATION :

Parmi les importantes tâches de l'analyse de contrôle de la rupture est le recueil de valide propriétés de propagation des matériaux. Tel que la prédiction du taux de croissance des fissures ou la vitesse de propagation, l'estimation de la durée de propagation sont faite en se basant sur un modèle de propagation. D'après les notions évoquées dans le chapitre 3 les lois de propagation par fatigue sont généralement fonction de plusieurs paramètres tels que :

- Variation du *F.I.C*  $\Delta K$
- Rapport des contraintes  $R$

- Seuil de propagation  $\Delta K_m$
- *F.I.C* critique  $K_c$
- *F.I.C* maximale  $K_{max}$
- Constantes du matériau  $C, m$
- Limite d'élasticité  $\sigma_e$
- Module de *Young*  $E$

Tel que :

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K, R, C, m, K_c, K_{max}, \dots)$$

Il est à noter cependant que les cinq premiers sont les plus prépondérants.

Pour mieux analyser le problème de fissuration en *mode I*, une tentative est faite pour différencier les zones de propagation en appliquant un modèle de propagation convenable à chaque zone :

Dans la *zone I* on utilise le modèle donné par (3-16).

$$\frac{da}{dN} = C_s \cdot (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_s}$$

Dans la *zone II* on applique le modèle de *Paris* donné par (3-11).

$$\frac{da}{dN} = C_p \cdot (\Delta K)^{m_p}$$

Dans la *zone III* on utilise le modèle de *Forman* donné par (3-12).

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_f \cdot \Delta K^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K}$$

Ces modèles sont recommandés par plusieurs chercheurs qui ont vérifié leur fiabilité et leur capacité de bien définir le comportement de la propagation dans les zones qu'ils ont associé [19,30,34,35]. En effet le modèle de *Paris* est utilisé par plusieurs codes de calcul pour décrire la propagation stable dans la *zone II* (*ICOM150, R/H/6 "Revision3"*, *NASACRAC, WES, ESDU*). La loi adaptée pour la *zone I* est incorporée dans le code *ICOM150* et *R/H/6* pour analyser la propagation lente dans la région proche du seuil. Le modèle de *Forman* est utilisé par les codes *NASA/FLAGROW* et *NASA Data Base for Crack Growth Properties of Materials* pour décrire la propagation instable dans la *zone III* [30,34,35].

La transition entre les différentes zones de propagation n'est pas bien définie. Selon quelques recherches, les différentes zones sont définies par les valeurs du *F.I.C* maximale  $K_{max}$  tels que [19] :

$$\text{Zone I} : \Delta K_{th} < K_{I_{max}} < K_{II_{max}}$$

$$\text{Zone II} : \Delta K_{th} < K_{I_{max}} < 0.7K_C \quad (4-4)$$

$$\text{Zone III} : 0.7K_C < K_{I_{max}} < K_C$$

En effet, ces zones varient peu avec le type du matériau. En absence de données précises spécifiques aux matériaux, cette définition générale est adoptée.

L'effet de la plasticité et la fermeture de la fissure sur la vitesse de propagation et la durée de propagation est introduit en appliquant le modèle d'*Elber* donné par (3-17), (3-18) tout en considérant la définition d'*Elber* pour le  $U$  donné par (3-19).

Peu de modèles décrivent la propagation en *mode mixte*. Dans ce cas nous utilisons le modèle de *Sih* basé sur la densité d'énergie de déformation minimale donné par (3-23).

Autres modèles de propagation sont implantés dans le programme, tel qu'on peut faire un choix du modèle pour une application donnée à condition de fournir les constantes du matériau correspondantes au modèle choisi.

## IV.2 CALCUL DES PARAMETRES DES LOIS DE PROPAGATION ADOPTEES :

### IV.2.1 Variation du *F.I.C* $\Delta K$ :

Selon la relation du *F.I.C* donnée par (2-20) :

$$\Delta K = f(a) \cdot \Delta \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (4-5)$$

Le *F.I.C* est calculé à partir des solutions données dans l'*Annexe C* après lissage mathématique des fonctions d'influence données par des courbes ou des tableaux (*Annexe D*). Ce lissage permet d'avoir les fonctions nécessaires à incorporer dans le programme de calcul.

Plusieurs chercheurs ont montré que les résultats d'essais de la vitesse de propagation pour des  $R < 0$  sont similaires à ceux de  $R = 0$  du fait de la fermeture de la fissure durant la compression. Pour cela ils proposent de poser [9,14,17] :

$$\Delta K = K_{max} \quad R \leq 0 \quad (K_{min} = 0)$$

$$\Delta K = K_{max} - K_{min} \quad R > 0$$

Nous adoptons cette définition.

#### IV.2.2 Seuil de propagation $\Delta K_{th}$ :

Le seuil de propagation est déterminé par la relation générale donnée par (3-9), cette relation est recommandée pour des raisons de sécurité. De ce fait elle est incorporée dans le code de calcul *NASA/FLAGROW*.

#### IV.2.3 facteur d'intensité critique $K_C$ :

Dans l'absence des valeurs expérimentales, le *F.I.C* critique  $K_C$  est estimé à partir du  $K_{IC}$  et l'épaisseur de la pièce  $t$  par la relation empirique donnée par (2-37).

#### IV.2.4 Constantes du matériau :

Les constantes des lois de propagation ainsi que  $\Delta K_{th0}$  sont des constantes expérimentales spécifiques aux matériaux. Une collection des meilleurs et récents résultats expérimentaux relatifs aux caractéristiques du matériau est donnée en *Annexe E*.

### IV.3 PROCEDURE D'ANALYSE :

#### IV.3.1 Etat de contrainte :

L'état de contrainte est déterminé en testant les conditions données par la relation (2-38).

#### IV.3.2 Zone plastique :

Selon l'état de contrainte la taille de la zone plastique est calculée par le modèle de d'*Irwin* donné par la relation (2-32).

#### IV.3.3 Correction de la zone plastique :

Après avoir calculé la taille de la zone plastique, pour assurer la validité de la *MLER* les conditions de l'*ASTEM* données par (2-40) sont vérifiées. Si ces conditions sont vérifiées c'est bon, si non on procède à une correction du *F.I.C* par la relation (2-34) :

$$K_{I_{eff}} = f(a_{eff}) \cdot \sigma \sqrt{\pi a_{eff}} \quad (4-6)$$

L'introduction de la taille de la zone plastique dans  $f(a)$  rend le problème très complexe du fait de la complexité de cette dernière. Selon **Irwin** on peut considérer que  $f(a)$  n'est pas affecté par la taille de la zone plastique et on introduit un facteur de correction de la plasticité  $f_{ZP}(a_{eff})$ , la forme du *F.I.C* devient [2] :

$$K_{I_{eff}} = f(a) \cdot f_{ZP}(a_{eff}) \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4-7)$$

A partir des deux expressions du *F.I.C* donné par (4-6) et (4-7) :

$$f_{ZP}(a_{eff}) = \sqrt{\frac{a_{eff}}{a}}$$

En tenant compte de la définition de  $a_{eff}$  donnée par (2-33) et (2-35) tout en considérant la contrainte maximale en cas de fatigue, l'expression de  $f_{ZP}(a_{eff})$  devient :

$$f_{ZP}(a_{eff}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( f(a) \frac{\sigma_{max}}{\sigma_e} \right)^2}} \quad (4-8)$$

Le *F.I.C* est obtenu en remplaçant  $f_{ZP}(a_{eff})$  de (4-8) dans (4-7).

En appliquant cette correction on peut avoir une idée sur l'influence de la taille de la zone plastique sur l'évolution de certains paramètres ( $\Delta K, \sigma_c, a_c, N...$  etc.). En règle générale, selon quelques recherches [2] on ne tient pas compte de la correction de la zone plastique pour les problèmes de fatigue surtout lorsque les contraintes sont largement inférieures à  $\sigma_e$ .

#### IV.3.4 Direction de propagation :

La direction de propagation d'une fissure de fatigue en *mode I* est approximativement perpendiculaire à la contrainte principale appliquée et elle est exactement perpendiculaire lorsque le chargement est symétrique. La fissure qui croit en *mode I* n'est pas nécessairement linéaire, elle est attirée par la surface libre la plus proche et tend à suivre un chemin zigzagué [5,32].

En *mode mixte* la fissure dans sa propagation prend une direction  $\theta_0$ , telle que définie par (2-54), les solutions des *F.I.C* (*Annexe C*) ne dépendent pas de  $\theta$ , (2-54) donne :

$$\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta} K_I^2 + 2 \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} K_I K_{II} + \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} K_{II}^2 + \frac{\partial a_{33}}{\partial \theta} K_{III}^2 \quad (4-9)$$

En dérivant  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  donnés par (2-55) par rapport à  $\theta$  nous obtenons :

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \theta} = \sin \theta (2 \cos \theta + (1 - \kappa)) ; \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial \theta} = 0 \quad (4-10)$$

$$\frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} = (1 - \kappa) \cos \theta + 2 \sin 2\theta ; \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} = \sin \theta ((1 - \kappa) - 6 \cos \theta)$$

En substituant les expressions (4-10) dans (4-9), et en considérant les *F.I.C* maximums pour les problèmes de fatigue la relation (2-54) donne :

$$\begin{aligned} \sin \theta_0 [2 \cos \theta_0 + (1 - \kappa)] K_{I \max}^2 + 2 [(1 - \kappa) \cos \theta_0 + 2 \sin 2\theta_0] K_{I \max} K_{II \max} + \\ \sin \theta_0 [(1 - \kappa) - 6 \cos \theta_0] K_{II \max}^2 = 0 \end{aligned} \quad (4-11)$$

La direction de propagation  $\theta_0$  est déterminée en résolvant l'équation (4-11).

#### IV.3.5 Taille critique de la fissure $a_c$ :

En considérant la contrainte maximale, à partir de la condition d'instabilité donnée par (4-1) la taille critique de la fissure est comme suit :

$$a_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi \cdot f^2(a_c) \cdot \sigma_{\max}^2} \quad (4-12)$$

$f(a)$  est une fonction si complexe que pour une fissure débouchante dans une plaque de largeur finie par exemple (*Fig.C.3*) elle est comme suit :

$$f(a) = \left( \frac{2b}{\pi a} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a}{2b} \right)^{1/2} \frac{0.752 + 0.37 \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi a}{2b} \right) \right]^3 + 2.02(a/b)}{\cos \left( \frac{\pi a}{2b} \right)}$$

$a_c$  devient pour ce cas :

$$a_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi \cdot \sigma_{\max}^2 \left[ \left( \frac{2b}{\pi a_c} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi a_c}{2b} \right)^{1/2} \frac{0.752 + 0.37 \left( 1 - \sin \left( \frac{\pi a_c}{2b} \right) \right) + 2.02 a_c / b}{\cos \frac{\pi a_c}{2b}} \right]^2}$$

En *mode mixte*, à partir de la condition d'instabilité de la fissure donnée par (4-2) la taille critique de la fissure est déterminée.

$$S_{\min}^{\max}(\theta_0, \bar{\sigma}_{\max}, a_c) = S_c$$

En tenant compte de la définition de  $S$  donnée par (2-57) on aboutit à :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(\theta_0)K_{I \max}^2(a_c) + 2\alpha_{12}(\theta_0)K_{I \max}(a_c)K_{II \max}(a_c) + \alpha_{22}(\theta_0)K_{II \max}^2(a_c) + \\ \alpha_{33}K_{III \max}^2(a_c) = 16\pi G_{cis} \cdot S_c \end{aligned} \quad (4-13)$$

Cette expression est simplifiée selon les modes de rupture en présence.

#### IV.3.6 Contrainte critique $\sigma_{\max C}$ :

A partir de la condition d'instabilité de la fissure donnée par (4-1) la charge critique est calculée :

$$\sigma_{\max C} = \frac{K_{IC}}{f(a) \cdot \sqrt{\pi a}} \quad (4-14)$$

en *mode mixte* on détermine la charge critique du *mode I* en utilisant le critère :

$$S_{\min}^{\max}(\theta_0, \sigma_{\max C}, a) = S_c \quad (4-15)$$

Avec  $\sigma_{\max C}$  représente la contrainte maximale critique.

La courbe de la contrainte résiduelle (en *mode I* pur) est déterminée en variant la longueur de fissure dans la relation (4-14).

#### IV.3.7 Vérifier la sûreté de la structure :

Vérifier la sûreté de la structure consiste à vérifier en premier lieu si la structure est sûre pour la plus petite fissure détectable en service par les moyens d'inspection disponibles au niveau de l'organisme concerné, puis vérifier en service pour une dimension donnée de la fissure. La sûreté de la structure est vérifiée par les critères de rupture donnés par (4-1) en *mode I* pur et par (4-2) en cas du *mode mixte* de chargement.

La structure est considérée comme sûre si :

En *mode I* :

$$K_{\max}(\sigma_{\max}, a) < K_{IC} \quad (4-16)$$

En mode mixte :

$$S_{\min}^{\max}(\theta_0, \alpha, \bar{\sigma}_{\max}) < S_c \quad (4-17)$$

Egalement, dans le programme nous avons le choix d'utiliser les autres critères de rupture.

#### IV.3.8 Prédiction de la durée de vie $N$ :

La durée de vie à la fatigue d'une pièce donnée est déterminée par la sommation du nombre de cycles nécessaires à l'initiation d'une fissure de fatigue et sa propagation d'une taille subcritique à une taille critique. Donc, la vie d'une pièce comprend trois périodes distinctes :

- ▶ Initiation ou amorçage
- ▶ Propagation
- ▶ Rupture finale

La durée de la rupture finale est généralement très courte par rapport aux autres et elle est généralement négligée dans les calculs.

##### IV.3.8.1 Durée d'initiation $N_i$ :

Le nombre de cycle d'initiation est calculé par la relation (3-4), en substituant  $\Delta K$  dans cette relation par le seuil de propagation  $\Delta K_{th}$  :

$$N_i = \frac{2.910^8}{(\Delta K_{th})^4} \quad (4-18)$$

##### IV.3.8.2 Durée de propagation $N_p$ :

En mode I, La durée de propagation est estimée en intégrant la vitesse de propagation donnée par les modèles (3-11), (3-12) et (3-16) telles que :

$$\frac{da}{dN} = f(C, m, \Delta K, \Delta K_{th}, \dots) \Rightarrow dN = \frac{1}{f(C, m, \Delta K, \Delta K_{th}, \dots)} da$$

$$N = \int \frac{1}{f(C, m, \Delta K, \Delta K_{th}, \dots)} da$$

Pour les trois zones :

$$\text{Zone I} : N_1 = \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{C_S (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_s}} da$$

$$\text{Zone II} : N_2 = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{C_p \cdot \Delta K^{m_p}} da$$

Zone III :

$$N_3 = \int_{a_2}^{a_c} \frac{(1-R)K_C - \Delta K}{C_F \cdot \Delta K^{m_F}} da$$

$$N_p = \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{C_S (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_S}} da + \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{C_P \cdot \Delta K^{m_P}} da + \int_{a_2}^{a_c} \frac{(1-R)K_C - \Delta K}{C_F \cdot \Delta K^{m_F}} da \quad (4-19)$$

La durée de vie totale :

$$N = N_i + N_p$$

La durée d'initiation n'est prise en considération que si on est dans l'étape de conception où la structure est supposée saine de tout défaut.

En *mode mixte*, la durée de vie est calculée en intégrant la vitesse de propagation donnée par le modèle (3-23) entre la valeur initiale et la valeur critique de la fissure tel que :

$$\frac{da}{dN} = C_H \cdot (\Delta S_{min})^{m_H} \Rightarrow N = \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{C_H \cdot (\Delta S_{min})^{m_H}} da$$

Compte tenu de la définition de  $\Delta S'_{min}$  donnée par (3-24)  $N$  devient :

$$N = \frac{8\pi \cdot G_{cis}}{C_H} \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{\left[ a_{11}(\theta_0)(\Delta K_I \bar{K}_I) + a_{12}(\theta_0)(\Delta K_I \bar{K}_{II} + \Delta K_{II} \bar{K}_I) + a_{22}(\theta_0)(\Delta K_{II} \bar{K}_{II}) + a_{33} \Delta K_{III} \bar{K}_{III} \right]^{m_H}} da$$

Cette expression est simplifiée selon les modes de rupture en présence.

I+II :

$$N = \frac{8\pi \cdot G_{cis}}{C_H} \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{\left[ a_{11}(\theta_0)(\Delta K_I \bar{K}_I) + a_{12}(\theta_0)(\Delta K_I \bar{K}_{II} + \Delta K_{II} \bar{K}_I) + a_{22}(\theta_0)(\Delta K_{II} \bar{K}_{II}) \right]^{m_H}} da$$

I+III :

$$N = \frac{8\pi \cdot G_{cis}}{C_H} \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{\left[ a_{11}(\theta_0)(\Delta K_I \bar{K}_I) + a_{33} \Delta K_{III} \bar{K}_{III} \right]^{m_H}} da \quad (4-20)$$

II+III :

$$N = \frac{8\pi \cdot G_{cis}}{C_H} \int_{a_0}^{a_c} \frac{1}{\left[ a_{22}(\theta_0)(\Delta K_{II} \bar{K}_{II}) + a_{33} \Delta K_{III} \bar{K}_{III} \right]^{m_H}} da$$

De la même façon l'intégration d'un autre modèle de propagation est faite pour établir la durée de propagation à partir de ce modèle.

#### IV.3.8.3 Calcul des bornes d'intégration :

$a_0$  est la valeur initiale détectable en cas de présence de fissure, sinon on prend  $a_0 = 0.1 \text{ mm}$  (voir section III.2). Après le calcul de  $K_{I1 \max}$  en faisant l'égalité des vitesses de propagation des deux modèles des zones I et II,  $a_1$  est déterminée en considérant la limite de la zone I tel que :

$$a_1 = \frac{K_{I1 \max}^2}{\pi \cdot f^2(a_1) \cdot \sigma_{\max}^2} \quad (4-21)$$

$a_2$  est déterminée en considérant la limite de la zone II :

$$a_2 = \frac{(0.7K_c)^2}{\pi \cdot f^2(a_2) \cdot \sigma_{\max}^2} \quad (4-22)$$

$a_c$  est la longueur critique de la fissure déterminée par la résolution de (4-12) en cas du *mode I* et (4-13) en cas du *mode mixte*. Notons que selon la longueur initiale de la fissure la zone I peut ne pas exister, et cela en comparant la taille initiale à  $a_1$ .

#### IV.3.9 Analyse de propagation :

La variation de la fonction d'influence, la vitesse de propagation, l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte et le nombre de cycles pendant la propagation de la fissure sont étudiés par l'incrément de la longueur de fissure de la valeur initiale à la valeur critique [21,23,25]. De la même façon la courbe de propagation est établie. La méthode suivante est utilisée :

- Choisir un pas d'incrément de la fissure  $\Delta a = a_{i+1} - a_i$
- Calculer la valeur moyenne de la longueur de fissure  $a_m = \frac{a_{i+1} + a_i}{2}$
- Calculer la variation du *F.I.C*  $\Delta K$  pour  $a_m$
- A partir des modèles de propagation, calculer  $\frac{\Delta a}{\Delta N}$
- Calculer le nombre de cycles de propagation  $\Delta N$  entre  $a_i$  et  $a_{i+1}$

Cette analyse peut être schématisée par le tableau 4.1. Il est à noter qu'en cas du *mode mixte* le  $\Delta K$  est remplacé par  $\Delta S$ .

$a$	$\Delta a$	$a_m$	$\Delta K$	$\Delta a / \Delta N$	$\Delta N$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$a_i$					
	$a_{i+1} - a_i$	$a_{mi} = (a_{i+1} + a_i) / 2$	$\Delta K_i(a_{mi})$	$\Delta a / \Delta N_i(\Delta K_i)$	$\Delta N_i$
$a_{i+1}$					
	$a_{i+2} - a_{i+1}$	$a_{mi+1} = (a_{i+2} + a_{i+1}) / 2$	$\Delta K_{i+1}(a_{mi+1})$	$\Delta a / \Delta N_{i+1}(\Delta K_{i+1})$	$\Delta N_{i+1}$
$a_{i+2}$					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tab 4.1 Analyse de propagation de la fissure.

**IV.4 PLAN DE CONTROLE DE LA RUPTURE :**

Le contrôle de la rupture est un processus systématique de prévention de la rupture durant le service. Ceci est réalisé par des méthodes et des techniques appropriées choisis selon des règles bien établies suivant le cas considéré. L'importance des règles du plan de contrôle de rupture dépend de la structure, les conséquences économiques lorsque la structure sera hors service et les dégâts après rupture. Donc un plan de contrôle doit être en accord avec le niveau de risque.

L'établissement d'un plan de contrôle de rupture nécessite de déterminer la courbe de la résistance résiduelle "Residual strength curve" donnant la contrainte résiduelle en fonction de la longueur de la fissure (la figure 5.33 étant un exemple) et la courbe de propagation donnant le nombre de cycles en fonction de la longueur de la fissure (Fig. 5.25). Ces deux courbes sont établies par la procédure d'analyse citée précédemment. A partir de ces deux informations et autres informations (température, environnement... etc.) le plan de contrôle sera implémenté [33]. Le contrôle peut être un simple bon choix du matériau pour une pièce simple et peut contenir plusieurs options plus compliquées, telles que : inspection périodique, sûreté intégrée, durée de vie sûre, inspection destructive par des essais d'épreuves.

**IV.4.1 Inspection périodique :**

L'objet de l'inspection périodique est la détection des fissures avant qu'elles atteignent la longueur permise  $a_p$  (déterminée à partir de  $a_c$  tout en adoptant un coefficient de sécurité) afin de prendre les mesures nécessaires pour éviter la rupture fragile. Par conséquent, les moyens de

taille inférieure ou égale à  $a_p$ , sinon il faut revoir la conception. Une bonne inspection doit prendre en compte des critères tels que les surfaces à inspecter, quant et comment inspecter. Notant aussi que la détection d'une fissure dépend des compétences des opérateurs et de l'accessibilité.

Egalement l'intervalle d'inspection doit être inférieur à la durée de propagation déterminée par l'analyse. Il est généralement prise égale à  $I = N/2$ , pour l'industrie aéronautique  $I$  est fixé à  $N/4$  [36,37]. Généralement cet intervalle est fixé par les codes de calcul selon le domaine d'application.

#### **IV.4.2 Sûreté intégrée (Fail Safe) :**

Dans ce cas la structure est conçue à supporter des dommages sans risque de rupture fragile par exemple le critère de " fuite avant rupture" dans les récipients sous pression, l'utilisation des rédaisseur à une grande ténacité. L'inspection des fissures dans ces cas n'est pas nécessaire, mais seulement des vérifications des parties rompues pour les remplacées [33].

#### **IV.4.3 Durée de vie sûre (Safe life) :**

Elle est appliquée pour les structures où la détection des fissures par les méthodes non destructives est très difficile ou lorsque le seuil de détectabilité  $a_d$  est supérieur à la longueur permise de la fissure par manque de moyens d'inspection. Dans ce cas une fissure de longueur initiale est supposée sur laquelle l'analyse est basée. Une fois la durée de vie estimée est achevée la pièce est automatiquement retirée et remplacée[33,37].

#### **IV.4.5 Destructive inspection par des essais d'épreuves (Proof test) :**

Dans ce cas des essais sur la structure sont perforé à une charge supérieure à la charge remarquée dans la réalité, si la structure résiste alors en utilisant la *MDR* la nouvelle longueur critique de la fissure et la durée d'utilisation sont déterminées, après l'achèvement de la période d'utilisation (estimée par analyse) des essais sont perforé de nouveau jusqu'à où la rupture de la structure survienne durant l'essai. Par conséquent la durée d'utilisation est fixée par essai et non par analyse, cependant l'analyse est utilisée pour assurer l'utilisation sûre de la structure entre deux essais [41,43]. Avec cette méthode la durée d'utilisation de la structure est considérablement améliorée. Cette technique est utilisée par *U.S Forces*[36].

De plus le plan de contrôle contient les méthodes et les moyens d'inspection, les procédures de maintenance et de réparation selon le cas considéré. Notant aussi que le détail du plan de

De plus le plan de contrôle contient les méthodes et les moyens d'inspection, les procédures de maintenance et de réparation selon le cas considéré. Les détails du plan de contrôle sont réalisés par les ingénieurs en se basant sur les réglementations imposées par les autorités gouvernementales et les sociétés industrielles (*ASME* étant un exemple) [37]. Ce plan doit être en conformité avec les moyens disponibles (matériels et opérateurs).

#### **IV.5 COEFFICIENT DE SECURITE :**

Plusieurs sources d'erreurs peuvent avoir une influence plus ou moins importante sur l'analyse. Notant à titre d'exemple :

- Incertitudes et hypothèses dans les données  $K_{IC}, c, n, \Delta K_{th} \dots$  etc.
- Hypothèses et interprétations dans l'historique du chargement.
- Calcul du facteur d'intensité de contrainte.
- Erreurs dues à la modélisation numérique (par ordinateur).

Pour prendre en compte ces sources d'erreurs un coefficient de sécurité est appliqué soit partiellement sur chaque paramètre (par exemple dans le domaine aéronautique : données 1.5, fissure 2, *F.I.C* 1.5) [37], soit globalement sur la durée de vie estimée en considérant tous les facteurs partiels. Ce coefficient dépend du domaine d'application, selon quelques codes il peut aller jusqu'à 20 [37].

En utilisant les notions des chapitres précédents on est arrivé à développer les équations de base pour le calcul et l'analyse d'une structure fissurée. On a abouti de ce fait à des équations non-linéaires et des intégrales des fonctions très complexes dont la résolution fait recours à des méthodes de résolution numériques, qui sera l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE V

### PROGRAMMATION ET IMPLEMENTATION DE L'INTERFACE UTILISATEUR-MACHINE

Le programme de calcul réalisé dans le cadre de cette étude vise à remplir plusieurs tâches qui sont présentées dans la figure 5.1.

#### V.1 METHODES DE CALCUL NUMERIQUE :

Plusieurs méthodes numériques sont utilisées dans le programme développé afin de résoudre certains problèmes mathématiques.

##### V.1.1 RESOLUTION DES EQUATIONS NON-LINEAIRES :

Le calcul de la longueur critique de la fissure, l'angle de bifurcation et les longueurs de fissures correspondantes à la transition de la zone I- zone II et zone II- zone III de la courbe de propagation nécessite la résolution de certaines équations mathématiques non-linéaires. Pour cela deux approches sont utilisées :

- Approche globale :

Pour localiser la racine, une recherche est faite dans un intervalle  $[a, b]$  par la méthode de **Balayage** qui consiste à examiner la fonction dans certains nombre de domaines  $[a_i, a_{i+1}]$  jusqu'à obtenir le changement de signe attendu [38,39]. L'utilisation d'un pas plus petit permet une meilleure discretisation.

- Approche locale :

Après la localisation de l'intervalle, la racine est calculée en utilisant une approche locale. La méthode de **dichotomie** est adoptée pour sa simplicité et sa convergence sûre. La méthode de la **sécante** est incorporée pour vérifier les résultats [38,39,40].

### V.1.2 INTEGRATION NUMERIQUE :

Le calcul de la durée de vie nécessite d'évaluer certaines intégrales. La méthode d'intégration numérique utilisée dans ce cas est la méthode de *Simpson 1/3* qui consiste à relier 3 points successifs par un polynôme de 2<sup>ème</sup> ordre et qui peut être représentée sous une simple forme pour l'implémentation [38] :

$$\int_a^b f(x).dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^n f(x_{2k+1})$$

Tel que l'intervalle [a, b] est divisé en  $2M$  avec la même largeur  $h = \frac{b-a}{2M}$  avec  $x_k = a + hk$  pour  $k = 1, \dots, 2M$ . L'utilisation d'un pas plus petit permet d'avoir une meilleure précision.

### V.1.3 ANALYSE DE PROPAGATION :

Pour voir l'évolution de certains paramètres en fonction de l'augmentation de la longueur de fissure durant la propagation (voir tableau 4.1) la méthode d'incrémentement pas-à-pas est utilisée.

