

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département de mécanique

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Energétique

CONVECTION MIXTE LAMINAIRE POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN

THERMODEPENDANT DANS UNE CONDUITE ANNULAIRE

HORIZONTALE EXCENTRIQUE

Par

**Abderrahmane HORIMEK**

Devant le jury composé de :

Y. Benkedda	Maître de conférences. U. de Blida	Président
T. Rezzoug	Maître de conférences. U. de Blida	Examineur
L. Amtout	Chargé de recherche. U. de Blida	Examineur
B. Benaouda-Z	Maître de conférences. U. de Blida	Rapporteur
N. Ait Messaoudene	Professeur. U. de Blida	Co-Rapporteur

Blida. Septembre 2006



**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences de l'Ingénieur**

Département de mécanique

**MEMOIRE DE MAGISTER**

Spécialité : Energétique

CONVECTION MIXTE LAMINAIRE POUR UN FLUIDE NON-NEWTONIEN

THERMODEPENDANT DANS UNE CONDUITE ANNULAIRE

HORIZONTALE EXCENTRIQUE

Par

**Abderrahmane HORIMEK**

Devant le jury composé de :

Y. Benkedda	Maître de conférences. U. de Blida	Président
T. Rezzoug	Maître de conférences. U. de Blida	Examineur
L. Amtout	Chargé de recherche. U. de Blida	Examineur
B. Benaouda-Z	Maître de conférences. U. de Blida	Rapporteur
N. Ait Messaoudene	Professeur. U. de Blida	Co-Rapporteur

Blida. Septembre 2006

إلى والديّ الكريمين

إلى إخوتي و أخواتي

إلى الصّغيرتين إيمان و سلمى

أهري هذا العمل

## Résumé

Une étude numérique de la convection mixte, pour un fluide non newtonien dans une conduite annulaire horizontale excentrique a été menée. Le comportement rhéologique du fluide est supposé être décrit par le modèle d'Ostwald. L'écoulement est supposé laminaire et l'hypothèse de Boussinesq est prise en considération. Les cylindres intérieur et extérieur sont soumis à des densités de flux de chaleur constantes. Le régime dynamique est supposé développer à l'entrée de la conduite, avec un profil de température uniforme. Les équations de conservation gouvernant le problème sont résolues numériquement en utilisant une méthode aux différences finies à schéma implicite. La variation des propriétés rhéologiques avec la température est prise en considération. L'accroissement de l'excentricité influe considérablement sur l'écoulement principal, où une accélération de ce dernier est observée dans la partie large, et une décélération dans la partie étroite qui peut aller jusqu'au blocage de l'écoulement pour des excentricités supérieures à 60%. Le rapprochement des deux cylindres dans la partie étroite crée une stratification du champ thermique entre les parties étroite et large, et la couche limite thermique se développe plus rapidement dans la première par rapport à la deuxième. La décroissance de la consistance du fluide au voisinage des parois chauffées, induit un mouvement radial des particules froides de la zone centrale vers les parois chaudes. Cet écoulement secondaire induit une décélération de l'écoulement principal dans la zone centrale et une accélération au voisinage des parois. Mais pour des excentricités importantes, une accélération dans toute la partie étroite est observée suite à la diminution de la viscosité dans toute cette partie. A partir de la section d'entrée se développe un écoulement azimutal, suite à la diminution de la densité avec la température. Cet écoulement secondaire engendre une stratification du champ thermique dans une section droite de la conduite. L'accroissement de l'excentricité vers le bas intensifie l'écoulement azimutal, alors que le décalage vers le haut l'affaiblit. La stratification du champ thermique entre le haut et le bas de la conduite annulaire est plus accentuée pour le cas du décalage vers le haut par rapport au cas concentrique; pour le cas du décalage vers le bas elle agrandit pour des faibles excentricités ( $\llapprox 0.2$ ) et affaiblit pour les excentricités supérieures.

## مُلخَص

تم القيام بالدراسة العددية للحمل الحراري المزدوج لسائل غير نيوتوني في قناة أفقية حلقيّة لا مركزية. السلوك الريولوجي للسائل يُفترض بأنه يمكن وصفه بنموذج أوستوالد. جريان السائل يعتبر صفائحيًا، كما أخذت فرضية بوسينسك بعين الاعتبار. الأنبوبان الخارجي و الداخلي يتم تسخينهما بتدفق حراري ثابت. عند مدخل القناة، يفترض بأن النظام الديناميكي للجريان متطور، و أن طيف الحرارة منتظم. تم حل معادلات الانحفاظ التي تحكّم المسألة باستعمال طريقة الفروق المنتهية بتصميم ضمني، و أخذ في الحسبان تغيير الخصائص الريولوجية للسائل مع الحرارة. زيادة لا مركزية القناة له تأثير جد واضح على شكل و شدة التدفق الرئيسي، حيث يُلاحظ تسارع هذا الأخير في المنطقة الواسعة، و تباطؤه في المنطقة الضيقة، أين يمكن أن يصل الأمر إلى حد توقفه عندما تفوق نسبة اللامركزية 60%. تقارب الأنبوبين في المنطقة الضيقة يُحدث تباينًا في المجال الحراري بين المنطقتين الضيقة و الواسعة، كما يلاحظ التطور السريع للطبقة الحدية الحرارية في المنطقة الأولى مقارنةً بالثانية. تناقص كثافة السائل بالقرب من الجدران المسخنة، يولد تدفقًا قطريًا، تنتقل فيه الجزيئات الباردة من المركز نحو الجدران الساخنة مُحدثًا بذلك إبطاء للتدفق الرئيسي في المنطقة المركزية، و تسريعًا بالقرب من الجدران. لكن، و من أجل نسب لا تمرکز معتبرة، يلاحظ تسارع التدفق الرئيسي في كامل المنطقة الضيقة نتيجةً لتناقص لزوجة السائل في كل طبقاتها. بمجرد دخول السائل القناة، ينشأ تدفق زاوي سببه تناقص كتلة السائل الحجمية بفعل الحرارة. هذا التدفق الزاوي ينتج عنه تباينٌ في المجال الحراري في مقطع من القناة. إحداث لا مركزية باتجاه الأسفل يؤدي إلى زيادة شدة التدفق الزاوي، في حين أنّ إحداثها نحو الأعلى يُضعفها. التباين في المجال الحراري بين أسفل و أعلى القناة الحلقيّة يكون أقوى في حالة وجود لا تمرکز نحو الأعلى بالمقارنة مع قناة بأنبوبين متمركزين؛ في حالة اللاتمرکز نحو الأسفل، يزيد التباين من أجل نسب صغيرة ( $\approx 0.2$ ) و يتناقص من أجل النسب الكبيرة.

## REMERCIEMENTS

L'heure des traditionnels remerciements a sonné... j'en arrive maintenant à un exercice délicat de la rédaction, celui qui consiste à apporter la touche finale au mémoire en remerciant l'ensemble des personnes qui ont contribué, chacun à sa manière, à la réussite de mon mémoire. Je dois avouer que j'écris ces lignes non sans un certain stress... celui de ne pas remercier assez certaines personnes ou plus gênant d'en oublier certaines... Malgré cela, il faut se lancer!

Pour commencer, je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur BENAOUA-ZOUAOUI. Je ne saurais jamais le remercier assez pour la confiance qu'il m'a toujours accordé, du début jusqu'à l'aboutissement de ce mémoire. Je le remercie aussi pour son aide précieuse et sa disponibilité.

Je tiens à remercier vivement Monsieur AIT MESSAOUDENE, en tant qu'enseignant avec qui j'ai beaucoup appris, et en tant qu'encadreur qui n'a jamais cessé de m'encourager et de me conseiller pour mener à bien ce mémoire.

Mes sincères reconnaissances à Monsieur BENKEDDA pour avoir accepté de critiquer mon travail et d'avoir présider le débat lors de la soutenance.

Je souhaiterais témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur REZZOUG et Monsieur AMTOUT qui ont manifesté l'intérêt qu'ils portaient à mon travail en acceptant d'être les examinateurs de mon mémoire. Leurs commentaires, aussi bien dans leurs rapports que le jour de la soutenance, ont été très enrichissants.

J'aimerais aussi témoigner toute ma reconnaissance à Monsieur C.NOUAR pour ses remarques et ses discussions enrichissantes très pertinentes.

Je ne peux conclure cette liste sans évoquer les personnes qui m'ont aidé pour réaliser ce mémoire. Je commence par mon conseiller en informatique K.KADRI, mes proches amis Y.KENNEF, H.KAMMAR, N.REKKI, R.BENDIB pour leurs encouragements, mes amis de l'IAP de BOUMERDES, notamment F.NOUGAL pour ses aides. Et enfin, ceux qui ont participé de près ou de loin pour compléter ce travail.

## TABLE DES MATIERES

RESUME	1
REMERCIEMENTS	3
TABLES DES MATIERES	4
LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX	6
INTRODUCTION	9
1 ANALYSE GLOBALE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	11
1.1 Introduction	11
1.2 Problématique scientifique	11
1.2.1 Analyse globale	12
1.3 Revue bibliographique	13
1.4 Positionnement de notre travail par rapport à la littérature	16
2 NOTIONS RHEOLOGIQUES ET FLUIDES UTILISES	17
2.1 Introduction	17
2.2 Notion de mouvement laminaire de cisaillement	17
2.2.1 Définition	17
2.2.2 Contrainte de cisaillement	17
2.2.3 Déformation et vitesse de cisaillement	18
2.2.4 Equation rhéologique d'état	19
2.3 Caractéristiques des Fluides utilisés	24
3 FORMULATION DU PROBLEME ET RESOLUTION NUMERIQUE	28
3.1 Introduction	28
3.2 Equations gouvernant le problème	28
3.2.1 Présentation du système de coordonnées bipolaires	29
3.2.2 Forme générale des équations	30
3.2.3 Hypothèses	32
3.2.4 Forme simplifiée des équations	33
3.2.5 Condition aux limites	34
3.3 Mise sous forme adimensionnelle	35
3.3.1 Choix des grandeurs de référence	35
3.3.2 Equations adimensionnelles	36
3.3.3 Conditions aux limites	37
3.4 Résolution numérique	38
3.4.1 Maillage de la géométrie	38
3.4.2 Discrétisation des équations	38
3.4.3 Equations discrétisées	40
3.5 Mises des Equations discrétisées sous forme matricielle	46
3.6 Résolution des équations discrétisées	52
3.6.1 Algorithme de résolution	52
3.6.2 Critère de convergence	54
3.6.3 Maillages choisis	61



	5
3.6.4 Temps de calcul	61
3.7 Optimisation et validation du code de calcul	62
4 ANALYSE DES RESULTATS ET DISCUSSIONS	67
4.1 Introduction	67
4.2 Convection forcée avec consistance constante	67
4.3 Convection forcée avec consistance thermodépendante	73
4.4 Convection mixte avec consistance constante	78
4.5 Convection mixte avec consistance thermodépendante	84
CONCLUSION	93
APPENDICES	95
A. Liste des symboles	95
B. Appendice B	97
C. Appendice C	110
REFERENCES	111

## LISTE DES ILLUSTRATIONS GRAPHIQUES ET TABLEAUX

Figure 2.1	Forces agissant sur deux éléments de couches voisines	18
Figure 2.2	Mouvement laminaire de cisaillement entre deux plans parallèles	19
Figure 2.3	Courbes d'écoulement de fluides présentant une contrainte critique	22
Figure 2.4	Courbes d'écoulement des principales catégories des fluides sans contrainte critique	24
Figure 2.5	Schémas d'un rhéomètre cône-plan	24
Figure 2.6	Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour différentes températures	25
Figure 2.7	Evolution des indices rhéologiques en fonction de la température pour deux solutions de CMC	27
Figure 3.1	Géométrie de la conduite annulaire	29
Figure 3.2	Système des coordonnées bipolaires	30
Figure 3.3	Maillage	38
Figure 3.4	Molécule de la méthode A.D.I	39
Figure 3.5	Système tridiagonal sous forme matricielle	52
Figure 3.6	Algorithme de résolution	53
Figure 3.7	Profils de la vitesse axiale le long de la conduite; Convection forcée ; $n = 0.4$ ; $Pn = 10.7$ ; $Re = 40$ ; $Gr = 0$	63
Figure 3.8	Evolution du profil de la vitesse axiale le long de la zone de chauffage, pour $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ ; Convection mixte; $n = 0.7$ ; $Pn = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$	63
Figure 3.9	Profils de la vitesse azimutale rapportée pour $(\beta = \pi/2)$ , pour différentes positions axiales	64
Figure 3.10	Evolution des nombres de Nu moyens ( $\overline{Nu}$ ) extérieur et intérieur, le long de la zone de chauffage	64
Figure 3.11	Evolution de la température de paroi du cylindre extérieur, le long de la zone de chauffage	64
Figure 3.12	Comparaison entre nos résultats et les résultats de ESCUDIER.M.P et al [25] ; <b>(a)</b> $\varepsilon = 0.2$ ; <b>(b)</b> $\varepsilon = 0.5$ ; <b>(c)</b> $\varepsilon = 0.8$ ; $r_1 = 0.5$ ; $Re = 105$	65

- Figure 4.1 Influence de l'excentricité sur la structure du profil de la vitesse axiale; Convection forcée  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ; **Gauche**  $\beta = 0$ ; **Droite**  $\beta = 0$  68
- Figure 4.2 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection forcée; **Décalage Haut**;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $T_e = 20^\circ C$  70
- Figure 4.3 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Haut**; Convection forcée  $n = 0.7$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ; (— haut — bas) 71
- Figure 4.4 Influence de l'excentricité sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée ;  $n = 1.0$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 27$  ;  $Pr = 891$  72
- Figure 4.5 Influence de l'indice de structure sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée ;  $\varepsilon = 0.2$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 27$  ;  $Pr = 891$  72
- Figure 4.6 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection forcée ; **Décalage Haut**;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 8$ ;  $Re = 40.5$  ;  $Pr = 1410$ ;  $T_e = 20^\circ C$  74
- Figure 4.7 Evolution de la vitesse axiale le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités ; Convection forcée ; **Décalage Haut**;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 8$ ;  $Re = 40.5$  ;  $Pr = 1410$ ;  $T_e = 20^\circ C$  75
- Figure 4.8 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Haut**; Convection forcée ;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 8$ ;  $Re = 40.5$  ;  $Pr = 1410$ ; (— haut — bas) 76
- Figure 4.9 Influence de la thermodépendance sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée,  $n = 1.0$ ;  $Re = 27$  ;  $Pr = 891$  ; —  $P_n = 0$  ; —  $P_n = 8$  77
- Figure 4.10 Structure de l'écoulement secondaire azimuthal à  $z^* = 1m$ ;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$  78
- Figure 4.11 Profil de la vitesse tangentielle pour  $z^* = 2m$  et différentes positions azimuthale; Convection mixte ;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$  79

Figure 4.12	Effet de l'indice de structure sur le profil de la vitesse tangentielle; Convection mixte; $P_n = 0$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$	80
Figure 4.13	Evolution de la température de la paroi extérieure avec l'excentricité; Convection mixte; <b>Gauche: Décalage Haut, Droite: Décalage bas;</b> $n = 0.7$ ; $P_n = 0$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; (— haut — bas)	82
Figure 4.14	Evolution du nombre de Nusselt local, à $\beta = \pi$ et $\beta = 0$ le long de la zone de chauffage, <b>Haut: <math>\varepsilon = 0.0</math>; Bas: <math>\varepsilon = 0.2</math> vers le bas et vers le haut;</b> Convection mixte ; $n = 0.8$ ; $P_n = 0$ ; $Re = 27$ ; $Pr = 891$ ; $Gr = 4258$	83
Figure 4.15	Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; <b>Décalage Haut;</b> Convection mixte ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; (— haut — bas)	86
Figure 4.16	Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; <b>Décalage Bas;</b> Convection mixte ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; (— haut — bas)	87
Figure 4.17	Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ pour différentes excentricités; Convection mixte ; <b>Décalage Haut</b> ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; $T_c = 20^\circ C$	88
Figure 4.18	Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ pour différentes excentricités; Convection mixte ; <b>Décalage Bas</b> ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; $T_c = 20^\circ C$	89
Figure 4.19	Evolution de la vitesse axiale le long de la conduite pour $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ pour différentes excentricités; Convection mixte, <b>Décalage Haut</b> ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; $T_c = 20^\circ C$	90
Figure 4.20	Evolution de la vitesse axiale le long de la conduite pour $\beta = 0$ et $\beta = \pi$ pour différentes excentricités; Convection mixte, <b>Décalage Bas</b> ; $n = 0.7$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 40.5$ ; $Pr = 1410$ ; $Gr = 7497$ ; $T_c = 20^\circ C$	91
Figure 4.21	Evolution du nombre de Nusselt local à $\beta = \pi$ et $\beta = 0$ le long de la zone de chauffage pour une excentricité $\varepsilon = 0.2$ vers le bas et vers le haut; Convection mixte ; $n = 0.8$ ; $P_n = 8$ ; $Re = 27$ ; $Pr = 891$ ; $Gr = 4258$	92
Tableau 3.1	Comparaison de nos résultats avec les résultats de FELDMAN.E.E et al [8]	66

## INTRODUCTION

Le présent travail est une étude numérique du problème de la convection mixte d'un fluide pseudoplastique dans une conduite annulaire horizontale excentrique. Ce problème est rencontré au niveau des industries agro-alimentaires lors de la thermisation des produits alimentaires, qui se fait dans l'espace annulaire de la conduite, où ces deux cylindres sont chauffés à des densités de flux de chaleur constantes. Ces fluides sont caractérisés par une densité et une viscosité qui varient avec la température.

La diminution de la densité avec l'augmentation de température cause la génération d'un écoulement azimutal qui fait monter les courants chauds vers le haut, et descendre les courants froids vers le bas, pour former une stratification du champ thermique entre le haut et le bas, cette dernière augmente le long de la conduite, pour atteindre des niveaux allant parfois jusqu'à dénaturer le produit dans la partie haute. La diminution de la consistance (viscosité) avec la température proche des parois chauffées, engendre un écoulement radial de la zone centrale vers les zones pariétales, cet écoulement permet de refroidir les parois et cause une accélération de l'écoulement principal proche des parois, et par conservation du débit une décélération dans la zone centrale. La stratification thermique décrite ci-dessus, additionnée à la variation de la consistance avec la température, font modifier le comportement de l'écoulement axiale. Cela se traduit par une réaccélération dans la partie supérieure et une décélération qui continue dans la partie inférieure.

L'objectif de notre travail est d'étudier l'influence de l'excentricité sur les écoulements principal et secondaires, ainsi que sur l'intensité de la stratification du champ thermique. Les effets du comportement rhéologique, la thermodépendance du fluide et la présence ou l'absence de la convection naturelle, sont aussi analysés. Pour atteindre ces objectifs, l'étude est structurée en quatre chapitres. Le premier chapitre est une présentation du problème au niveau industriel, suivie d'une analyse globale du problème, une recherche bibliographique est ensuite faite, afin de positionner notre travail par rapport à la littérature. Dans le deuxième chapitre, des notions de rhéologie ainsi que la caractérisation du fluide sur lequel on a travaillé sont présentées. Le troisième chapitre est consacré à la résolution du problème, où sont présentées les équations de conservations

gouvernant notre problème avec leurs conditions aux limites associées, les hypothèses adoptées, la méthode numérique choisie (différences finies à schéma implicite), la discrétisation des équations, l'algorithme de résolution, et la validation de nos résultats avec ceux de BENAOUA-ZOUAOUI.B pour le cas concentrique et avec ceux de FELDMAN.E.E et ESCUDIER.M.P concernant l'effet de l'excentricité sur l'écoulement principal. Le dernier chapitre est consacré à la présentation des résultats et leurs interprétations. Une conclusion générale est faite avec quelques perspectives.

# CHAPITRE 1

## Analyse Globale Et Recherche Bibliographique

# CHAPITRE 1

## ANALYSE GLOBALE ET RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

### **1.1 Introduction :**

Ce chapitre se propose de situer le problème au niveau industriel. Une analyse globale est ensuite effectuée. La problématique scientifique est alors dégagée. Elle est suivie par une étude bibliographique, qui permet de situer notre travail par rapport à la littérature.