### V.1.4 LISSAGE MATHEMATIQUE DES DONNEES NUMERIQUES :

L'approximation d'un ensemble de points numériques  $(x, y)$  par une fonction analytique  $y = f(x)$  est nécessaire pour leur exploitation dans le programme. Cela est fait à l'aide d'un logiciel de lissage et d'interpolation *CurveExpert* (Annexe D). La méthode des moindres carrés est utilisée dans ce logiciel. Elle consiste à avoir une meilleure approximation en minimisant l'expression  $D$  telle que [40,41]:

$$D = \sum_{i=1}^n (y_i - y'_i)^2$$

Avec

$y$  : valeur donnée numériquement.

$y'$  : valeur calculée par la fonction  $f$ .

## V.2 DEVELOPPEMENT DU PROGRAMME :

Pour le développement de notre programme nous avons utilisé :

- Un micro-ordinateur *P III* de 450 MHz et de 64 Mo de RAM.
- L'environnement Windows.

- Le pascal objet comme langage de programmation.
- Borland Delphi4 comme compilateur et pour la réalisation de l'interface utilisateur-machine.
- Paradox7 comme outil de réalisation de la base de donnée sur les matériaux.

Pour avoir une grande flexibilité du programme, les caractéristiques suivantes sont incorporées :

- Construction modulaire, telle que les différentes parties du programme sont construites indépendamment du programme principal.
- Une interface logique entre les parties du programme pour assurer la communication entre les différentes parties sans perturber les autres en modifiant une partie.
- Options opérationnelles, pour agir sur des problèmes particuliers (exceptions).
- Un aspect conversationnel pour faciliter son exploitation.

### V.3 STRUCTURE DU PROGRAMME :

Le programme est constitué de plusieurs unités reliées par un projet. Les unités les plus importantes sont les suivants :

*Pmin* : généré par le delphi pour la gestion du projet et pour assurer la relation entre les différentes unités.

*Uprinc* : contient les fonctions et les procédures pour lancer les modules à partir du menu principal.

*UfoncInf* : contient les fonctions de calcul des facteurs de correction du facteur d'intensité de contrainte.

*UNumérique* : contient les fonctions et les procédures pour la résolution des équations non-linéaires.

*UchagreCrit* : contient les fonctions et procédures de calcul de la charge critique et la courbe de la contrainte résiduelle.

*Ugraphiques* : contient les procédures d'affichage des images

*Uanalyse* : contient les fonctions et les procédures d'analyse de propagation

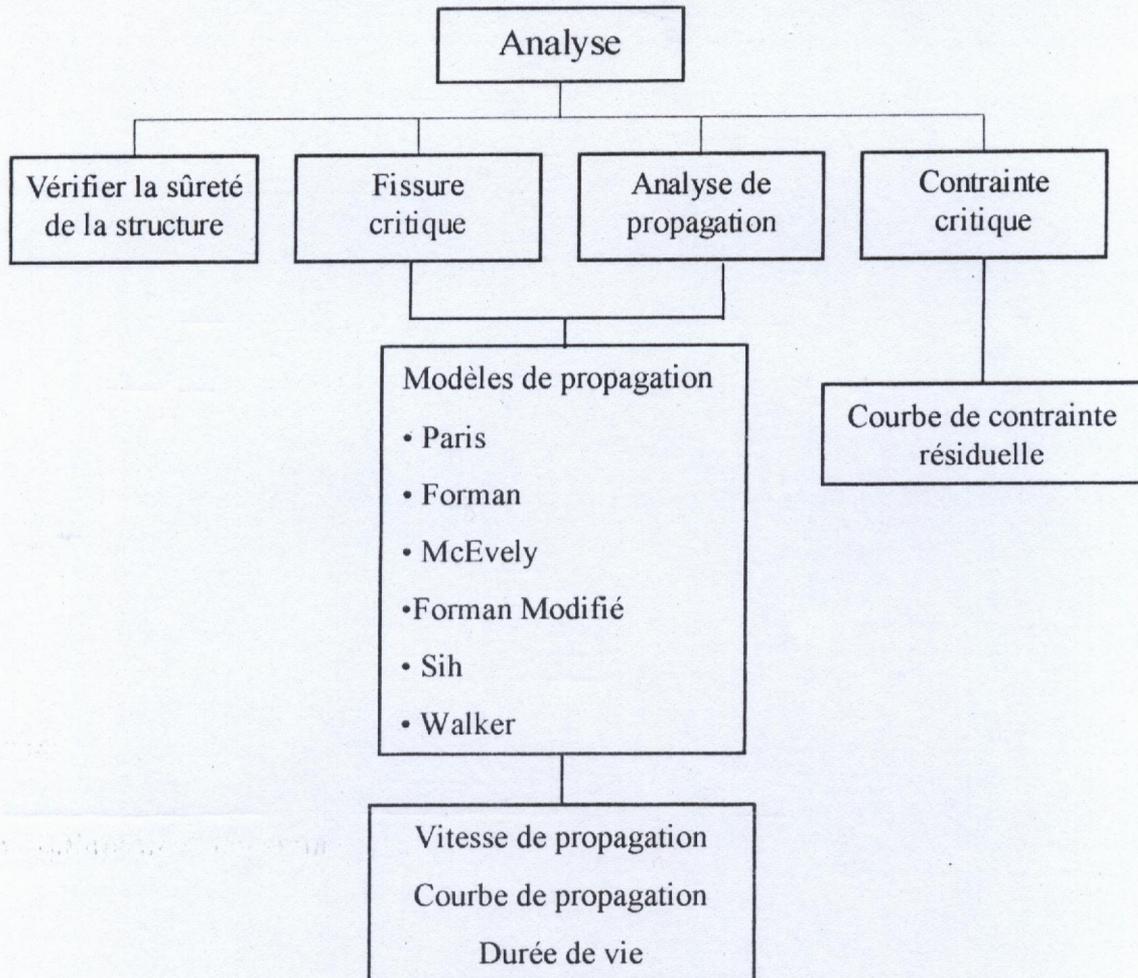
*Ucritère* : contient les fonctions et les procédures relatives aux critères de rupture

*Umatériau* : contient les fonctions et les procédures concernant le choix du matériau

*UdureeVie* : contient les fonctions et les procédures de calcul de la durée de vie

### V.4 OPTIMISATION ET MODIFICATION DU PROGRAMME :

La construction modulaire du programme rend la modification simple et rapide.

**V.5 ORGANIGRAMMES :****V.5.1 Options du programme :***Fig.5.1 Options du programme*

V.5.2 Choix du modèle de structure fissurée :

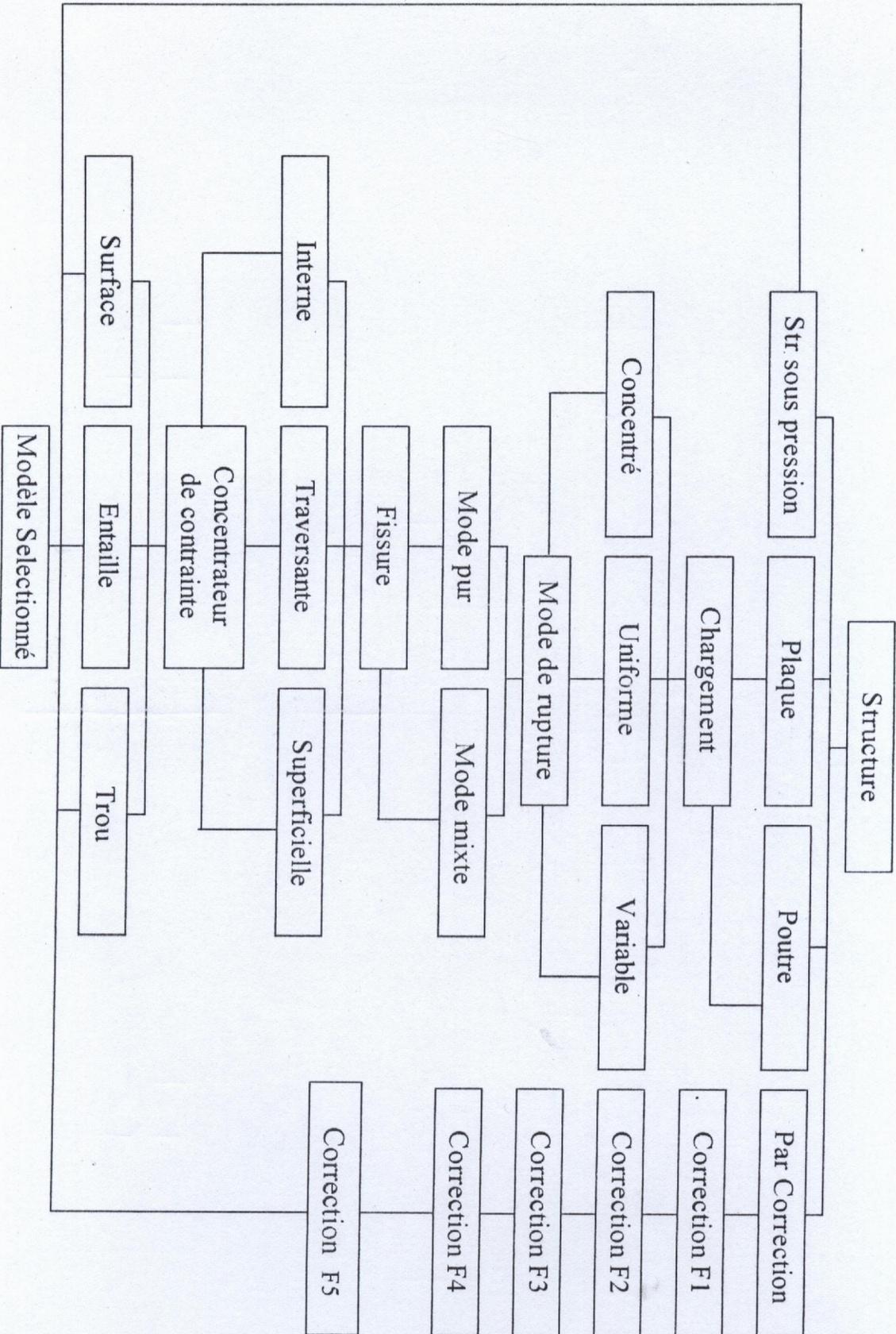
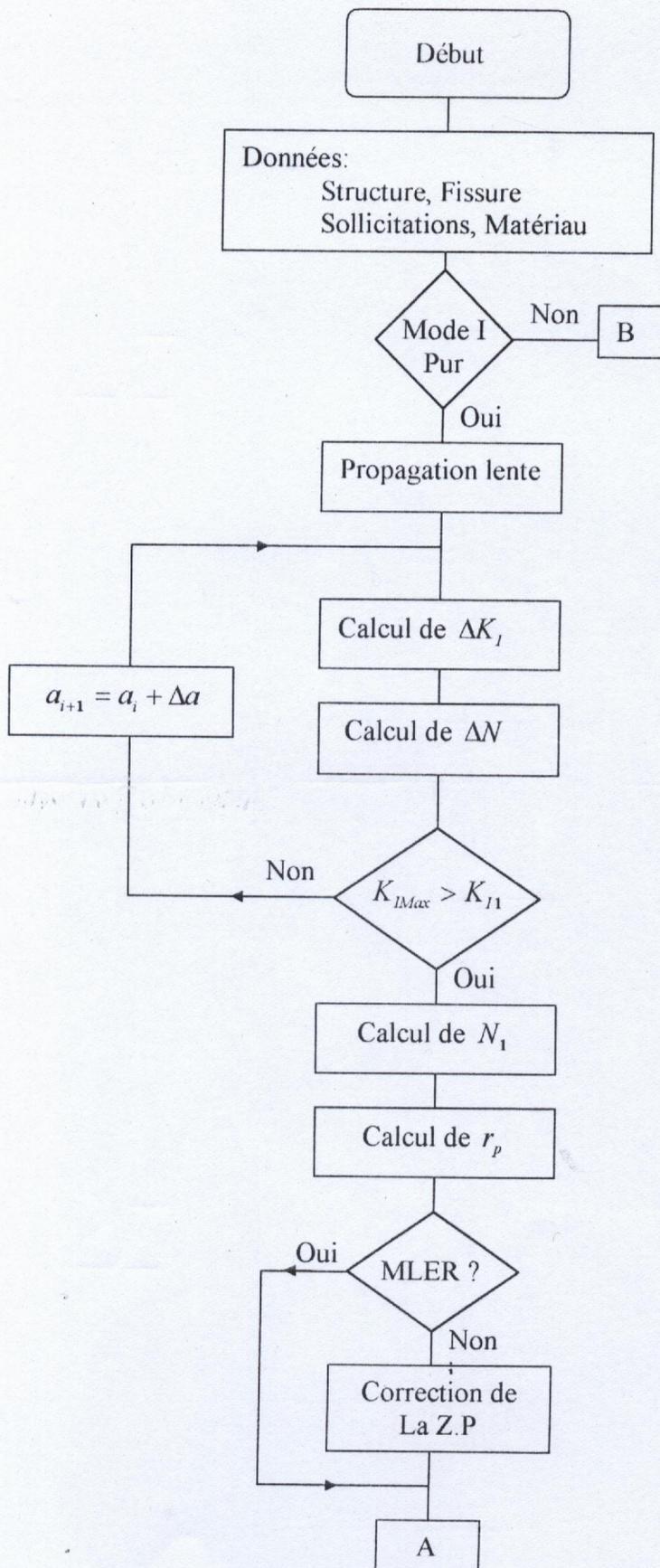
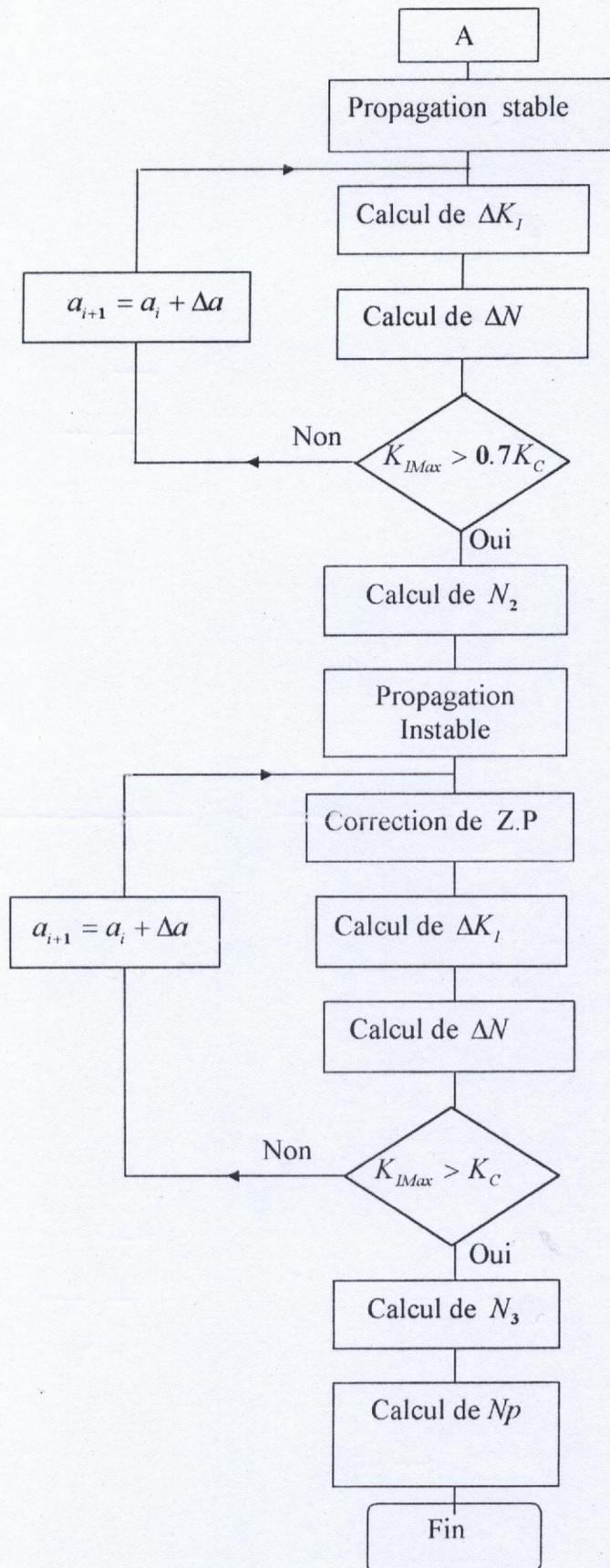


Fig. 5.2 Choix du modèle de structure fissurée

V.5.3 Analyse de propagation



(à suivre)



(à Suivre)

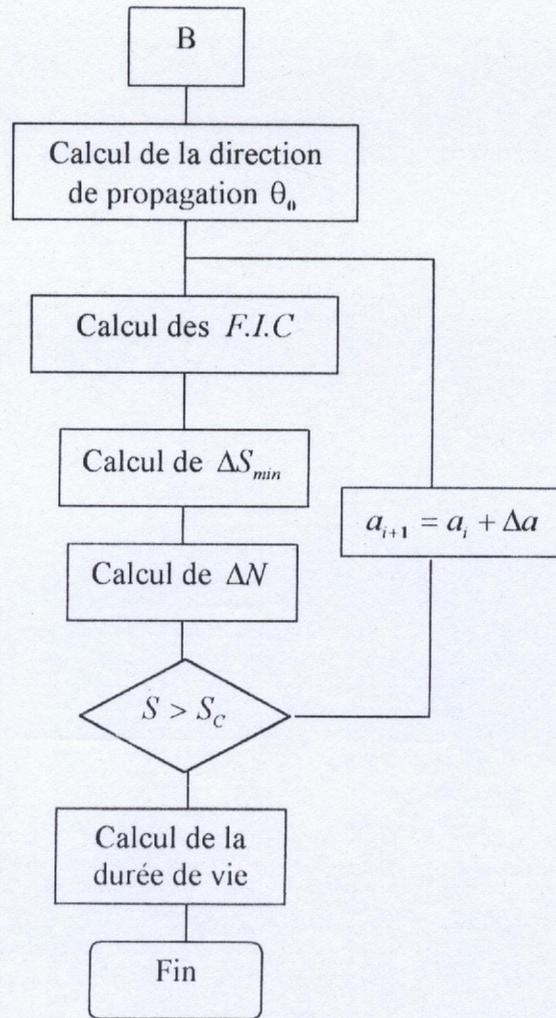


Fig.5.3 Analyse de propagation

V.5.4 Durée de vie :

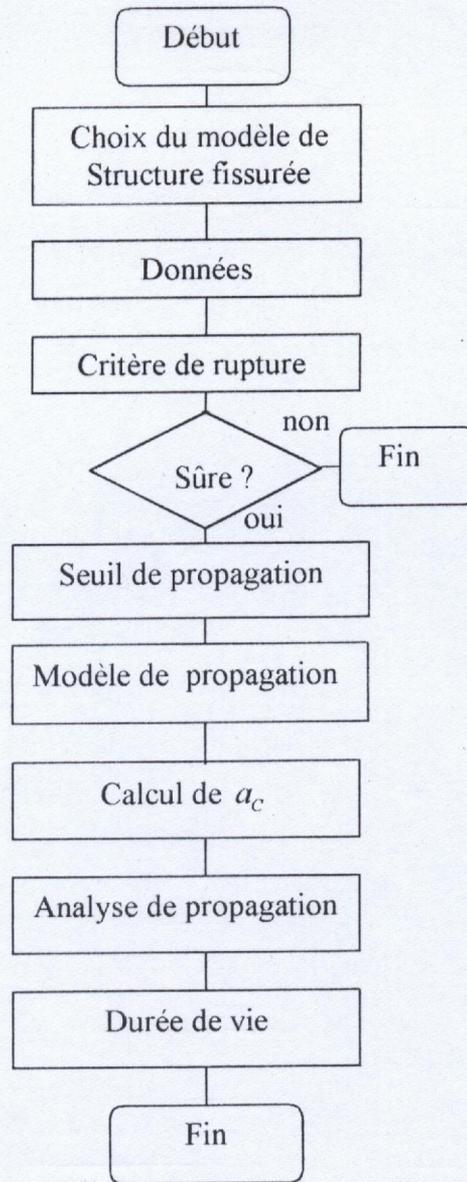


Fig.5.4 Durée de vie

## V.6 IMPLEMENTATION DE L'INTERFACE GRAPHIQUE :

Le programme est constitué de plusieurs fiches, exposons les plus importantes.

### V.6.1 MENU PRINCIPAL :

La forme générale du programme est simple et conversationnelle. Le menu principal du programme est représenté dans la figure 5.5, à partir duquel les différentes options d'analyse (Fig. 5.1) sont exécutées.

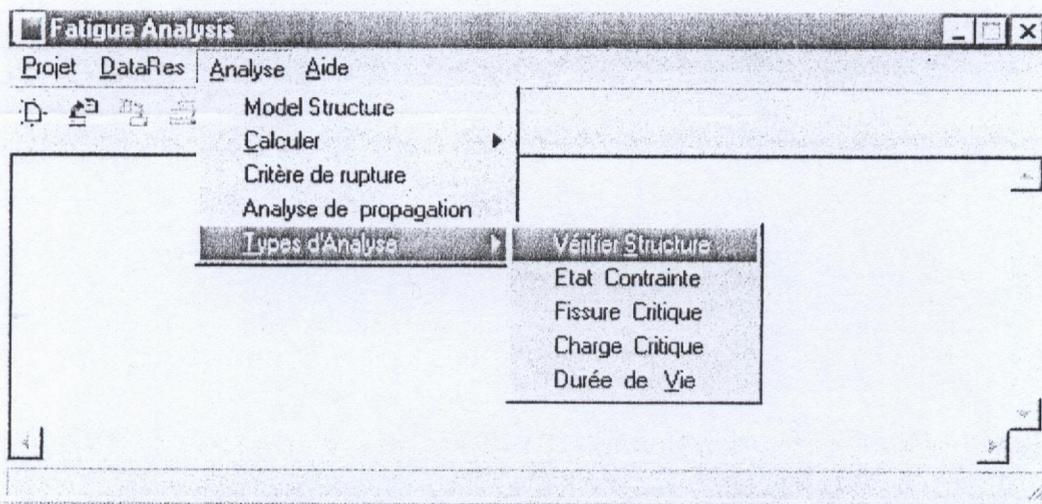


Fig.5.5 Menu principale

Le menu *Projet* est utilisé pour le chargement d'un fichier de résultats existant, l'enregistrement des résultats d'analyse sous un fichier, l'impression du fichier résultats et la sortie du programme. La sélection des données se fait à l'aide du menu *DataRes* et des boites de dialogues. Les calculs et l'analyse se font à l'aide du menu *Analyse* et ses sous menus et des boites de dialogues faites pour cet objectif. Les résultats sont restitués dans des fichiers résultats.

Une barre d'outil est incluse pour faciliter l'accès à certains sous menus.

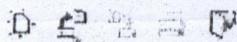


Fig.5.6 Barre d'outils

### V.6.2 MODELE DE STRUCTURE FISSUREE :

Le choix du modèle de structure fissurée se fait de deux façons :

V.6.2.1 Approche par modèle :

A partir d'une fiche de plusieurs pages se fait la sélection des paramètres de choix d'un modèle d'une structure fissurée (Fig.5.7). Selon les paramètres choisis une liste des modèles s'affiche, en sélectionnant un modèle de la liste une visualisation graphique du modèle est représentée (Fig.5.8). A la fin le modèle le plus proche du problème réel est sélectionné.

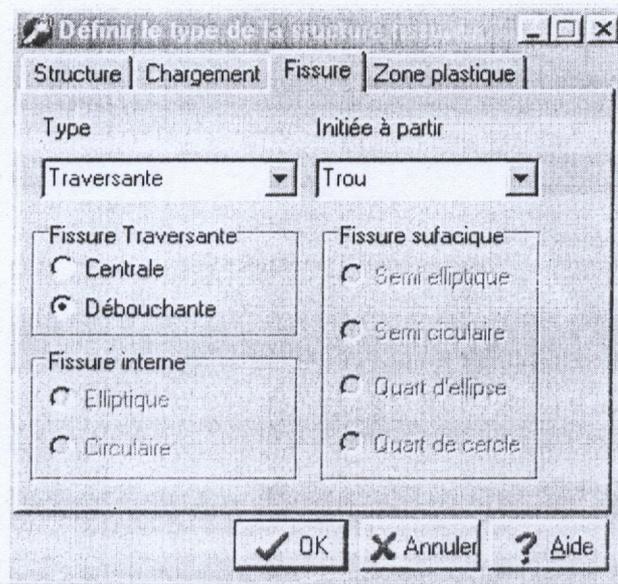


Fig.5.7 Sélection des paramètres de la structure fissurée

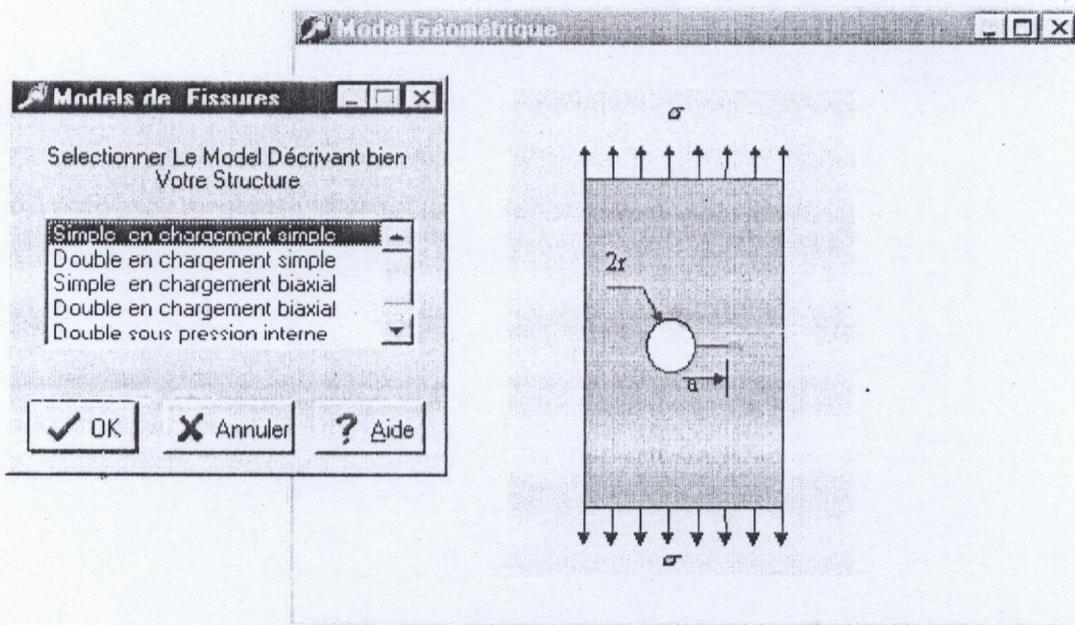


Fig.5.8 Sélection du modèle de la structure fissurée

**V.6.2.2 Approche par correction :**

Dans ce cas on applique plusieurs facteurs de correction en sélectionnant les paramètres liés à chaque facteur à l'aide de la fiche *CorrectionFiche* (Fig.5.9, Fig.5.10).