### **1.2 Problématique scientifique :**

L'origine de cette étude vient des problèmes rencontrés dans l'industrie agro-alimentaire lors de la thermisation des différents fluides alimentaires. Celle-ci est assurée en faisant circuler le fluide considéré dans une conduite cylindrique droite ou dans une conduite annulaire dont les parois sont chauffées. La géométrie annulaire offre un avantage supplémentaire par rapport à une conduite cylindrique droite, dans le sens où elle présente une surface d'échange plus grande. Dans certaines situations, le chauffage est assuré par passage direct de courant à travers la paroi. Dans ce cas la densité de flux de chaleur est constante le long de la zone de chauffage. Pour ce qui est des fluides alimentaires, il s'agit en général de fluides non-newtoniens, avec une viscosité apparente élevée et une faible conductivité thermique, donc à fort nombre de Prandtl. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite thermique sera très faible au voisinage de la section d'entrée. Seule une très faible couche de fluide sera concernée par le chauffage. La thermisation de tout le fluide nécessite donc, des longueurs importantes d'échangeur. Une analyse d'échelle (cas concentrique) montre que l'ordre de grandeur de la longueur d'établissement de la couche limite thermique est donnée par :

$$\frac{L}{R_2 - R_1} = O(Pe)$$

Où  $R_1$ ,  $R_2$  sont respectivement les rayons des cylindres intérieur et extérieur et  $Pe$  est le nombre de Péclet. Ainsi pour  $Pe = 1000$ , et un espace annulaire  $R_2 - R_1 = 0.02m$ , la longueur d'établissement de la couche limite thermique est de l'ordre de 20m. D'un point de vue technique, l'échangeur de chaleur est constitué d'une ou plusieurs rangées verticales



comprenant chacune plusieurs conduites annulaires horizontales de longueur de 2 à 3m, reliées entre elles par des coudes. Des mesures de températures effectuées à la section de sortie montrent un écart pouvant atteindre 25°C entre la partie supérieure de la conduite annulaire et la partie inférieure. Cette stratification du champ thermique est une conséquence de l'écoulement secondaire dû à la convection naturelle. L'inhomogénéité de la distribution à la sortie de l'échangeur va à l'encontre de ce qui est recherché par les industriels. Si en plus, une température de stérilisation du fluide est exigée, alors la partie supérieure de la conduite annulaire peut se trouver à une température suffisamment élevée pour dénaturer le fluide.

### **1.2.1 Analyse globale :**

Il y a lieu de noter que les propriétés rhéologiques des fluides considérés varient fortement avec la température. A partir de la section d'entrée, une couche limite thermique se développe au niveau des parois chauffées. La décroissance de la viscosité apparente lorsque la température des couches de fluide augmente induit une accélération de ce dernier au voisinage des parois chauffées et une décélération dans la partie centrale par conservation du débit. Ceci génère un mouvement de particules fluides vers les parois chauffées. Simultanément, le fluide au voisinage des parois chauffées est à une température plus élevée donc plus léger que le fluide loin des parois. Il s'ensuit une montée de courants chauds au voisinage des parois et par continuité, une descente de courants froids entre les deux cylindres. Cet écoulement secondaire induit un autre mouvement radial des particules fluides. Elles entrent dans la couche limite thermique, dans la partie inférieure de la conduite annulaire et la quittent à la partie supérieure. La variation de l'excentricité, induit une accélération de l'écoulement principal dans la partie large et une décélération dans la partie étroite. Le transfert convectif est donc amélioré dans la partie large et diminué dans la partie étroite. L'augmentation considérable de l'excentricité fait diminuer fortement la viscosité dans la partie étroite suite au rapprochement des deux cylindres, en créant donc une accélération dans cette dernière. La décélération dans la zone centrale de la partie large se poursuit du fait du déplacement des particules froides du centre vers parois chauffées.

Une deuxième stratification est créée par l'effet du rapprochement des deux cylindres dans la partie étroite. Pour un décalage du cylindre intérieur vers le bas les courants

ascendants s'intensifient de plus en plus avec l'accroissement de l'excentricité. La stratification entre le haut et le bas de la conduite annulaire s'intensifie pour des excentricités ( $< \sim 0.2$ ), mais pour des excentricités supérieures, la stratification diminue progressivement avec l'accroissement de l'excentricité, cela est dû à l'augmentation de l'épaisseur des couches fluides dans la partie supérieure. Pour le deuxième cas, où le cylindre intérieur est décalé vers le haut l'intensité des courants chauds ascendants diminue avec l'éloignement des deux cylindres dans la partie inférieure, mais le rapprochement des deux cylindres dans la partie supérieure fait augmenter la stratification entre le haut et le bas.

L'intensité du mouvement radial des particules fluides vers les parois chauffées dépend du gradient de température dans la couche limite thermique, Elle est donc importante à la section d'entrée et décroît le long de la zone de chauffage. Au contraire, l'effet des forces de poussée dépend de l'écart entre la température pariétale et la température moyenne du fluide, il est donc faible à la section d'entrée et augmente le long de la zone de chauffage. Ainsi, au voisinage de la section, la convection forcée est le mécanisme dominant dans le transfert de chaleur. Par contre, loin de la section d'entrée la convection naturelle devient le mécanisme dominant dans le transfert. Une étude asymptotique faite dans [1] note qu'il existe une position critique  $X_c^+$  (nombre de Cameron critique) à partir de laquelle la convection naturelle devient le mécanisme dominant. L'accroissement de l'excentricité influe beaucoup sur cette position qui se rapproche de plus en plus de la section d'entrée quand on augmente l'excentricité (décalage bas). L'analyse ci-dessus, reste globalement valable pour tous les fluides visqueux. Le comportement rhéologique du fluide agit sur le gradient pariétal de la vitesse, donc sur l'épaisseur de la couche limite thermique et par conséquent sur l'intensité des différents écoulements secondaires.

Après avoir cerné les différents phénomènes qui traitent notre sujet, une analyse bibliographique a été faite afin de faire ressortir (i) les résultats obtenus dans le domaine qui nous concerne, (ii) ainsi que les interrogations qui restent encore posées.

### **1.3 Revue bibliographique :**

Les conduites à géométrie annulaire sont souvent rencontrées dans différentes applications industrielles, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires et le forage pétrolier sont parmi les domaines où la géométrie annulaire est présente. Suite à des considérations de conceptions ou des déformations en service, une excentricité plus ou moins large peut se présenter.

Les problèmes de thermisation avec une géométrie annulaire à deux cylindres concentrique ont bénéficié de beaucoup d'études. Pour le cas de la convection mixte, KOTAKE.S et HATTORI.N [2] ont examiné le problème en utilisant un fluide newtonien incompressible (sauf dans le terme de poussée), deux conditions thermiques de type Neumann ont été choisies, en chauffant l'un des deux cylindres à densité de flux de chaleur constante, l'autre est à température constante. NAZRUL.I, GIATONDE.U.N et SHARMA. G.K [3] ont traité le problème pour le cas de chauffage de l'air et de l'eau, avec une densité de flux de chaleur constante appliquée sur le cylindre intérieur, le deuxième cylindre est adiabatique. Dans une étude étonnante faite par BENAOUA-ZOUAOUI.B [1], le fluide traité était pseudoplastique avec une viscosité thermodépendante, les conditions étaient aussi de type Neumann avec densités de flux de chaleur constantes appliquées sur les deux cylindres.

Pour ce qui est de géométrie annulaire excentrique, le cas de la convection mixte à notre connaissance n'est pas encore traité, pour cela on va présenter dans ce qui suit, les études faites sur la convection naturelle seule, et ceux faites uniquement sur la convection forcée.

#### **1.3.1 Convection naturelle :**

Le problème de convection naturelle dans une géométrie annulaire excentrique a été traité par nombreux auteurs, HO.C.J, LIN.Y.H et CHEN.T.C [4] ont examiné les effets des nombres de Prandtl et de Rayleigh et de l'excentricité sur la distribution de la température et le nombre de Nusselt moyen entre les deux cylindres, le fluide est supposé newtonien avec des propriétés constantes vis-à-vis la température (à l'exception du terme de poussée). Les

conditions thermique choisis sont : cylindre extérieur à température constante et cylindre intérieur à flux thermique imposé. El-SHAARAWI.M.A.I et MOKHEIMER.E.M.A [5] ont traité le problème en utilisant les coordonnées bipolaires pour une conduite verticale à extrémité ouverte, l'étude présente le développement progressif de la couche limite thermique, le profil de vitesse axiale générée par les forces de poussée fortement influé par l'excentricité, ainsi que les autres paramètres de transfert thermique, l'un des cylindre est maintenu à la température d'entrée du fluide tandis que l'autre est sous une densité de flux de chaleur uniforme. L'étude expérimentale faite par HOSSEINI.R, HEYRANI-NOBARI.M.R et HATAM.M [6] traite un problème analogue à celui dans [5], le fluide considéré est l'air, avec un cylindre extérieur chauffé à flux imposé tandis que le cylindre intérieur est isolé, les résultats obtenus présentent l'évolution de la température de la paroi chauffée le long de la conduite pour les cas d'un seul cylindre, deux cylindres concentriques et deux cylindres non concentriques pour différentes valeurs du flux thermique. L'étude présente aussi l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour les trois cas, en illustrant que ce dernier augmente pour le troisième cas avec l'excentricité, jusqu'à atteindre son maximum pour  $\varepsilon = 0.5$ , puis se stabilise entre 0.5 et 0.7 puis décroît pour atteindre sa valeur minimale pour  $\varepsilon = 1$ . Une étude très intéressante a été faite par SHU.C, YAO.Q, YEO.K.S, ZHU.Y.D [7]. La géométrie traitée était d'une excentricité arbitraire (déplacement radial et azimuthal du cylindre extérieur par rapport au cylindre intérieur). Le cylindre extérieur est chauffé, l'intérieur est isolé. La résolution numérique est faite avec une méthode dite de quadrature différentielle, elle présente l'avantage de converger vers des résultats très précis avec un simple maillage de la géométrie, les principaux résultats présentés sont pour les isothermes et les lignes de courant, de nombreuses validations avec l'expérimental sont aussi présentées.

### **1.3.2 Convection forcée :**

Une étude faite par FELDMAN.E.E, HORNBECK.R.W et OSTERLE.J [8] traite le problème d'établissement du régime dynamique dans une conduite annulaire horizontale excentrique, les équations de Navier-Stokes et de continuité ont été résolus à l'aide du système des coordonnées bipolaires, les résultats présentés portent sur la longueur d'établissement nécessaire pour différents rapport géométriques et différentes excentricités, la variation du gradient de pression et la variation de la vitesse axiale le long de la longueur d'établissement. FANG. P.P, MANGLIK.R.M et JOG.M.A [9] ont examiné pour un régime dynamique établi les effets de l'excentricité sur la distribution de la vitesse axiale, sur le

gradient de pression et sur le coefficient de frottement pour le cas d'un fluide pseudoplastique, aucune condition thermique sur les parois n'a été considérée. MANGLIK.R.M et FANG.P.P [10] ont traité le même problème présenté dans [9], mais pour un fluide newtonien avec deux conditions thermiques (flux imposé et température constante) sur la périphérie du cylindre intérieur, le deuxième cylindre étant maintenu adiabatique. FELDMAN.E.E, HORNBECK.R.W et OSTERLE.J [11], ont étudié le problème de la région d'entrée thermique pour le cas d'un fluide newtonien incompressible, le régime dynamique est supposé établi, et la température uniforme à l'entrée, différentes conditions thermiques sur les deux cylindres ont été considérées, la résolution est faite en utilisant le système bipolaire. L'étude faite par MANGLIK.R.M et FANG.P dans [9] a été étendue aux cas des fluides dilatants [12], les conditions thermiques choisies sont identiques à ceux dans [10].

A notre connaissance, il n'existe pas d'études qui traitent le problème des conduites annulaires excentriques pour des fluides dont la viscosité varie avec la température. En plus, et comme il a été mentionné précédemment, le problème de convection mixte dans ces géométries n'a pas encore eu sa part d'étude.

#### **1.4 Positionnement de notre travail par rapport à la littérature :**

L'analyse bibliographique montre la nécessité d'une étude permettant :

1. La caractérisation des effets combinés de l'excentricité et de la thermodépendance sur les champs thermique et dynamique pour le cas de la convection forcée ;
2. La détermination de l'effet de l'excentricité sur la distribution des champs thermique et dynamiques pour le cas de la convection mixte;
3. La caractérisation de l'interaction entre la stratification du champ thermique et la variation de  $K$  avec  $T$ .

# CHAPITRE 2

## Notions Rhéologiques Et Fluides Utilisés

## **CHAPITRE 2**

### **NOTIONS RHEOLOGIQUES ET FLUIDES UTILISES**

#### **2.1. Introduction :**

La rhéologie est une discipline qui traite de l'écoulement, des déformations des matériaux sous l'action de contraintes. La rhéologie a été développée pour décrire les propriétés de matériaux au comportement mal défini et intermédiaire entre celui du solide élastique parfait et celui du fluide newtonien. La section qui suit vise à définir les principaux paramètres rhéologiques ainsi que les différentes typologies d'écoulement des fluides.

#### **2.2. Notion de mouvement laminaire de cisaillement :**

##### **2.2.1 Définition :**

Un matériau soumis à un ensemble de forces est susceptible de se déformer, les mouvements des différents points du matériau dépendant bien entendu de la répartition et de l'intensité des forces appliquées. Un mouvement laminaire de cisaillement est engendré pour certaines distributions de ces forces. Au cours d'un tel mouvement, on considère que le matériau présente une structure en lamelles, en couches adjacentes. La déformation du matériau s'effectue par glissement relatif des différentes couches, sans qu'il y ait transfert de matière d'une couche à l'autre. Les mouvements laminaires de cisaillement sont engendrés à l'aide de rhéomètres. C'est à partir de tels mouvements que peuvent être déterminés les paramètres rhéologiques des fluides.

##### **2.2.2 Contrainte de cisaillement :**

La contrainte de cisaillement ( $\tau$ ) est la grandeur dynamique fondamentale en rhéologie. Au cours d'un mouvement laminaire de cisaillement, deux couches successives au contact l'une de l'autre se déplacent relativement l'une par rapport à l'autre. Il apparaît à l'interface de ces deux couches des forces de frottement qui s'exercent tangentiellement à la surface de la couche, elles sont appelées force de cisaillement (Figure.2.1).

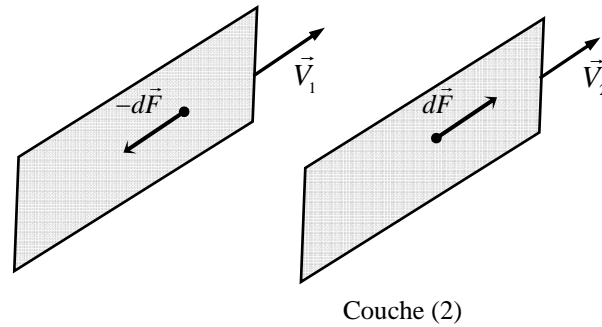


Figure 2.1 Forces agissant sur deux éléments de couches voisines

En supposant que la couche (1) est animée d'une vitesse  $V_1$  supérieure à la vitesse  $V_2$  de la couche (2), la couche (1) exerce sur la couche (2) une force de cisaillement  $dF$  parallèle au mouvement et tendant à accélérer la couche (2). La couche (2) exerce pour sa part sur la couche (1), une force de cisaillement  $-dF$  tendant à la freiner. En rapportant ces forces de cisaillement à l'unité de surface, on définit la contrainte de cisaillement  $\tau$  :

$$\tau = \frac{dF}{dS} \quad (2.1)$$

Il est à noter que dans le calcul de la résultante des forces, les forces de pression s'exerçant perpendiculairement à la surface ne sont pas prises en compte, du fait de leur faible valeur en comparaison des forces de cisaillement [13].

### **2.2.3 Déformation et vitesse de cisaillement :**

Ces deux grandeurs constituent les grandeurs cinématiques fondamentales en rhéologie. La définition de la déformation de cisaillement est présentée dans le cas particulier le plus simple d'un mouvement de cisaillement présentant une symétrie plane. Le matériau est cisailé entre deux plans parallèles, l'un mobile, l'autre fixe (Figure.2.2).

Considérant deux plans parallèles et adjacents, Le premier plan est situé à  $y$ , le deuxième à  $y+dy$ , les vitesses dans ces plans sont respectivement  $u$  et  $u+du$ . Les particules appartenant au premier plan parcourent dans un temps  $dt$  une distance  $AA' = u.dt$ , par contre ceux appartenant au deuxième plan auront parcourues dans le même temps une distance  $BB' = (u + du).dt$ .



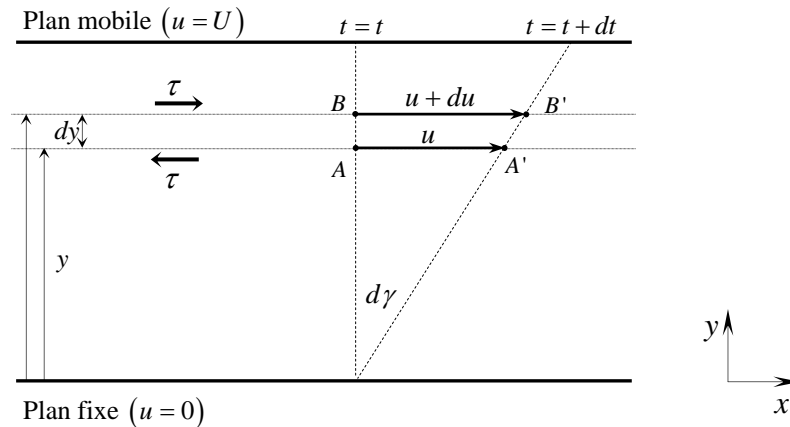


Figure 2.2 Mouvement laminaire de cisaillement entre deux plans parallèles

Une mesure de la déformation du milieu est l'angle de cisaillement  $d\gamma$  avec :

$$d\gamma = \frac{BB'}{AA'} = \frac{du}{dy} \cdot dt \quad (2.2)$$

$\gamma$  est la déformation de cisaillement, c'est une grandeur sans dimension, sa dérivée par rapport au temps est appelée vitesse de cisaillement ou de déformation [14]. Elle est défini par:

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dy} \quad (2.3)$$

#### **2.2.4 Equation rhéologique d'état:**

La détermination de ces deux grandeurs (contrainte de cisaillement et déformation ou vitesse de cisaillement) permet de définir l'équation rhéologique d'état du matériau, c'est à dire la relation les unissant ( $\gamma = f(\tau)$  ou bien  $\dot{\gamma} = f(\tau)$ ). Les rhéogrammes sont les courbes traduisant graphiquement l'équation rhéologique d'état du matériau. La représentation la plus courante consiste à exprimer la variation de la contrainte de cisaillement avec celle de la vitesse de cisaillement. La détermination de ces paramètres permet entre autre d'obtenir la viscosité du fluide étudié (Cas des fluides newtoniens), grandeur suffisant bien souvent à caractériser de manière précise le comportement rhéologique du matériau étudié [13].

### **2.2.4.1 Loi d'écoulement et loi de déformation :**

Sous l'effet des contraintes de cisaillement appliquées au matériau, ce dernier s'écoule lorsque il s'agit d'un fluide, on parle donc de loi d'écoulement, ou il se déforme s'il s'agit d'un solide, on parle dans ce cas de loi de déformation, une certaine ambiguïté est rencontrée pour les matériaux viscoélastiques. En générale l'équation rhéologique d'un matériau incompressible peut s'écrire :

$$\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, t) \quad (2.4)$$

Trois cas sont possibles :

**Cas 1** : Les fluides purement visqueux, avec un comportement indépendant du temps, leur loi rhéologique est par définition :

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}) \quad (2.5)$$

**Cas 2** : La définition de la fonction  $\tau(\dot{\gamma})$  dépend du passé du fluide. On aura alors des fluides visqueux avec comportement dépendant du temps définit par:

$$\tau = \tau(\dot{\gamma}, t) \quad (2.6)$$

**Cas 3** : Les fluides présentant à la fois des propriétés de l'état fluide et de l'état solide ; on parlera de fluides viscoélastiques avec :

$$\tau = \tau(\gamma, \dot{\gamma}, t) \quad (2.7)$$

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au premier type.

### **2.2.4.2 Fluides visqueux indépendants du temps :**

#### **a. Fluide newtonien :**

Les fluides newtoniens sont des fluides visqueux idéaux, qui obéissent à la loi de Newton.

$$\tau = \mu \cdot \dot{\gamma} \quad (2.8)$$

Dans ce cas, la contrainte de cisaillement est proportionnelle à la vitesse de déformation, la pente de la droite obtenue en traçant le rhéogramme est la viscosité du fluide (Figure.2.4). Tous les fluides homogènes pour lesquels la dissipation d'énergie est due aux collisions d'espèces moléculaires relativement petites ont un comportement newtonien (gaz, eau, huile minérale, ... et solutions de molécules de faible poids moléculaire) [14].

**b. Fluide non-newtonien :**

Beaucoup de fluides présentent toutefois des comportements non newtoniens qui font appel à l'utilisation de modèles rhéologiques plus complexes pour décrire leur comportement en écoulement. Pour ce type de fluide la relation (2.8) s'écrit :

$$\tau / \dot{\gamma} = \mu_a \quad (2.9)$$

Où le facteur de proportionnalité  $\mu_a$  est une valeur dépendante de  $\dot{\gamma}$ , appelée viscosité apparente. C'est une grandeur locale. Il existe quatre catégories principales de fluides indépendants du temps :

- **Les fluides à contrainte critique :**
  - Les fluides plastiques de type HERSCHEL-BULKLEY ;
  - Les fluides plastiques de type BINGHAM.
  
- **Les fluides sans contrainte critique de type OSTWALD-DE WAELE :**
  - Les fluides pseudoplastiques ou rhéofluidifiants ;
  - Les fluides dilatants ou rhéoépaississants.

**b.1 Les fluides à contrainte critique :**

Les fluides plastiques se caractérisent par le fait qu'ils n'accusent pas d'écoulement tant que la contrainte de cisaillement qu'on leur applique reste inférieure à une valeur critique  $\tau_c$  appelée contrainte seuil ou seuil de déformabilité [15]. Le modèle d'HERSCHEL-BULKLEY est celui permettant de décrire la plupart des fluides plastiques,

la courbe d'écoulement de tels fluides finit par devenir rectiligne au-delà d'une certaine contrainte critique appliqué  $\tau_c''$ . La loi rhéologique pour ce type de fluides est défini dans l'équation (2.10) :

$$\begin{aligned} \tau - \tau_c' &= K \dot{\gamma}^n & \tau > \tau_c' \\ \dot{\gamma} &= 0 & \tau < \tau_c' \end{aligned} \quad (2.10)$$

$K$  est la consistance du fluide, et  $n$  son indice de structure (ou d'écoulement).

Le fluide de BINGHAM est le cas le plus simple des fluides plastiques. Dès que la contrainte de cisaillement dépasse la valeur seuil, il se produit un écoulement avec une vitesse de déformation proportionnelle à la contrainte appliquée. L'équation rhéologique d'un tel type est la suivante :

$$\begin{aligned} \tau - \tau_c &= \mu_p \dot{\gamma} & \tau > \tau_c \\ \dot{\gamma} &= 0 & \tau < \tau_c \end{aligned} \quad (2.11)$$

Les fluides qui suivent fidèlement cette loi sont rares, mais beaucoup de fluides réels en sont justiciables avec une très bonne approximation. Parmi les fluides présentant ce comportement on compte : Les suspensions en particules solides, les Boues de forage, Les peintures à l'huile, Certaines pâtes (dentifrice), Certaines graisses... etc. La figure (2.3) illustre le comportement rhéologique des deux fluides plastiques.

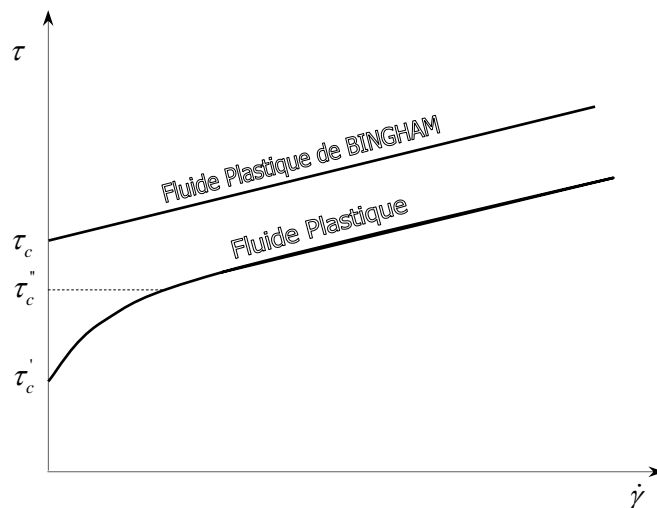


Figure 2.3 Courbes d'écoulement de fluides présentant une contrainte critique

### **b.2 Les fluides sans contrainte critique :**

Au contraire des précédents, ces fluides ne présentent pas une contrainte seuil, ils commencent à écouler dès l'application de la contrainte de cisaillement. Les fluides pseudoplastiques sont l'un des deux principaux modèles de ces fluides, ils sont présentés par la loi rhéologique dite loi de puissance (loi d'OSTWALD-DE WAELE) :

$$\tau = K \dot{\gamma}^n \quad 0 < n \leq 1 \quad (2.12)$$

La viscosité apparente ( $\mu_a = K \dot{\gamma}^{n-1}$ ) est à peu près constante au début avec une valeur  $\mu_0$ , puis elle décroît progressivement avec la croissance de  $\dot{\gamma}$  (d'où le nom de rhéofluidifiant), pour devenir linéaire pour les fortes vitesses de déformation avec une valeur  $\mu_\infty$ . Le comportement rhéologique de ces fluides est dû (suspension de particules asymétriques) à une orientation progressive avec la vitesse de déformation dans le sens de l'écoulement. A faible  $\dot{\gamma}$  les particules sont parfaitement désordonnées et à haut  $\dot{\gamma}$ , parfaitement orientées, ce qui expliquerait le comportement sensiblement newtonien de ces fluides à la limite. Il est important de noter que les paramètres  $K$  et  $n$  purement empiriques n'ont aucune signification physique. On compte parmi les fluides présentant le comportement pseudoplastique: Les polymères fondus, les détergents, les colles, les ciments... etc.

La loi de puissance est aussi valable pour les fluides dilatants mais dans ce cas  $n > 1$ . Ce qui signifie que leur viscosité apparente augmente avec la croissance de  $\dot{\gamma}$ . Cette catégorie de fluides est beaucoup plus rare que les fluides pseudoplastiques, elle se rencontre essentiellement pour des suspensions à forte teneur en matière solide (concentrations volumiques supérieures à 50 %). Ce type de comportement peut avoir pour origine une transition ordre-désordre entre les particules constitutives du fluide, pour les plus faibles vitesses de cisaillement, les particules sont plus ou moins alignées alors que pour les plus fortes valeurs de vitesse de déformation, elles sont dispersées aléatoirement, ce qui induit une viscosité qui augmente lorsque le désordre s'installe au sein du fluide.

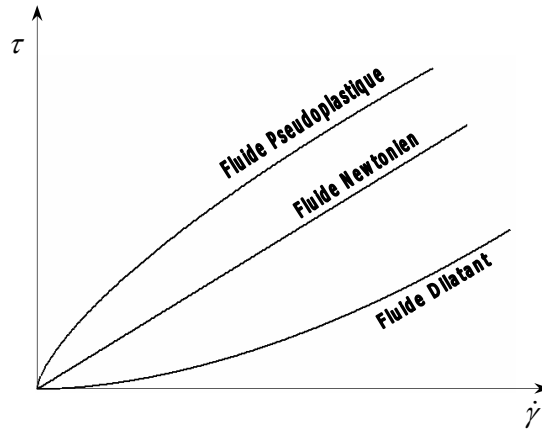


Figure 2.4 Courbes d'écoulement des principales catégories des fluides sans contrainte critique

**Remarque :** D'autres modèles des fluides avec et sans contrainte critique, sont présentés dans les références [14] et [15].

### 2.3. Caractéristiques des Fluides utilisés :

Les fluides sur lesquels nous avons travaillé présentent un comportement pseudoplastique. En plus de la diminution de leurs viscosités avec la croissance de  $\dot{\gamma}$ , leurs consistances décroissent avec l'augmentation de la température d'où le nom "thermodépendant". Leurs indices de structure  $n$  sont très peu affectés par l'augmentation de la température, pour cela ils sont considérés constants [1].

Les mesures rhéologiques sont faites par BENAOUA-ZOUAOUI.B [1] à l'aide d'un rhéomètre rotatif fonctionnant à couple imposé d'une géométrie cône-plan (Figure.2.5).

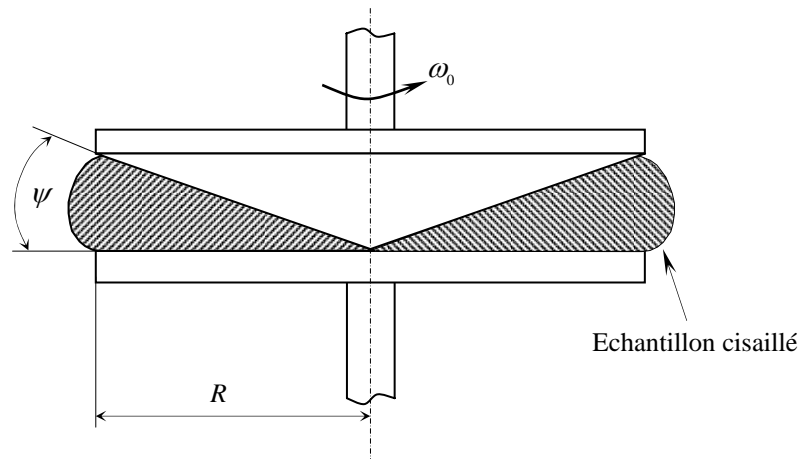


Figure 2.5 Schémas d'un rhéomètre cône-plan

Les fluides utilisés dans les expériences étaient des solutions diluées des polymères suivants :

- Carboxymethylcellulose (CMC) sel de Sodium à 1% et 2% en masse ;
- CMC (Tylose) à 1% et 2% en masse.
- CMC7M1C à 2% en masse ;

Les taux de cisaillement appliqués étaient entre 0 et 700  $s^{-1}$ . Les résultats pour la CMC à 1% et pour six (6) températures imposées sont présentés dans la Figure (2.6). Elle met en évidence le caractère pseudoplastique du fluide et sa forte dépendance vis-à-vis la température.

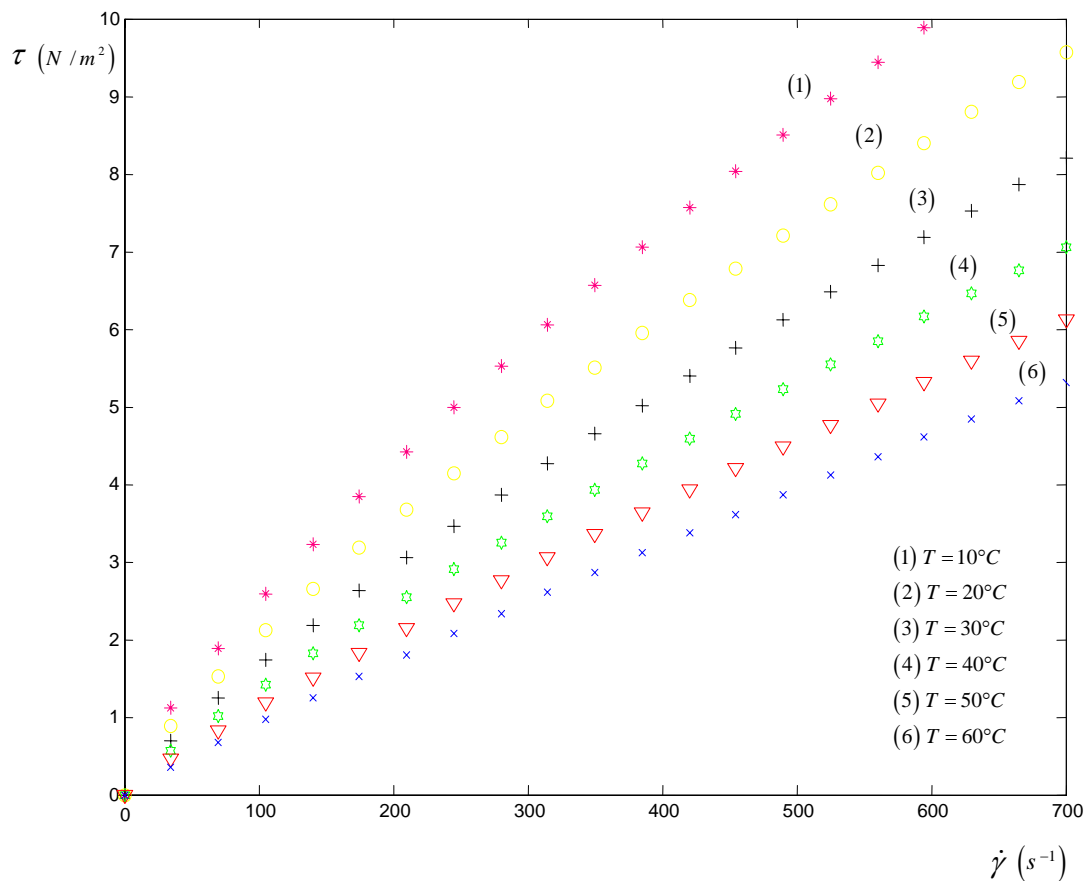


Figure 2.6 Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de déformation pour différentes températures

Les résultats obtenus ont été corrélés sous la forme  $K = a \exp(-bT)$  et  $n = a' \exp(-b'T)$ .  
Ce qui donne pour les différentes solutions :

**Solution de CMC à 1% :**

$$K(T) = 0.097 \exp(-0.313T) \quad (2.13)$$

$$n(T) = 0.75 \exp(-0.003T) \quad (2.14)$$

**Solution de CMC à 2% :**

$$K(T) = 0.842 \exp(-0.0376T) \quad (2.15)$$

$$n(T) = 0.813 \exp(-0.0013T) \quad (2.16)$$

**Solution de Tylose à 1% :**

$$K(T) = 0.908 \exp(-0.0379T) \quad (2.17)$$

$$n(T) = 0.790 \exp(-0.0008T) \quad (2.18)$$

**Solution de CMC7M1C à 1% (Fluide Newtonien):**

$$K(T) = 0.024 \exp(-0.0245T) \quad (2.19)$$

**Remarque :** Les mesures rhéologiques peuvent être faites par différentes techniques, on cite le viscosimètre capillaire, à cylindres coaxiaux, pour plus de détails voir [16-17].

La figure (2.7) présente la dépendance de la consistance  $K$  et de l'indice de structure  $n$  vis-à-vis la température pour deux concentrations de CMC. Les effets thermiques manifestent essentiellement sur la consistance du fluide, l'indice de structure est peu affecté par la température, il est donc considéré constant pour l'intervalle de température.



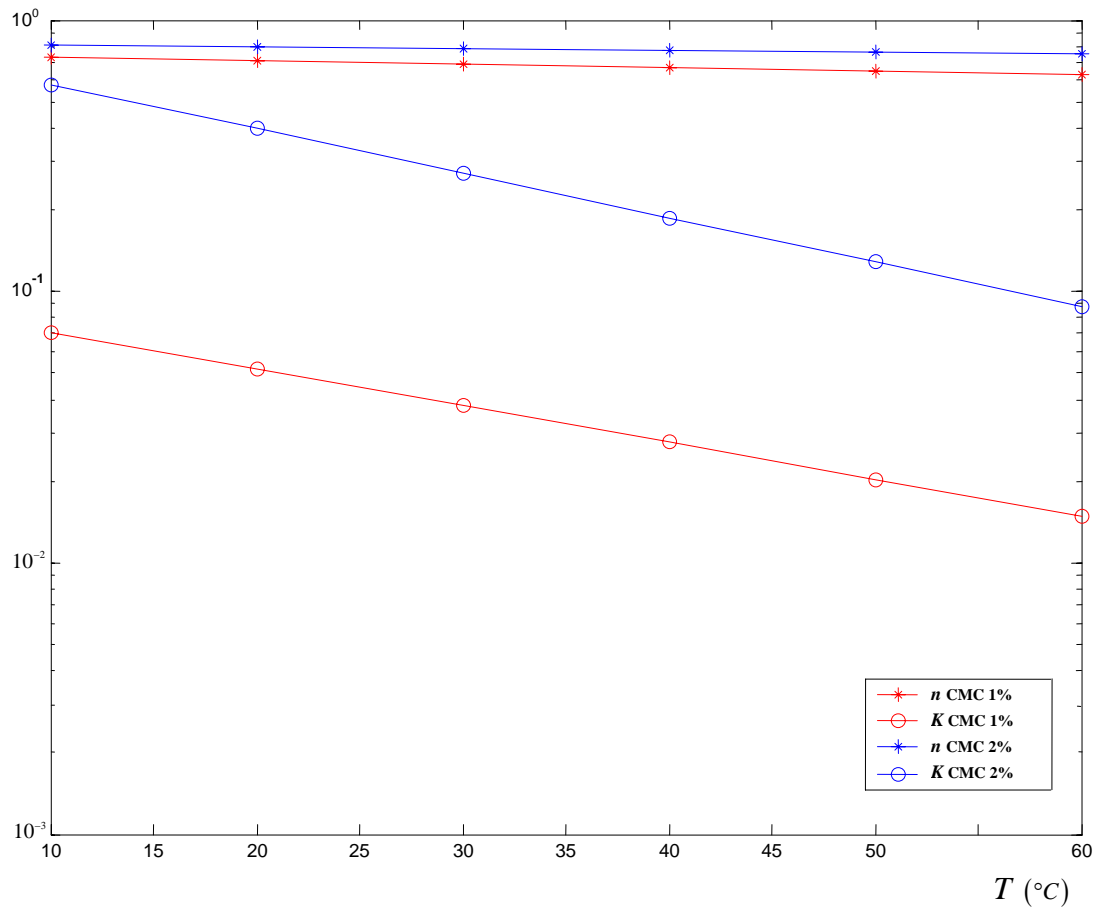


Figure 2.7 Evolution des indices rhéologiques en fonction de la température pour deux solutions de CMC

**Remarque :** D'autres précautions ont été prises lors de la préparation des solutions ainsi que lors de leur manipulation, Voir [1].

# CHAPITRE 3

Formulation Du Problème  
Et Résolution Numérique

## CHAPITRE 3

### FORMULATION DU PROBLEME ET RESOLUTION NUMERIQUE

#### **3.1. Introduction :**

Ce chapitre présente la formulation mathématique de la convection mixte laminaire pour un fluide non-newtonien dans une conduite annulaire horizontale excentrique. Les équations gouvernant le problème ainsi que les conditions aux limites associées sont dans un premier temps données sous formes dimensionnelle dans un système de coordonnées bipolaires  $(\alpha^*, \beta^*, z^*)$ . Les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse sont ensuite déterminées. A la suite de cela, les équations sont mises sous forme adimensionnelle. Des nombres sans dimension apparaissent dans le système d'équations. Des hypothèses justifiées par le problème considéré sont alors faites. Les équations sont ensuite simplifiées et traitées numériquement.

#### **3.2. Equations gouvernant le problème:**

Il s'agit de l'écoulement laminaire d'un fluide pseudoplastique dans une conduite annulaire excentrique où les deux cylindres sont chauffés à densités de flux constantes (Figure 3.1).

Les équations gouvernant le problème sont :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}^*) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}^*}{Dt} = -\nabla P^* + \rho \vec{g} + \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}}^* \quad (3.2)$$

$$\rho \cdot C_v \cdot \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \overline{\overline{\tau}}^* : \nabla \vec{V}^* \quad (3.3)$$

Où :  $\vec{V}^* = [U^*, V^*, W^*]^T$  est le vecteur vitesse ;

$\overline{\overline{\tau}}^*$  : Est le déviateur du tenseur des contraintes.

Pour la plupart des fluides  $C_v \approx C_p$  ; Donc  $C_v$  est remplacée par la suite par  $C_p$  dans l'équation de l'énergie.