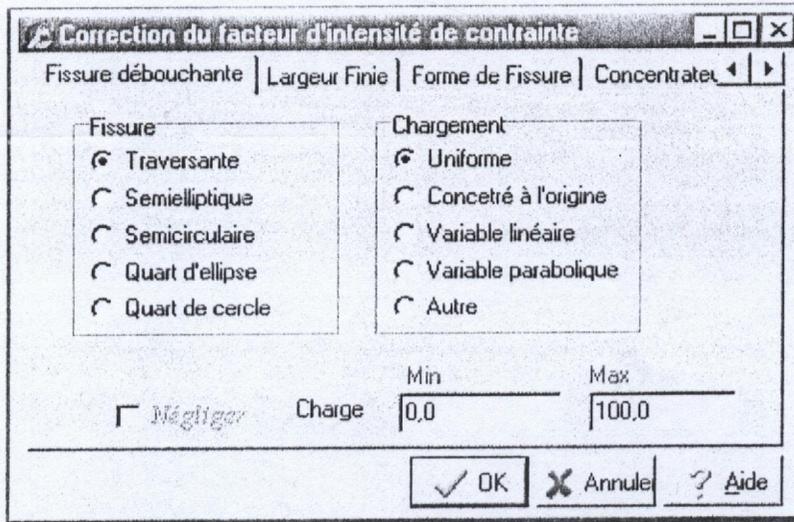


Fig.5.9 Approche par correction

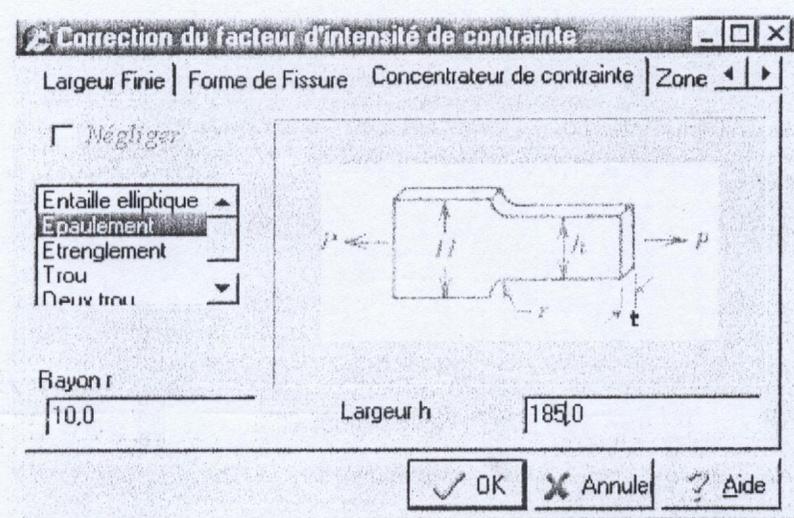


Fig.5.10 Approche par correction : sélection du type de concentrateur de contrainte

**V.6.3 INTRODUCTION DES DONNEES :**

Après le choix du modèle, une boîte de dialogue s'affiche pour la saisie des données de la structure et de la fissure (Fig.5.11). Les chargements sont introduits par une autre fiche. La consultation et la modification sont possible en double cliquant sur l'image du modèle.

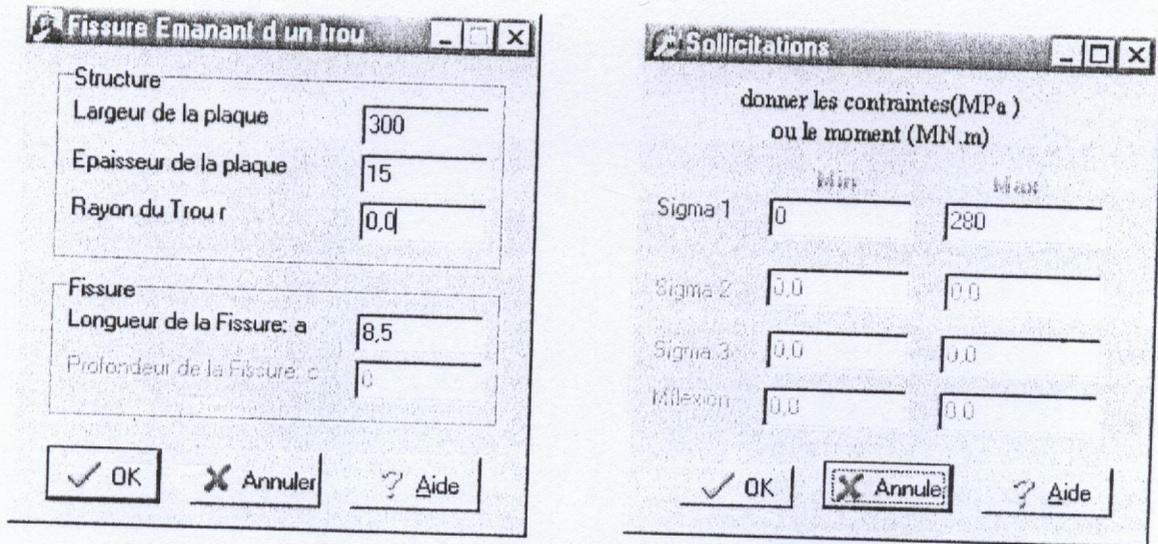


Fig.5.11 Introduction des données

V.6.4 MATERIAU :

Les propriétés du matériau sont introduites ou chargées à partir d'une bibliothèque à l'aide de la fiche *MatériauFiche* (Fig.5.12). Cette fiche est constituée de deux pages, l'une pour la saisie des données et l'autre pour la recherche.

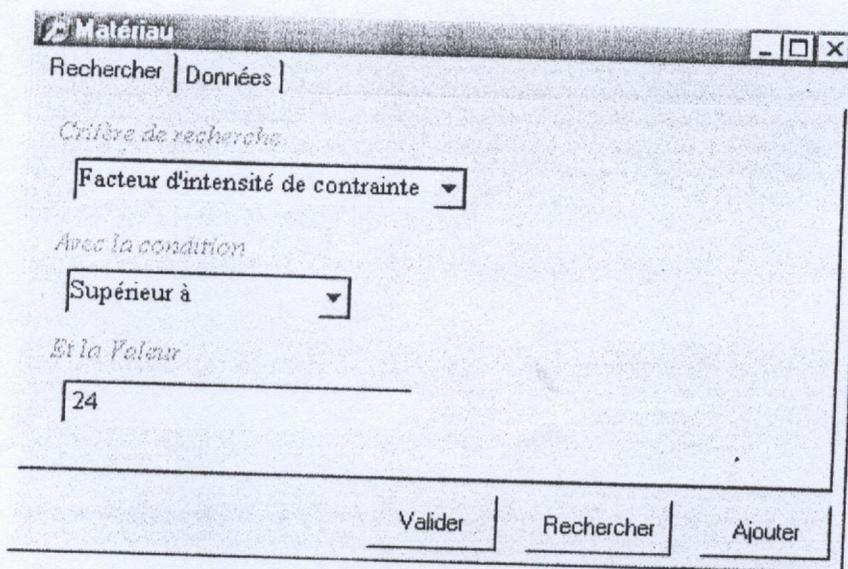


Fig.5.12 Recherche d'un matériau dans la table de données

Une bibliothèque de données des propriétés de plusieurs matériaux est réalisée telle qu'on peut rechercher un matériau par un critère de recherche et une condition, par exemple, si on recherche un matériau avec une ténacité supérieure à  $24MPa\sqrt{m}$  tous les matériaux qui répondent à cette

condition s'affichent dans une table de données (Fig.5.13). En double cliquant sur un matériau sélectionné les données se chargent dans la page des données (Fig.5.14).

Désignation	Type	Etat	Sy	KIC	Nu poisson	E
4340	Acier	Recuit 425°C Forgé L-T	1455	85	0,25	20
30CD2-B	Acier	900° 307Eau + 2h 320° / Air	1252	106	0,25	20
4340	Acier	Recuit 260°C Laminé L-T	1640	55	0,25	20
2024-T651	Al		455	26,4	0,33	7
2014-T651	Al		455	24,2	0,33	7
7075-T651	Al		495	24,2	0,33	7
350 Maraging	Acier		1550	55	0,25	20

Buttons:  Charger,  Annuler, ? Aide

Fig 5.13 Table de données des propriétés des matériaux

Rechercher Données

**Traction**

Limite d'élasticité: 1455      Contr de rupture: 1850

Modul de Young: 206850      Coef de poisson: 0,25

**MDR**

KIC: 85      JIC: 126

Delta Kth0: 4,5      Scrit: 931

**Fatigue**

Limite d'endurance: 735      C de Paris: 1,35E-10

m de Paris: 2,25

Buttons: Valider, Rechercher, Ajouter

Fig.5.14 Introduire ou charger les données

Plusieurs critères et conditions de recherche sont incorporés. L'ajout, la suppression et la modification sont possible pour l'enrichissement et la mise à jour.

### V.6.5 CHOIX D'UN CRITERE DE RUPTURE :

Après la sélection de la structure fissurée et l'introduction des données concernant la structure, le chargement, la fissure initiale et le matériau, il faut sélectionner le critère de rupture.

A partir de la fiche *CritèreFiche* (Fig.5.15) contenant plusieurs critères de ruptures en *mode I* pur ou en *mode mixte* le critère de rupture est choisi.

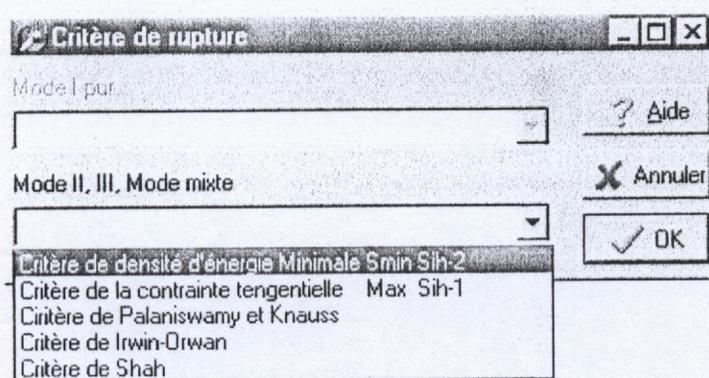


Fig.5.15 Choix du critère de rupture

A partir de ce critère la sûreté de la structure est testée. Si la structure est sûre on peut passer au calcul des paramètres de la rupture et l'analyse de propagation.

### V.6.6 CALCUL NUMERIQUE :

Pour éviter les erreurs de calcul la fiche *NumeriqueFiche* est réalisée pour le contrôle de la résolution des équations non-linéaires (Fig.5.16).

### V.6.7 ANALYSE DE PROPAGATION :

Après les calculs, l'analyse de propagation se fait à l'aide d'une fiche (Fig.5.17) à partir de laquelle on choisit la relation du seuil de propagation et le modèle de propagation à utiliser en donnant les constantes du modèle. Les résultats peuvent être enregistrés dans des fichiers externes.



**Résolution Numériques des équations**

Calcul de

CALCUL DE LA LONGUEUR CRITIQUE DE LA FISSURE

Intervalle: [0,02038 , 0,02051]

Erreur min: 1e-5      N de points: 1000

	Méthode Numérique	Erreur	N itération
DICHOTOMIE	0,02042	7,858E-006	5
SECANT	0,02043	5,485E-009	2

Solution adaptée:  
 DICHOTOMIE  
 SECANT

0,045904	0,046030	0,028197	0,028341	7,910E-04	2,071E-08
0,046030	0,046156	0,028341	0,028485	7,991E-04	2,072E-08
0,046156	0,046281	0,028485	0,028629	8,073E-04	2,073E-08
0,046281	0,046407	0,028629	0,028773	8,155E-04	2,075E-08
0,046407	0,046533	0,028773	0,028917	8,237E-04	2,076E-08
0,046533	0,046659	0,028917	0,029061	8,320E-04	2,077E-08
0,046659	0,046784	0,029061	0,029205	8,404E-04	2,078E-08
0,046784	0,046910	0,029205	0,029350	8,487E-04	2,080E-08
0,046910	0,047036	0,029350	0,029494	8,572E-04	2,081E-08

Racine 1

Calculer      Localiser les racines      Fermer

Fig.5.16 Calcul Numérique

**Analyse de propagation**

Seuil de propagation: Klesnil et Lukas

Unité:  SI       ANG

Constantes de propagation: Plus

Constante C: 1,35E-10

Constante m: 2,25

Constante n: 0,0

Constante p: 0,0

Constante q: 0,0

Modèle de propagation: Mode I pur      Mode 2,3, mixte

Par Défaut      Sih

Paris et Erdogan      Broek

Forman      Delta G

RH6 ( Proche Seuil)

Forman modifié

Walker

Sperr

0.01985	0.01994	3.27719E-006	20570.100	0.01847	6049.900
0.01994	0.02004	3.29607E-006	20599.100	0.00322	11277.700
0.02004	0.02013	3.31497E-006	20628.000	0.01588	12475.500
0.02013	0.02023	3.33390E-006	20656.700	0.00581	16257.800
0.02023	0.02032	3.35287E-006	20685.300	0.01260	18068.800
0.02032	0.02042	3.37186E-006	20713.700	0.00909	20702.200

N = Simpson : 20713.7000      Gauss : 20702.2000 Paris

Enregistrer sous       OK       Annuler      ? Aide

Fig.5.17 Fiche d'analyse de propagation

### V.6.8 EXPERTISE DES RUPTURES PAR FATIGUE :

Pour des extensions futures nous avons relié le générateur des *Systèmes Experts CLIPS6.1* de la *NASA* avec notre application (Fig.5.18).

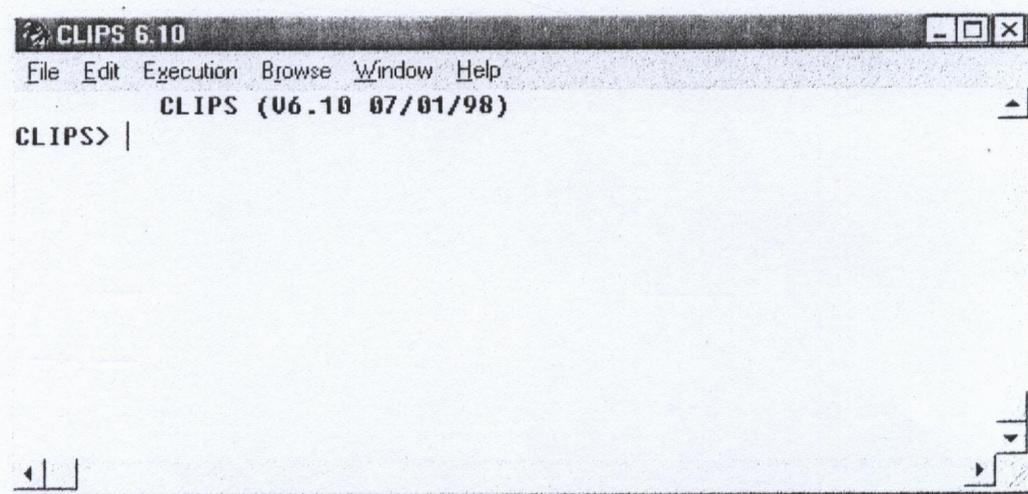


Fig.5.18 Générateur des Systèmes Experts CLIPS6.1  
de la NASA

## VI APPLICATIONS ET DISCUSSION :

Afin d'étudier l'influence de certains paramètres liés à la structure, à la fissure, à la sollicitation et au matériau sur les paramètres de la rupture, nous avons utilisé les données du tableau 5.1 et quelques modèles de structures fissurées données en *Annexe C*. Ces derniers ont été choisis sur la base de la disponibilité d'autres résultats de recherches permettant une comparaison. Une confrontation avec nos résultats devrait permettre une validation de ces derniers. Considérons une plaque de largeur finie avec les données du tableau 5.1 :

Dimensions	Chargement	Matériau
$b = 254 \text{ mm}$ $t = 6,35 \text{ mm}$ $a = 1,27 \text{ mm}$	$\sigma_{\max} = 345 \text{ MPa}$ $R=0$	Acier 4340 $K_{Ic} = 79 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , $\sigma_y = 1455 \text{ MPa}$ ; $\nu = 0.25$ $C = 1.35e^{-10} \frac{m}{\text{cycles}} (\text{MPa}\sqrt{m})^{-2.25}$ ; $n = 2.25$ (Paris) $E = 206850 \text{ MPa}$

Tab 5.1 Données relatives à la plaque fissurée [35].

Selon l'analyse faite par notre programme *Fatigue Analysis*, l'influence de la taille initiale de la fissure sur les paramètres de la rupture est donnée dans le tableau ci-après :

Type de fissure	$a_i$	$a_c$	$\sigma_c$	$N$
Fissure centrale Fig.C.2	$a_i = 1.27$	20.42	345.05	20667
	2. $a_i$	20.42	346.64	14788
	3. $a_i$	20.43	344.93	11581
	4. $a_i$	20.43	346.45	9399
Fissure débouchante Fig.C.3	$a_i = 1.27$	15.64	345.04	14344
	2. $a_i$	15.64	346.55	9863
	3. $a_i$	15.64	346.39	7426
	4. $a_i$	15.64	346.28	5776
Fissure doublement débouchante Fig.C.4	$a_i = 1.27$	16.65	346.58	14921
	2. $a_i$	16.64	346.50	10418
	3. $a_i$	16.64	345.00	7960
	4. $a_i$	16.64	345.06	6288

Tab 5.2 Influence de la taille initiale de la fissure sur les paramètres de la rupture.

Nous remarquons d'après ces résultats que la taille initiale de la fissure n'a pas un effet remarquable sur la taille critique de la fissure et la contrainte critique résiduelle. Cependant la durée de vie diminue considérablement avec l'augmentation de la taille initiale de la fissure. Cette tendance est constatée quel que soit le type de fissure. Ceci peut être interprété par le fait que les fissures de petites tailles progressent avec des faibles vitesses, alors que la vitesse de propagation devient plus importante pour des fissures de grandes tailles en cas d'un chargement à amplitude constante. Ceci a été mis en évidence expérimentalement par plusieurs chercheurs [19,21,29]. Pour améliorer la durée de vie sans imposer des limites de conception (structure, chargement) on peut agir sur les caractéristiques du matériau ou les dimensions initiales des fissures. Puisque l'augmentation de la ténacité du matériau peut réduire la résistance [5,14], il est recommandé d'améliorer les techniques d'inspection afin de réduire la taille initiale de la fissure. L'influence de l'épaisseur est donnée dans le tableau suivant :

Type de fissure	$t$ mm	$a_c$	$\sigma_c$	$N$
Fissure centrale Fig.C.2	$t=6.35$	20.42	345.05	20667
	2.t	16.90	345.00	19356
	3.t	16.26	346.74	19115
	4.t	16.04	345.04	19030
Fissure débouchante Fig.C.3	$T=6.35$	15.64	345.04	14344
	2.t	13.11	346.61	13514
	3.t	12.62	346.75	13330
	4.t	12.46	346.60	13269
Fissure doublement débouchante Fig.C.4	$t=6.35$	16.64	346.58	14921
	2.t	13.76	346.57	13972
	3.t	13.22	346.54	13772
	4.t	13.03	344.99	13699

Tab 5.3 Influence de l'épaisseur de la pièce sur les paramètres de la rupture.

A partir des résultats présentés dans le tableau 5.3 on note que la longueur critique de la fissure et la durée de propagation diminue progressivement avec l'augmentation de l'épaisseur de la pièce. La contrainte critique cependant, n'est que faiblement affectée par l'épaisseur. Ceci est interprété par le fait que l'épaisseur est directement liée à la ténacité du matériau par le fait que la distribution des défauts dans une section épaisse est plus importante que celle que l'on trouve dans une section mince, et surtout, du fait de la triaxialité des contraintes qui augmente avec l'augmentation de l'épaisseur.

Le tableau 5.4 présente les résultats de calcul pour quatre modèles de structures fissurées selon l'état de contrainte.

	<i>STR 2 (Fig C.2)</i>	<i>STR3 (Fig C.3)</i>	<i>Str4 (Fig C.4)</i>	<i>Str5 (Fig C.12)</i>
<i>Etat de C.P</i>	<i>ac=20.43 mm</i> <i>N=20662 Cycles</i>	<i>ac=15.64 mm</i> <i>N=14344 Cycles</i>	<i>ac=16.61 mm</i> <i>N=14921 Cycles</i>	<i>ac=18.95 mm</i> <i>N=16436 Cycles</i>
<i>Etat de D.P</i>	<i>ac=15.75 mm</i> <i>N=18919 Cycles</i>	<i>ac=12.24 mm</i> <i>N=13183 Cycles</i>	<i>ac=12.80 mm</i> <i>N=13607 Cycles</i>	<i>ac=14.21 mm</i> <i>N=14819 Cycles</i>

Tab5.4 Résultats de calcul pour quatre modèles de structures fissurées.

D'après les résultats du tableau 5.4 et la figure 5.33 on remarque qu'en état de contrainte plane la longueur critique de la fissure, la charge critique et la durée de vie sont beaucoup mieux que ceux en condition de déformation plane. Ceci est dû essentiellement à l'effet néfaste de la triaxialité de contrainte en état de *D.P*, tel que le matériau se trouve très contraint, alors qu'en état de *C.P* le matériau est libre à se déplacer suivant l'épaisseur ce qui crée une certaine plasticité autour de la fissure. Par conséquent la ténacité du matériau s'en trouve améliorée [17,18,19]. Il est alors conseillé d'assurer l'état de contrainte plane durant la conception de la pièce afin d'améliorer la fiabilité de la structure en service.

Considérons les structures des figures C.7 avec les mêmes données du tableau 5.1 et avec un trou de rayon  $R=5\text{ mm}$ , les résultats de calcul sont présentés dans le tableau 5.5.

<i>Chargement</i>	<i>Paramètres</i>	<i>Fissure simple</i>	<i>Fissure double</i>
<i>Uni-axial</i> <i>FigC7.1 ,FigC7.3</i>	<i>ac</i>	30.32	17.28
	$\sigma_c$	346.23	346.20
	<i>N</i>	15355	8117
<i>Bi-axial</i> <i>FigC7.2 ,FigC7.4</i>	<i>ac</i>	30.84	17.39
	$\sigma_c$	346.37	345.02
	<i>N</i>	17758	8677

Tab 5.5 Influence du type de chargement sur les paramètres de la rupture

Selon les résultats du tableau 5.5 et les courbes des figures 5.27 et 5.34 on constate que les paramètres de la rupture en cas d'un chargement bi-axial sont mieux que ceux d'un chargement uni-axial. Cela est dû au fait qu'en cas d'un chargement bi-axial la fissure a tendance à se fermer

sous l'effet de la contrainte parallèle aux surfaces de la fissure, en conséquence l'intensité des contraintes au fond de fissure traduit par la valeur du  $F.I.C.$  (Fig5. 22) est réduite. Par suite, les paramètres de la rupture sont améliorés.

Nous constatons d'après les résultats présentés dans le tableau 5.4 que les paramètres de la rupture en cas d'une fissure centrale sont mieux qu'en cas d'une fissure débouchante où le  $F.I.C.$  est plus important (Fig5.19), ceci est bien schématisé dans les figures 5.25 et 5.35. Ceci peut être dû à l'effet exercé par la surface libre sur la fissure débouchante, tel qu'elle est beaucoup plus ouverte durant le cycle de chargement qu'une fissure centrale. En comparant avec une fissure doublement débouchante, on remarque que ces paramètres en cas d'une fissure simplement débouchante sont un peu inférieurs. Ceci est dû à l'effet introduit par la flexion de la fissure par manque de symétrie, par conséquent le  $F.I.C.$  est amplifié (Fig5.21). Cette tendance aura lieu avec l'augmentation de la longueur de la fissure où l'effet de la flexion se superpose à la traction. Lorsque la plaque est sollicitée en flexion pure (Fig.C.12) nous remarquons d'après la figure 5.20 que le  $F.I.C.$  est moins important qu'en traction, par conséquent les paramètres de la rupture sont mieux (Tab 5.4, Fig.5.28). A partir de la figure 5.30 on note que le nombre de cycles à la rupture augmente avec l'augmentation du rapport  $R$ , Cette tendance peut être interprétée par le fait que le pourcentage du cycle où la fissure est fermée (pas de propagation) augmente avec le rapport  $R$ . Cela a été remarqué expérimentalement par plusieurs chercheurs [ 19,26,29].

L'augmentation de la charge maximale appliquée entraîne une réduction considérable de la durée de vie, cela est illustré dans la figure 5.29. Selon les Fig.5.23 et Fig.5.24 on constate que le  $F.I.C.$  s'amplifie avec l'augmentation de la profondeur d'entaille ou la diminution du rayon d'entaille où la fissure devienne plus tranchante ce qui réduit considérablement les paramètres de la rupture (Fig.5.31, Fig.5.32, Fig5.37, Fig5.38) du fait de la concentration de contrainte créée autour du fond de fissure. Nous signalons que dans tous les cas traités que la contrainte maximale autorisée prend ses valeurs maximales pour des fissures de petites tailles, puis elle décroît rapidement avec l'augmentation de la longueur de fissure.

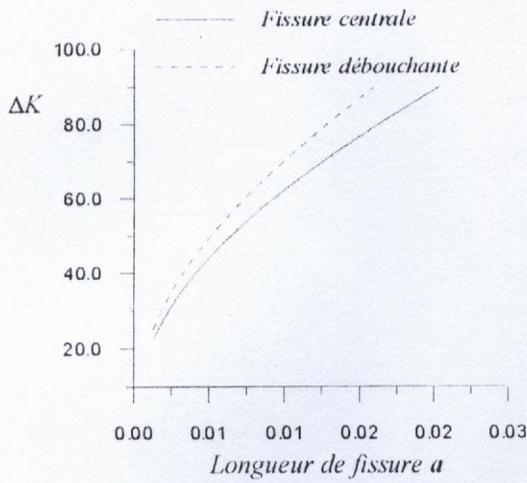


Fig.5.19 Influence de la surface libre sur l'amplitude du F.I.C

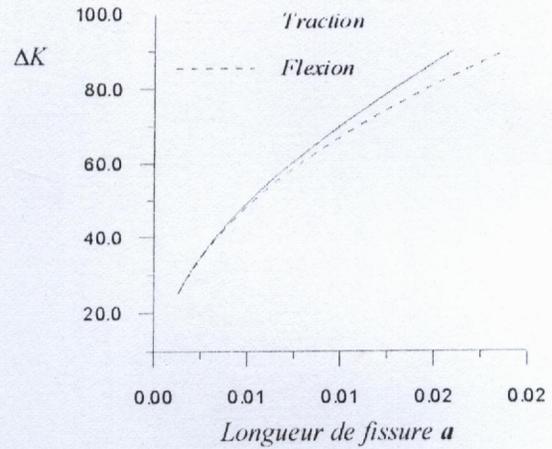


Fig5.20 Influence du type de sollicitation l'amplitude du F.I.C

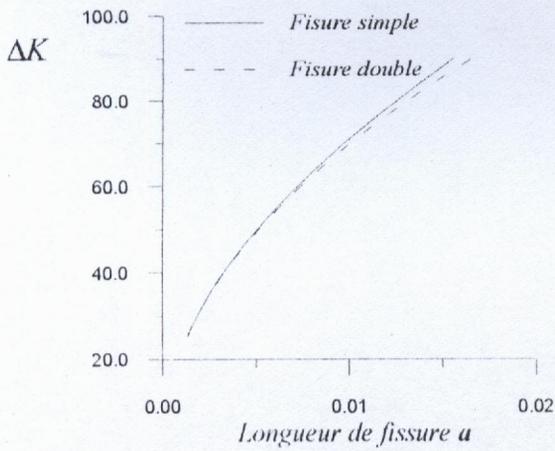


Fig.5.21 Influence du bord de la fissure sur l'amplitude du F.I.C

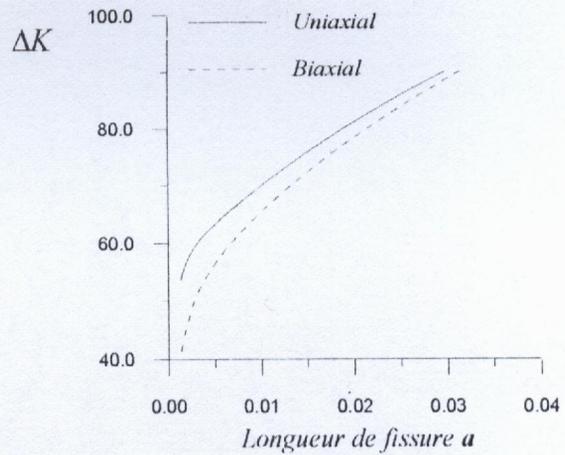


Fig.5.22 Influence du l'état de chargement sur l'amplitude du F.I.C

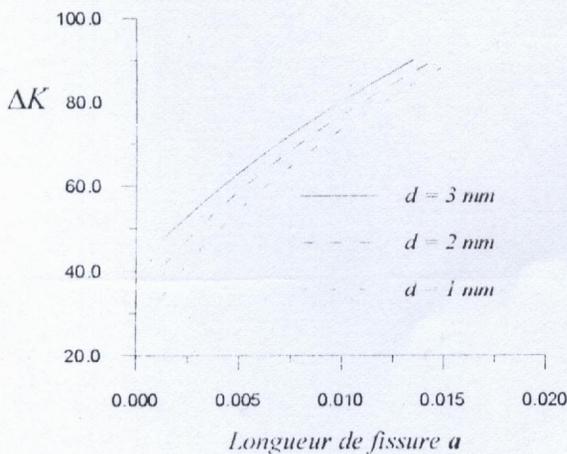


Fig.5.23 Influence de la profondeur d'entaille sur l'amplitude du F.I.C

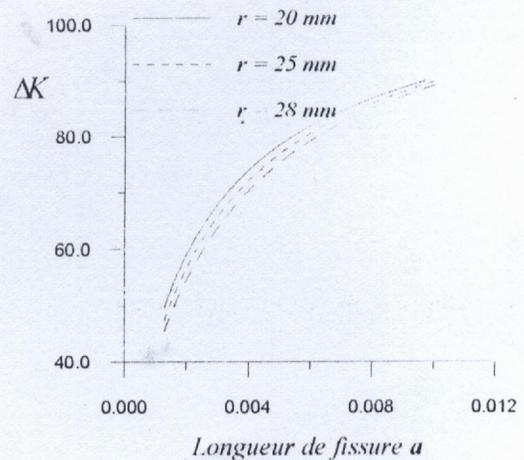


Fig.5.24 Influence du rayon d'entaille sur l'amplitude du F.I.C

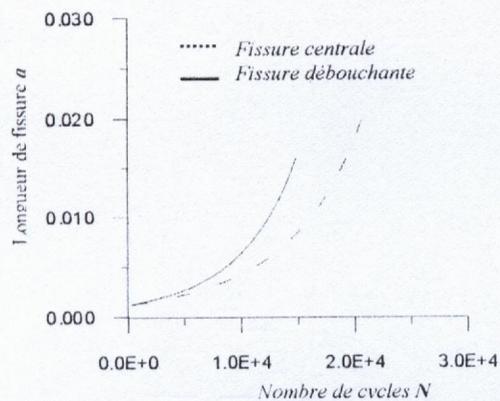


Fig.5.25 Influence du type de fissure sur le nombre de cycles à la rupture

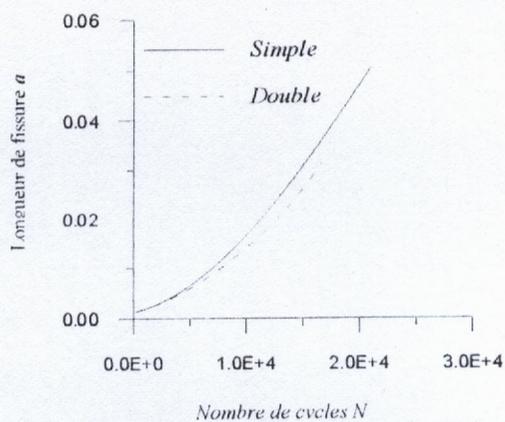


Fig.5.26 Influence du type de sollicitation sur le nombre de cycles à la rupture

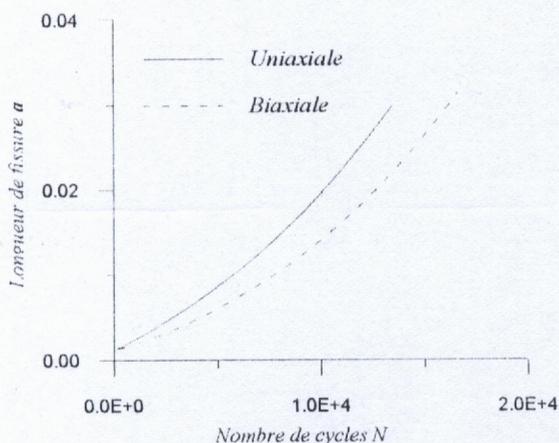


Fig.5.27 Influence de l'état du chargement sur le nombre de cycles à la rupture

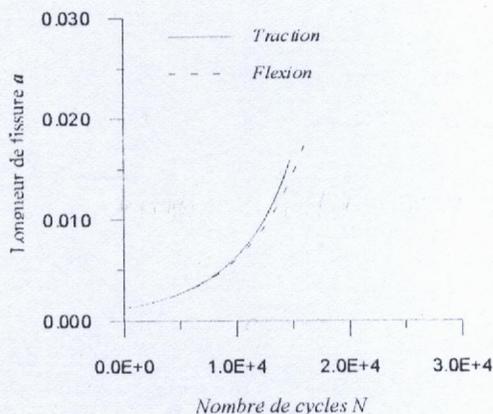


Fig.5.28 Influence du type de sollicitation sur le nombre de cycles à la rupture

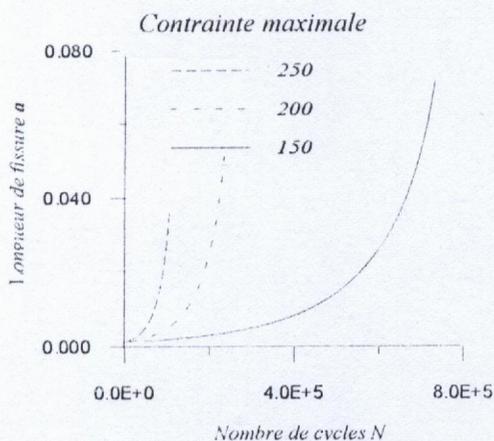


Fig.5.29 Influence de la contrainte maximale sur le nombre de cycles à la rupture

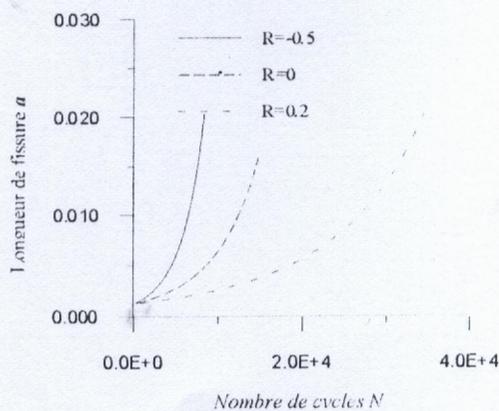


Fig.5.30 Influence du rapport R sur le nombre de cycles à la rupture

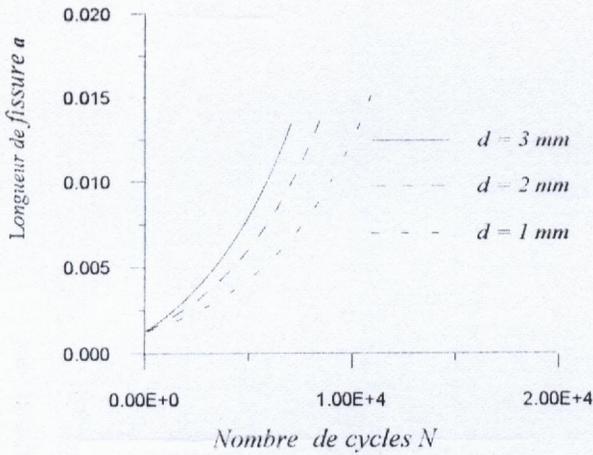


Fig.5.31 Influence de la profondeur d'entaille sur la durée de vie

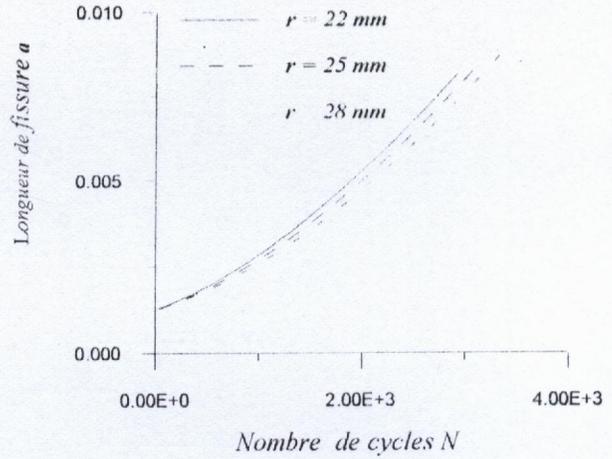


Fig.5.32 Influence du rayon d'entaille sur la durée de vie

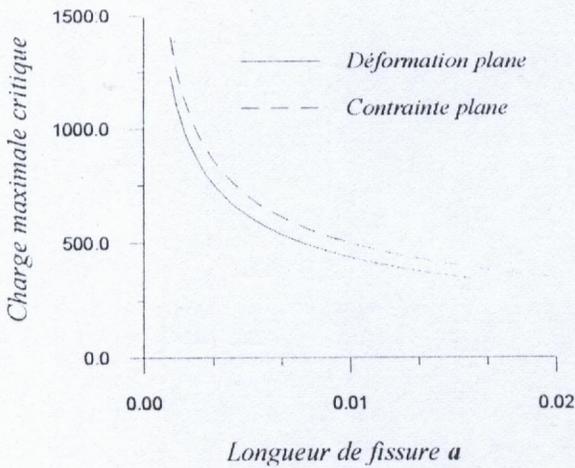


Fig.5.33 Influence de l'état de contrainte sur la charge maximale critique

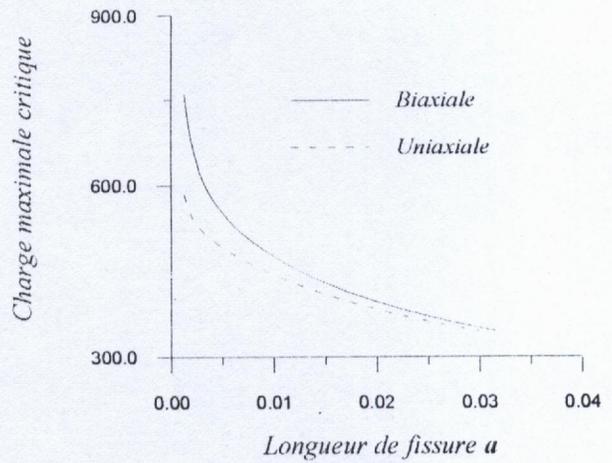


Fig.5.34 Influence de la nature du chargement sur la charge maximale critique

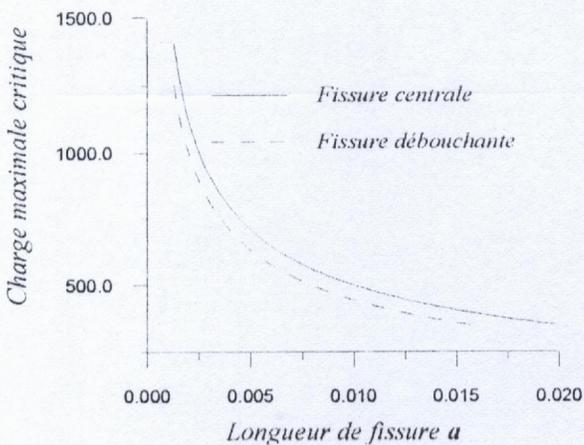


Fig.5.35 Influence de la surface libre sur la charge maximale critique

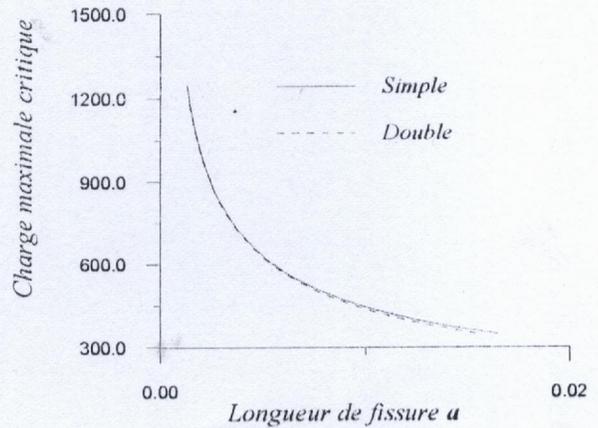


Fig.5.36 Effet du bord de fissure sur la charge maximale critique

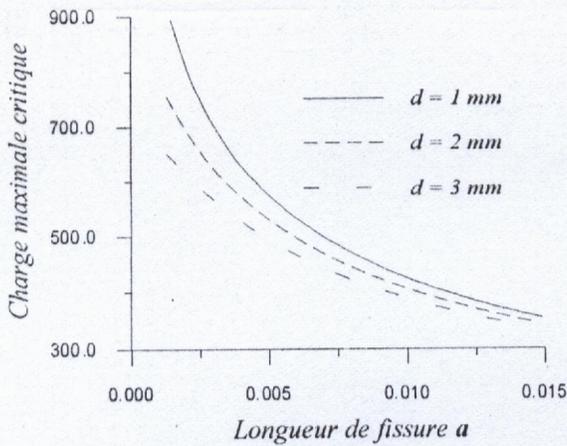


Fig.5.37 Influence de la profondeur d'entaille sur la charge maximale critique

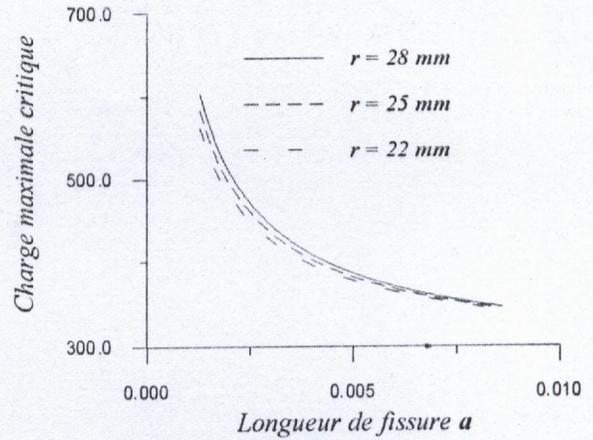


Fig.5.38 Influence du rayon d'entaille sur la charge maximale critique

Les tableaux comparatifs 5.7 à 5.9 présentent les résultats de calcul concernant la longueur critique de la fissure, le  $F.I.C$  maximale  $K_{max}$  et le nombre de cycles de propagation  $N$  calculés par notre programme "FatigueAnalysis" et par les codes de calcul NASCRAC et NASA/FLAGRO [34,35] pour trois modèles de plaques fissurées proposés avec les données du tableau5.1. Les résultats de calcul pour une fissure centrale dans une plaque finie déterminés par *Fatigue Analysis* et selon quatre modèles sont présentés dans le tableau5.6.

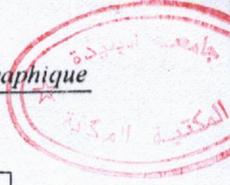
Modèle	$a_c$ (mm)	$K_{max}$	$N$ Cycles
Irwin	20.64	90.042	20773
Federsen	20.43	90.30	20667
Brown	20.29	90.033	20471
Dixon	20.55	90.042	20757

Tab 5.6 Résultats de calcul par *Fatigue Analysis* pour une fissure centrale.

Présentons les tableaux comparatifs :

NASA/FLAGRO	NASCRAC	Fatigue Analysis	Modèle
$a_c = 20.11$ mm $K_{max} = 88.09$ MPa $\sqrt{m}$ $N = 20173$ Cycles	$a_c = 20.32$ mm $K_{max} = 87.98$ MPa $\sqrt{m}$ $N = 20171$ Cycles	$20.29 \leq a_c \leq 20.42$ mm $90.030 \leq K_{max} \leq 90.042$ $20471 \leq N \leq 20667$ Cycles	

Tab5.7 Comparaison des résultats de calcul pour une fissure centrale.



NASA/FLAGRO	NASCRAC	Fatigue Analysis	Modèle
$a_c = 15.49 \text{ mm}$ $K_{\max} = 87.98 \text{ MPa}\sqrt{m}$ —	$a_c = 16.63 \text{ mm}$ $K_{\max} = 91.52 \text{ MPa}\sqrt{m}$ —	$a_c = 16.03 \text{ mm}$ $K_{\max} = 90.04 \text{ MPa}\sqrt{m}$ $N = 14344 \text{ Cycles}$	

Tab5.8 Comparaison des résultats de calcul Pour une fissure débouchante en traction

NASA/FLAGRO	NASCRAC	Fatigue Analysis	Modèle
$a_c = 18.542 \text{ mm}$ $K_{\max} = 88.02 \text{ MPa}\sqrt{m}$ —	$a_c = 18.31 \text{ mm}$ $K_{\max} = 89.48 \text{ MPa}\sqrt{m}$ —	$a_c = 18.95 \text{ mm}$ $K_{\max} = 90.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$ $N = 16436 \text{ Cycles}$	

Tab5.9 Comparaison des résultats de calcul pour une fissure débouchante en flexion

D'après les résultats de calcul présentés dans les tableaux 5.7 à 5.9 on peut dire que les résultats déterminés par *FatigueAnalysis* sont très proches de ceux obtenus par les codes de calcul *NASCRAC* et *NASA/FLAGRO*. Par conséquent, le programme réalisé dans cette présente étude peut être utilisé dans la pratique pour analyser des problèmes de fissuration par fatigue. Nous pensons que les petites différences remarquées sont dues aux incertitudes de modélisation et de programmation.

## CONCLUSION

Alors que toutes les approches traditionnelles ne prévoient pas la présence de fissures dans la structure, la supposition d'existence de fissures élimine le danger d'une rupture préalable. Si dans la réalité les fissures n'existent pas, cette approche sera cependant, conservative.

L'étude et l'analyse du phénomène de fatigue des structures fissurées aboutissent à des informations très utiles dans la pratique. Les résultats peuvent servir à prévenir une rupture catastrophique et assurer le fonctionnement normal de la structure dans la durée de vie envisagée. L'utilisation de la mécanique de la rupture comme méthode d'analyse apparaît actuellement comme très utile surtout dans les domaines où il est impossible d'éviter l'initiation des fissures.

Notre travail basé sur une synthèse de plusieurs recherches concernant les solutions du facteur d'intensité de contrainte et les lois de fissuration par fatigue a consisté à la mise en œuvre d'un code de calcul et d'analyse de fatigue basé sur la mécanique de la rupture. Cette contribution a consisté aussi à l'implémentation de ce code sous forme d'un logiciel. A l'aide de l'application interactive réalisée, il est très facile de faire une analyse de fatigue sans avoir des grandes compétences en informatique.

Le contrôle de la propagation des fissures en service constitue un grand intérêt pratique permettant aux contrôleurs de prendre une bonne décision envers une structure fissurée (maintenance, remplacement, prolongement de service) et de faire les modifications qui conviennent dans les prochaines conceptions (matériau, design, dimensions).

L'utilisation de la mécanique de la rupture sous forme d'un code de calcul permet de concevoir et de maintenir des structures sûres et économiques en permettant les opérations suivantes :

- La longueur critique de la fissure peut être calculée.
- La variation de la charge critique avec la taille de fissure peut être prévue.
- La durée de vie économique peut être déterminée.
- Les délais d'inspection peuvent être fixés.

Le programme développé est destiné dans le domaine industriel au diagnostic des structures fissurées en service, il contribuera aussi à orienter la conception en basant sur les résultats d'analyse.

L'application interactive réalisée dans ce cadre constitue un véritable outil d'analyse des structures fissurées en permettant l'édition des données, le choix du modèle de structure fissurée, le choix du matériau et la visualisation graphique de la structure fissurée et la visualisation graphique des résultats.

On peut considérer que le programme réalisé dans cette présente étude constitue une plate forme d'analyse de fatigue qui peut être enrichie avec des extensions à savoir, l'expertise des ruptures par fatigue par un système expert et l'étude des phénomènes de ruptures couplées, telle que la fatigue-corrosion.

Le programme réalisé dans cette présente étude constitue un apport scientifique qui nous espérons trouvera ses applications dans la pratique.

## REFERENCES

- [1] **J.L Engerand**, Fatigue et vieillissement des structures, *France 1984*.
  - [2] **Bernard Barthélémy**, Notions pratiques de mécanique de la rupture, *Editions Eyrolles, Paris 1980*.
  - [3] **Cazoud - Pomey - Rabbe**, la fatigue des métaux, Dunod *Paris 1969*
  - [4] **Claude Bathias, Jean Paul Bailon**, La fatigue des matériaux et des structures, *Canada 1980*.
  - [5] **J.A Collins**, Failure of materials in mechanical design, John Wiley & Sons, *New York, USA*.
  - [6] **J.Schijve**, Fatigue predictions and scatter, *Fatigue.Fract.Eng.Matr.Struct, Vol 17, N°4, PP 381-396, 1994*.
  - [7] **A Brand, J F Flavenot, R. Gregoire, C. Tournier**, Données technologiques sur la fatigue, *CETIM, France 1992*.
  - [8] **Carl.C, Osgood M.S**, Fatigue Design, Second édition, *USA*.
  - [9] **H.O Fuches, R.I staphens**, Metal Fatigue in Engineering, Edition John Wily & Sons *New York USA, 1980*.
  - [10] **Richard W.Hertzberg**, Deformation and fracture mechanics of engineering materials, John Wiley & Sons.
  - [11] *Technique de l'ingénieur, M126-1-M126-31, M130-1-M130-17, B5060-1-B5060-11, BM5052-1-BM5052-16*.
  - [12] **E.R.Rios**, Fatigue crack initiation and propagation on shot-penned surfaces in A316 stainless steel, *Int. J. Fatigue, Vol 17, N°7, PP 493-499, 1995*.
  - [13] **H.A.E.A.Atwa**, Engineering Fracture Mechanics, Study of defects on the behaviour and the toughness for low carbon steels (API 5L Gread B) Gas transmission pipelines, *Vol 44, N°6, PP 921-935, 1993*.
  - [14] **SURESH**, Fatigue of materials, Second edition *USA 1998*.
  - [15] **René Labbens**, Introduction à la mécanique de la rupture, Editions Pluralis *1980*.
  - [16] **H.L Ewalds, R.J.H Wanhill**, Fracture Mechanics, Edition Arnold *Australia 1985*.
  - [17] **John M.Barson, Stanley T.Rolfe**, Fracture and fatigue control in structures, Second Edition, *USA 1987*.
  - [18] **Richard A. thnn**, Engineering materials and their applications, Second édition, *London*.
-

- [19] **R.J Allen, G.S Booth, T julta**, A review of fatigue crack growth characteration by linear fracture mechanics (LEFM), Fatigue & Fracture of engineering materials & structures, *Part I :Vol 11, N°01, 1988, Part II : Vol 11, N° 2, 1988.*
- [20] **Jean Lemartre, Jean louis chaboche**, Mécanique des matériaux solides, 2<sup>ème</sup> édition, *Dunod.*
- [21] **Naman-Recho**, Rupture par fissuration des structures, Hermès, Paris 1995.
- [22] Revue Française de Mécanique, *Mars 1997.*
- [23] Fatigue & fracture of engineering materials & structures, Vol 12 N°3, pp157-174.
- [24] Metals Handbook, Vol 1, édition Tenth *1990.*
- [25] The Mechanics of fracture and fatigue.
- [26] **A.T.Apas, L.Edward, C.N Reid**, The effect of *R*-ratio on the near threshold fatigue crack growth in a metallic glass and stainless steel, Fatigue.Fract.Eng.Matr.Struct, *Vol 36, N°1, PP 77-92, 1990.*
- [27] **Todd. S. Gross, Steven lampman**, Micromechanisms of monotonic and cyclic crack growth, ASME Handbook, Vol 19, *PP 42-59.*
- [28] **Guy Pulvinage**, Mécanique élasto-plastique de la rupture, Editions Cepadues, *France1989.*
- [29] **Haward E Boyer**, Atlas of Fatigue curves, American Society of Metals, USA *1986.*
- [30] **Royce G.Forman**, DataBase for crack growth properties of materials.
- [31] **K.S. Ravichandran**, Effects of crack shape on crack growth, ASME Handbook, Vol 19, *PP160-166.*
- [32] **C. Gointon. Bowles**, Fracture and structure, ASME Handbook, Vol 19, *PP 5-13.*
- [33] **David Broek**, Concepts of fracture control and damage tolerance analysis, FractResearch, ASME Handbook, Vol 19, *PP 410-418.*
- [34] **D.O Harris, D.D Dedhia, P.J Sire, E.E Nelson**, NASACRAC "---A Fracture mechanics analysis code, Failure Analysis Associates, Palo Atto, *California, USA.*
- [35] **Raderick Stallworth, charles A. Meyers, Helen C. Stinson**, Comparison of two computer codes for crack growth analysis NASACRAC Vs NASA/FLACGRO, National Aeronautics and Space Administration, *Albania.*
- [36] **Michell. P. Kaplan, John. W. Lincoln**, The U.S Air Force Approach to aircraft damage tolerant design, ASME Handbook, Vol 19, *PP 578-587.*
- [37] **David Broek**, The practice of damage tolerance analysis, FractResearch, ASME Handbook, Vol 19, *PP 419-425.*
- [38] **John. H. Mathews**, Numerical Methods for science Engineering and Mathematics, *1987.*
-

- [39] **William H Press, Brian. P.Flannery, Saul A. TeuKalsky**, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1989.
- [40] **Steven.C. Chapra, Raynond P. Canale**, Numerical Methods for Engineers, Second Edition McGRAN-HILL International Edition, 1990.
- [41] **M.Boumahrat, A.Gouroin**, Méthodes Numériques Appliquées.
- [42] **Abderrahmane Karabaghli**, Master of Science, Boundary element method for fatigue crack growth, 1990.