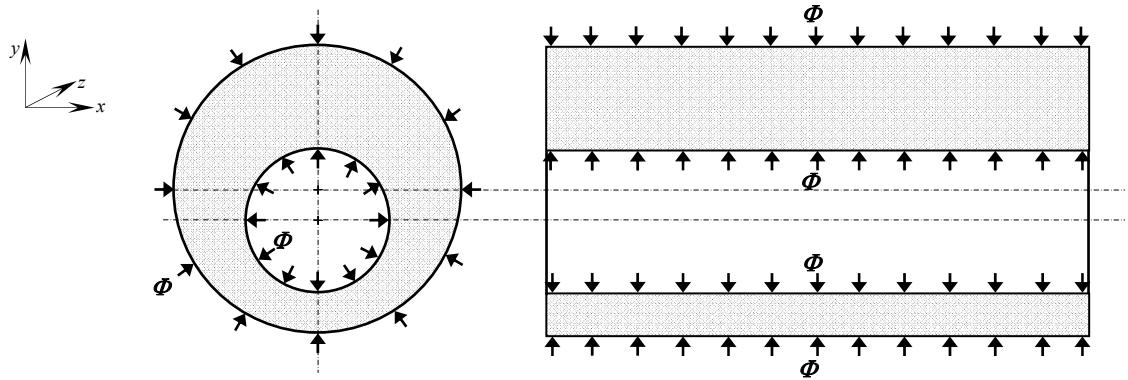


Figure 3.1 Géométrie de la conduite annulaire

Les problèmes des conduites annulaires excentriques sont souvent traités en utilisant le système de coordonnées bipolaires  $(\alpha^*, \beta^*, z^*)$  [8], [11], [18], [19].

### **3.2.1 Présentation du système de coordonnées bipolaires :**

La géométrie annulaire excentrique peut être représentée dans le système de coordonnées orthogonales bipolaires  $(\alpha^*, \beta^*, z^*)$ , relié au système de coordonnées cartésiennes  $(x^*, y^*, z^*)$  par la transformation suivante :

$$x^* = h^* \cdot \sin \beta^* \quad ; \quad y^* = h^* \cdot \text{sh} \alpha^* \quad ; \quad z^* = z^*$$

$$-\infty < \alpha^* < +\infty; 0 \leq \beta^* \leq 2\pi; -\infty < z^* < +\infty$$

$h^*$  : Est le coefficient de Lamé (de proportionnalité), pour ce système de coordonnées, il est définit par :

$$h^* = \frac{a}{\text{ch} \alpha^* - \cos \beta^*}$$

$a$  : Est la grandeur de repérage du pôle. C'est la distance entre l'origine du repère  $O$  et le point  $p$ , définit par [20] :

$$a = \frac{R_2 - R_1}{2\varepsilon} \left[ \left( \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} - \varepsilon^2 \right)^2 - \frac{4\varepsilon^2 R_2^2}{(R_2 - R_1)^2} \right]^{1/2}$$

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur définit respectivement par  $R_1 = a / \text{sh} \alpha_1^*$  ;  $R_2 = a / \text{sh} \alpha_2^*$  ; et  $\varepsilon$  l'excentricité adimensionnelle définit par  $\varepsilon = e / (R_2 - R_1)$  , avec  $e$  la distance entre les centres des deux cylindres (Figure 3.2).

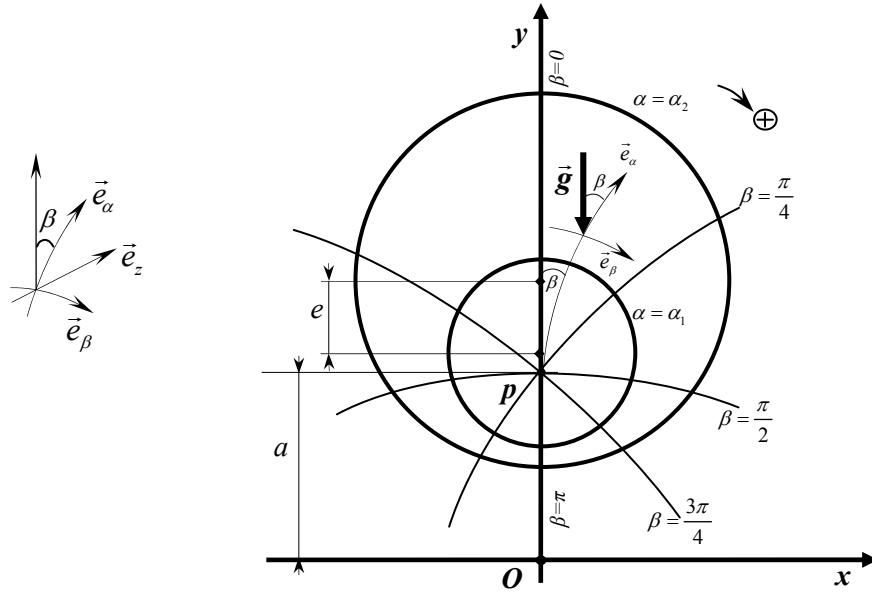


Figure 3.2 Système des coordonnées bipolaires

Dans ce système,  $\beta^*$  représente l'angle polaire repéré par rapport à la verticale ( $0 \leq \beta^* \leq 2\pi$ ). Le sens anti-trigonométrique est pris comme sens positif,  $\alpha^*$  représente la position radiale ( $\alpha_1^* \leq \alpha^* \leq \alpha_2^*$ ), Et  $z^*$  la position axiale ( $0 \leq z^* \leq L$ ).

### 3.2.2 Forme générale des équations:

Dans les équations ci-dessous les grandeurs étoilées sont des grandeurs dimensionnelles.

#### Equation de continuité locale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\rho \cdot h^* \cdot U^*) + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \beta^*} (\rho \cdot h^* \cdot V^*) + \frac{\partial (\rho \cdot W^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (3.4)$$

#### Equation du mouvement suivant $\alpha^*$ :

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial U^*}{\partial t} + \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} - \frac{U^* V^*}{a} \sin \beta^* + \frac{V^{*2}}{a} \operatorname{sh} \alpha^* + W^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] = -\frac{1}{h^*} \frac{\partial p^*}{\partial \alpha^*} + \rho g_{\alpha^*} + \left( \nabla \cdot \vec{\tau} \right)_{\alpha^*} \quad (3.5)$$

#### Equation du mouvement suivant $\beta^*$ :

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial V^*}{\partial t} + \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \beta^*} + \frac{U^{*2}}{a} \sin \beta^* - \frac{U^* V^*}{a} \operatorname{sh} \alpha^* + W^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right] = -\frac{1}{h^*} \frac{\partial p^*}{\partial \beta^*} + \rho g_{\beta^*} + \left( \nabla \cdot \vec{\tau} \right)_{\beta^*} \quad (3.6)$$

**Equation du mouvement suivant  $z^*$  :**

$$\rho \cdot \left[ \frac{\partial W^*}{\partial t} + \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} + W^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right] = -\frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \rho g_{z^*} + \left( \nabla \cdot \overline{\overline{\tau^*}} \right)_{z^*} \quad (3.7)$$

**Equation de l'énergie :**

$$\rho C_p \cdot \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \beta^*} + W^* \frac{\partial T}{\partial z^*} \right] = \nabla \cdot (\lambda \cdot \nabla T) + S^* \quad (3.8)$$

$S^*$  : Est le terme source provenant de la dissipation visqueuse de l'énergie.

Avec :  $S^* = \overline{\overline{\tau^*}} : \nabla \vec{V}^*$

**Equation de continuité sous forme intégrale :**

$$\int_0^{\alpha_2^*} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_2^*} \frac{a^2}{(\text{ch } \alpha^* - \cos \beta^*)^2} W^* d\alpha^* d\beta^* = \frac{\pi}{2} U_d (R_2^2 - R_1^2) \quad (3.9)$$

Les différents termes apparents dans les équations gouvernant le problème sont développés en détail (en tenant compte des hypothèses) dans l'appendice **B**.

**Loi de comportement :**

Dans cette étude, nous considérons le cas des fluides purement visqueux, dont le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle d'Ostwald. Soit:

$$\overline{\overline{\tau^*}} = 2\mu_a^* \overline{\overline{D^*}} \quad (3.10)$$

$\overline{\overline{D^*}}$  : Est le tenseur des vitesses de déformation, et  $\mu_a^*$  la viscosité apparente dont l'expression est donnée par :

$$\mu_a^* = K \left[ -4I_2^* \right]^{(n-1)/2} \quad (3.11)$$

$I_2^*$  : Est le deuxième invariant du tenseur des vitesses de déformation, donné par l'expression :

$$I_2^* = -\frac{1}{2} \text{trace} \left( \overline{\overline{D^*}}^2 \right) \quad (3.12)$$

L'expression des différentes composantes de  $\overline{\overline{D^*}}$  et de  $I_2^*$  sont donnée dans l'appendice **C**.

### 3.2.3 Hypothèses :

Les hypothèses liées au problème sont :

- Le régime dynamique est établi à la section d'entrée ( $Pr > 100$ )
- L'écoulement est supposé stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ );
- Le fluide est supposé incompressible, mais dilatable ;
- La variation de la conductivité thermique avec la température est négligeable ;
- Le nombre de Brinkman est suffisamment faible ( $Br < 10^{-3}$ ), pour que la dissipation visqueuse soit négligeable ( $\overline{\tau^* : \nabla \vec{V}^*} \approx 0$ );
- Le nombre de Péclet est suffisamment grand ( $Pe > 100$ ) pour que la diffusion axiale de la chaleur et de la quantité de mouvement soit négligée;
- La variation de la masse volumique avec la température est négligée dans tous les termes des équations de conservation sauf dans le terme de poussée (approximation de Boussinesq); La masse volumique s'écrit donc :

$$\rho = \rho_e [1 - B(T - T_e)] \quad (B \text{ est le coefficient d'expansion volumique});$$

- La consistance du fluide varie avec la température suivant la loi exponentielle :

$$K = A \cdot \exp(-b \cdot T);$$

- La variation de l'indice de structure  $n$  avec la température est négligeable ;
- La variation du gradient de pression axial est faible dans l'équation de quantité de mouvement axiale. Par conséquent la pression est modélisée par :

$$p = p_m(z^*) + p'(\alpha^*, \beta^*)$$

La pression  $p_m$  est une moyenne dépendant de la coordonnée axiale et  $p'$  une pression variable dans la section droite.

**Remarque :** En suivant la méthodologie développée par GRAY.D.D et GIORGINI.A [21], il a été montré que l'approximation de Boussinesq peut être appliquée tant que  $B\Phi R_2 / \lambda \leq 0.1$ , ce qui correspond pour notre cas à:  $\Phi \leq 8800 (W / m^2)$ .

### **3.2.4 Forme simplifiée des équations :**

Compte tenu des hypothèses décrites précédemment, et en utilisant la loi de comportement du fluide étudié, les équations de conservation s'écrivent :

#### **Equation de continuité locale :**

$$\frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (h^* U^*) + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \beta^*} (h^* V^*) + \frac{\partial W^*}{\partial z^*} = 0 \quad (3.13)$$

#### **Equation du mouvement suivant $\alpha^*$ :**

$$\begin{aligned} \rho_e \left[ \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} - \frac{U^* V^*}{a} \sin \beta^* + \frac{V^{*2}}{a} \operatorname{sh} \alpha^* + W^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] &= -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P'}{\partial \alpha^*} + \rho_e g B (T - T_e) \cos \beta^* \\ &+ \frac{\partial \mu_a^*}{\partial z^*} \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \alpha^*} \left[ \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha^*} - \frac{2 \sin \beta^*}{a h^*} V^* \right] + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \beta^*} \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{\operatorname{sh} \alpha^*}{a h^*} V^* + \frac{\sin \beta^*}{a h^*} U^* \right] \\ &+ \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \beta^{*2}} - \frac{2 \sin \beta^*}{a h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{2 \operatorname{sh} \alpha^*}{a h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \beta^*} - \frac{(\operatorname{ch} \alpha^* + \cos \beta^*)}{a h^*} U^* + \frac{\partial^2 U^*}{\partial z^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

#### **Equation du mouvement suivant $\beta^*$ :**

$$\begin{aligned} \rho_e \left[ \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \beta^*} + \frac{U^{*2}}{a} \sin \beta^* - \frac{U^* V^*}{a} \operatorname{sh} \alpha^* + W^* \frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right] &= -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P'}{\partial \beta^*} - \rho_e g B (T - T_e) \sin \beta^* \\ &+ \frac{\partial \mu_a^*}{\partial z^*} \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} + \frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right] + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \alpha^*} \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{\operatorname{sh} \alpha^*}{a h^*} V^* + \frac{\sin \beta^*}{a h^*} U^* \right] + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \beta^*} \left[ \frac{2}{h^{*2}} \frac{\partial V^*}{\partial \beta^*} - \frac{2 \operatorname{sh} \alpha^*}{a h^*} U^* \right] \\ &+ \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 V^*}{\partial \beta^{*2}} + \frac{2 \sin \beta^*}{a h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha^*} - \frac{2 \operatorname{sh} \alpha^*}{a h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} - \frac{(\operatorname{ch} \alpha^* + \cos \beta^*)}{a h^*} V^* + \frac{\partial^2 V^*}{\partial z^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

#### **Equation du mouvement suivant $z^*$ :**

$$\begin{aligned} \rho_e \left[ \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} + W^* \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right] &= -\frac{\partial P_m}{\partial z^*} + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \alpha^*} \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial W^*}{\partial \alpha^*} + \frac{1}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right] + \frac{\partial \mu_a^*}{\partial \beta^*} \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} + \frac{1}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right] \\ &+ 2 \frac{\partial \mu_a^*}{\partial z^*} \frac{\partial W^*}{\partial z^*} + \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \beta^{*2}} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial z^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

#### **Equation de l'énergie :**

$$\rho_e C_p \left[ \frac{U^*}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \alpha^*} + \frac{V^*}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \beta^*} + W^* \frac{\partial T}{\partial z^*} \right] = \lambda \left[ \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^{*2}} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^{*2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^{*2}} \right] + S^* \quad (3.17)$$



Où:

$$S^* = 2\mu_a^* \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \alpha^*} - \frac{\sin \beta^*}{a} V^* \right]^2 + 2\mu_a^* \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \beta^*} - \frac{\text{sh} \alpha^*}{a} U^* \right]^2 + 2\mu_a^* \left[ \frac{\partial W^*}{\partial z^*} \right]^2 \\ + \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial U^*}{\partial z^*} \right]^2 + \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} + \frac{\partial V^*}{\partial z^*} \right]^2 + \mu_a^* \left[ \frac{1}{h^*} \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} + \frac{1}{h^*} \frac{\partial V^*}{\partial \alpha^*} + \frac{\text{sh} \alpha^*}{a} V^* + \frac{\sin \beta^*}{a} U^* \right]^2$$

### **3.2.5 Conditions aux limites:**

A l'entrée de la zone de chauffage, le régime dynamique est supposé établi et le profil de température uniforme. Les parois des deux cylindres intérieur et extérieur sont soumises à des densités de flux de chaleur constantes égale à  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  respectivement. L'écoulement est supposé symétrique par rapport au plan vertical médian passant par les axes des deux cylindres. Le domaine de calcul est  $(\alpha^*, \beta^*, z^*) \in [\alpha_1^*, \alpha_2^*] \times [0, \pi] \times [0, L]$ .

Les conditions aux limites pour  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $W^*$  et  $T$  sont :

$$\alpha^* = \alpha_1^*, \quad U^* = V^* = W^* = 0 ; \quad \frac{1}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \alpha^*} = -\frac{\Phi_1}{\lambda^*} \quad (3.18)$$

$$\alpha^* = \alpha_2^*, \quad U^* = V^* = W^* = 0 ; \quad \frac{1}{h^*} \frac{\partial T}{\partial \alpha^*} = +\frac{\Phi_2}{\lambda^*} \quad (3.19)$$

$$z^* = 0, \quad W^* = U_{cd}(\alpha^*, \beta^*) ; \quad U^* = V^* = 0 ; \quad T(\alpha^*, \beta^*, z^*) = T_e \quad (3.20)$$

$$\beta^* = 0 \wedge \pi, \quad \frac{\partial U^*}{\partial \beta^*} = \frac{\partial W^*}{\partial \beta^*} = V^* = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial \beta^*} = 0 \quad (3.21)$$

### **3.3 Mise sous forme adimensionnelle :**

La complexité des phénomènes de convection rend l'utilisation de l'analyse dimensionnelle nécessaire afin de limiter le nombre de paramètres apparaissant dans les équations gouvernant le problème, et qui peuvent être très nombreux.

#### **3.3.1 Choix des grandeurs de référence :**

A partir des grandeurs physiques qui apparaissent dans le formalisme, on cherche à l'aide de l'analyse dimensionnelle à déterminer un nombre de groupements sans dimensions restreint et dont l'intérêt essentiel est d'être caractéristique du phénomène considéré.

Donc l'écriture des équations de conservation sous forme adimensionnelle nécessite le choix de grandeurs de référence (une échelle caractéristique cohérente) traduisant convenablement la physique du problème en question. Ce choix n'est pas unique.

Pour cette partie de l'étude, les paramètres adimensionnels suivant ont été adoptés:

$$\alpha = \alpha^* ; \quad \beta = \beta^* ; \quad z = \frac{z^*}{L} ; \quad h = \frac{h^*}{a} ; \quad \bar{\mu}_a = \frac{\mu_a^*}{\mu_0} ; \quad P_m = \frac{p_m R_2^2}{\mu_0 U_d L} ; \quad P' = \frac{p' L}{\mu_0 U_d} ;$$

$$W = \frac{W^*}{U_d} ; \quad U = \frac{U^* L}{R_2 U_d} = \frac{U^* L}{a U_d} sh \alpha_2 ; \quad V = \frac{V^* L}{R_2 U_d} = \frac{V^* L}{a U_d} sh \alpha_2 ; \quad \theta = \frac{(T - T_e) \lambda}{\Phi R_2}$$
(3.22)

$\mu_a^*$  est la viscosité apparente du fluide calculée à la température locale  $T$ ,  $\mu_0$  est la viscosité apparente à la température d'entrée, et  $U_d$  la vitesse débitante moyenne. Ce choix est motivé par le fait que le transfert de chaleur est gouverné en grande partie par le gradient de vitesse aux parois des cylindres (gradient pariétal).  $L$  est une longueur caractéristique traduisant un ordre de grandeur de la position axiale de l'établissement du régime thermique. Elle est obtenue en notant que: pendant un temps  $t$ , la diffusion de chaleur se fait sur une distance  $\delta : \delta = O(\sqrt{\eta t})$ , où  $\eta$  est la diffusivité thermique ( $\eta = \lambda / \rho C_p$ ). Pendant ce même temps  $t$  une particule fluide s'est déplacée d'une longueur  $L = O(U_d t)$ . Lorsque le régime thermique est établi  $\delta = O(R_2 - R_1)$ , d'où  $L = \rho_e C_p U_d (R_2 - R_1)^2 / \lambda$ . Les échelles caractéristiques des composantes radiale et azimutale de la vitesse sont déduites de l'équation de continuité, et l'échelle caractéristique pour la pression  $p'$  est obtenue à partir des équations du mouvement suivant  $\alpha^*$  et  $\beta^*$ .

### 3.3.2 Equations adimensionnelles:

Avec les grandeurs caractéristiques choisies, les équations régissant le problème s'écrivent :

#### Equation de continuité:

$$\frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} (hU) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \beta} (hV) + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.23)$$

#### Equation du mouvement suivant $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2} \left[ \frac{U}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - UV \sin \beta + V^2 \text{sh } \alpha + \text{sh } \alpha_2 W \frac{\partial U}{\partial z} \right] &= -\frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \alpha} + Gr \text{Pr} \cdot \text{sh } \alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \theta \cdot \cos \beta \\ &+ \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \cdot \sin \beta}{h} V \right] + \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh } \alpha}{h} V + \frac{\sin \beta}{h} U \right] \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \\ &+ \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( \bar{\mu}_a \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} - \frac{2 \sin \beta}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{2 \text{sh } \alpha}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{(\text{ch } \alpha + \cos \beta)}{h} U \right] \right) + O\left(\frac{1}{Pe^2}\right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

#### Equation du mouvement suivant $\beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2} \left[ \frac{U}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} + U^2 \sin \beta - UV \text{sh } \alpha + \text{sh } \alpha_2 W \frac{\partial V}{\partial z} \right] &= -\frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \beta} - Gr \text{Pr} \cdot \text{sh } \alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \theta \cdot \sin \beta \\ &+ \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh } \alpha}{h} V + \frac{\sin \beta}{h} U \right] + \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{2 \cdot \text{sh } \alpha}{h} U \right] \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \beta} \\ &+ \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( \bar{\mu}_a \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{2 \sin \beta}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \text{sh } \alpha}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{(\text{ch } \alpha + \cos \beta)}{h} V \right] \right) + O\left(\frac{1}{Pe^2}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

#### Equation du mouvement suivant $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{sh } \alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2} \left[ \frac{U}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \text{sh } \alpha_2 W \frac{\partial W}{\partial z} \right] &= -\frac{\partial P_m}{\partial z} + \frac{1}{(\text{sh } \alpha_2)^2} \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} \right] \\ &+ \bar{\mu}_a \frac{1}{(\text{sh } \alpha_2)^2} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} \right] + O\left(\frac{1}{Pe^2}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

#### Equation de l'énergie:

$$\frac{U}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \text{sh } \alpha_2 W \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} \right] + O\left(\frac{1}{Pe^2}, Br\right) \quad (3.27)$$

### Equation de continuité sous forme intégrale :

$$\int_0^{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{W}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} d\alpha d\beta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{(\operatorname{sh} \alpha_2)^2} - \frac{1}{(\operatorname{sh} \alpha_1)^2} \right) \quad (3.28)$$

En utilisant la température adimensionnelle  $\theta$ , la consistance  $K$  s'écrit  $K = K_e \exp(-Pn\theta)$ , où  $K_e$  est la consistance du fluide évaluée à la température d'entrée  $T_e$  et  $Pn = b\Phi R_2 / \lambda$  est le nombre de Pearson.