## BIBLIOGRAPHIE

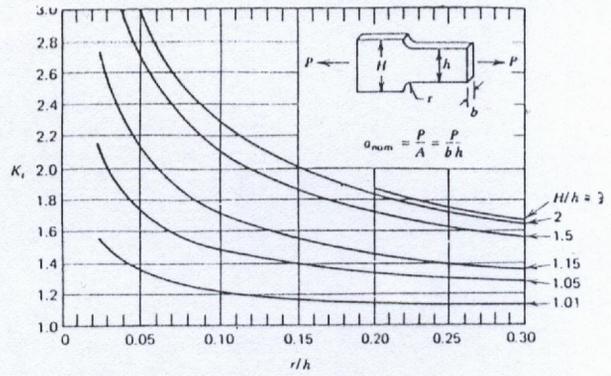
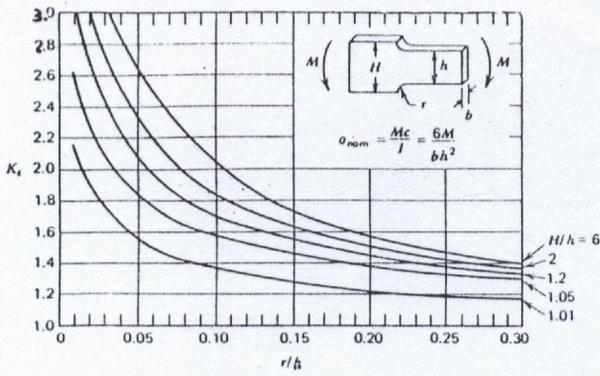
- **Peter Lukas**, Fatigue crack nucleation and microstructure, Failure and fatigue handbook, *PP 98-107*.
  - **Stephen. D. Antolovich**, Alloy design for fatigue and fracture, Failure and fatigue handbook, *PP28-41*.
  - **M.R.Michell**, Fundamentals of modern fatigue analysis for design, Failure and fatigue handbook, *PP227-248*.
  - **Jean-Marie, Jean-Paul**, Des Matériaux, Editions de l'école polytechnique de Montréal, 1986.
  - **W.Stopplr, D.Strum, K Hippelein**, Crack initiation, crack growth and fracture behaviour of large diameter pipes with circumferential defects under internal pressure and superimposed alternating bending load, Nuclear Engineering and Desing **160**, *PP137-152, 1996*
  - **Edward Mitchell**, Borland Pascal Developer's Guide, 1993.
  - **Gabrriel Rosenbaum, Reiner Schölles**, Le Grand livre du Turbo Pascal, Edition Micro Application, 1989.
  - **Dan Osier, Steve Grobman, Steve Batson**, Delphi 2, Simon & Schuster Macmillan, France 1995.
  - Aircraft Maintenance Manual, *A310, Air Algérie*.
  - **Youcef Benhalima**, thèse de magister, *E.N.P 1993*
  - **Charles Annis, Tonnice Watkins**, Probabilistic model for fracture mechanics service life analysis, United Technology.
-

- **G.Duvenhage, J. Wannenburg**, Remaining life analysis for a pressure vessel subjected to cyclic loads based on fracture mechanics, *int. J. Fatigue*, *Vol 17, N° 7, PP 477-483, 1995.*
  - **M.Goto, H.Nistani**, Fatigue life prediction of heat treated carbon steels and low alloy steels based on a small crack growth law, *Fatigue.Fract.Eng.Matr.Struct*, *Vol 17, N°2, PP171-185, 1994.*
  - **Djamel Ramoul**, Master of Science, Aspects of variable amplitude in fatigue monitoring gauges, *1990.*
  - **I.M.Rabertson**, Correlation of fatigue crack growth rate at different stress ratio for quenched and tempered steels and other alloys, *Fatigue.Fract.Eng.Matr.Struct*, *Vol 17, N°3, PP 327-338, 1994.*
  - **G.Bolzon**, An approximate method for fatigue-life prediction of welded structures, *Fatigue.Fract.Eng.Matr.Struct*, *Vol 19, N°12, PP 1481-1491, 1996.*
  - **J.C.Newman**, Fatigue life prediction methodology using a crack-closure model, *Journal of engineering materials and technology*, *Vol 117, PP433-439, October 1995.*
-

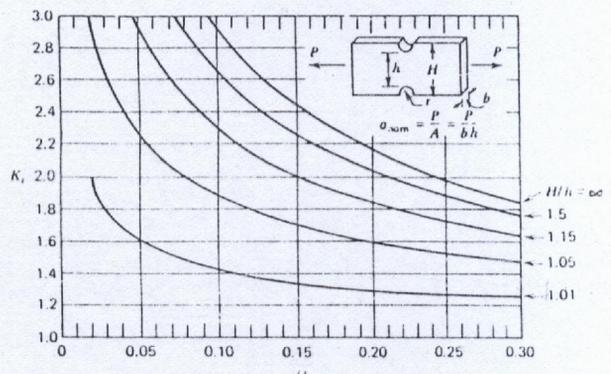
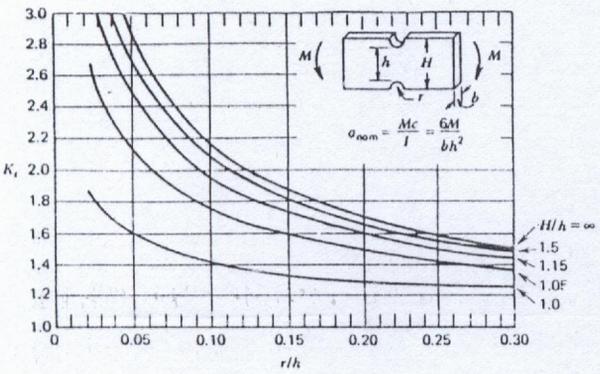
# ANNEXE A

## A.1 ESTIMATION DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE $K_t$ , [5] :

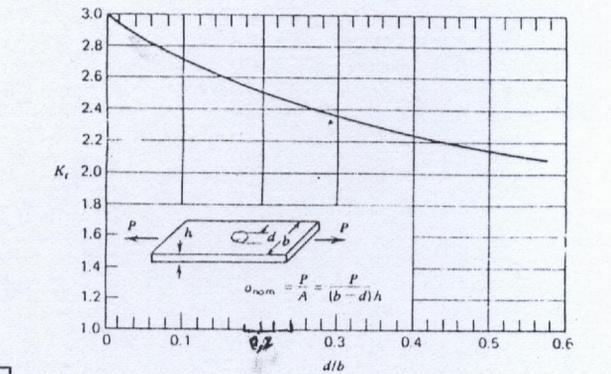
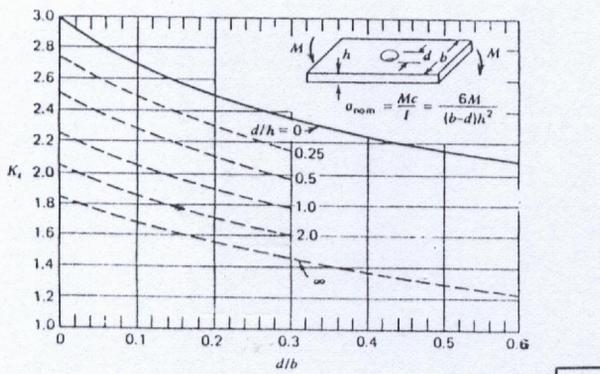
### ► PLAQUES



a



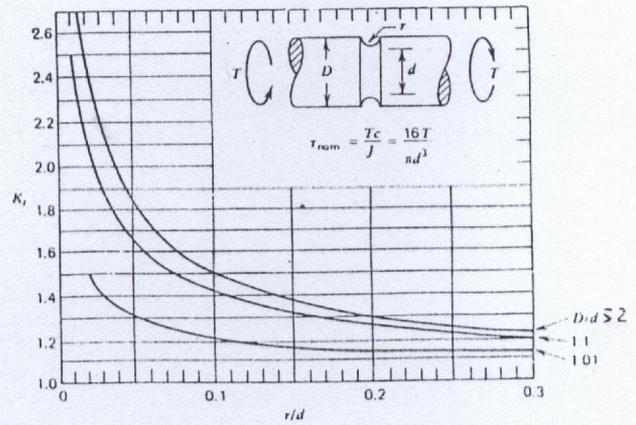
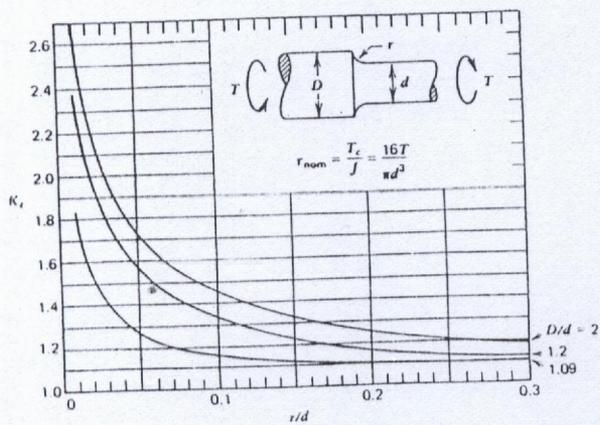
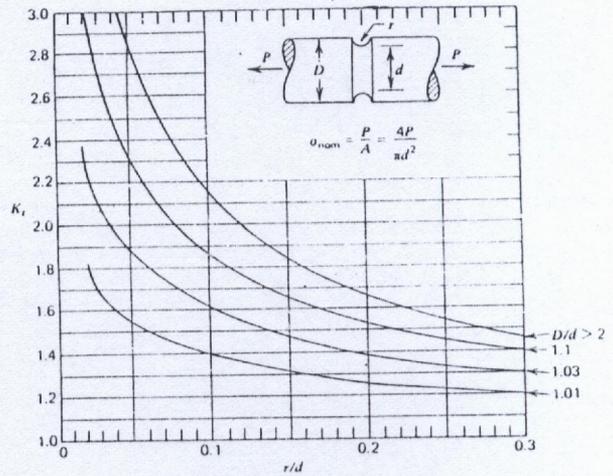
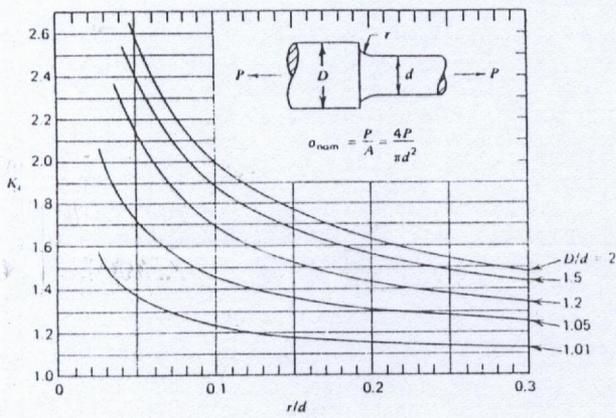
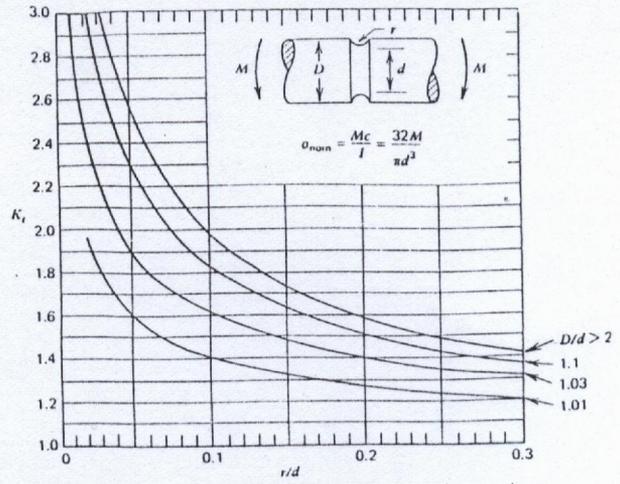
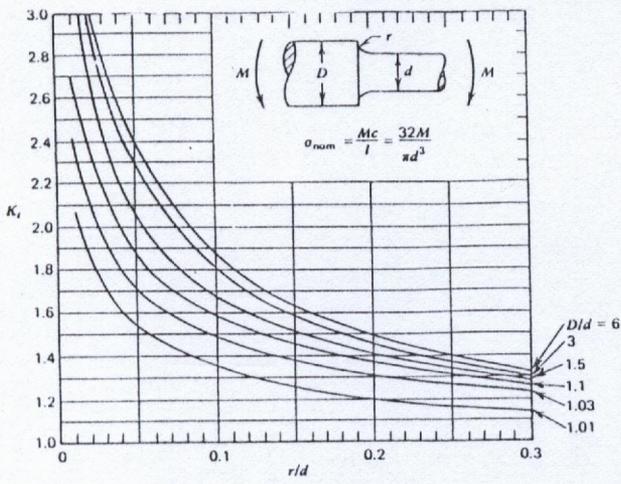
b



c

Fig. A.1 Estimation du  $K_t$  en cas des plaques avec différents concentrateur de contrainte  
 a) Epaulement b) Etranglement c) Trou

► POUTRES

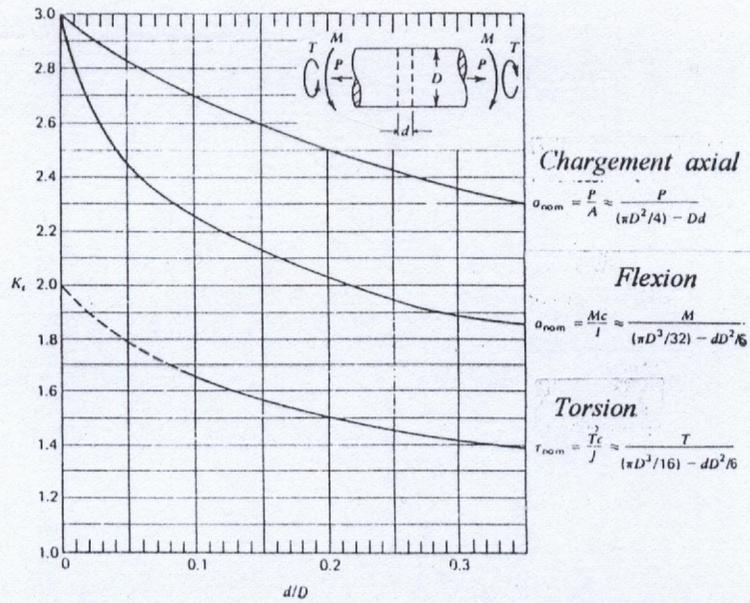


a

b

Fig. A.2 Estimation du  $K_t$  en cas des poutres avec différents concentrateur de contrainte  
 a) Epaulement b) Etranglement c) Trou

C



**A.2 CORRELATION DE LA LIMITE D'ENDURANCE AUX CARACTÉRISTIQUE DE TRACTION :**

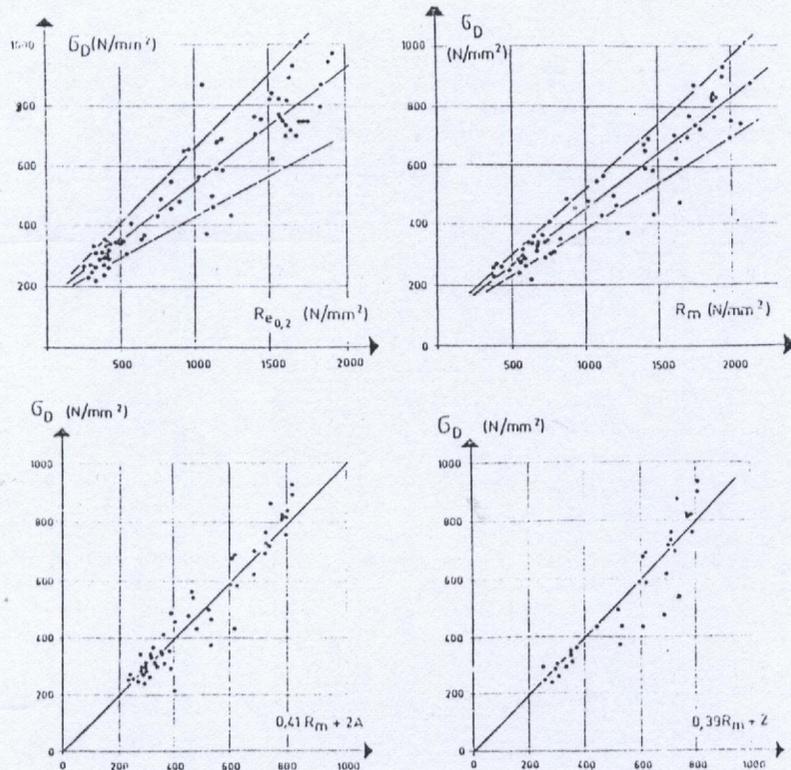


Fig.A.3 Relations entre la limite d'endurance et les caractéristiques de traction [4,9]

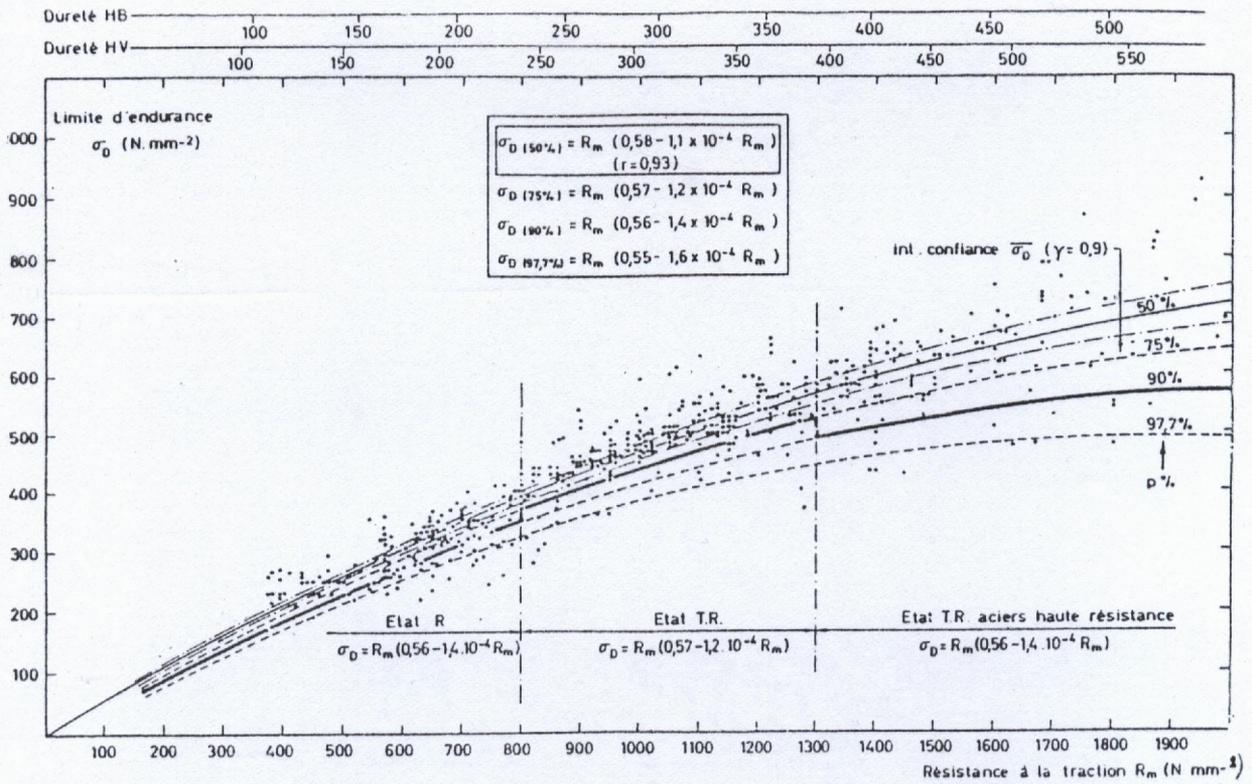
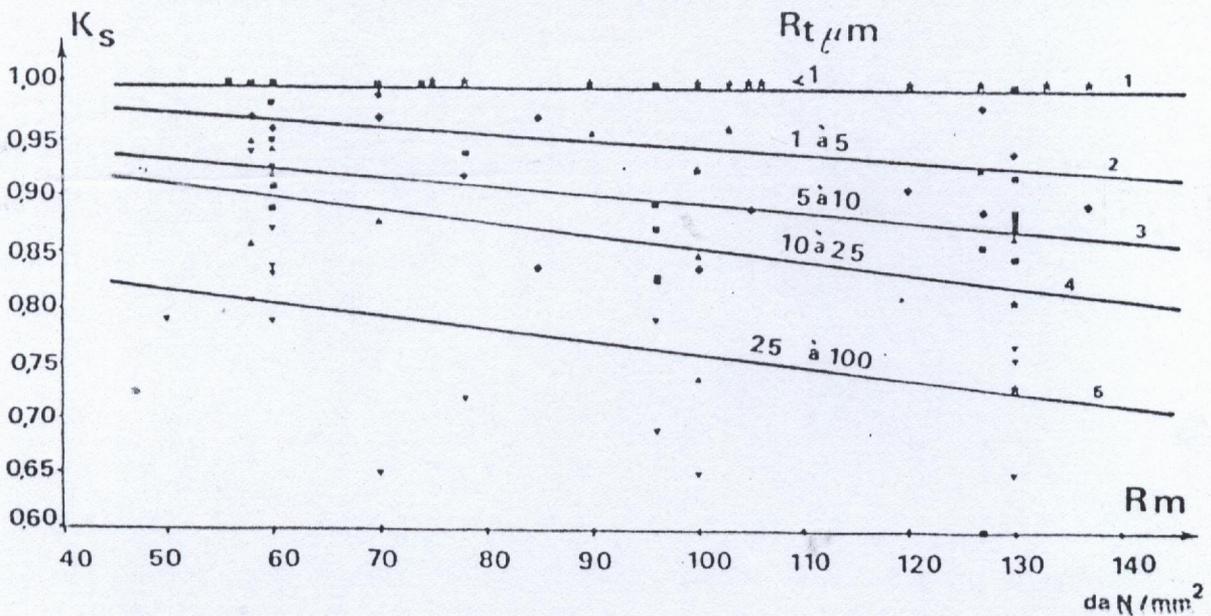


Fig.A.4 Relations entre la limite d'endurance et les caractéristiques mécaniques pour les Aciers d'après CETIM [7]

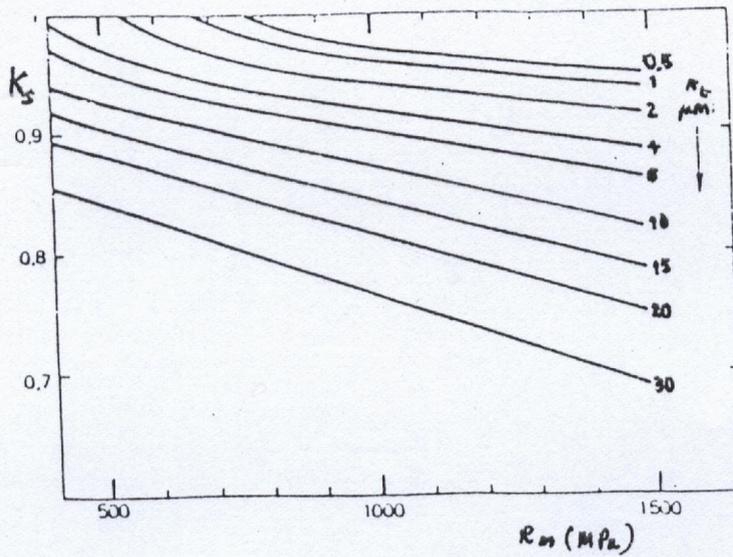
A.3 ESTIMATION DU FACTEUR D'ETAT DE SURFACE  $K_s$  :



a

Fig.A.5  $K_s$  en fonction de  $\sigma_s$  et la rugosité superficielle  $R_s$  [7,11]

b



**A.4 ESTIMATION DU FACTEUR EFFECTIF DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE  $K_f$  :**

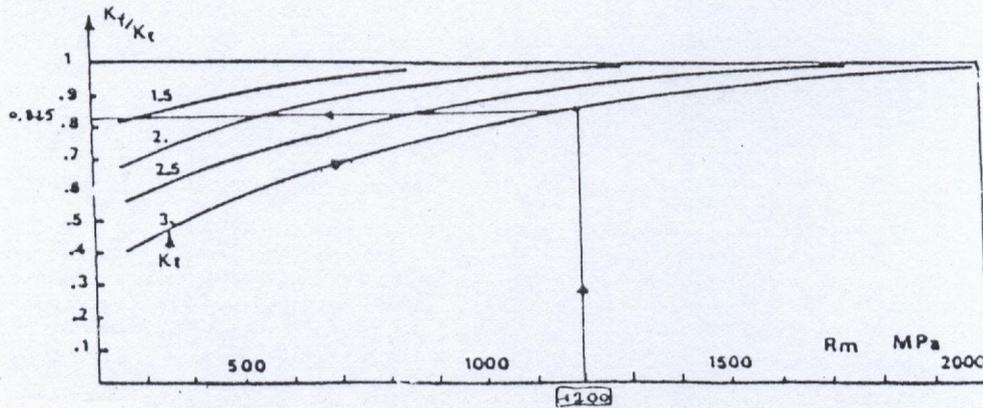


Fig.A.6 Facteur d'adaptation dynamique en fonction de  $\sigma_r$  et  $K_t$  [7,11]

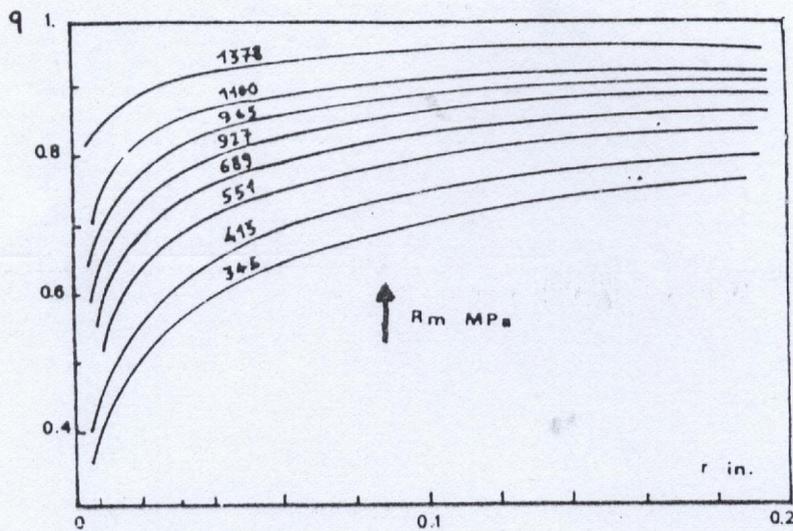


Fig. A.7 Facteur de sensibilité à l'entaille  $q$  en fonction de  $\sigma_r$  et rayon d'entaille [8]

**A.5 ESTIMATION DU FACTEUR D'ECHELLE  $K_e$  :**

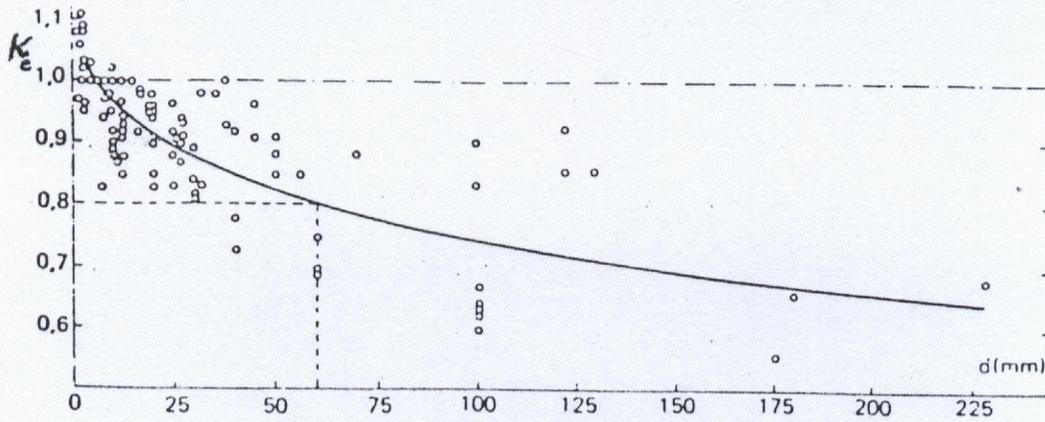


Fig.A.8 Evolution de  $K_e$  en fonction du diamètre de la pièce en flexion rotative [7,11]

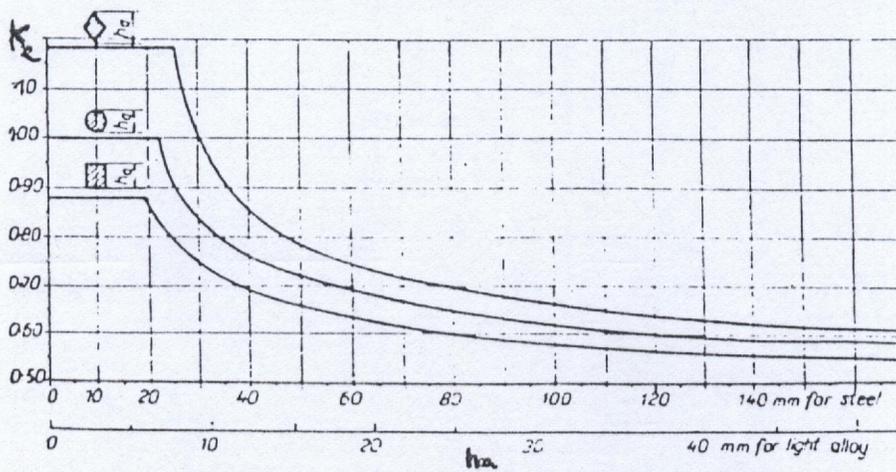


Fig.A.9 Evolution de  $K_e$  en fonction de la section de l'éprouvette en traction-compression [7]

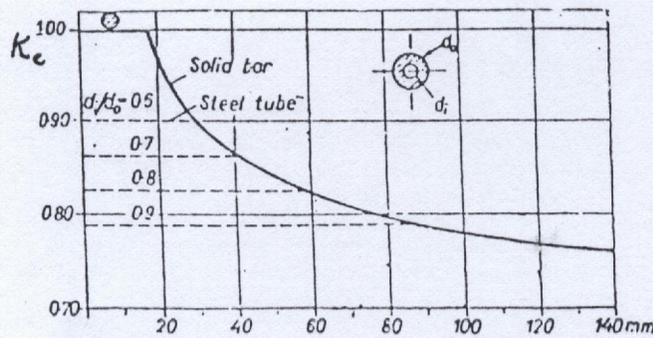


Fig.A.10  $K_e$  en fonction du diamètre en cas du torsion [7]

## ANNEXE B

## SOLUTION ASYMPTOTIQUE DE WESTERGAARD

Soit un milieu plan fini peu épais, justificatif de l'hypothèse de *C.P.*, soumis suffisamment loin d'une fissure de longueur  $2a$  à un champ de contrainte uniforme  $\sigma_{ij} = 0$  sauf  $\sigma_y = \sigma$  sollicitant la fissure en *mode I* (Fig. 2.2).

La solution du problème asymptotique au voisinage de la pointe de la fissure (Fig. B.1) s'obtient par la fonction d'Airy de la variable complexe  $z = x + iy$  suivante [20,27] :

$$\chi = R_e(\bar{Z}) + y I_m(\bar{Z})$$

$R_e$ ,  $I_m$  Désignent partie réelle et partie imaginaire.

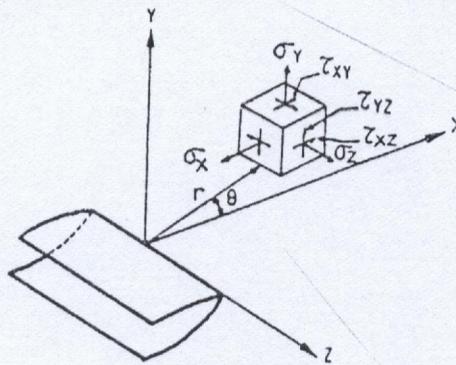


Fig.B.1 Contraintes près du fond de fissure

Avec :

$$\frac{d\bar{Z}}{dz} = \bar{Z}, \quad \frac{d\bar{Z}}{dz} = Z, \quad \frac{dZ}{dz} = Z' \quad \text{et} \quad Z = \frac{K_1}{\sqrt{\frac{\pi}{a}(z^2 - a^2)}}$$

Après avoir vérifié la satisfaction des conditions d'équilibre, les conditions de *Cauchy-Riemann* permettent d'effectuer le calcul des contraintes :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial^2 y} = R_e Z - y I_m Z'$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial^2 x} = R_e Z + y I_m Z'$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = -y R_e Z'$$

Avec le changement de variable  $z - a = r \exp(i\theta)$  qui permet de passer en coordonnées polaires, en considérant  $r/a \ll 1$ , lorsque  $r$  tend vers 0 (et pour le *mode I*) l'expression de  $Z$  obtenue est comme suit :

$$Z = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2) - i \sin \theta / 2$$

Avec des procédures similaires, appliquées à l'étude du même milieu sollicité en *mode II* et en *mode III*, les contraintes et déplacements au voisinage de la pointe de fissure sont comme suit [1,20,25] :

□ **LES CONTRAINTES :**

• **Mode I (C.P) :**

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2) (1 - \sin \theta / 2 \cdot \sin 3\theta / 2)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2) (1 + \sin \theta / 2 \cdot \sin 3\theta / 2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} (\sin \theta / 2) \cos \theta / 2 \cdot \cos 3\theta / 2$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

• **mode II (C.P) :**

$$\sigma_x = \frac{-K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (\sin \theta / 2) (2 + \cos \theta / 2 \cdot \cos 3\theta / 2)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (\sin \theta / 2) (\cos \theta / 2 \cdot \cos 3\theta / 2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} (\cos \theta / 2) (1 - \sin \theta / 2 \cdot \sin 3\theta / 2)$$

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

• **Mode III :**

$$\tau_{xz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \sin \theta / 2$$

$$\tau_{yz} = \frac{-K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \theta / 2$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

En *mode II* et *mode III* Le même problème traité avec l'hypothèse de *D.P* donne les même expressions pour les contraintes avec :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

□ **Les déplacements :**

• **Mode I :**

$$U_x = \frac{K_I}{G_{cis}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) [1 - 2\nu_1 + \sin^2 \theta/2]$$

$$U_y = \frac{K_I}{G_{cis}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) [2 - 2\nu_1 - \cos^2 \theta/2]$$

$$U_z = 0$$

Le déplacement d'ouverture de la fissure :

$$[U_y] = U_y(r, \pi) - U_y(r, -\pi) = \frac{8K_I}{E_1} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

• **mode II :**

$$U_x = \frac{K_{II}}{G_{cis}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2) [2 - 2\nu_1 + \cos^2 \theta/2]$$

$$U_y = \frac{K_{II}}{G_{cis}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos(\theta/2) [1 + 2\nu_1 + \sin^2 \theta/2]$$

$$U_z = 0$$

Le déplacement de cisaillement plan des lèvres de la fissure est :

$$[U_x] = U_x(r, \pi) - U_x(r, -\pi)$$

$$[U_x] = \frac{8K_{II}}{E_1} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

• **Mode III :**

$$U_z = \frac{4(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \theta$$

$$U_x = U_y = 0$$

Le déplacement de cisaillement plan des lèvres de la fissure est :

$$[U_z] = U_z(r, \pi) - U_z(r, -\pi) = \frac{8(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}}$$

Tel que :

$$\square \text{ En } D.P \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\square \text{ En } C.P \quad \nu_1 = \nu$$

$E_1$  est défini par (2-6)

Les facteurs d'intensité de contraintes sont déterminés soit par les contraintes ou les déplacements [20] :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_y \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_y] \right)$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{xy} \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8C_2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_x] \right)$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{yz} \sqrt{2\pi r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{E}{8(1+\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} [U_z] \right)$$

$$\square \text{ En } C.P \quad C_2 = 1$$

$$\square \text{ En } D.P \quad C_2 = 1 - \nu^2$$



Posons  $\alpha = a/b$  pour les cas de C.2 à C.5

## C.2. PLAQUE AVEC LARGEUR FINIE CONTENANT UNE FISSURE CENTRALE [2,16] (Fig.C.2) :

□ *Mode I* : 
$$K_I = f_I(\alpha) \cdot K_{IGreff} \quad (C-2)$$

- *Solution d'Irwin* :

$$f_I(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi\alpha}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \quad (C-3)$$

Déterminée analytiquement avec 5% d'erreur pour  $\alpha < 0.5$ .

- *Solution de Brown* :

$$f_I(\alpha) = 1 + 0.256(\alpha/2) - 1.152(\alpha/2)^2 + 12.2(\alpha/2)^3 \quad (C-4)$$

Déterminée numériquement avec 0.5% d'erreur pour  $\alpha/2 < 0.35$ .

- *Solution de Feddersen* :

$$f_I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\pi\alpha/2)}} \quad (C-5)$$

Solution purement empirique avec 0.3% d'erreur pour  $\alpha/2 < 0.35$ .

- *Solution de Dixon* :

$$f_I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-(\alpha)^2}} \quad (C-6)$$

Solution empirique récente généralement utilisée dans les applications pratiques.

□ *Mode II* : 
$$K_{II} = f_{II}(\alpha) \cdot K_{II Greff} \quad (C-7)$$

$$f_{II}(\alpha) = \frac{1 - 0.5(\alpha) + 0.37(\alpha)^2 - 0.044(\alpha)^3}{\sqrt{1-\alpha}} \quad (C-8)$$

Elle bien que 0.3% d'erreur pour  $\alpha < 1$ .

□ *Mode III* : 
$$K_{III} = f_{III}(\alpha) \cdot K_{III Greff} \quad (C-9)$$

$f_{III}(\alpha)$  est la même que celle donnée par (C-3)

**C.3. PLAQUE FINIE AVEC FISSURE DEBOUCHANTE [4,20] (Fig. C.3) :**

$K_I$  est donné par (C-2) avec :

$$f_I(\alpha) = \left[ \left( \frac{2}{\pi\alpha} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right]^{1/2} \frac{0.752 + 0.37[1 - \sin(\pi\alpha/2)]^3 + 2.02\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} \quad (\text{C-10})$$

Avec 0.5% d'erreur avec  $\alpha < 1$

Selon [11,16] :

$$f_I(\alpha) = 1.12 - 0.231(\alpha) + 10.55(\alpha)^2 - 21.72(\alpha)^3 + 30.39(\alpha)^4 \quad (\text{C-11})$$

Avec 0.5% d'erreur pour  $\alpha < 0.6$

**C.4. PLAQUE FINIE AVEC FISSURE DOUBLEMENT DEBOUCHANTE [2] (Fig.C.4) :**

□ *Mode I* :  $K_I$  est donné par (C-2) avec :

$$f_I(\alpha) = \frac{1.122 - 0.561(\alpha) - 0.205(\alpha)^2 + 0.471(\alpha)^3 - 0.19(\alpha)^4}{\sqrt{1 - (\alpha)}} \quad (\text{C-12})$$

Avec 0.5% d'erreur pour  $\alpha/2 < 0.5$ .

□ *Mode II* :  $K_{II}$  est donné par (C-7) avec :

$$f_{II}(\alpha) = f_I(\alpha)$$

$f_I(\alpha)$  est donnée par (C-3).

□ *Mode III* :  $K_{III}$  est donné par (C-9) avec :

$$f_{III}(\alpha) = f_I(\alpha)$$

$f_I(\alpha)$  est donnée par (C-3).

**C.5 FISSURE SOUS PRESSION INTERNE DANS UNE PLAQUE FINIE [15,16] (Fig.C.5) :**

$$K_I = f_I(\alpha) \cdot p \cdot \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-13})$$

$f_I(\alpha)$  est la même que celle donnée par (C-3)

### C.6 FISSURE EMANAT D'UNE ENTAILLE ELLIPTIQUE DANS UNE PLAQUE SEMI-INFINIE [2,20] (Fig.C.6) :

Posons  $\alpha = a/\rho$ ,  $K_I$  est donné par (C-2) avec :

$$\text{Pour } \alpha < 0.4 \quad f_I(\alpha) = 1.1215 \cdot K_I \cdot \frac{1+(\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} \quad (\text{C-14})$$

$$\text{Pour } \alpha > 0.4 \quad f_I(\alpha) = 1.1215 \cdot \sqrt{1+d/a} \quad (\text{C-15})$$

$K_I$  est donnée par la figure C.6.1

### C.7 FISSURE EMANANT D'UN TROU DANS UNE PLAQUE INFINIE (Fig.C.7) [8,17] :

Posons  $\alpha = a/r$ , le  $K_I$  est donné par (C-2) avec :

#### □ Chargement uniaxiale :

- Fissure simple :

$$f_I(\alpha) = f_1(\alpha) \quad (\text{C-16})$$

- Fissure double :

$$f_I(\alpha) = f_2(\alpha) \quad (\text{C-17})$$

#### □ Chargement biaxiale :

- Fissure simple :

$$f_I(\alpha) = f_3(\alpha) \quad (\text{C-18})$$

- Fissure double :

$$f_I(\alpha) = f_4(\alpha) \quad (\text{C-19})$$

$f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), f_4(\alpha)$  sont données par le tableau ci-après.

$\alpha = a/r$	$f_1(\alpha)$	$f_2(\alpha)$	$f_3(\alpha)$	$f_4(\alpha)$
0.00	3.39	3.39	2.28	2.28
0.10	2.73	2.73	1.98	1.88
0.20	2.30	2.41	1.82	1.83
0.30	2.04	2.16	1.67	1.70
0.40	1.68	1.86	1.58	1.61
0.50	1.73	1.83	1.40	1.57
0.60	1.64	1.71	1.42	1.52
0.80	1.47	1.53	1.32	1.43
1.00	1.37	1.45	1.22	1.38

**C.13 SERIE DE FISSURES DANS UNE PLAQUE INFINIE [11] (Fig.C.13) :**

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau \\ \tau_1 \end{bmatrix} [btg\pi\alpha]^{1/2} \quad (C-24)$$

**C.14 SERIE DE FISSURE CENTRALES PARALLELES EN MILIEU INFINI TENDU [2] (Fig.C.14) :**

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I \left( \frac{a}{a+h} \right) \\ f_{III} \left( \frac{a}{a+h} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \tau_1 \end{bmatrix} \sqrt{\pi a} \quad (C-25)$$

Les fonctions  $f_I, f_{III}$  sont données par la figure C.14.1

**C.15 SERIE DE FISSURE DEBOUCHANTES PARALLELES EN MILIEU SEMI-INFINI TENDU [2] (Fig.C.15) :**

Les F.I.C  $K_I, K_{III}$  sont donnés par (C-27) avec :

Les fonctions  $f_I, f_{III}$  sont données par la figure C.15.1

**C-16 PROBLEME DE GRIFFITH AVEC LA FISSURE INCLINEE DANS LE CHAMP DE CONTRAINTES [2] (Fig.C.16) :**

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \sin \beta - \tau \cos \beta \\ \sigma \cos \beta + \tau \sin \beta \\ \tau_1 \end{bmatrix} \sin \beta \sqrt{\pi a} \quad (C-26)$$

Chargement	: uniforme
Fissure	: interne
Structure	: plaque
Mode de rupture	: mode I

**C.17 FISSURE ELLIPTIQUE EN MILIEU INFINI TENDU [16] (Fig.C.17) :**

$$K_I = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\Phi} \left( \sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} \quad (C-27)$$

$\Phi$  C'est un intégrale elliptique de deuxième espèce.

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta \quad \text{tel que} \quad k^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

Après développement de  $\Phi$  en série en et prenant le premier terme :

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}} \left( \sin^2 \beta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \beta \right)^{1/4} \quad (\text{C-28})$$

Le maximum du  $F.I.C$  est pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$  :

$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8 c^2}} \quad (\text{C-29})$$

Selon [2,8] :

$$\phi = \sqrt{Q} \quad (\text{C-30})$$

Tel que  $Q$  est fonction de  $a$ ,  $c$  et  $\sigma / \sigma_e$ , elle est donnée par la figure C.17.1

Pour une fissure circulaire le  $K_I$  est donné par (C-2) avec:

$$f_1(\alpha) = 2 / \pi \quad (\text{C-31})$$

Selon [2,8] :

$$f_1(\alpha) = 1 / \sqrt{Q} \quad (\text{C-32})$$

### C.18 FISSURE CIRCULAIRE SOUMISE A UN CHARGEMENT CIRCULAIRE REPARTI [2] (Fig.C.18) :

$$K_I = \frac{2p}{\sqrt{\pi a}} \left[ a - \sqrt{a^2 - d^2} \right] \quad (\text{C-33})$$

Chargement	: uniforme
Structure	: plaque
Fissure	: Surfaique
Mode	: mode I

### C.19 FISSURE SEMI-ELLIPTIQUE EN MILIEU INFINI TENDU [2] (Fig.C.19) :

$$K_I = f_1(a/c) \cdot \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-34})$$

$$f_I(a/c) = \left[ 1 + 0.12(1 - (a/2c))^2 \right] \frac{1}{\sqrt{Q}} \cdot \left[ \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right]^{1/2}$$

Pour une fissure semi-circulaire [10] :

$$f_I(a/c) = 1.12 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right]^{1/2} \quad (\text{C-35})$$

**C.20 FISSURE SOUS FORME D'UN QUART D'ELLIPSE DANS UNE PLAQUE SEMI-INFINIE [16] (Fig.C.20) :**

$$K_I = f_I(a/c) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-36})$$

$$f_I(a/c) = 1.2 \cdot \frac{1}{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8c^2}} \cdot \left[ \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right]^{1/2}$$

En cas d'un quart de cercle :

$$f_I(a/c) = 1.2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right]^{1/2} \quad (\text{C-37})$$

**C.21 FISSURE SOUS FORME D'UN QUART D'ELLIPSE DEBOUCHANTE D'UN TROU DANS UNE PLAQUE INFINIE [16,17] (Fig.C.21) :**

$$K_I = f_I(a/c) \cdot 3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-38})$$

$$f_I(a/c) = 1.12 \cdot \left( \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}$$

Structure	: poutre
Mode	: I, II, III purs

**C.22 BAREAU FISSURE EXTERIEUREMENT [2,8] (Fig.C.22) :**

- **Traction :**  $K_I = f_1(d/D) \sigma \sqrt{\pi D} \quad (\text{C-39})$

- **Flexion :**  $K_I = \frac{32M_f}{\pi d^3} \cdot f_2(D/d) \sqrt{\pi d / 2} \quad (\text{C-40})$

- **Torsion :**  $K_{III} = \frac{16T}{\pi d^3} \cdot f_2(D/d) \sqrt{\pi d / 2} \quad (\text{C-41})$

$f_1, f_2$  sont donnés les tableau TC.2 et TC.3 respectivement.

$d/D$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.75
$f_1(d/D)$	0	0.111	0.115	0.185	0.209	0.227	0.233	0.24	0.237

TC.2 Facteur de correction pour une poutre fissuré extérieurement  $f_1$  [8]

$D/d$	1	5/4	$\geq 5/3$
$f_2(D/d)$	0	0.34	0.37

TC.3 Facteur de correction pour une poutre fissuré extérieurement  $f_2$  [2]

### C.23 BAREAU FISSURE INTERIEUREMENT [2,8] (Fig.C.23) :

- **Traction :** 
$$K_I = \frac{4P}{\pi(D^2 - d^2)} f_I(d/D) \sqrt{\pi d / 2} \quad (C-42)$$

- **Flexion :** 
$$K_I = \frac{32M_f d}{\pi(D^4 - d^4)} f_{II}(d/D) \sqrt{\pi d / 2} \quad (C-43)$$

- **Torsion :** 
$$K_{III} = \frac{16Td}{\pi(D^4 - d^4)} f_{III}(d/D) \sqrt{\pi d / 2} \quad (C-44)$$

Les fonctions  $f_I, f_{II}, f_{III}$  sont données par la figure C.23.1

### C.24 BAR FISSUREE EN FLEXION PUR (Fig.C.24) :

$$K_I = \frac{6M_f}{I(b-a)^{3/2}} f_I(a/b) \quad (C-45)$$

$f_I(a/b)$  est donnée par le tableau suivant :

$a/b$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	$\geq 0.6$
$f_I(a/b)$	0.36	0.49	0.6	0.66	0.69	0.72	0.73

TC.4 Facteur de correction pour une en flexion pur [17]

Chargement : concentré
Structure : plaque

**C.25 FISSURE EMANANT D'UN TROU CHARRE DANS UNE PLAQUE FINIE [16]**

(Fig.C.25) :

$$K_I = f_I(\alpha) \left( \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{2} + \frac{P}{2.t.\sqrt{\pi a}} \right) \quad (C-46)$$

$f_I(\alpha)$  est la même que celle donnée par (C-3)

Avec hypothèse : les dimensions du trou sont négligeables par rapport à la longueur de la fissure.

**C.26 FISSURE AU BORD D'UN TROU CHARGE [11] (Fig.C.26) :**

Posons  $\alpha = a/r$  :

$$K_I = f_I(\alpha) \sigma_{mt} \sqrt{\pi a} \quad (C-47)$$

$$\sigma_{mt} = \frac{P}{2.r.t}$$

$f_I(\alpha)$  est donnée par la figure C.26.1

**C.27 FISSURE DEBOUCHANTE SOUMISE A UNE FORCE CONCENTREE [2] (Fig.C.27) :**

Posons  $\alpha = a/b$  et  $\delta = c/a$

$$K_I = \frac{2P}{t\sqrt{\pi a}} f_I\left(\frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right) \quad (C-48)$$

$$f_I(\alpha, \delta) = \frac{3.52(1-\delta)}{(1-\alpha)^{3/2}} - \frac{4.35-5.28\delta}{(1-\alpha)^{1/2}} + [1-(1-\delta)\alpha] \left[ \frac{1.3-0.3\delta^{3/2}}{\sqrt{1-\delta^2}} + 0.83-1.76\delta \right]$$

**C.28 FISSURE CENTRALE AVEC DES CHARGES CONCENTREES DANS UNE PLAQUE INFINIE [11] (Fig.C.28):**

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \frac{1}{t\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+d}{a-d}} \begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \\ P_{III} \end{bmatrix} \quad (C-49)$$

Pour  $d=0$  :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \frac{1}{t\sqrt{\pi a}} \begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \\ P_{III} \end{bmatrix}$$

Posons  $\alpha = a/b$  pour C.29 et C.30

**C.29 FISSURE DEBOUCHANTE AVEC DES FORCES CONCENTREES A L'ORIGINE**

(Fig.C.29) [2,11] :

- *Simple* :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.3 \\ 1.0 \end{bmatrix} \frac{2}{t\sqrt{\pi a}} \begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \\ P_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{C-50})$$

- *double* :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I(\alpha) \\ f_{II}(\alpha) \\ f_{III}(\alpha) \end{bmatrix} \frac{2}{t\sqrt{\pi a}} \begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \\ P_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{C-51})$$

$$f_I(\alpha) = f_{II}(\alpha) = \frac{1.3 - 0.65\alpha - 0.1\alpha^2 + 0.45\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha}}$$

$$f_{III}(\alpha) = \left[ \frac{\pi\alpha}{\sin \pi\alpha} \right]^{1/2} \quad (\text{C-52})$$

**C.30 FISSURE CENTRALE AVEC DES FORCES CONCENTREES A L'ORIGINE**

(Fig.C.30)[2,11] :

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_I(\alpha) \\ f_{II}(\alpha) \\ f_{III}(\alpha) \end{bmatrix} \frac{2}{t\sqrt{\pi a}} \begin{bmatrix} P_I \\ P_{II} \\ P_{III} \end{bmatrix} \quad (\text{C-53})$$

$$f_I(\alpha) = f_{II}(\alpha) = \frac{1 - 0.5\alpha + 0.957\alpha^2 - 0.16\alpha^3}{\sqrt{1-\alpha}}$$

$f_{III}(\alpha)$  est la même que celle donnée par (C-52)

**C.31 FISSURE CIRCULAIRE AVEC UNE CHARGE CONCENTREE (Fig.C.31) [2,11] :**

- Sur l'axe de la fissure et à une distance  $d$  du plan de fissure :

$$K_I = \frac{a^2}{a^2 + d^2} \left( 1 + \frac{1}{(1-\nu)} \cdot \frac{d^2}{a^2 + d^2} \right) \frac{P}{(\pi a)^{3/2}} \quad (\text{C-54})$$

- Sur le plan de fissure et à une distance  $d$  de l'axe de la fissure :

$$K_I = \frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{(a^2 + d^2)} \frac{P}{\pi \sqrt{\pi a}} \quad (\text{C-55})$$

Pour  $d = 0$  :

$$K_I = \frac{P}{(\pi a)^{3/2}}$$

Autres solutions

### C.32 FISSURE SEMI-ELLIPTIQUE DANS UN COQUE TENDU [20] (Fig.C.32) :

$$K_I = f_I(a/c) \sigma \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-56})$$

$$f_I(a/c) = 0.5 \sqrt{1.2} \left[ 2 + \frac{0.731t}{r(1-\nu^2)} (c/a)^{0.043} (t/a)^{0.047} \right]$$

### C.33 FISSURE AXIALE TRAVERSANTE DANS UN TUYAU SOUS PRESSION [16] (Fig.C.33) :

$$K_I = f_I(a/r) \sigma_H \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-57})$$

$$\sigma_H = \frac{pr}{t}$$

$$f_I(a/r) = \sqrt{1 + 1.255 \frac{a^2}{rt} - 0.0135 \frac{a^4}{r^2 t^2}}$$

### C.34 FISSURE SEMI-ELLIPTIQUE DANS UN CYLINDRE SOUS PRESSION [16] (Fig.C.34) :

$$K_I = f_I \sigma_H \sqrt{\pi a} \quad (\text{C-58})$$

$$f_I = 1.12 \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} \left[ \frac{2t}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2t} \right]^{1/2}$$

$$\sigma_H = p(1 + r/t)$$

**C.35 SOLUTION DE NEWMAN-RAJU POUR LES FISSURES SURFACIQUES (Fig.C.19)**  
[31]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot F \cdot g \cdot F_\beta \cdot f_w \quad (\text{C-59})$$

$$F = \left[ M_1 + M_2 \left[ \frac{a}{t} \right]^2 + M_3 \left[ \frac{a}{t} \right]^4 \right] \sqrt{\frac{1}{Q}}$$

$$F_w = \sqrt{\sec \left( \frac{\pi c}{2b} \sqrt{\frac{a}{t}} \right)}$$

avec :

Pour  $a/c \leq 1$  Fissure superficielle

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \left( \frac{a}{c} \right), \quad M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \left( \frac{a}{c} \right)}$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \left( \frac{a}{c} \right)} + 14 \left[ 1 - \frac{a}{c} \right]^{24}$$

$$g = 1 + \left[ 0.1 + 0.35 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] \cdot (1 - \sin \beta)^2$$

$$f_\beta = \left[ \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \right]^{1/4} \quad Q = 1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65}$$

Pour  $a/c > 1$  Fissure profonde

$$M_1 = \sqrt{\frac{c}{a} \left( 1 + 0.04 \frac{c}{a} \right)}, \quad M_2 = 0.2 \left( \frac{c}{a} \right)^4, \quad M_3 = -0.011 \left( \frac{c}{a} \right)^4$$

$$g = 1 + \left[ 0.1 + 0.35 \left( \frac{c}{a} \right) \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \beta)^2$$

$$f_\beta = \left[ \left( \frac{c}{a} \right)^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \right]^{1/4} \quad Q = 1 + 1.464 \left( \frac{c}{a} \right)^{1.65}$$