### 3.3.3 Conditions aux limites :

$$\alpha = \alpha_1, \quad U = V = W = 0 ; \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_2} \quad (3.29)$$

$$\alpha = \alpha_2, \quad U = V = W = 0 ; \quad \frac{1}{h} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = +\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_2} \quad (3.30)$$

$$Z = 0, \quad W = U_{cd}(\alpha, \beta); \quad U = V = 0; \quad \theta = 0 \quad (3.31)$$

$$\beta = 0 \vee \pi, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{\partial W}{\partial \beta} = V = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0 \quad (3.32)$$

Les équations adimensionnées font introduire les paramètres sans dimensions suivants :

**Rapport géométrique:**  $r_1 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1}$  ;

**Coefficient de proportionnalité:**  $h = \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)}$ , qui caractérise l'excentricité;

**L'indice de structure:**  $n$ , qui caractérise le degré de rhéofluidification;

**Le nombre de Reynolds:**  $Re = \frac{\rho_e U_d R_2}{\mu_0}$ , qui caractérise l'écoulement;

**Le nombre de Prandtl:**  $Pr = \frac{\mu_0 C_p}{\lambda}$ , qui caractérise la nature du fluide;

**Le nombre de Péclet:**  $Pe = Re \times Pr = \frac{\rho_e C_p U_d R_2}{\lambda}$ , qui caractérise la diffusion axiale ;

**Le nombre de Grashof:**  $Gr = \frac{\rho_e^2 g B \Delta T R_2^3}{\mu_0^2}$ , qui caractérise la convection naturelle;

**Le nombre de Pearson:**  $Pn = \frac{b\Phi R_2}{\lambda}$ , qui caractérise la thermodépendance de la viscosité;

**Le nombre de Brinkman:**  $Br = \frac{\mu_0 U_d^2 (1-r_1)^2}{\Phi R_2}$ , qui caractérise la dissipation visqueuse.

On note que :  $\Delta T = \Phi R_2 / \lambda$

### **3.4 Résolution numérique :**

Les équations (3.23-3.27) constituent un système parabolique, il peut être résolu par une intégration pas à pas à partir d'un ensemble de conditions initiales amont connues. Les équations de conservation avec leurs conditions aux limites sont discrétisées en utilisant la méthode des différences finies.

#### **3.4.1 Maillage de la géométrie :**

Le problème est de type elliptique; il est rendu parabolique du fait que les termes de diffusion axiale sont négligeables. Ainsi les variables  $U, V, W, P$  et  $\theta$  à la section  $n+1$  ne dépendent que de leurs valeurs à la section  $n$ . La figure (3.3), présente le maillage utilisé.

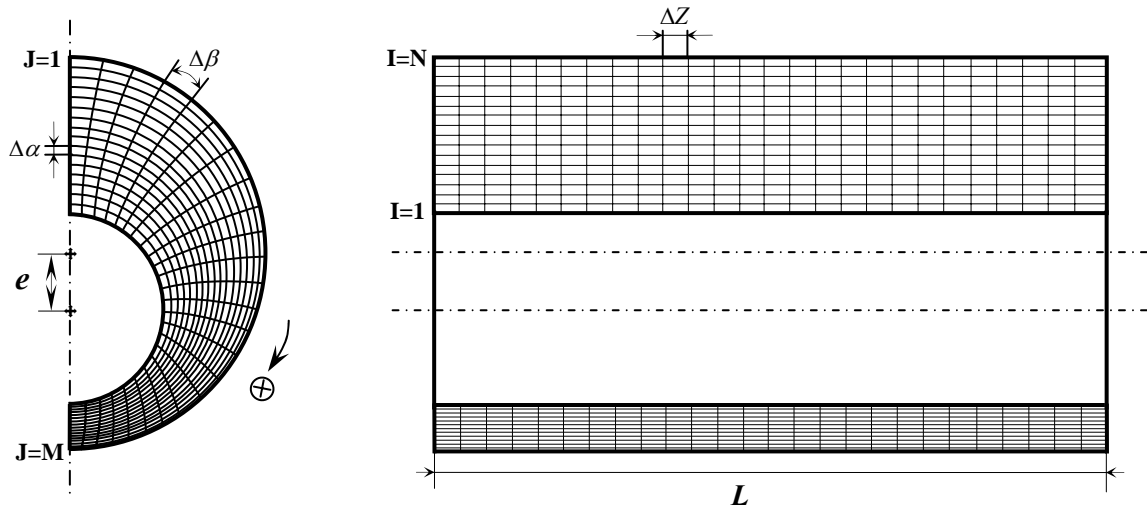


Figure 3.3 Maillage

#### **3.4.2 Discrétisation des équations :**

Les dérivées partielles dans les directions radiale et azimutale sont discrétisées par un schéma centré. Les dérivées du premier ordre dans la direction axiale sont discrétisées par un schéma décentré ascendant.

Les équations de convection mixte, sont non-linéaires. Il était donc nécessaire de les linéariser, ainsi par exemple:

$$U_2(i,j) \left( \frac{\partial U_2(i,j)}{\partial \alpha} \right) \approx U_1(i,j) \left( \frac{\partial U_2(i,j)}{\partial \alpha} \right)$$

L'indice 2 correspond aux inconnus dans la section  $n+1$  et l'indice 1 à ceux correspondant à la section  $n$ . Les variables affectées de l'indice 1 sont connues.

Les dérivées premières et secondes sont discrétisées de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi(i, j)}{\partial \alpha} &= \frac{\varphi(i+1, j) - \varphi(i-1, j)}{2\Delta\alpha} + O(\Delta\alpha)^2 \\ \frac{\partial \varphi(i, j)}{\partial \beta} &= \frac{\varphi(i, j+1) - \varphi(i, j-1)}{2\Delta\beta} + O(\Delta\beta)^2 \\ \frac{\partial^2 \varphi(i, j)}{\partial \alpha^2} &= \frac{\varphi(i+1, j) + \varphi(i-1, j) - 2\varphi(i, j)}{\Delta\alpha^2} + O(\Delta\alpha)^2 \\ \frac{\partial^2 \varphi(i, j)}{\partial \beta^2} &= \frac{\varphi(i, j+1) + \varphi(i, j-1) - 2\varphi(i, j)}{\Delta\beta^2} + O(\Delta\beta)^2 \\ \frac{\partial \varphi(i, j)}{\partial z} &= \frac{\varphi_2(i, j) - \varphi_1(i, j)}{\Delta z} + O(\Delta z)\end{aligned}$$

Les équations de conservation sont discrétisées par la méthode A.D.I (**A**lternating **D**irection **I**mplicit). Elle consiste à décomposer le pas axial séparant deux sections successives en deux demi-pas. Pour le premier demi-pas les équations seront résolues implicitement suivant  $\alpha$  et explicitement suivant  $\beta$ , pour le deuxième, elles seront résolues explicitement suivant  $\alpha$  et implicitement suivant  $\beta$ . Les indices 1/2 seront affectés aux variables calculées au premier demi-pas axial. La molécule de base en coordonnées cartésiennes de la méthode A.D.I est présentée dans la figure (3.4).

La méthode A.D.I présente l'avantage de converger rapidement, ce qui permet de diminuer le nombre d'itérations à effectuer, réduisant donc les risques imputables au calculateur, ainsi que le temps machine.

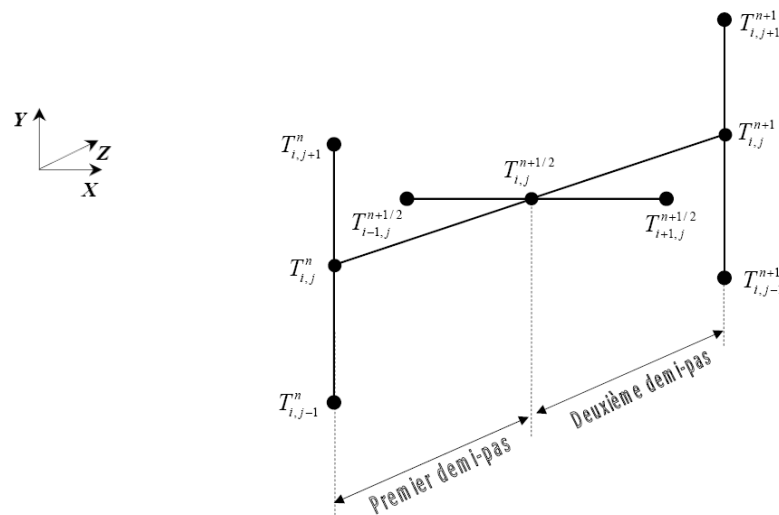


Figure 3.4 Molécule de la méthode A.D.I

Les équations de conservation sont discrétisées dans les pages qui suivent. Elles seront mises sous forme matricielle par la suite, afin de simplifier leur résolution numérique.

### 3.4.3 Equations discrétisées :

#### Equation du mouvement suivant $\alpha$ :

##### Premier demi-pas axial :

Implicite suivant  $\alpha$  et explicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
& U_{12}(i,j) \frac{U_{12}(i+1,j) - U_{12}(i-1,j)}{h(i,j)2\Delta\alpha} + V_1(i,j) \frac{U_1(i,j+1) - U_1(i,j-1)}{h(i,j)2\Delta\beta} - U_{12}(i,j)V_1(i,j)\sin\beta(j) \\
& + V_1(i,j)V_2(i,j)\text{sh}\alpha(i) + \text{sh}\alpha_2 W_1(i,j) \frac{U_{12}(i,j) - U_1(i,j)}{\Delta z / 2} = \text{Pr} \left( 1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{P'(i-1,j) - P'(i+1,j)}{h(i,j)2\Delta\alpha} \right] \\
& + Gr \text{Pr}^2 \cdot \text{sh}\alpha_2 \left( 1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1} \right)^4 \theta_2(i,j) \cdot \cos\beta(j) + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left( 1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i,j+1) - \mu_2(i,j-1)}{2\Delta\beta} \right. \\
& \left. \left[ \frac{U_1(i,j+1) - U_1(i,j-1)}{h^2(i,j)2\Delta\beta} + \frac{V_2(i+1,j) - V_2(i-1,j)}{h^2(i,j)2\Delta\alpha} + \frac{\text{sh}\alpha(i)}{h(i,j)} V_2(i,j) + \frac{\sin\beta(j)}{h(i,j)} U_{12}(i,j) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\mu_2(i+1,j) - \mu_2(i-1,j)}{\Delta\alpha} \left[ \frac{U_{12}(i+1,j) - U_{12}(i-1,j)}{h^2(i,j)2\Delta\alpha} - \frac{\sin\beta(j)}{h(i,j)} V_2(i,j) \right] \right) \\
& + \text{Pr} \left( 1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i,j) - \mu_1(i,j)W_2(i+1,j) - W_2(i-1,j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left( 1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1} \right)^2 \mu_2(i,j) \right. \\
& \left. \left( \left[ \frac{U_{12}(i+1,j) + U_{12}(i-1,j) - 2U_{12}(i,j)}{h^2(i,j)\Delta\alpha^2} + \frac{U_1(i,j+1) + U_1(i,j-1) - 2U_1(i,j)}{h^2(i,j)\Delta\beta^2} - \frac{\sin\beta(j)}{h(i,j)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{V_2(i+1,j) - V_2(i-1,j)}{\Delta\alpha} + \frac{\text{sh}\alpha(i)}{h(i,j)} \frac{V_2(i,j+1) - V_2(i,j-1)}{\Delta\beta} + \frac{(\text{ch}\alpha(i) + \cos\beta(j))}{h(i,j)} U_{12}(i,j) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4\sin\beta(j)}{h(i,j)} \left( \frac{U_1(i,j+1) - U_1(i,j-1)}{2\Delta\beta} + \frac{V_2(i+1,j) - V_2(i-1,j)}{2\Delta\alpha} \right) + 4\sin\beta(j)\text{sh}\alpha(i) \cdot V_2(i,j) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(\text{sh}^2\alpha(i) - \sin^2\beta(j))U_{12}(i,j) \right) \right] \\
\end{aligned} \tag{3.33}$$

**Deuxième demi-pas axial :**

Explicite suivant  $\alpha$  et implicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
& U_1(i, j) \frac{U_{12}(i+1, j) - U_{12}(i-1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} - U_2(i, j) V_1(i, j) \sin \beta(j) \\
& + V_1(i, j) V_2(i, j) \operatorname{sh} \alpha(i) + \operatorname{sh} \alpha_2 W_1(i, j) \frac{U_2(i, j) - U_{12}(i, j)}{\Delta z / 2} = \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{P'(i-1, j) - P'(i+1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} \right] \\
& + Gr \operatorname{Pr}^2 \cdot \operatorname{sh} \alpha_2 \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \cos \beta(j) + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} \right. \\
& \left. \left[ \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} + \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha} + \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} V_2(i, j) + \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} \left[ \frac{U_{12}(i+1, j) - U_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha} - \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} V_2(i, j) \right] \right) \quad (3.34) \\
& + \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j) W_2(i+1, j) - W_2(i-1, j)}{h(i, j) \Delta z} + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \mu_2(i, j) \right. \\
& \left. \left( \left[ \frac{U_{12}(i+1, j) + U_{12}(i-1, j) - 2 U_{12}(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{U_2(i, j+1) + U_2(i, j-1) - 2 U_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} - \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} + \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1)}{\Delta\beta} + \frac{(\operatorname{ch} \alpha(i) + \cos \beta(j))}{h(i, j)} U_2(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4 \sin \beta(j)}{h(i, j)} \left( \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} + \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \right) + 4 \sin \beta(j) \operatorname{sh} \alpha(i) V_2(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(\operatorname{sh}^2 \alpha(i) - \sin^2 \beta(j)) U_2(i, j) \right] \right)
\end{aligned}$$



**Equation du mouvement suivant  $\beta$ :**

**Premier demi-pas axial :**

Implicite suivant  $\alpha$  et explicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
& U_1(i, j) \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{V_1(i, j+1) - V_1(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} + U_1(i, j) U_2(i, j) \sin \beta(j) \\
& - U(i, j) V_{12}(i, j) \operatorname{sh} \alpha(i) + \operatorname{sh} \alpha_2 W_1(i, j) \frac{V_{12}(i, j) - V_1(i, j)}{\Delta z / 2} = \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{P'(i, j-1) - P'(i, j+1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} \right] \\
& - Gr \operatorname{Pr}^2 \cdot \operatorname{sh} \alpha_2 \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \sin \beta(j) + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \right. \\
& \left. \left[ \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} + \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha} + \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} V_{12}(i, j) + \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{\Delta\beta} \left[ \frac{V_1(i, j+1) - V_1(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} - \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right) \quad (3.35) \\
& + \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j) W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{\Delta z} + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \mu_2(i, j) \right. \\
& \left. \left( \left[ \frac{V_{12}(i+1, j) + V_{12}(i-1, j) - 2V_{12}(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{V_1(i, j+1) + V_1(i, j-1) - 2V_1(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} + \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{\Delta\beta} + \frac{(\operatorname{ch} \alpha(i) + \cos \beta(j))}{h(i, j)} V_{12}(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2 \sin \beta(j)}{h(i, j)} \left( \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} - \frac{V_1(i, j+1) - V_1(i, j-1)}{\Delta\beta} \right) - 4 \sin \beta(j) \operatorname{sh} \alpha(i) \cdot U_2(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(\operatorname{sh}^2 \alpha(i) - \sin^2 \beta(j)) V_{12}(i, j) \right) \right)
\end{aligned}$$

**Deuxième demi-pas axial :**

Explicite suivant  $\alpha$  et implicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
& U_1(i, j) \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} + U_1(i, j) U_2(i, j) \sin \beta(j) \\
& - U_1(i, j) V_2(i, j) \operatorname{sh} \alpha(i) + \operatorname{sh} \alpha_2 W_1(i, j) \frac{V_2(i, j) - V_{12}(i, j)}{\Delta z / 2} = \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{P'(i, j-1) - P'(i, j+1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} \right] \\
& - Gr \operatorname{Pr}^2 \cdot \operatorname{sh} \alpha_2 \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \sin \beta(j) + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \left( \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \right. \\
& \left. \left[ \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} + \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha} + \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} V_2(i, j) + \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right. \\
& \left. + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{\Delta\beta} \left[ \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} - \frac{\operatorname{sh} \alpha(i)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right) \quad (3.36) \\
& + \operatorname{Pr} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j) W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{\Delta z} + \frac{\operatorname{Pr}}{\operatorname{sh} \alpha_2} \left( 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_2}{\operatorname{sh} \alpha_1} \right)^2 \mu_2(i, j) \\
& \left( \left[ \frac{V_{12}(i+1, j) + V_{12}(i-1, j) - 2V_{12}(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{V_2(i, j+1) + V_2(i, j-1) - 2V_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} + \frac{\sin \beta(j)}{h(i, j)} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha(i) U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h(i, j) \Delta\beta} + \frac{(\operatorname{ch} \alpha(i) + \cos \beta(j))}{h(i, j)} V_2(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2 \sin \beta(j)}{h(i, j)} \left( \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} - \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1)}{\Delta\beta} \right) - 4 \sin \beta(j) \operatorname{sh} \alpha(i) \cdot U_2(i, j) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(\operatorname{sh}^2 \alpha(i) - \sin^2 \beta(j)) V_2(i, j) \right] \right)
\end{aligned}$$

**Equation du mouvement suivant z:**

**Premier demi-pas axial:**

Implicite suivant  $\alpha$  et explicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
 U_1(i, j) \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} + \text{sh}\alpha_2 W_1(i, j) \frac{W_{12}(i, j) - W_1(i, j)}{\Delta z / 2} = \\
 \text{Pr} \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P_{m1} - P_{m2}}{\Delta z} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \\
 \left[ \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} \frac{W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} \right] \quad (3.37) \\
 + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left[ \frac{W_{12}(i+1, j) + W_{12}(i-1, j) - 2W_{12}(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} + \frac{W_1(i, j+1) + W_1(i, j-1) - 2W_1(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} \right. \\
 \left. + \sin\beta(j) \frac{W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{h(i, j)\Delta\beta} \right]
 \end{aligned}$$

**Deuxième demi-pas axial:**

Explicite suivant  $\alpha$  et implicite suivant  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
 U_1(i, j) \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} + \text{sh}\alpha_2 W_1(i, j) \frac{W_2(i, j) - W_{12}(i, j)}{\Delta z / 2} = \\
 \text{Pr} \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P_{m1} - P_{m2}}{\Delta z} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \\
 \left[ \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} \frac{W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} \right] \quad (3.38) \\
 + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left[ \frac{W_{12}(i+1, j) + W_{12}(i-1, j) - 2W_{12}(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} + \frac{W_2(i, j+1) + W_2(i, j-1) - 2W_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} \right. \\
 \left. + \sin\beta(j) \frac{W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{h(i, j)\Delta\beta} \right]
 \end{aligned}$$

**Equation d'énergie :**

**Premier demi-pas axial:**

Implicite suivant  $\alpha$  et explicite suivant  $\beta$ :

$$U_1(i, j) \frac{\theta_{12}(i+1, j) - \theta_{12}(i-1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{\theta_1(i, j+1) - \theta_1(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} + \text{sh } \alpha_2 W_1(i, j) \frac{\theta_{12}(i, j) - \theta_1(i, j)}{\Delta z / 2} =$$

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( 1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{\theta_{12}(i+1, j) + \theta_{12}(i-1, j) - 2\theta_{12}(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{\theta_1(i, j+1) + \theta_1(i, j-1) - 2\theta_1(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} \right] \quad (3.39)$$

**Deuxième demi-pas axial :**

Explicite suivant  $\alpha$  et implicite suivant  $\beta$ :

$$U_1(i, j) \frac{\theta_{12}(i+1, j) - \theta_{12}(i-1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} + V_1(i, j) \frac{\theta_2(i, j+1) - \theta_2(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} + \text{sh } \alpha_2 W_1(i, j) \frac{\theta_2(i, j) - \theta_{12}(i, j)}{\Delta z / 2} =$$

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( 1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1} \right)^2 \left[ \frac{\theta_{12}(i+1, j) + \theta_{12}(i-1, j) - 2\theta_{12}(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{\theta_2(i, j+1) + \theta_2(i, j-1) - 2\theta_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} \right] \quad (3.40)$$

### 3.5 Mise des équations discrétisées sous forme matricielle :

#### Equation du mouvement suivant $\alpha$ :

##### Premier demi-pas axial :

$$A(i, j)U_{12}(i-1, j) + B(i, j)U_{12}(i, j) + C(i, j)U_{12}(i+1, j) = D(i, j) \quad (3.41)$$

Avec :

$$A(i, j) = -\frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha^2}\right)$$

$$B(i, j) = -V_1(i, j) \sin \beta(j) + 2\text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left(\frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} +$$

$$\mu_2(i, j) \left[ \frac{(\text{ch } \alpha(i) + \cos \beta(j))}{h(i, j)} - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1) \sin \beta(j)}{h(i, j) 2\Delta\beta} \right]$$

$$C(i, j) = \frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\alpha^2} + \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha^2}\right)$$

$$D(i, j) = -V_1(i, j) \frac{U_1(i, j+1) - U_1(i, j-1)}{h(i, j) 2\Delta\beta} - V_1(i, j) V_2(i, j) \text{sh } \alpha(i) + 2\text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j) U_1(i, j)}{\Delta z}$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P'(i-1, j) - P'(i+1, j)}{h(i, j) 2\Delta\alpha} \right] + \text{Gr Pr}^2 \cdot \text{sh } \alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \cos \beta(j)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} \left[ \frac{U_1(i, j+1) - U_1(i, j-1)}{h^2(i, j) 2\Delta\beta} +$$

$$\frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{h^2(i, j) 2\Delta\alpha} + \frac{\text{sh } \alpha(i)}{h(i, j)} V_2(i, j) \right] - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j) \sin \beta(j)}{\Delta\alpha} \frac{V_2(i, j)}{h(i, j)} V_2(i, j) \Big)$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j) W_2(i+1, j) - W_2(i-1, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$\mu_2(i, j) \left( \left[ \frac{U_1(i, j+1) + U_1(i, j-1) - 2U_1(i, j)}{h^2(i, j) \Delta\beta^2} - \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{h(i, j) \Delta\alpha} \sin \beta(j) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1) \text{sh } \alpha(i)}{h(i, j) \Delta\beta} \right] \right)$$

**Deuxième demi-pas axial:**

$$A(i, j)U_2(i, j-1) + B(i, j)U_2(i, j) + C(i, j)U_2(i, j+1) = D(i, j) \quad (3.42)$$

Avec:

$$A(i, j) = -\frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)4\Delta\beta^2}\right)$$

$$B(i, j) = -V_1(i, j)\sin\beta(j) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[\frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} +$$

$$\mu_2(i, j) \left[ \frac{(\text{ch}\alpha(i) + \cos\beta(j))}{h(i, j)} - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} \sin\beta(j) \right]$$

$$C(i, j) = \frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left(\frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)4\Delta\beta^2}\right)$$

$$D(i, j) = -U_1(i, j) \frac{U_{12}(i+1, j) - U_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - V_1(i, j)V_2(i, j)\text{sh}\alpha(i) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)U_{12}(i, j)}{\Delta z}$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P'(i-1, j) - P'(i+1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} \right] + Gr \text{Pr}^2 \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \cos\beta(j)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{2\Delta\beta} \left[ \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} + \frac{\text{sh}\alpha(i)}{h(i, j)} V_2(i, j) \right] \right]$$

$$+ \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{\Delta\alpha} \left[ \frac{U_{12}(i+1, j) - U_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\sin\beta(j)}{h(i, j)} V_2(i, j) \right]$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j)W_2(i+1, j) - W_2(i-1, j)}{\Delta z} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2$$

$$\mu_2(i, j) \left[ \frac{U_{12}(i+1, j) + U_{12}(i-1, j) - 2U_1(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} - \frac{V_2(i+1, j) - V_2(i-1, j)}{h(i, j)\Delta\alpha} \sin\beta(j) \right]$$

$$+ \frac{V_2(i, j+1) - V_2(i, j-1)}{h(i, j)\Delta\beta} \text{sh}\alpha(i) \left. \right]$$

**Equation du mouvement suivant  $\beta$  :**

**Premier demi-pas axial :**

$$A(i, j)V_{12}(i-1, j) + B(i, j)V_{12}(i, j) + C(i, j)V_{12}(i+1, j) = D(i, j) \quad (3.43)$$

Avec :

$$A(i, j) = -\frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j)4\Delta\alpha^2} \right)$$

$$B(i, j) = -U_1(i, j)\text{sh}\alpha(i) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} + \right.$$

$$\left. \mu_2(i, j) \left[ \frac{(\text{ch}\alpha(i) + \cos\beta(j))}{h(i, j)} - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} \text{sh}\alpha(i) \right] \right)$$

$$C(i, j) = \frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} + \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j)4\Delta\alpha^2} \right)$$

$$D(i, j) = -V_1(i, j) \frac{V_1(i, j+1) - V_1(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} - U_1(i, j)U_2(i, j)\sin\beta(j) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)V_1(i, j)}{\Delta z}$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P'(i, j-1) - P'(i, j+1)}{h(i, j)2\Delta\beta} \right] - \text{Gr Pr}^2 \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \sin\beta(j)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \left[ \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} + \frac{\sin\beta(j)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{\Delta\beta} \left[ \frac{V_1(i, j+1) - V_1(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{sh}\alpha(i)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] \right)$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j)W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{\Delta z} \right)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left( \left[ \frac{V_1(i, j+1) + V_1(i, j-1) - 2V_1(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} + \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{h(i, j)\Delta\alpha} \sin\beta(j) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h(i, j)\Delta\beta} \text{sh}\alpha(i) \right] \right)$$

**Deuxième demi-pas axial:**

$$A(i, j)V_2(i, j-1) + B(i, j)V_2(i, j) + C(i, j)V_2(i, j+1) = D(i, j) \quad (3.44)$$

Avec:

$$A(i, j) = -\frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta^2} \right)$$

$$B(i, j) = -U_1(i, j)\text{sh}\alpha(i) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} + \right.$$

$$\left. \mu_2(i, j) \left[ \frac{(\text{ch}\alpha(i) + \cos\beta(j))}{h(i, j)} - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} \text{sh}\alpha(i) \right] \right)$$

$$C(i, j) = \frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta^2} \right)$$

$$D(i, j) = -U_1(i, j) \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - U_1(i, j)U_2(i, j)\sin\beta(j) + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)V_{12}(i, j)}{\Delta z}$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left[ \frac{P'(i, j-1) - P'(i, j+1)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \text{Gr Pr}^2 \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^4 \theta_2(i, j) \cdot \sin\beta(j) \right]$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \left[ \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} + \frac{V_{12}(i+1, j) - V_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\beta(j)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right] - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{\Delta\beta} \left[ \frac{\text{sh}\alpha(i)}{h(i, j)} U_2(i, j) \right]$$

$$+ \text{Pr} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j) - \mu_1(i, j)W_2(i, j+1) - W_2(i, j-1)}{\Delta z} \right)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left( \left[ \frac{V_{12}(i+1, j) + V_{12}(i-1, j) - 2V_{12}(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} - \frac{U_2(i+1, j) - U_2(i-1, j)}{h(i, j)\Delta\alpha} \sin\beta(j) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{U_2(i, j+1) - U_2(i, j-1)}{h(i, j)\Delta\beta} \text{sh}\alpha(i) \right]$$



**Equation du mouvement suivant z :**

**Premier demi-pas axial :**

$$A(i, j)W_{12}(i-1, j) + B(i, j)W_{12}(i, j) + C(i, j)W_{12}(i+1, j) = D(i, j) \quad (3.45)$$

Avec :

$$A(i, j) = -\frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} - \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j)4\Delta\alpha^2} \right)$$

$$B(i, j) = 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \right)$$

$$C(i, j) = \frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} + \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)}{h^2(i, j)4\Delta\alpha^2} \right)$$

$$D(i, j) = -V_1(i, j) \frac{W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)W_1(i, j)}{\Delta z} + \text{Pr} \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2$$

$$\left[ \frac{P_{m1} - P_{m2}}{\Delta z} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{2\Delta\beta} \frac{W_1(i, j+1) - W_1(i, j-1)}{h^2(i, j)2\Delta\beta} \right)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left( \frac{W_1(i, j+1) + W_1(i, j-1) - 2W_1(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} \right)$$

**Deuxième demi-pas axial:**

$$A(i, j)W_2(i, j-1) + B(i, j)W_2(i, j) + C(i, j)W_2(i, j+1) = D(i, j) \quad (3.46)$$

Avec :

$$A(i, j) = -\frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} - \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)4\Delta\beta^2} \right)$$

$$B(i, j) = 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{2\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} \right)$$

$$C(i, j) = \frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} + \frac{\mu_2(i, j+1) - \mu_2(i, j-1)}{h^2(i, j)4\Delta\beta^2} \right)$$

$$D(i, j) = -U_1(i, j) \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} + 2\text{sh}\alpha_2 \frac{W_1(i, j)W_{12}(i, j)}{\Delta z} + \text{Pr} \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2$$

$$\left[ \frac{P_{m1} - P_{m2}}{\Delta z} \right] + \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\mu_2(i+1, j) - \mu_2(i-1, j)W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{2\Delta\alpha} \frac{W_{12}(i+1, j) - W_{12}(i-1, j)}{h^2(i, j)2\Delta\alpha} \right)$$

$$+ \frac{\text{Pr}}{\text{sh}\alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \mu_2(i, j) \left( \frac{W_{12}(i+1, j) + W_{12}(i-1, j) - 2W_{12}(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \right)$$

**Equation d'énergie :****Premier demi-pas axial :**

$$A(i, j)\theta_{12}(i-1, j) + B(i, j)\theta_{12}(i, j) + C(i, j)\theta_{12}(i+1, j) = D(i, j) \quad (3.47)$$

Avec:

$$A(i, j) = -\frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{1}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$B(i, j) = 2 \text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{2}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$C(i, j) = \frac{U_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \frac{1}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$D(i, j) = -V_1(i, j) \frac{\theta_1(i, j+1) - \theta_1(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} + 2 \text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j)\theta_1(i, j)}{\Delta z} +$$

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\theta_1(i, j+1) + \theta_1(i, j-1) - 2\theta_1(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\beta^2} \right)$$

**Deuxième demi-pas axial:**

$$A(i, j)\theta_2(i, j-1) + B(i, j)\theta_2(i, j) + C(i, j)\theta_2(i, j+1) = D(i, j) \quad (3.48)$$

Avec :

$$A(i, j) = -\frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{1}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\beta^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$B(i, j) = 2 \text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{2}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\beta^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$C(i, j) = \frac{V_1(i, j)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \frac{1}{\text{sh } \alpha_2 h^2(i, j)\Delta\beta^2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2$$

$$D(i, j) = -U_1(i, j) \frac{\theta_{12}(i+1, j) - \theta_{12}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} + 2 \text{sh } \alpha_2 \frac{W_1(i, j)\theta_{12}(i, j)}{\Delta z} +$$

$$\frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \left( \frac{\theta_{12}(i+1, j) + \theta_{12}(i-1, j) - 2\theta_{12}(i, j)}{h^2(i, j)\Delta\alpha^2} \right)$$

### **3.6 Résolution des équations discrétisées :**

Les équations discrétisées conduisent aux systèmes tridiagonaux suivants :

$$A(i, j)\varphi_{12}(i-1, j) + B(i, j)\varphi_{12}(i, j) + C(i, j)\varphi_{12}(i+1, j) = D(i, j)$$

$$A'(i, j)\varphi_2(i, j-1) + B'(i, j)\varphi_2(i, j) + C'(i, j)\varphi_2(i, j+1) = D'(i, j)$$

Où  $\varphi$  est une variable muette représentant une composante de la vitesse ou de la température. Les systèmes tridiagonaux sous forme matricielle (Figure 3.5) sont traités à l'aide de l'algorithme de Thomas. Cet algorithme permet de résoudre un système tridiagonal le long de chaque ligne de matrice. On détermine dans un premier demi pas les valeurs  $\varphi_{12}$  en chaque point du maillage : implicitement en  $\alpha$  et explicitement en  $\beta$ , puis les valeurs  $\varphi_2$  en chaque point du maillage : explicitement en  $\alpha$  et implicitement en  $\beta$ .

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \vdots \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & c_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Figure 3.5 Système tridiagonal sous forme matricielle

#### **3.6.1 Algorithme de résolution :**

Les équations régissant les écoulements de convection mixte sont de nature tridimensionnelle, non linéaire et couplée. La méthode de résolution est basée sur l'algorithme proposé par BRILEY.R.W [24]. Cet algorithme permet de traiter les problèmes d'écoulement de nature tridimensionnelle et parabolique. La direction de l'écoulement est parabolique, c'est-à-dire que les informations physiques à l'aval de la conduite en remonte pas vers l'amont de celle-ci, les caractéristiques de l'écoulement dans la section ne dépendent que de celles se trouvant dans la section précédente. Le problème qui est de nature tridimensionnelle se résout finalement comme un problème bidimensionnel. La diffusion axiale de quantité de mouvement ou d'énergie est négligée devant les diffusions transversales. Cette hypothèse est réaliste pour les fluides à fort nombre de Prandtl.

L'idée de base de la méthode proposée par Briley consiste à supposer le champ de pression connu, c'est-à-dire  $\left(\frac{\partial P_m}{\partial z}, \frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \alpha} \text{ et } \frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \beta}\right)$ . Les équations de conservation du mouvement peuvent alors être découplées ainsi résolues séparément.

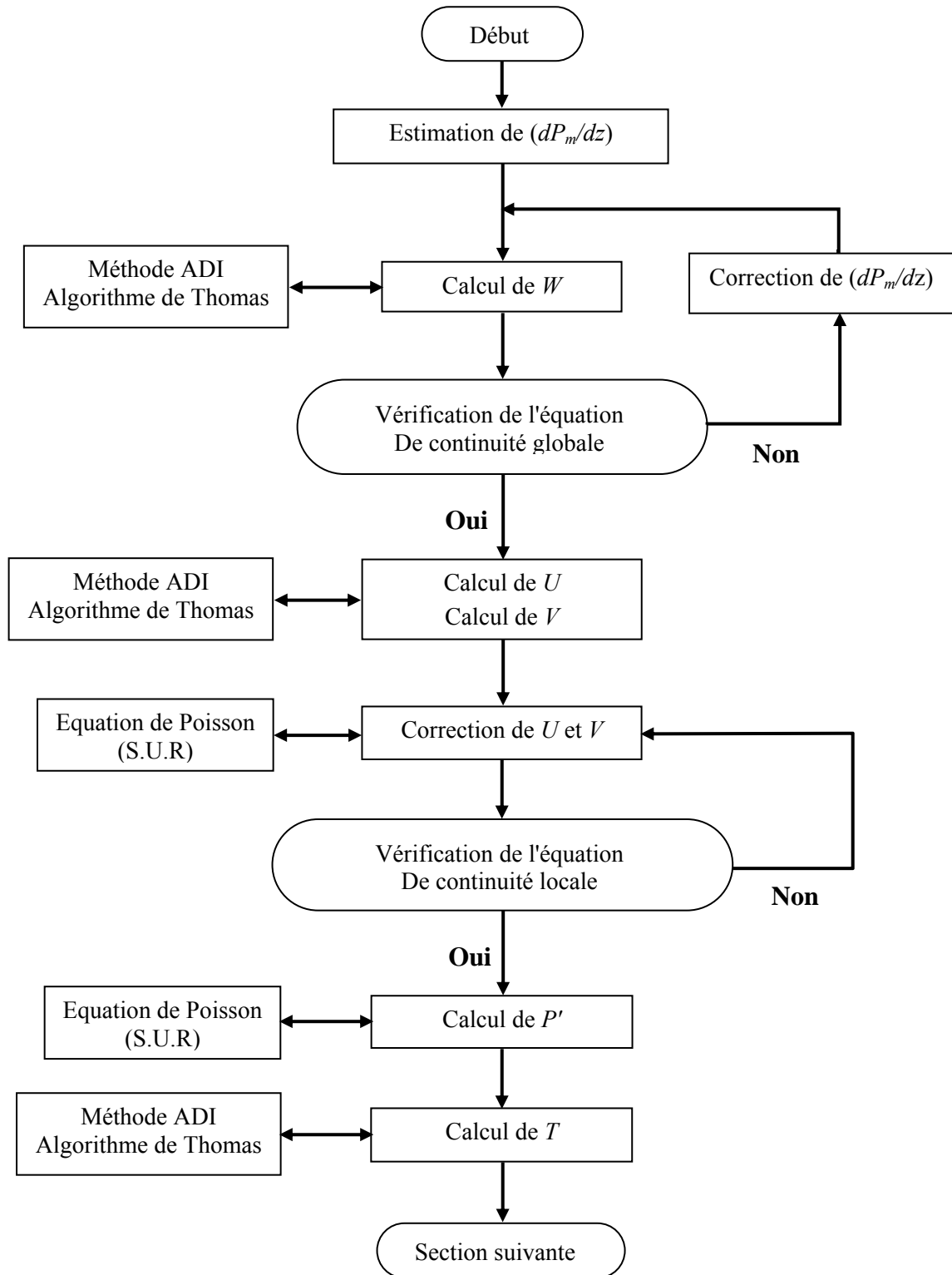


Figure 3.6 Algorithme de résolution

La Figure (3.6) représente l'algorithme de résolution du problème. Il se compose de trois étapes :

**Etape1** : Résolution de l'équation de quantité de mouvement suivant la direction principale de l'écoulement :

1. La vitesse axiale dans la section  $n+1$ ,  $W^{n+1}$  est déterminée après s'être donné le gradient de pression dans la même section  $n+1$ ,  $\left(\frac{\partial P_m}{\partial z}\right)$ ;
2. Correction de  $\left(\frac{\partial P_m}{\partial z}\right)$  à partir de l'équation de conservation du débit. Le processus 1-2 est répété jusqu'à ce que l'équation de conservation du débit soit vérifiée à  $\varepsilon$  près.

**Etape 2** : Résolution des équations de conservation suivant les directions  $\alpha$  et  $\beta$  :

1. Les vitesses radiale et tangentielle à la section  $n+1$ ,  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$  sont déterminées à partir des équations du mouvement transversal. On considère le champ de pression transversale à la section  $n$  pour la résolution des équations de mouvement à la section  $n+1$ ;
2.  $U^{n+1}$  et  $V^{n+1}$  sont corrigées à partir de l'équation de continuité locale;
3. Le champ de pression à la section  $n+1$ ,  $P'^{n+1}$  est déterminé à partir d'une équation de Poisson construite à partir des équations suivant les directions transversales.

**Etape 3** : Résolution de l'équation de l'énergie : une fois les vitesses  $U$ ,  $V$  et  $W$  déterminées,

il est possible, en utilisant l'équation de l'énergie d'évaluer le profil de température dans la section  $n+1$ .

**Remarque** : Puisque la consistance  $K$  est fonction de la température, les étapes 1-3 sont répétées jusqu'à convergence.