Et la condition :

$$0.2 \leq a/c \leq 2 ; a/t \leq 0.8$$

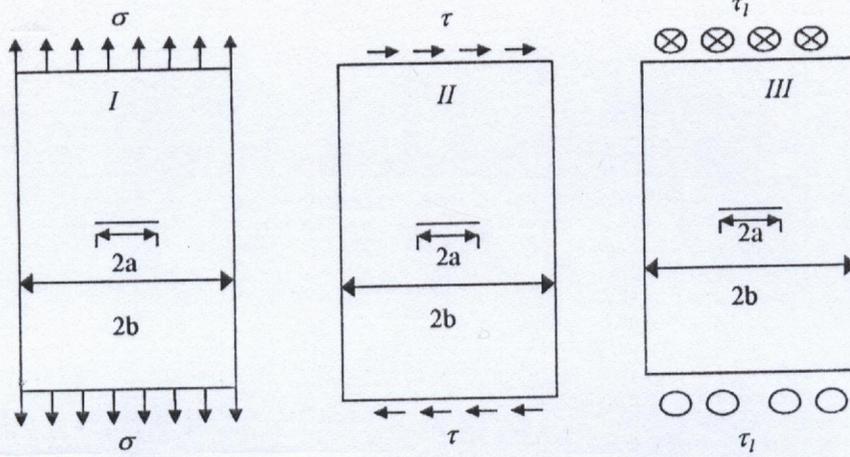


Fig.C.2

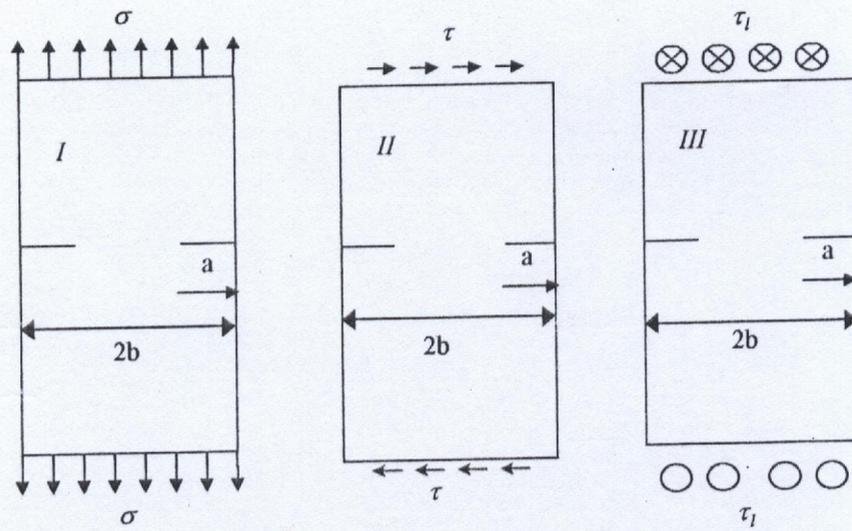


Fig.C.4

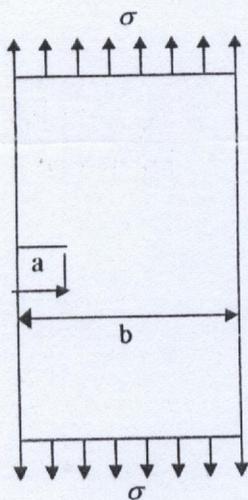


Fig.C.3

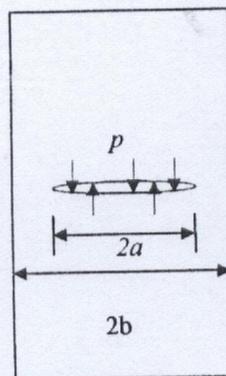


Fig.C.5

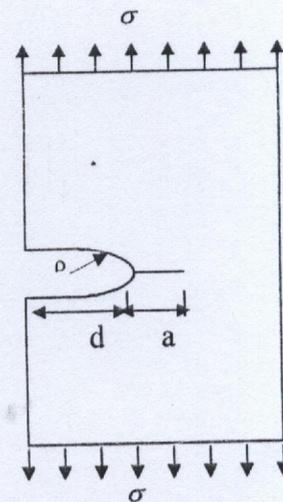


Fig.C.6

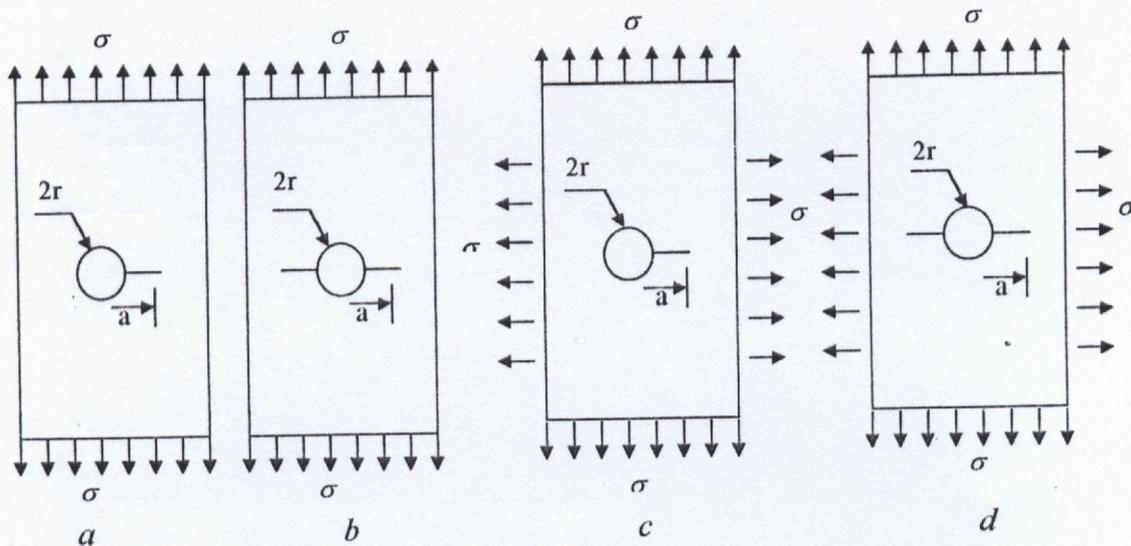


Fig.C.7

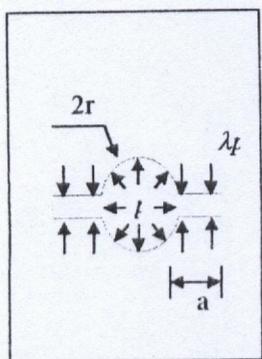


Fig.C.8

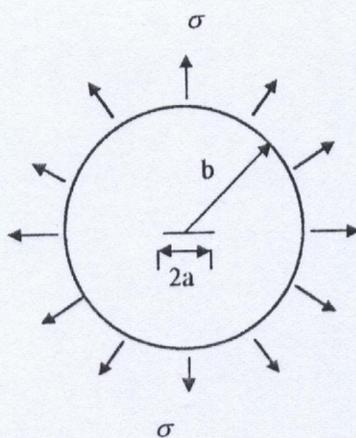


Fig.C.9

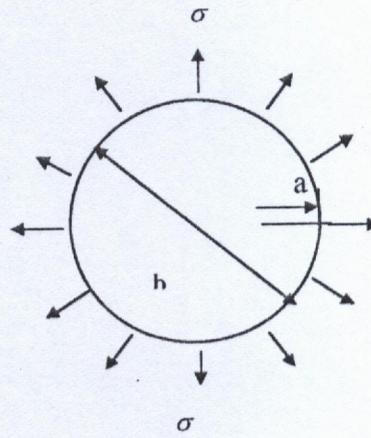


Fig.C.10

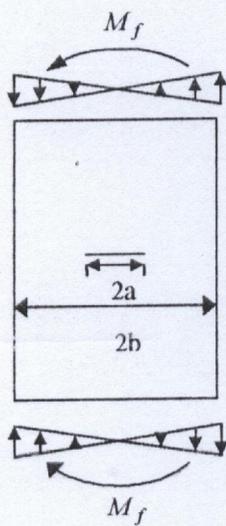


Fig.C.11

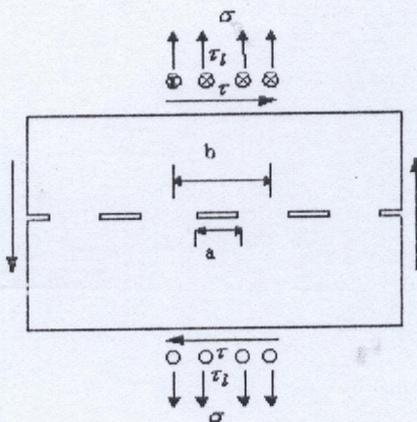


Fig.C.13

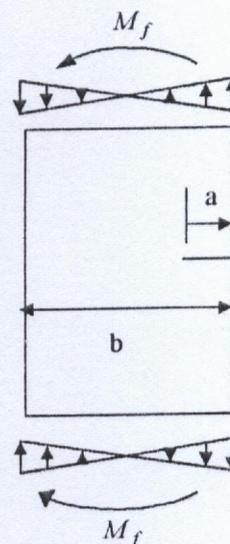


Fig.C.12

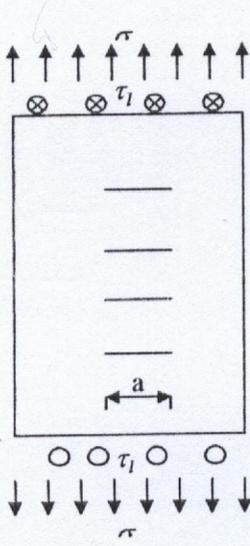


Fig.C.14

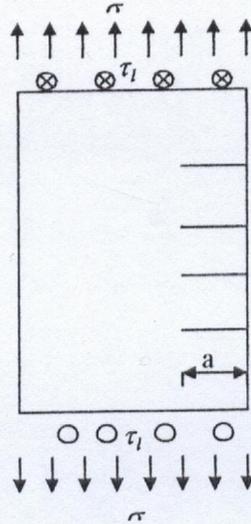


Fig.C.15

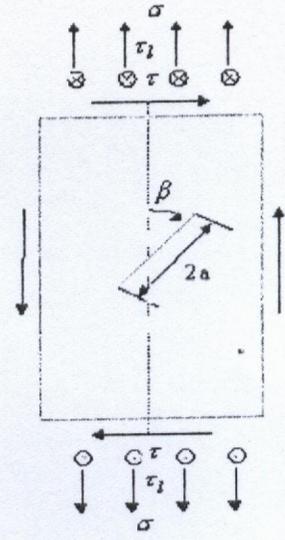


Fig.C.16

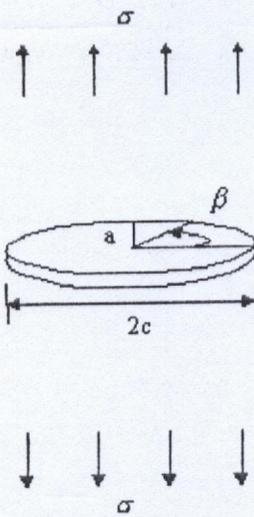


Fig.C.17

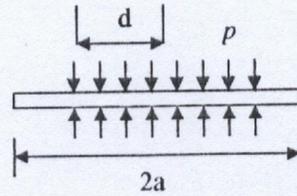


Fig.C.18

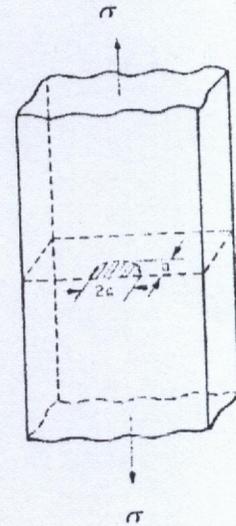


Fig.C.19

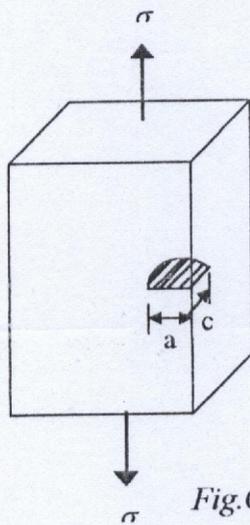


Fig.C.20

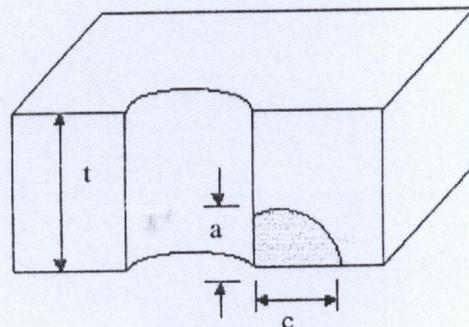


Fig.C.21

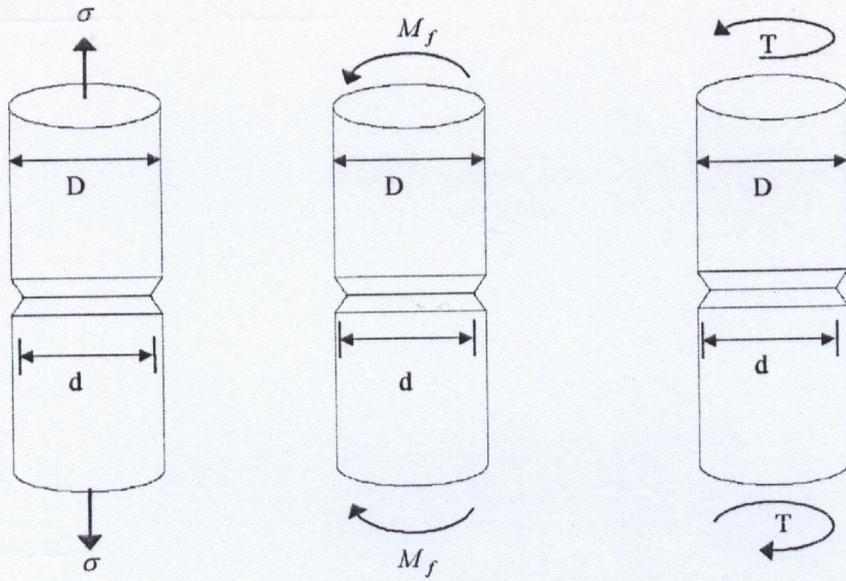


Fig.C.22

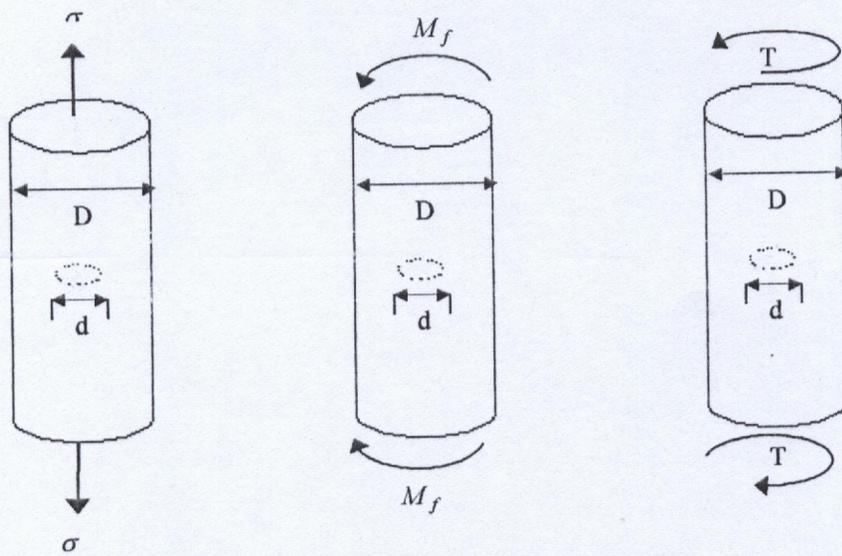


Fig.C.23

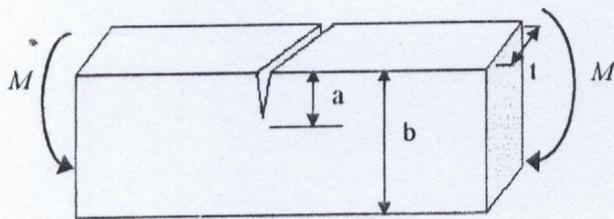


Fig.C.24

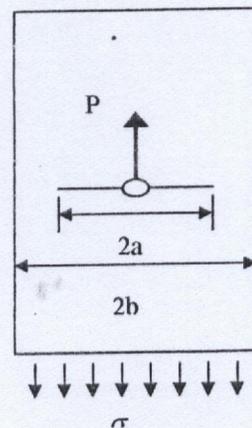


Fig.C.25

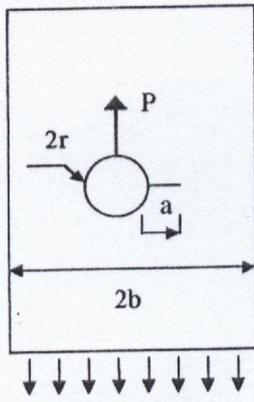


Fig.C.26

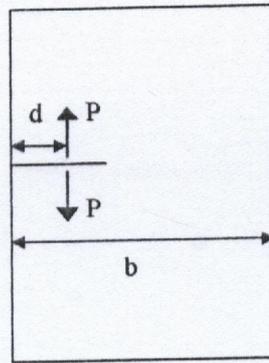


Fig.C.27

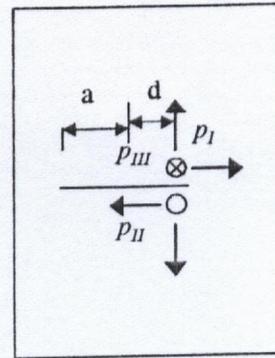


Fig.C.28

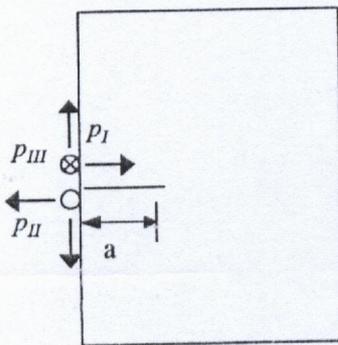


Fig.C.29

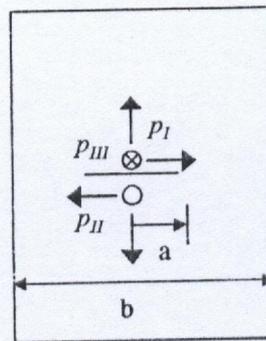


Fig.C.30

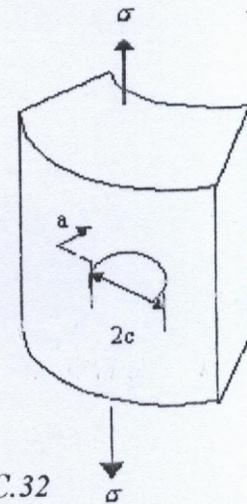


Fig.C.32

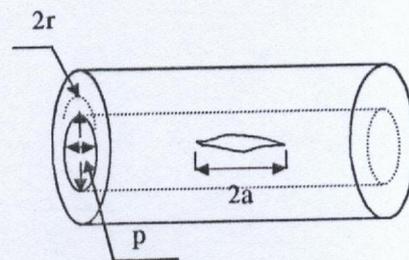
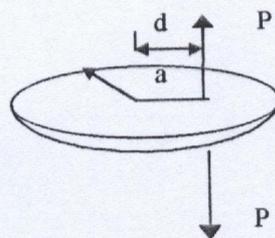
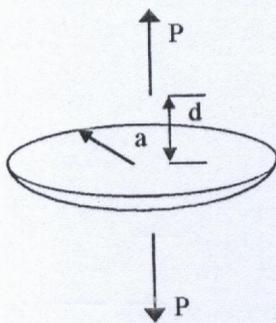


Fig.C.33

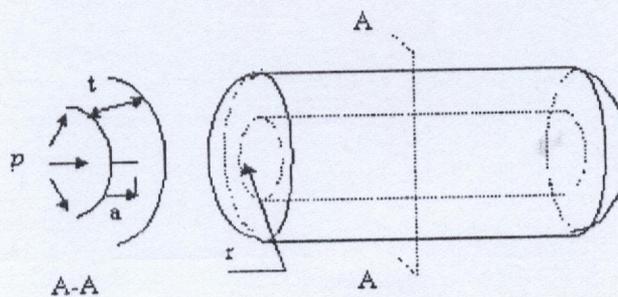


Fig.C.34

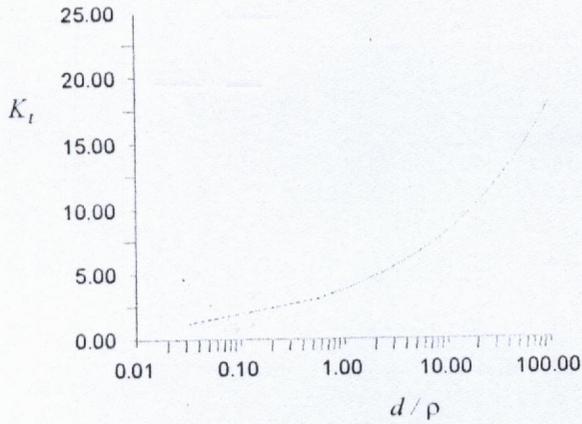


Fig.C.6.1 Facteur de concentration de contrainte pour une entaille elliptique

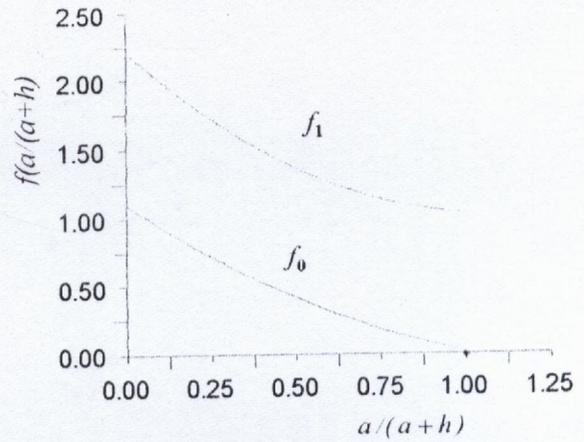


Fig.C.8.1 Facteur de correction du F.I.C pour la structure C.8

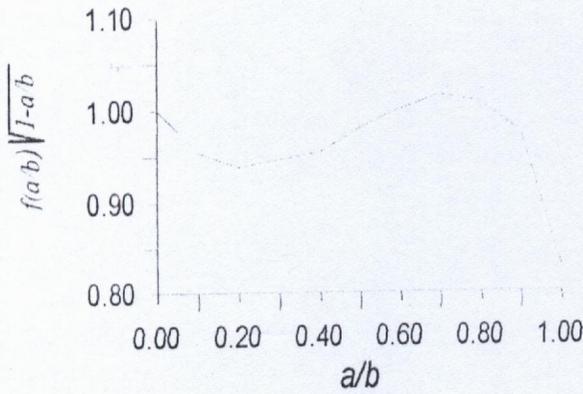


Fig.C.9.1 Facteur de correction du F.I.C pour la structure C.9

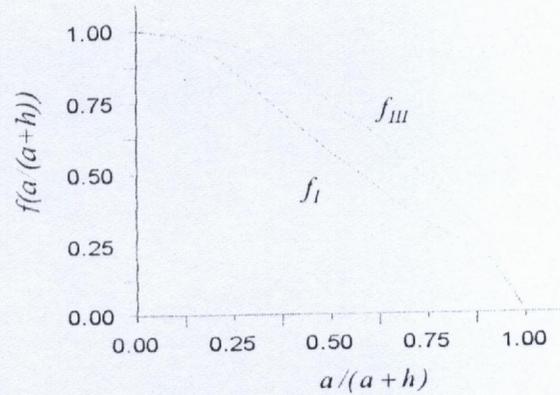


Fig.C.14.1 Facteur de correction du F.I.C pour la structure C.14

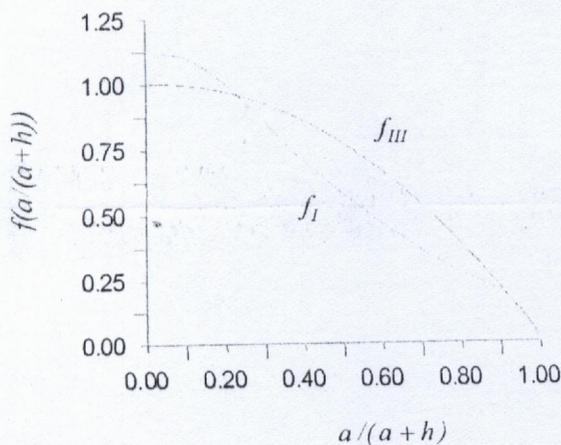


Fig.C.15.1 Facteur de correction du F.I.C pour la structure C.15

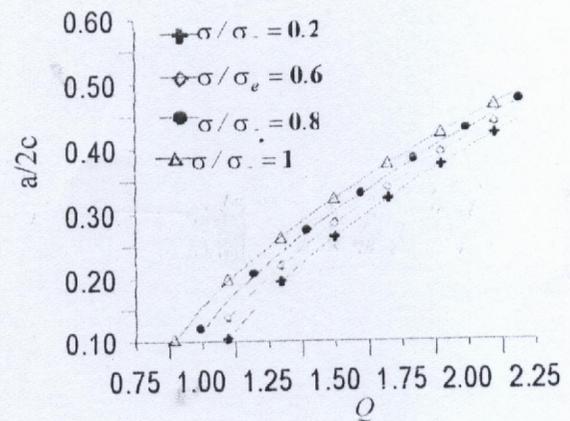


Fig.C.17.1 Facteur de correction du F.I.C pour une fissure elliptique

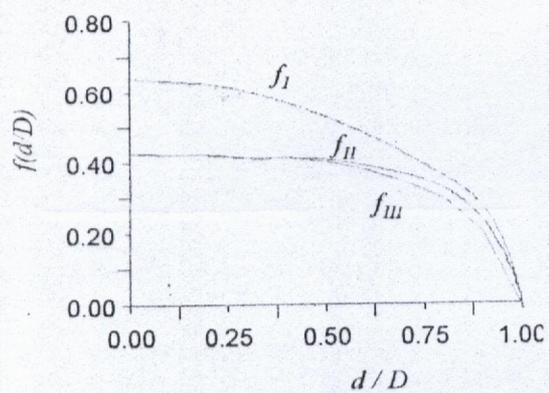


Fig.C.23.1 Facteur de correction du F.I.C  
pour la structure C.23

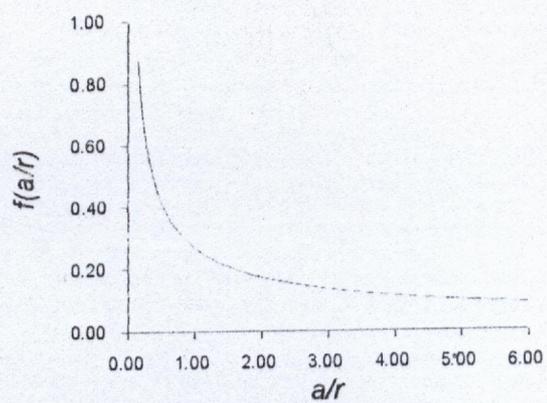


Fig.C.26.1 Facteur de correction du F.I.C  
pour la structure C.26

## ANNEXE D

### LISSAGES MATHÉMATIQUES DES DONNÉES

Le but du lissage mathématique c'est de déterminer le modèle ou la fonction mathématique la plus représentative d'un ensemble de points données sous forme de tableau avec la moindre erreur ( $s$ ) et une meilleure corrélation mathématique ( $r$ ) afin de l'utiliser d'une façon efficace dans le programme informatique, pour ce faire nous avons utilisé un puissant logiciel de lissage et d'interpolation de données nommé *CurveExpert*, ce programme est réalisé pour faire le lissage mathématique des points entrées sous forme de tableaux, tel qu'il calcul l'erreur et la corrélation mathématique pour plusieurs familles des modèles, après l'exécution il compare ces derniers pour nous donner à la fin le modèle avec la moindre erreur et la meilleure corrélation et les constantes correspondantes à ce modèle.

Ce programme contient les familles des modèles suivantes :

- Polynomiales
- Puissances
- Exponentielles

Ainsi que d'autres familles de modèles, tel que chaque famille contient plusieurs modèles, de plus il y a la possibilité de faire un lissage de données suivant un modèle défini par nous même " User model ", la figure ci-après schématise le menu principale de ce logiciel.