### **3.6.2 Critères de convergence:**

Dans un premier temps la quantité  $\frac{\partial P_m}{\partial z}$  est supposée connue, la vitesse axiale est alors déterminée à partir de l'équation de conservation du mouvement axiale. A partir du champ de vitesse axial calculé, la condition de conservation du débit est alors vérifiée. Le débit

résiduel défini par l'équation (3.49) associé avec la méthode des sécantes, est utilisé pour corriger le champ de vitesse axial ainsi que le gradient de pression axial. Le processus est répété jusqu'à ce que  $\text{Res} \leq 5.10^{-8}$ . Le calcul du débit par intégration numérique est obtenu en utilisant la méthode de Simpson.

$$\int_0^{\alpha_2} \int_{\alpha_1}^{\pi} \frac{W}{(\text{ch } \alpha - \cos \beta)^2} d\alpha d\beta - \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{(\text{sh } \alpha_2)^2} - \frac{1}{(\text{sh } \alpha_1)^2} \right) = \text{Res} \quad (3.49)$$

La deuxième étape consiste à calculer les vitesses radiale et tangentielle à partir des équations de conservation des mouvements radial et tangentiel en utilisant le champ de pression  $P'(\alpha, \beta)$  de la section précédente. Les vitesses obtenues  $U_p$  et  $V_p$  sont corrigées de telle sorte qu'elles vérifient l'équation de continuité locale :

$$U = U_p + U_c ; \quad V = V_p + V_c \quad (3.50)$$

En supposant que les vitesses de correction ( $U_c$  et  $V_c$ ) sont irrotationnelles, elles dérivent donc d'un potentiel  $\chi$  :

$$U_c = \frac{1}{h} \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} ; \quad V_c = \frac{1}{h} \frac{\partial \chi}{\partial \beta} \quad (3.51)$$

Avec :  $\frac{1}{h} = (\text{ch } \alpha - \cos \beta)$

En substituant les équations (3.50) et (3.51) dans l'équation de continuité locale on obtient une équation de Poisson :

$$\Delta \chi = f \quad (3.52)$$

Où : 
$$f = - \left( \text{sh } \alpha_2 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial U_p}{\partial \alpha} - \text{sh } \alpha U_p + \frac{1}{h} \frac{\partial V_p}{\partial \beta} - \sin \beta V_p \right)$$

On note que : 
$$\Delta = \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right)$$

L'équation (3.52) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \beta^2} = h^2 \cdot f \quad (3.53)$$

L'équation de Poisson (3.53) est résolue en utilisant la méthode de relaxation (**S.U.R**) avec double balayage, suivant  $\alpha$  et suivant  $\beta$ .

**Balayage suivant  $\alpha$  :**

En utilisant les différences finis comme précédemment :

$$\frac{\chi(i+1, j) + \chi(i-1, j) - 2\chi(i, j)}{\Delta\alpha^2} + \frac{\chi(i, j+1) + \chi(i, j-1) - 2\chi(i, j)}{\Delta\beta^2} = h^2(i, j) \cdot f_{ij} \quad (3.54)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\alpha^2} \chi(i+1, j) + \frac{1}{\Delta\alpha^2} \chi(i-1, j) &= h^2(i, j) \cdot f_{ij} + 2 \left( \frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2} \right) \chi(i, j) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta\beta^2} \chi(i, j+1) - \frac{1}{\Delta\beta^2} \chi(i, j-1) \end{aligned} \quad (3.55)$$

On multipliant l'équation par le facteur de relaxation  $\omega$ , et on rappelle que la convergence est atteinte lorsque :

$$\chi_2(i, j) \approx \chi_1(i, j) \quad (2 \text{ correspond à l'itération } k+1 \text{ et } 1 \text{ à l'itération } k)$$

On a donc l'équation suivante :

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2} \right) \chi_2(i, j) + \frac{\omega}{\Delta\alpha^2} \chi_2(i+1, j) + \frac{\omega}{\Delta\alpha^2} \chi_2(i-1, j) &= \omega h^2(i, j) \cdot f_{ij} - 2(1-\omega) \left( \frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2} \right) \chi_1(i, j) \\ &\quad - \frac{\omega}{\Delta\beta^2} \chi_1(i, j+1) - \frac{\omega}{\Delta\beta^2} \chi_1(i, j-1) \end{aligned} \quad (3.56)$$

L'équation (3.56) est réécrite sous la forme (3.57) afin d'être résolue avec l'algorithme de Thomas :

$$\begin{aligned} A(i, j) \chi_2(i-1, j) + B(i, j) \chi_2(i, j) + C(i, j) \chi_2(i+1, j) &= \omega h^2(i, j) \cdot f_{ij} + (1-\omega) B(i, j) \chi_1(i, j) \\ &\quad + E(i, j) \chi_1(i, j-1) + F(i, j) \chi_1(i, j+1) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Avec:

$$\begin{aligned} A(i, j) &= C(i, j) = \frac{\omega}{\Delta\alpha^2} \\ B(i, j) &= -2 \left( \frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2} \right) \\ E(i, j) &= F(i, j) = -\frac{\omega}{\Delta\beta^2} \end{aligned}$$

**Balayage suivant  $\beta$  :**

De la même façon comme pour le cas suivant  $\alpha$  , on arrive à l'équation :

$$A(i, j)\chi_2(i, j-1) + B(i, j)\chi_2(i, j) + C(i, j)\chi_2(i, j+1) = \omega h^2(i, j) \cdot f_{ij} + (1-\omega)B(i, j)\chi_1(i, j) + E(i, j)\chi_1(i-1, j) + F(i, j)\chi_1(i+1, j) \quad (3.58)$$

Avec :

$$A(i, j) = C(i, j) = \frac{\omega}{\Delta\beta^2}$$

$$B(i, j) = -2\left(\frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2}\right)$$

$$E(i, j) = F(i, j) = -\frac{\omega}{\Delta\alpha^2}$$

Et :

$$f_{ij} = -\left(\text{sh}\alpha_2 \frac{W_2(i, j) - W_1(i, j)}{\Delta z} + \frac{U_{p2}(i+1, j) - U_{p2}(i-1, j)}{h(i, j)2\Delta\alpha} - \text{sh}\alpha(i)U_{p2}(i, j) + \frac{V_{p2}(i, j+1) - V_{p2}(i, j-1)}{h(i, j)2\Delta\beta} - \sin\beta(j)V_{p2}(i, j)\right)$$

L'équation (3.58), est résolue à l'aide de l'algorithme de Thomas.

A ce stade  $\frac{\partial P_m}{\partial z}$ ,  $U$ ,  $V$  et  $W$  sont parfaitement déterminés. Il reste à déterminer le champ de pression  $P'(\alpha, \beta)$  dans une section droite de la conduite. En écrivant les équations de conservation du mouvement radiale et tangentielle d'une autre manière, on obtient :

**Suivant  $\alpha$  :**

$$\psi_1 = \frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2} \left[ \frac{U}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - UV \sin\beta + V^2 \text{sh}\alpha + \text{sh}\alpha_2 W \frac{\partial U}{\partial z} \right] + Gr \text{Pr} \cdot \text{sh}\alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh}\alpha_2}{\text{sh}\alpha_1}\right)^2 \theta \cdot \cos\beta + \frac{1}{\text{sh}\alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \cdot \sin\beta}{h} V \right] + \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh}\alpha}{h} V + \frac{\sin\beta}{h} U \right] \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{1}{\text{sh}\alpha_2} \bar{\mu}_a \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} - \frac{2 \sin\beta}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{2 \text{sh}\alpha}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{(\text{ch}\alpha + \cos\beta)}{h} U \right) \quad (3.59)$$



**Suivant  $\beta$  :**

$$\begin{aligned}
\psi_2 = \frac{1}{h} \frac{\partial P'}{\partial \beta} = & -\frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2} \left[ \frac{U}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} + U^2 \sin \beta - UV \text{sh } \alpha + \text{sh } \alpha_2 W \frac{\partial V}{\partial z} \right] \\
& - Gr \text{Pr} \cdot \text{sh } \alpha_2 \left(1 - \frac{\text{sh } \alpha_2}{\text{sh } \alpha_1}\right)^2 \theta \cdot \sin \beta + \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \left( \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{2 \cdot \text{sh } \alpha}{h} U \right] \right. \\
& \left. + \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh } \alpha}{h} V + \frac{\sin \beta}{h} U \right] \right) + \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\mu}_a}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \beta} \\
& + \frac{1}{\text{sh } \alpha_2} \bar{\mu}_a \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{2 \sin \beta}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \text{sh } \alpha}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{(\text{ch } \alpha + \cos \beta)}{h} V \right)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

En dérivant les équations du mouvement radiale et tangentielle par  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement, on obtient une équation de Poisson pour la pression qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta P' = S \tag{3.61}$$

Où :

$$S = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \text{sh } \alpha \cdot \psi_1 + \frac{1}{h} \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} - \sin \beta \cdot \psi_2$$

**Balayage suivant  $\alpha$  :**

En utilisant les différences finis comme précédemment :

$$\frac{P'(i+1, j) + P'(i-1, j) - 2P'(i, j)}{\Delta \alpha^2} + \frac{P'(i, j+1) + P'(i, j-1) - 2P'(i, j)}{\Delta \beta^2} = h^2(i, j) \cdot S_{ij} \tag{3.62}$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta \alpha^2} P'(i+1, j) + \frac{1}{\Delta \alpha^2} P'(i-1, j) = & h^2(i, j) S_{ij} + 2 \left( \frac{1}{\Delta \alpha^2} + \frac{1}{\Delta \beta^2} \right) P'(i, j) \\
& - \frac{1}{\Delta \beta^2} P'(i, j+1) - \frac{1}{\Delta \beta^2} P'(i, j-1)
\end{aligned} \tag{3.63}$$

On multipliant l'équation (3.63) par le facteur de relaxation  $\omega$ , et on rappelle que la convergence est atteinte lorsque :

$$P'_2(i, j) \approx P'_1(i, j)$$

On a donc l'équation suivante :

$$-2\left(\frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2}\right)P'_2(i, j) + \frac{\omega}{\Delta\alpha^2}P'_2(i+1, j) + \frac{\omega}{\Delta\alpha^2}P'_2(i-1, j) = \omega h^2(i, j) S_y - 2(1-\omega)\left(\frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2}\right)P'_1(i, j) - \frac{\omega}{\Delta\beta^2}P'_1(i, j+1) - \frac{\omega}{\Delta\beta^2}P'_1(i, j-1) \quad (3.64)$$

L'équation (3.64) est réécrite sous la forme suivante :

$$A(i, j)P'_2(i-1, j) + B(i, j)P'_2(i, j) + C(i, j)P'_2(i+1, j) = \omega h^2(i, j) S_y + (1-\omega)B(i, j)P'_1(i, j) + E(i, j)P'_1(i, j-1) + F(i, j)P'_1(i, j+1) \quad (3.65)$$

Avec :

$$A(i, j) = C(i, j) = \frac{\omega}{\Delta\alpha^2}$$

$$B(i, j) = -2\left(\frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2}\right)$$

$$E(i, j) = F(i, j) = -\frac{\omega}{\Delta\beta^2}$$

### **Balayage suivant $\beta$ :**

De la même façon comme pour le cas suivant  $\alpha$ , on arrive à l'équation :

$$A(i, j)P'_2(i, j-1) + B(i, j)P'_2(i, j) + C(i, j)P'_2(i, j+1) = \omega h^2(i, j) S_y + (1-\omega)B(i, j)P'_1(i, j) + E(i, j)P'_1(i-1, j) + F(i, j)P'_1(i+1, j) \quad (3.66)$$

Avec :

$$A(i, j) = C(i, j) = \frac{\omega}{\Delta\beta^2}$$

$$B(i, j) = -2\left(\frac{1}{\Delta\alpha^2} + \frac{1}{\Delta\beta^2}\right)$$

$$E(i, j) = F(i, j) = -\frac{\omega}{\Delta\alpha^2}$$

Et :

$$S_y = \frac{\psi_1(i+1, j) - \psi_1(i-1, j)}{h(i, j)2.\Delta\alpha} - \text{sh } \alpha(i).\psi_1(i, j) + \frac{\psi_2(i, j+1) - \psi_2(i, j-1)}{h(i, j)2.\Delta\beta} - \sin \beta(j).\psi_2(i, j)$$

L'algorithme de Thomas est utilisé pour la résolution des équations (3.65) et (3.66).

**Remarque :** Les équations de poisson de potentiel  $\chi$  et de pression  $P'$  avec leurs conditions aux limites respectives sont résolues par ligne par la méthode de relaxation (**S.U.R**) avec double balayage, radial et azimutal.

Le critère de convergence pour le potentielle de vitesse  $\chi$  est :

$$\frac{\text{Max}|\chi^{l+1} - \chi^l|}{\text{Max}|\chi^{l+1}|} \leq 2.10^{-6}$$

Et Pour la pression  $P'$ , il est :

$$\frac{\text{Max}|P'^{l+1} - P'^l|}{\text{Max}|P'^{l+1}|} \leq 2.10^{-6} \quad (l : \text{N}^{\text{b}} \text{ d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence})$$

**Remarque :** On s'est limité pour l'erreur sur les deux fonctions potentielles à  $2.10^{-6}$ , pour tous les cas de convection et toutes les excentricités. Or pour les cas de  $\varepsilon \leq 0.4$  on peut aller jusqu'à  $10^{-7}$  pour la vitesse.

### **Détermination du nombre de Nusselt :**

Le nombre de Nusselt est définit par :

$$Nu = \frac{D_h}{\lambda} \frac{\Phi}{T - T_m} = \frac{2(1 - r_1)}{(\theta - \theta_m)}$$

$D_h$  : Est le diamètre hydraulique, égal à :  $2(R_2 - R_1)$  ;

$T_m$  : Est la température moyenne, définit par :

$$\theta_m = \frac{1}{S W_m} \int_0^{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W \theta h^2 d\alpha d\beta$$

$W_m$  : Est la vitesse axiale moyenne, définit par :

$$W_m = \frac{1}{S} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} W h^2 d\alpha d\beta$$

Dans les formules ci-dessus:  $h = 1/(\text{ch } \alpha - \cos \beta)$

$S$  : est la section de passage, égale à :  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{(\text{sh } \alpha_2)^2} - \frac{1}{(\text{sh } \alpha_1)^2} \right)$

Pour les nombres de Nusselt circonférentiels intérieur et extérieur on a:

$$Nu_{1,2} = \frac{2(1-r_1)}{(\theta_{1,2} - \theta_m)} \quad (1,2: \text{Intérieur, extérieur respectivement})$$

Pour les nombres de Nusselt circonférentiels moyens intérieur et extérieur on a:

$$\overline{Nu}_{1,2} = \frac{2(1-r_1)}{(\overline{\theta}_{1,2} - \theta_m)}$$

### **3.6.3 Maillages choisis :**

Pour la section transversale on a gardé le même maillage choisi par BENAOUDA-ZOUAOUILB [1] (choisi après plusieurs essais). Pour la direction axiale, et à cause de la forte influence de l'excentricité sur les différents phénomènes rencontrés dans le problème, différents maillages axiaux sont choisis afin de vaincre les erreurs de troncature :

Pour :  $\varepsilon \leq 0.2$ , on a choisi (101×101×12000) ;

Pour :  $0.2 \leq \varepsilon \leq 0.4$ , on a choisi (101×101×24000) ;

Pour :  $0.4 \leq \varepsilon \leq 0.6$ , on a choisi (101×101×75000) ;

**Remarque 1:** Les maillages ci-dessus restent globalement valables. Pour le cas des fluides fortement rhéofluidifiants ( $n < 0.5$ ), plus de finesse pour le maillage axiale est nécessaire.

**Remarque 2:** Pour une meilleure présentation des résultats. Les résultats suivant la direction radiale sont présentés en terme de  $r$  au lieu de  $\alpha$ , avec  $0.5 \leq r \leq 1.0$ . Cela ne pose aucun problème du fait que le maillage radial est régulier.

### **3.6.4 Temps de calcul :**

Avec ces maillages choisis, le temps écoulé pour l'exécution complète du code, varie de 2h, à 17h 25mn, sur un Pentium 4, de 2GHz d'horloge et 256Mo de RAM.

### **3.7 Optimisation et validation du code de calcul :**

Le code de calcul fait par BENAOUA-Z.B pour le cas d'une conduite annulaire horizontale concentrique, est adapté pour le cas d'une conduite horizontale excentrique.

Le code adapté est validé avec celui de BENAOUA-Z.B [1], pour une excentricité  $\varepsilon = 10^{-4}$  ( $\approx 0.0$ ), les résultats obtenus sont avec une grande concordance. Deux cas sont présentés :

**Cas1** : Convection forcée pour un fluide pseudoplastique avec  $n=0.4$  et une consistance qui varie avec la température, (Figure 3.7) ;

**Cas 2** : Convection mixte pour un fluide pseudoplastique avec  $n=0.7$  et consistance variable Avec la température, (Figure 3.8-3.11);

Pour déterminer le profil de vitesse axiale à l'entrée de la conduite, nous avons établi l'écoulement. Les résultats après l'établissement, ont été validés avec ceux donnés par ESCUDIER.M.P et al [25], pour le cas d'un fluide newtonien (P2) pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$ , le rapport géométrique est pris égale à 0.5, et l'excentricité égale à 0.2, 0.5 et 0.8 respectivement (Figure 3.12). Les résultats pour  $\beta = \pi/2$  ne sont pas présentés, du fait que le système de coordonnées bipolaires présente des courbures plus ou moins accentuées pour les  $\beta$  différents de 0 et  $\pi$ . Les résultats de l'établissement, ont été aussi comparés avec ceux obtenus par FELDMAN.E.E et al [8], donnant la valeur de  $W_{\max}/W_m$  pour  $\beta = 0$ , pour le cas newtonien, avec différentes excentricités et différents rapports géométriques (P239), les résultats de comparaison sont regroupés dans le tableau (3.1).

**Remarque** : Une autre validation du code concernant le profil de vitesse axiale à l'entrée, a été faite pour le cas des fluides pseudoplastiques avec les résultats de MANGLIK.R.M et al [9].