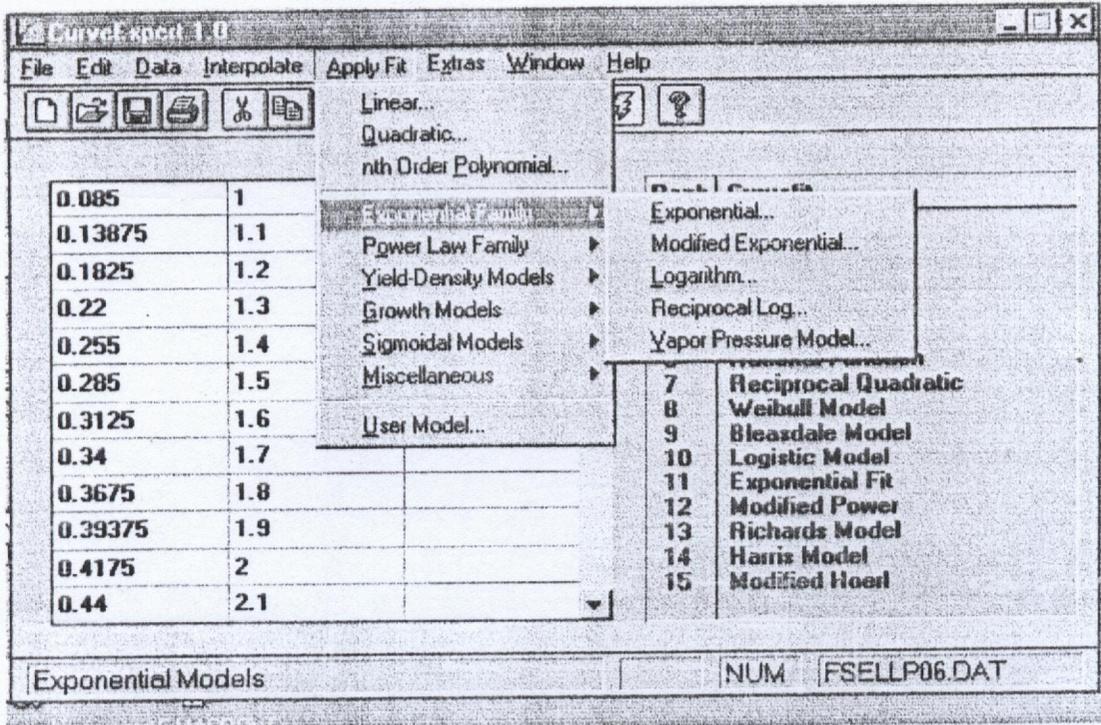


Fig.D.1 Menu générale du CurveExpert

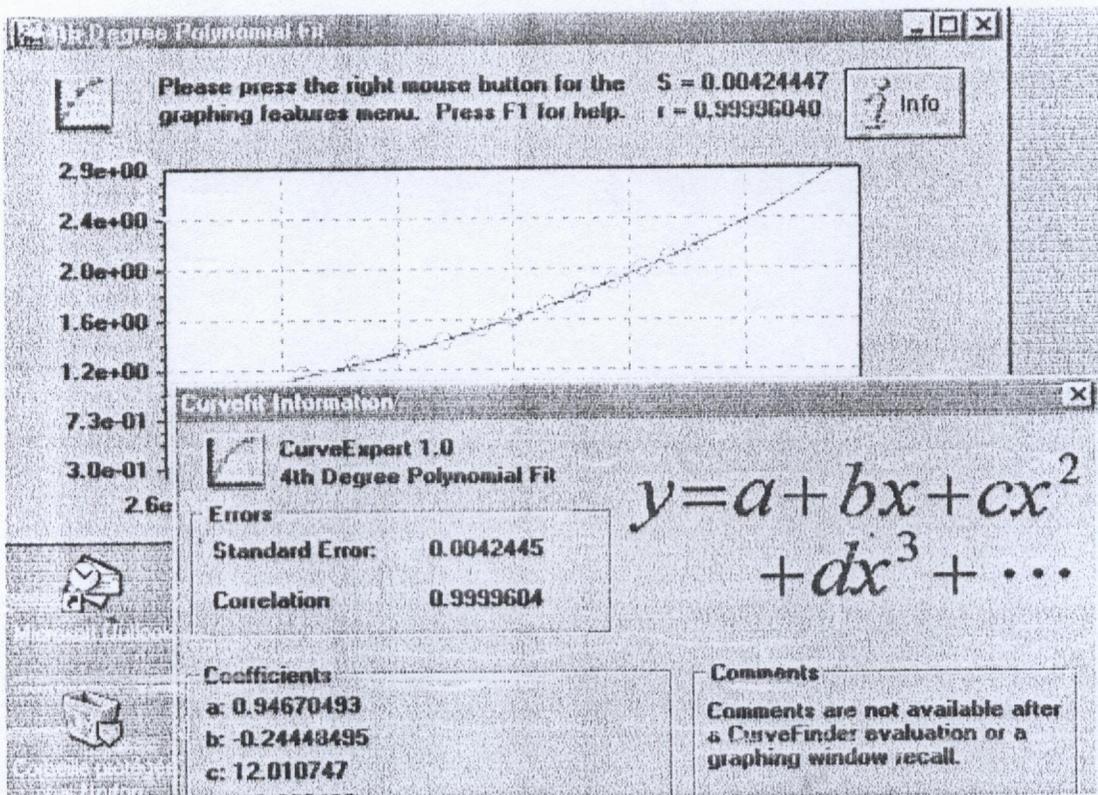


Fig.D.2 Lissage des données par CurveExpert

## RESULTATS DU LISSAGE MATHÉMATIQUE DES DONNÉES

### D.1 FIGURE 6.1 :

Posons  $\alpha = d/\rho$ ,  $\alpha \in [0.03, 100]$

$$f(\alpha) = a_1 \cdot \alpha^{b_1}$$

$a_1 = 3.72412$	$s = 0.039561$
$b_1 = 0.342005$	$r = 0.977392$

### D.2 FIGURE 8.1 :

Posons  $\alpha = a/(a+r)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$

$f_0$  est de la forme :

$$f_0(\alpha) = \frac{a_1 + b_1 \alpha}{1 + c_1 \alpha + d_1 \alpha^2}$$

$f_1$  est de la forme :

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{a_1 + b_1 \alpha + c_1 \alpha^2}$$

$f_0$	$f_1$
$a_1 = 1.1170912$ $c_1 = 0.78878984$ $b_1 = -1.1171787$ $d_1 = -0.1362147$	$a_1 = 0.44564925$ $c_1 = -0.03806094$ $b_1 = 0.59173317$
$s = 0.0046742$ $r = 0.9999426$	$s = 0.0046506$ $r = 0.999946$

### D.3 FIGURE 9.1 :

Posons  $\alpha = a/b$ ,  $\alpha \in [0, 1]$

$$f(\alpha) = \frac{a_1 + b_1 \alpha + c_1 \alpha^2 + d_1 \alpha^3 + e_1 \alpha^4}{\sqrt{1 - \alpha}}$$

$a_1 = 0.99592547$	$c_1 = 0.41787944$	$s = 0.0092746$ $r = 0.9906452$
$b_1 = -0.3995966$	$d_1 = 1.4030262$	
$e_1 = -1.5849668$		

**D.4 FIGURE 14.1 :**

Posons  $\alpha = a/(a+h)$ ,  $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha) = a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 + e_1\alpha^4$$

$f_I$	$f_{III}$
$a_1 = 0.99564906$ $c_1 = -6.126736$	$a_1 = 0.99283455$ $c_1 = -3.5493633$
$b_1 = 0.49866$ $d_1 = 8.9667566$	$b_1 = 0.46653179$ $d_1 = 4.47604339$
$e_1 = -4.3241812$	$e_1 = -2.3747727$
$s = 0.015126$ $r = 0.999$	$s = 0.01681$ $r = 0.999233$

**D.5 FIGURE 15.1 :**

Posons  $\alpha = a/(a+h)$ ,  $\alpha \in [0,1]$

$$f(\alpha) = a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 + e_1\alpha^4$$

$f_I$	$f_{III}$
$a_1^* = 1.1141706$ $c_1 = -7.5375703$	$a_1 = 0.9936217$ $c_1 = -2.3793636$
$b_1 = 0.5248064$ $d_1 = 11.307071$	$b_1 = 0.32644615$ $d_1 = 2.0304433$
$e_1 = -5.4017541$	$e_1 = -0.9197435$
$s = 0.011635$ $r = 0.99972$	$s = 0.0111058$ $r = 0.9996583$

## D.6 FIGURE C.17.1 :

Posons  $\alpha = a/2c$ ,  $\alpha \in [0,0.5]$

$$Q(\alpha) = a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2 + d_1\alpha^3 + e_1\alpha^4$$

$\sigma/\sigma_e$			
0.2	0.6	0.8	1.0
$a_1 = 0.8407989$	$a_1 = 0.94670493$	$a_1 = 0.86088099$	$a_1 = 0.7850548$
$b_1 = 2.9808378$	$b_1 = -0.2444849$	$b_1 = 0.39048546$	$b_1 = 0.4468583$
$c_1 = -8.406515$	$c_1 = 12.010747$	$c_1 = 7.3584776$	$c_1 = 6.7373791$
$d_1 = 32.73217$	$d_1 = -20.062406$	$d_1 = -7.324974$	$d_1 = -5.076520$
$e_1 = -30.30506$	$e_1 = 17.273936$	$e_1 = 5.6674104$	$e_1 = 3.1700936$
$s = 0.0036349$	$s = 0.0042445$	$s = 0.00429$	$s = 0.0003724$
$r = 0.9999$	$r = 0.99996$	$r = 0.999995$	$r = 0.999975$

## D.7 FIGURE C.23.1 :

Posons  $\alpha = d/D$ ,  $\alpha \in [0,1]$

$f_I, f_{II}, f_{III}$  sont de la forme :

$$f(\alpha) = \frac{a_1 + b_1\alpha}{1 + c_1\alpha + d_1\alpha^2}$$

$f_I$	$f_{II}$	$f_{III}$
$a_1 = 0.65570261$	$a_1 = 0.4226967$	$a_1 = 0.42363162$
$b_1 = -0.65511364$	$b_1 = -0.4227027$	$b_1 = -0.4235844$
$c_1 = -0.6740388$	$c_1 = -1.0041761$	$c_1 = -1.0070114$
$d_1 = -0.16094535$	$d_1 = 0.1024008$	$d_1 = 0.14795352$

$s = 0.0149823$ $r = 0.9979541$	$s = 0.0011932$ $r = 0.999698$	$s = 0.0024598$ $r = 0.9998779$
------------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

**D.8 FIGURE 26.1 :**

Posons  $\alpha = a/r$ ,  $\alpha \in [0,6]$

$f$  est de la forme : 
$$f(\alpha) = \frac{a_1 + b_1\alpha}{1 + c_1\alpha + d_1\alpha^2}$$

$a_1 = 0.99988881$	$c_1 = 13.352165$	$s = 0.01364924$
$b_1 = 12.284233$	$d_1 = 28.537753$	$r = 0.99943198$

**D.9 TABLEAU T.C.1 :**

Posons  $\alpha = a/r$   $\alpha \in [0,10]$

$f_1, f_2, f_3, f_4$  sont de la forme :

$$f(\alpha) = \frac{a_1 + b_1\alpha}{1 + c_1\alpha + d_1\alpha^2}$$

$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$a_1 = 3.3848812$	$a_1 = 3.3827283$	$a_1 = 2.2723446$	$a_1 = 2.2356023$
$b_1 = 2.5452164$	$b_1 = 2.8340028$	$b_1 = 1.5355433$	$b_1 = 2.9499278$
$c_1 = 3.3675318$	$c_1 = 3.277037$	$c_1 = 2.1300687$	$c_1 = 2.7849479$
$d_1 = 0.0486320$	$d_1 = -0.031350$	$d_1 = 0.0138799$	$d_1 = 0.2410605$
$s = 0.0217959$	$s = 0.0169966$	$s = 0.0292620$	$s = 0.03923253$
$r = 0.999683$	$r = 0.999683$	$r = 0.9984025$	$r = 0.9952094$

Si  $\alpha > 10$  :

$$f_1 = f_3 = 0.707 ; \quad f_2 = f_4 = 1.0$$

**D.10 TABLEAU T.C.2 :**

Posons  $\alpha = d/D$  ,  $\alpha \in [0,0.75]$

$$f_1(d/D) = a_1(1 - e^{b_1\alpha})$$

$a_1 = 0.25354785$	$s = 0.0146527$
$b_1 = 1.1729188$	$r = 0.9859013$

**D.11 TABLEAU T.C.3 :**

Posons  $\alpha = D/d$  :

Pour  $\alpha \in [1,5/4]$   $f_2(d/D) = -1.53\alpha + 1.53$

Pour  $\alpha > 5/4$   $f_2(d/D) = 0.37$

**D.12 TABLEAU TC.4 :**

Posons  $\alpha = a/b$  ,  $\alpha \in [0.05,0.6]$

$$f(\alpha) = a_1 - b_1 e^{-c_1 \cdot \alpha^{d_1}} ; \quad \text{si } \alpha > 0.6 \quad f(\alpha) = 0.73$$

$a_1 = 0.81238371$	$c_1 = 3.4527729$	$s = 0.00937003$
$b_1 = 1.3854258$	$d_1 = 0.3754930$	$r = 0.9906452$

## ANNEXE E

Acier	Produit	Orientation de l'éprouvette	Température d'essai (°C)	$\sigma_e$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )
4330 V (Recuit 275°C)	Forgé	L-T	21	1400	86-94
4330 V (Recuit 425°C)	"	"	"	1315	103-110
4340 V (Recuit 205°C)	"	"	"	1580-1660	44-66
4340 (Recuit 260°C)	Laminé	"	"	1495-1640	50-63
4340 (Recuit 425°C)	Forgé	"	"	1360-1455	79-91
D6AC (Recuit 540°C)	Laminé	"	"	1495	102
"	"	"	-54	1570	62
9-4-20 (Recuit 550°C)	"	"	21	1280-1310	132-154
18Ni(200)(480°C 6hrs)	"	"	"	1450	110
18Ni(250)(480°C 6hrs)	"	"	"	1785	88-97
18Ni(300)(480°C)	"	"	"	1905	50-64
18Ni(300)(480°C 6hrs)	Forgé	"	"	1930	83-105
AFC77 (425°C Recuit)	"	"	24	1530	79

Matériau	Température d'essai (°C)	KV (Joules)	$\sigma_y$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )
0,35C-3,5Cr-0,5Mn-0,1V	+ 20	27	688	159
"	- 65	13,5	786	83
"	- 20	17,5	720	119
"	- 30	16	693	118
"	+ 20	-	791	66
0,28C-2,4Ni-0,8G-0,5Mn-0,1V	+ 20	46	752	99
"	+ 100	104	703	236
"	+ 40	58,5	728	139
"	- 75	11	807	64
0,35C-3,3Ni-1,6Cr-0,6Mn-0,15V	+ 20	65	751	256
"	- 60	175	811	91
"	- 30	24,5	751	194
0,3C-1Cr-0,7Mn-0,32V-0,7Ni	+ 20	20,5	571	76
0,3C-1,2Cr-1,1Mn-0,37V-0,6Ni	+ 20	8	550	71
"	+ 20	8	550	69
"	+ 20	8	550	78
0,2C-1Cr-0,7Mn-0,38V-0,7Ni-0,06B	+ 35	12	576	63
"	+ 20	-	469	114
0,16C-11,1Cr-0,6Mn-0,27V-0,21Nb-0,07N	+ 20	12	700	61
0,15C-9,9Cr-0,7Mn-0,30V-0,22Nb	+ 20	24,5	711	117
"	+ 20	24,5	700	78
0,6C-7Mn-9Ni-4Cr	+ 20	-	664	87
"	+ 20	-	664	92
0,5C-18,8Mn-4,4Cr-0,1Ni	+ 20	-	1139	127
0,14C-11,1Cr-0,8Ni-0,6Mn	+ 20	12	758	58
0,3V-0,4Nb	+ 20	12	758	49
"	+ 20	12	758	61
0,04C-14,3Cr-5,4Ni-1,7Mn	+ 20	7	1130	51
1,7Cu-0,8Nb	+ 20	-	979	39
Ti-2,3Al-11,2Sn-4,6Mn	+ 20	-	979	39
0,05C-14,2Cr-5,3Ni-1,6Mn-1,6Cu-0,4Nb	+ 20	35	1074	117

Tab E.1 Propriétés de ténacité pour quelques Aciers [3]

Désignation	Orientation de l'éprouvette	$\sigma_e$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )
2020 - T651	T - L	526	18
2024 - T4	L - T	331	50
2024 - T351	T - L	302	33,5
2219 - T87	L - T	399	36
	T - L	380	33
2219 - T851	L - T	409	39,5
	T - L	403	41
7075 - T6	L - T	541	36
	T - L	536	26
7075 - T7351	L - T	456	35,5
	T - L	447	29
7079 - T6	T - L	516	24
7106 - T63	T - L	362	45

Alliage	Produit	Orientation de l'éprouvette	Température d'essai (°C)	$\sigma_e$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )
2014-T651	Plaque	L-T	21-32	435-470	23-27
"	"	T-L	"	435-455	22-25
"	"	S-L	24	380	20
2014-T6	Forgé	L-T	"	440	31
"	"	T-L	"	435	18-21
2020-T651	Plaque	L-T	21-32	525-540	22-27
"	"	T-L	"	530-540	19
2024-T351	"	L-T	27-29	570-385	31-44
"	"	T-L	"	305-340	30-37
2024-T851	"	L-T	21-32	455	23-28
"	"	T-L	"	440-455	21-24
2124-T851	"	L-T	"	440-460	27-36
"	"	T-L	"	450-460	24-30
2219-T851	"	L-T	"	345-360	36-41
"	"	T-L	"	340-345	28-38
7049-T73	Forgé	L-T	"	460-510	31-38
"	"	T-L	"	460-470	21-27
7050-T73651	Plaque	L-T	"	460-510	33-41
"	"	T-L	"	450-510	29-38
"	"	S-L	"	430-440	25-28
7075-T651	"	L-T	"	515-560	27-31
"	"	T-L	"	510-530	25-28
"	"	S-L	"	460-485	16-21
7075-T7351	"	L-T	"	400-455	31-35
"	"	T-L	"	395-405	26-41
7475-T651	"	T-L	"	505-515	33-37
7475-T7351*	"	T-L	"	395-420	39-44
7079-T651	"	L-T	"	525-540	29-33
"	"	T-L	"	505-510	24-28
7178-T651	"	L-T	"	560	26-30
"	"	T-L	"	540-560	22-26
"	"	S-L	"	470	17

Tab E.2 Propriétés de ténacité pour quelques alliages d'Aluminium [3]

Métal	Environnement	Orientation de l'éprouvette	$\sigma_e$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{Isc}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	Durée d'essai (h)
<i>Alliages d'Aluminium</i>						
2014 - T6	Eau de mer synt.	S-L	420	21	18	—
"	Solution Na Cl	"	—	—	≈ 8	≈ 10 <sup>4</sup>
2024 - T351	3,5 % Na Cl	"	325	(55)	11	—
"	Solution Na Cl	"	—	—	≈ 9	≈ 10 <sup>4</sup>
2024 T852	Eau de mer	"	370	19	15	—
"	Solution Na Cl	"	—	—	≈ 17	≈ 10 <sup>4</sup>
2024 - T851	eau distillé	L-T	410	21	24	—
7075 - T6	3,5 % Na Cl	S-L	505	25	21	—
"	Solution Na Cl	"	—	—	≈ 8	≈ 10 <sup>4</sup>
7075 - T7351	3,5 % Na Cl	"	360	26	23	—
"	Solution Na Cl	"	—	—	< 22	≈ 10 <sup>4</sup>
"	3,5 % Na Cl	T-L	365	32	26	—
7175 - T66	"	—	525	32	< 6,6	—
"	Solution Na Cl	S-L	—	—	7	≈ 10 <sup>4</sup>
7175 - T736	"	—	455	27	21	> 1029
<i>Aciers</i>						
18N <sub>i</sub> (300) Marag.	"	T-L	1960	80	8	> 150
4340	"	T-S	1335	79	9	> 333
"	"	L-T	1690	56	17	> 58
"	Eau de mer	T-L	1550	(69)	6	> 20
"	"	"	1380	(65)	11	—
"	"	"	1205	(83)	30	—
"	"	"	1035	(94)	65	—
"	"	"	860	(98)	77	—
300 M	3,5 % Na Cl	L-S	1735	70	22	—
"	"	T-L	1725	61	20	—
<i>Alliages de Titane</i>						
T <sub>i</sub> -6Al-4V	"	L-T	890	104	39 ± 10	—
"	"	L-S	"	99	45 ± 8	—
T <sub>i</sub> -8Al-1M <sub>0</sub> -1V	"	T-S	825	97	25	—

Tab E.3 Propriétés en milieu agressif de quelques alliages[3]

Acier	Traitement Thermique	$\sigma_e$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$10^{14} \times C$	$n$
N <sub>i</sub> -Cr-M <sub>0</sub> -V	3178	779	220	6,45	1,4
N <sub>i</sub> -Cr-M <sub>0</sub> -V	ZV-3037	1075	182	1,74	1,5
N <sub>i</sub> -M <sub>0</sub> -V	8887	510	121	8,66 × 10 <sup>-6</sup>	2,7
N <sub>i</sub> -M <sub>0</sub> -V	124J357	565	99	0,040	1,9
Cr-M <sub>0</sub> -V	124K406	641	60	1,35 × 10 <sup>-24</sup>	6,7

Tab E.4 Résistance à la rupture et coefficients de Paris pour quelques Aciers[3]

Matériau	Résistance Ultime $\sigma_u$ (MPa)	$K_{Ic}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$S_c$ (N/m)
Aciers			
A 517 F	827	186,8	16078
AISI 4130	1172	109,9	5808
AISI 4340	2068	44	931
"	1931	44	931
"	1793	49,5	1178
"	1655	65,9	2088
"	1517	82,4	3265
300 M	2068	44	931
"	1931	44	931
"	1793	49,5	1178
"	1655	65,9	2088
"	1517	82,4	3265
D6AC	1655	44-100	2088-4809
H - 11	2206	33	524
"	2068	44	931
"	1931	49,5	1178
12N <sub>i</sub> -5C <sub>r</sub> -3M <sub>0</sub>	1310	241,7	28093
18N <sub>i</sub> (300) Maraging	2000	55	1455
18N <sub>i</sub> (250) "	1793	93,4	8723
18N <sub>i</sub> (200) "	1448	131,9	17397
18N <sub>i</sub> (180) "	1345	175,8	14862
9N <sub>i</sub> - 4C <sub>0</sub> - 0,3 C	1793	65,9	2088
Alliages d'aluminium			
2014 - T 651	483	25,3	619
2024 - T 851	448	25,3	619
2219 - T 851	455	36,3	1275
2618 - T 651	441	35,1	1192
7001 - T 75	620	27,5	732
7075 - T 651	572	28,6	791
7079 - T 651	537	31,9	985
7178 - T 651	572	26,4	674

TabE.5 Propriétés de ténacité pour quelques alliages[3]

Acier	$K_s$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_c$ (MPa $\sqrt{m}$ )	R	C'	C'
A 36	6,0	104,4	0,1	8,355	11,144
A 588 A	6,0	118,7	0,1	8,746	11,602
A 588 B	6,0	134,1	0,1	15,666	19,711
A 517 E	6,0	182,4	0,1	8,558	10,596
A 517 F	6,0	145,0	0,1	6,520	8,154

Tab E.6 Valeurs des coefficients de McEvily pour quelques Aciers[3]

CARBON AND ALLOY STEELS			K	J	n <sub>J</sub>	C	m
(1) ASTM	A36	Plate	90-120		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	"	Weldments	90-120		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	"	Forgings	90-120		.060-.100	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	A217	Castings	70-75		.050-.080	$4.24 \times 10^{-11}$	2.9
	A296	Castings	85-90		.050-.080	$8.49 \times 10^{-11}$	3.3
	A441	Plate	90-120		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	"	Weldments	90-120		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	"	Forgings	90-120		.060-.100	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	A441	Plate @ -10°F	70		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10}$	3.0
	A508	C1 2 Plate, Sub-Surf. flaw in air	120		.050-.080	$.027 \times 10^{-3**}$	3.73**
	A508	C1 3 Plate, Sub-Surf. flaw in air	120		.050-.080	$.027 \times 10^{-3**}$	3.73**
	A508	C1 2 Plate Surf, flaw in H <sub>2</sub> O	120		.050-.080	$.038 \times 10^{-3**}$	3.73**
	A508	C1 3 Plate Surf, flaw in H <sub>2</sub> O	120		.050-.080	$.038 \times 10^{-3**}$	3.73**
	A514B	Plate	100		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	A517	Plate	150-177		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	A533B	Plate	120		.050-.080	$1.0 \times 10^{-15*}$	2.20*
	A572	Gr 50 Plate .50 in. @ + 70°F	380		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A572	Gr 50 Plate .50 in. @ + 40°F	273		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A572	Gr 50 Plate .50 in. @ - 40°F	150		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A572	Gr 50 Plate 1.50 in. @ + 70°F	318		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A572	Gr 50 Plate 1.50 in. @ + 40°F	155		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A572	Gr 50 Plate 1.50 in. @ - 40°F	57		.050-.080	$3.6 \times 10^{-10*}$	3.0*
	A645	Plate				$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
AISI	1020	Plate H.R.	120		.050-.080	$2.0 \times 10^{-31*}$	5.60*
	1045	Plate H.R.	120		.050-.080	$5.6 \times 10^{-24*}$	4.10*
	1144	Plate Q&T	56		.050-.080	$3.1 \times 10^{-29*}$	5.00*
	4140	Plate Q&T	56		.050-.080	$2.0 \times 10^{-51*}$	10.00*
	4330M	Plate Q&T	168		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	4340	Plate Q&T	110-140		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	HY-80	Plate Q&T	120		.050-.080	$2.9 \times 10^{-9}$	2.13
	HY-130	Plate Q&T	130		.050-.080	$2.9 \times 10^{-9}$	2.13
	HP-9-4	Plate Q&T	110-150		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	18Ni(190)	Plate Q&T	113		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	18Ni(250)	Plate	70-90		.050-.080	$6.6 \times 10^{-9}$	2.25
	D6ac	Plate (@F <sub>cy</sub> 210)	90		.050-.080	$16.0 \times 10^{-10}$	2.60
	5Ni-Cr-Mo-V	Plate (@F <sub>cy</sub> 150)	100-120		.050-.080	$3.04 \times 10^{-9}$	2.26
(2) STAINLESS							
	304	Plate	330		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	304N	Plate	308	3160	.050-.080	$1.6 \times 10^{-10}$	3.05
	304N	Plate @ -328°F	299	2780	.050-.080	$2.3 \times 10^{-10}$	3.02
	304N	Plate @ -452°F	195	1190	.050-.080	$9.6 \times 10^{-11}$	3.46
	308	Plate	300		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	308	Weld Metal	308		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	403	Plate	110-140		.050-.080	$2.0 \times 10^{-9}$	2.35
	PH14-8	Mo	160		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	PH15-7	Mo	60-85		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	AM350-CRT		120		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	AM380-SCT		210		.050-.080	$3.0 \times 10^{-10}$	3.25
	Nitronic 33	Plate @ + 70°F	342	3800	.050-.080	$5.6 \times 10^{-12}$	3.82
		Plate @ - 328°F	119	440	.050-.080	$1.9 \times 10^{-4}$	3.98
		Plate @ - 452°F	64		.050-.080	$9.1 \times 10^{-11}$	5.32

Tab E.7 Constantes de la lois de Paris pour quelques alliages [15]

## ANNEXE F

### PROGRAMATION WINDOWS

#### 1. INTRODUCTION :

Sous *Dos* on ne peut exécuter qu'un seul programme à la fois, le programme exécuté prend le contrôle total de l'ordinateur, par contre sous *Windows* on peut exécuter plus qu'une application à la fois et les applications peuvent communiquer entre elles, car *Windows* est un système d'exploitation multitâche.

Un programme *Windows* est constitué d'un ensemble de fenêtres appelées *Fiches* en *Delphi*, ces fiches accueillent les contrôles ou les composants visuels. Une application *Delphi* est centrée autour de la fiche, pour chaque fiche correspond une unité ou un fichier unité qui est un fichier de code source comportant l'extension *Pas*.

#### 2. PROGRAMME PILOTE PAR EVENEMENT :

Un programme piloté par événement est composé de blocs de code qui s'exécutent lorsqu'un événement ou action survient, les clics de Souris, l'appui sur une touche et le démarrage d'une application sont des exemples d'événements. Dans un environnement graphique où les applications s'exécutent dans le même bureau, un modèle piloté par événement est le meilleur moyen pour répondre aux entrées de l'utilisateur et à ces interactions avec l'environnement.

#### 3. INTERFACE GRAPHIQUE UTILISATEUR (GUI) :

*GUI* est un type de format d'affichage qui permet à un utilisateur de choisir des commandes, de lancer des programmes et d'afficher des listes de fichiers et d'options en pointant sur des représentations pictographiques (des icônes) et sur des listes d'éléments de menu présent à l'écran. On effectue généralement des choix au moyen d'un clavier ou d'une souris, *Windows 95-98* et sont des exemples de *GUI*.

#### 4. DEVELOPPEMENT RAPIDE DES APPLICATIONS (RAD) :

**RAD** est assez important, à l'aide d'un ensemble d'outils sophistiqués ( Delphi 3 par exemple), le programmeur développe rapidement des applications finalisées. En effet, les outils permettent au programmeur de mettre en oeuvre les fonctionnalités les plus complexes sans fournir un travail démesuré, ainsi vous pouvez utiliser les boites de dialogue ouvrir et enregistrer qui sont des boites de dialogues de *Windows 98* au lieu de devoir les concevoir de zéro. Vous pouvez aussi utiliser le contrôle conteneur *OLE* pour incorporer une feuille de calcul Excel dans l'application, sans devoir écrire un tableur en *Delphi*. *Delphi 3* est l'exemple d'un environnement du développement *RAD*, puisqu'il met à votre disposition des outils permettant de créer des très bonnes applications en peu de temps et moyennant peu de codage.