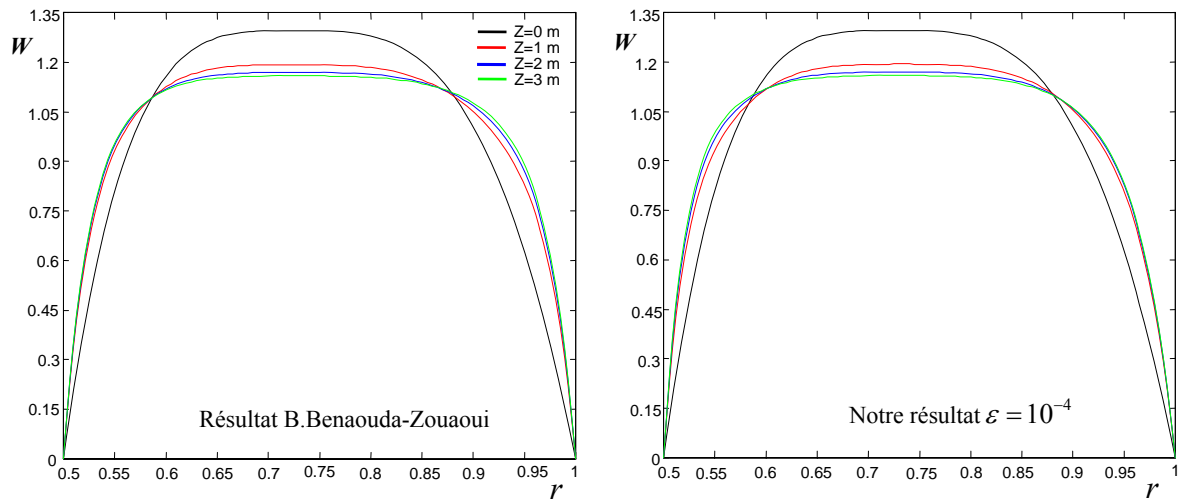


Figure 3.7 Profils de la vitesse axiale le long de la conduite;  
Convection forcée;  $n = 0.4$ ;  $Pn = 10.7$ ;  $Re = 40$ ;  $Gr = 0$

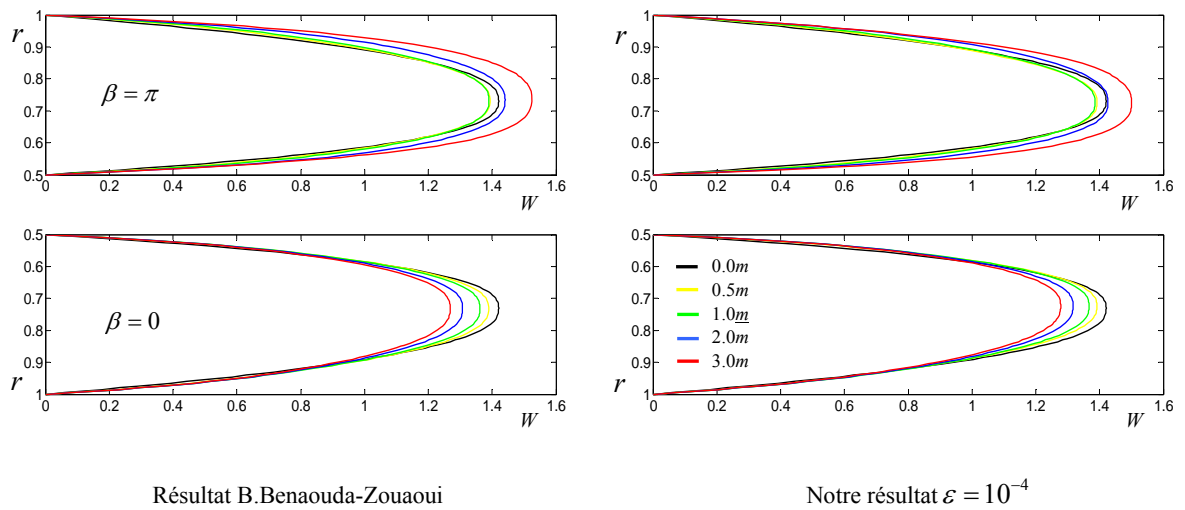


Figure 3.8 Evolution du profil de la vitesse axiale le long de la zone de chauffage, pour  
 $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$ ; Convection mixte;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$

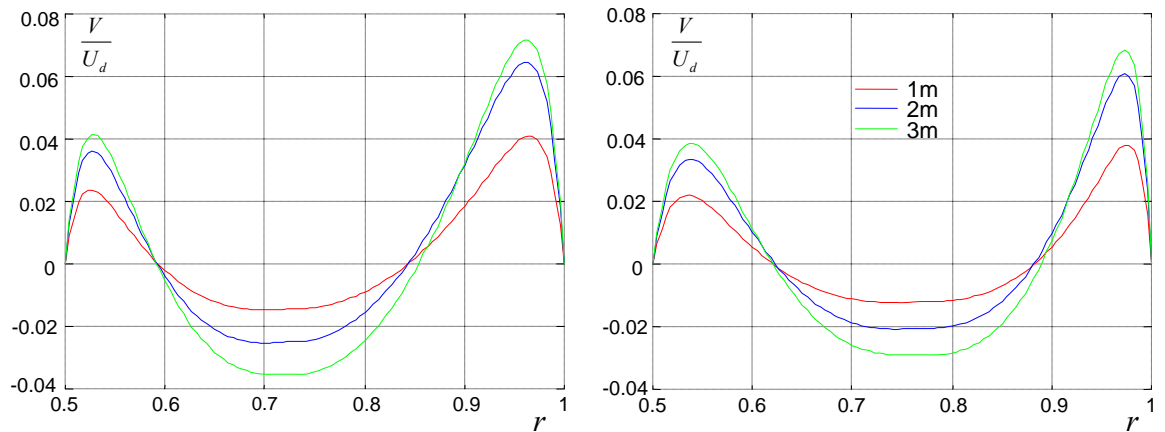


Figure 3.9 Profils de la vitesse azimutale rapportée pour ( $\beta = \pi/2$ ), pour différentes positions axiales

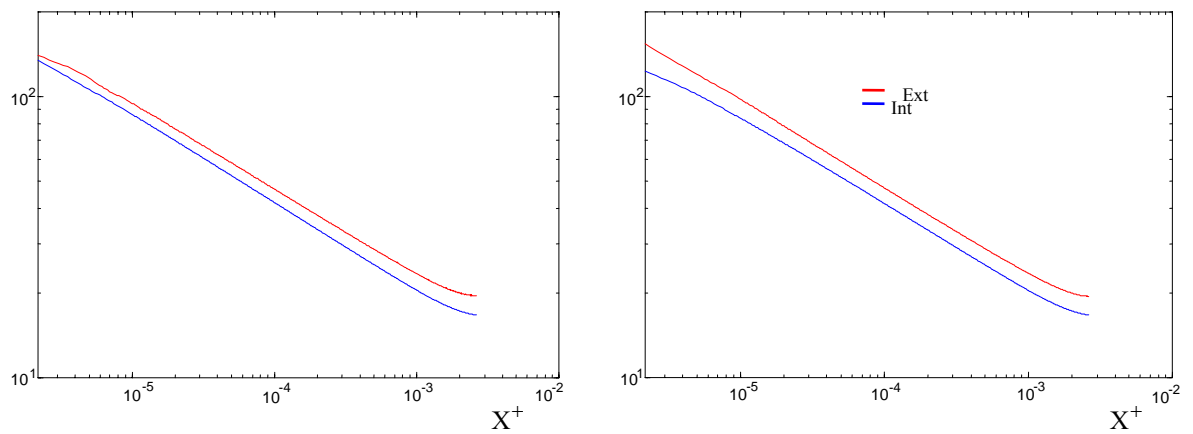


Figure 3.10 Evolution des nombres de Nu moyens ( $\overline{Nu}$ ) extérieur et intérieur, le long de la zone de chauffage

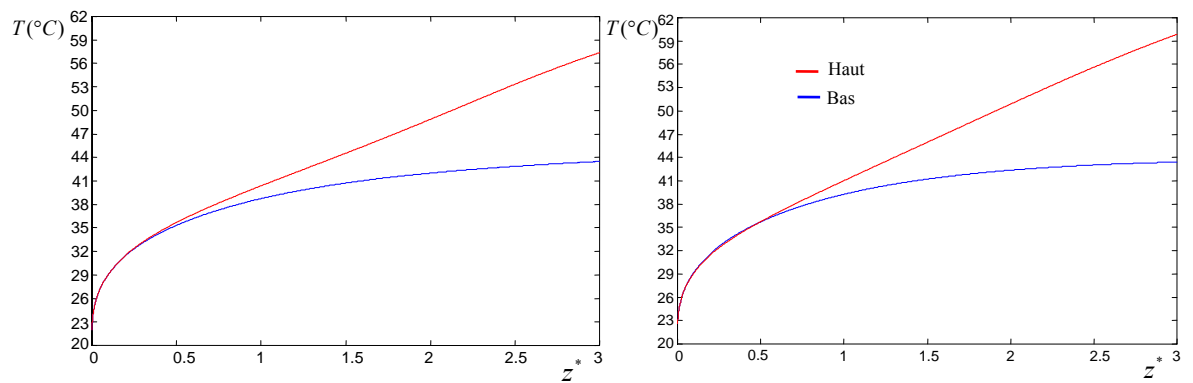


Figure 3.11 Evolution de la température de paroi du cylindre extérieur, le long de la zone de chauffage

**Validation du code pour montrer l'effet de l'excentricité sur le profil de vitesse axiale :**

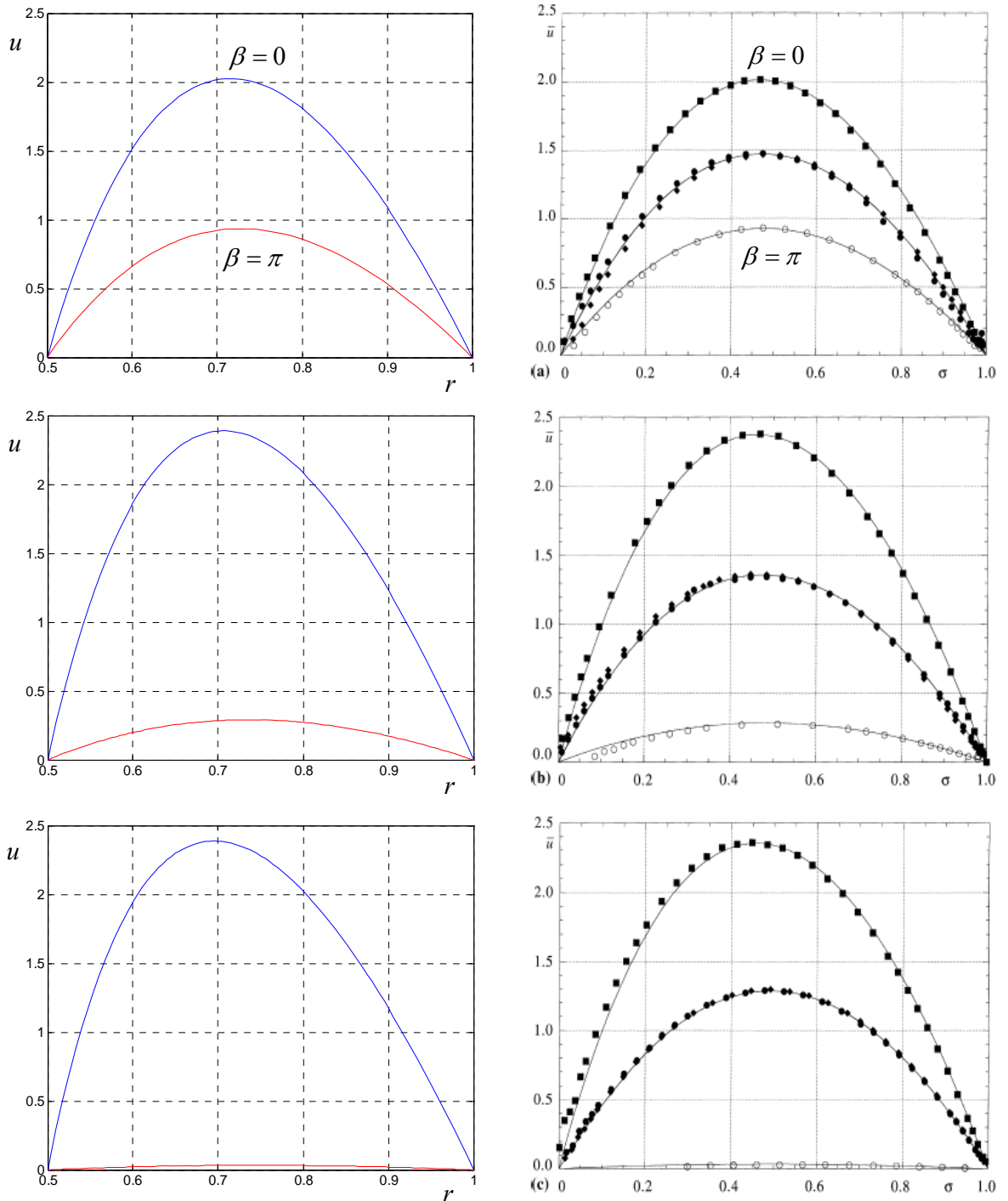


Figure 3.12 Comparaison entre nos résultats et les résultats de ESCUDIER. M.P et al [25] ; (a)  $\varepsilon = 0.2$  ; (b)  $\varepsilon = 0.5$  ; (c)  $\varepsilon = 0.8$  ;  $r_1 = 0.5$  ;  $Re = 105$



Tableau 3.1 Comparaison de nos résultats avec les résultats de FELDMAN.E.E et al [8]

Excentricité $\varepsilon$	Rapport géométrique $r_1$	$W_{\max}/W_m$ $(\beta = 0)_{(a)}$	$W_{\max}/W_m$ $(\beta = 0)_{(b)}$
0.9	0.5	2.324 (2.310)	2.364
0.5	0.5	2.373 (2.372)	2.389
0.0	0.5	1.508	1508
$10^{-3}$	0.4	1.516	1.526
0.0	0.4	1.513	1.513
0.7	0.3	2.277 (2.274)	2.289
0.0	0.3	1.522	1.522
0.9	0.1	2.152 (2.076)	2.155
0.5	0.1	2.149 (2.148)	2.148
0.0	0.1	1.567	1.567

(a): Résultats de FELDMAN.E.E et al [8]

(b): Notre résultat

# CHAPITRE 4

## Analyse Des Résultats Et Discussions

## CHAPITRE 4

### ANALYSE DES RESULTATS ET DISCUSSIONS

#### **4.1 Introduction :**

Afin de mettre en évidence les effets de l'excentricité, du comportement rhéologique, de la thermodépendance et de la convection naturelle sur les champs thermique et dynamique, l'analyse comportera quatre parties. La première partie (section 4.2), concerne la convection forcée pour un fluide non thermodépendant. La seconde partie de l'analyse, (section 4.3), porte sur la convection forcée pour un fluide thermodépendant. La convection mixte pour un fluide non thermodépendant est analysée dans la troisième partie (section 4.4). La dernière partie (section 4.5), est réservée pour l'analyse de la convection mixte avec un fluide dans la viscosité est dépendante de la température.

#### **4.2 Convection forcée avec consistance constante :**

Le degré d'excentricité de la conduite annulaire, a une grande influence sur la distribution de l'écoulement principal supposé établi à l'entrée. Avec l'augmentation de l'excentricité, Le profil de vitesse de l'écoulement présente une forme parabolique avec une vitesse maximale de plus en plus importante dans la région la plus étendue ( $\beta = 0$ ), l'inverse est observé dans la partie la plus étroite ( $\beta = \pi$ ) où l'écoulement est presque immobile pour des excentricités supérieures à 0.6. Pour le cas d'un fluide newtonien et pour  $\varepsilon = 0.2$ , la vitesse maximale dans la région étendue est 33.3% plus grande que dans le cas concentrique et 38.7% inférieure dans la partie étroite. Ces valeurs deviennent respectivement 54% dans la partie large et 89.7% dans la partie étroite pour une excentricité égale à 0.6. Un établissement de l'écoulement que nous avons fait, vérifie très bien les résultats trouvés par ESCUDIER.M.P et al [25] pour le cas d'un fluide newtonien avec des excentricités de 0.2, 0.5 et 0.8 respectivement (Figure 3.12). Les valeurs de la vitesse maximale rapportée à la vitesse moyenne pour ( $\beta = \pi$ ) obtenues par FELDMAN.E.E et al [8] pour différentes excentricités et différents rapports géométriques ont été aussi vérifiées.

L'indice de structure  $n$  a aussi une grande influence sur la distribution de la vitesse axiale. Cela est dû à l'augmentation du gradient pariétal avec la diminution de l'indice de structure, cette augmentation fait décroître la viscosité apparente du fluide ce qui entraîne une plus grande uniformité dans la distribution de l'écoulement (c'est pour cette raison que l'allure de la vitesse axiale devient plus aplatie quand  $n$  devient plus faible). Une grande excentricité peut donc causer le blocage de l'écoulement dans la partie étroite d'autant que l'indice de structure est faible. Cet effet est présenté pour trois valeurs de l'indice de structure dans la figure (4.1).

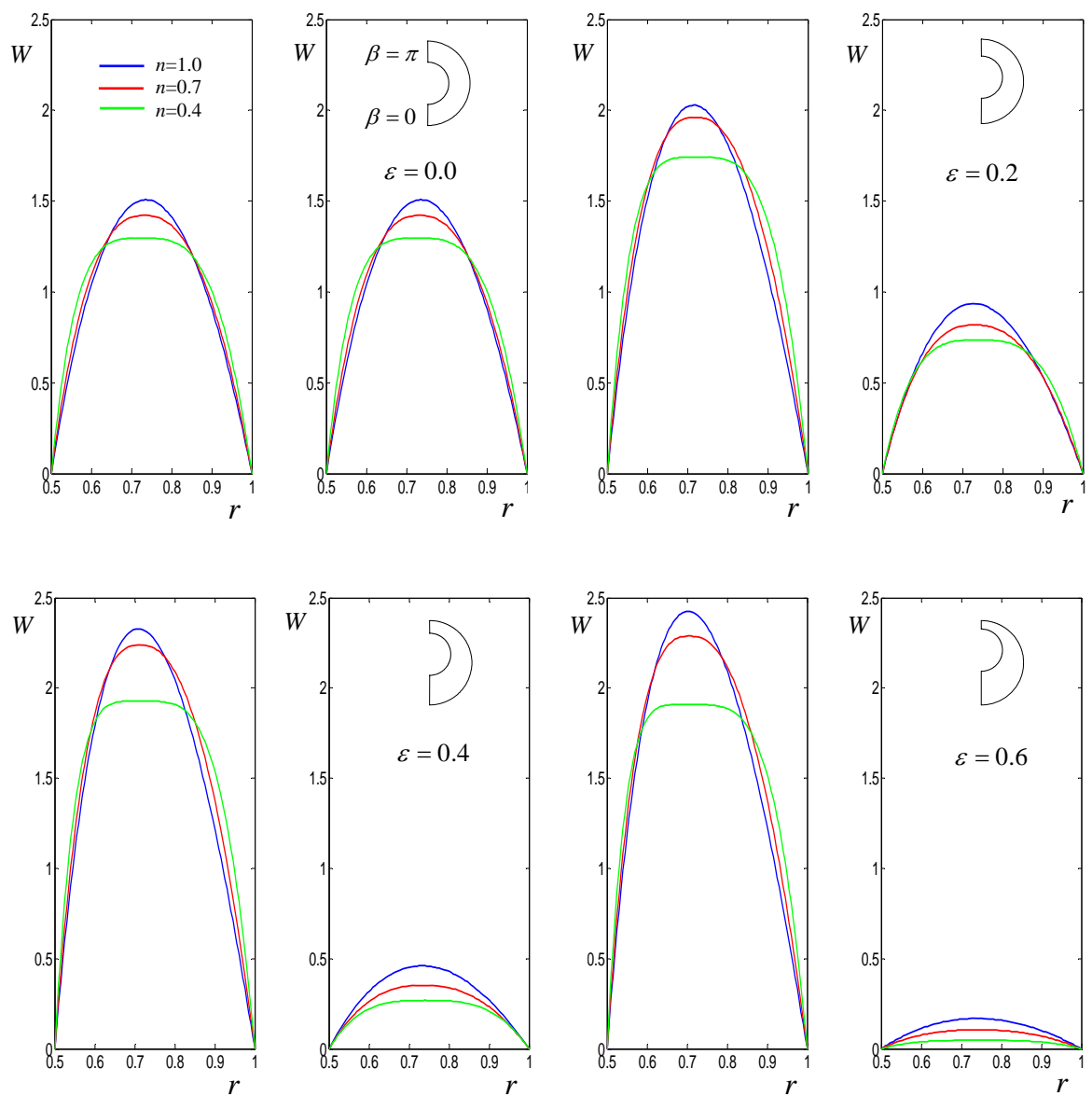


Figure 4.1 Influence de l'excentricité sur la structure du profil de la vitesse axiale ;  
Convection forcée;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ; Gauche  $\beta = 0$  ; Droite  $\beta = \pi$

L'accélération de l'écoulement dans la partie large suite à l'augmentation de l'excentricité, favorise l'échange thermique dans cette partie, cet échange reste juste à côté des parois. Dans la partie étroite le fluide s'échauffe plus rapidement, ceci est dû au rapprochement des deux cylindres (réduction de l'épaisseur de la couche fluide). L'échauffement rapide est bien remarqué pour des excentricités supérieures à 20%, et l'échange a tendance à devenir conductif plus que convectif dans cette partie pour de fortes excentricités >60% notamment avec les faibles  $n$  où la vitesse devient presque nulle, l'hypothèse de négligence la diffusion thermique axiale peut donc induire des erreurs non attendues, FELDMAN.E.E et al [11], notent que pour des nombres de Péclet <50, l'hypothèse de négliger de la diffusion axiale n'est plus valable (voir [12]). Le développement de la couche limite thermique sera beaucoup plus rapide dans la zone étroite que dans la zone large (Figure 4.2) et la différence de température entre le haut et le bas augmente fortement avec l'excentricité pour construire une stratification du champ thermique entre les deux zones (Figure 4.3).

L'échange thermique ( $Nu$ ) diminue le long de la zone de chauffage, cela est dû à l'augmentation de la température moyenne du fluide. La présence d'une excentricité favorise donc cette diminution. L'évolution du nombre de Nusselt extérieur circonférentiel moyen le long de la conduite est présentée dans la figure (4.4), pour différentes excentricités ( $\varepsilon = 0 ; 0.2$  et  $0.4$ ), où l'effet de l'excentricité est très bien observé. Un résultat similaire est obtenu pour le nombre de Nusselt intérieur.

Une amélioration du nombre de Nusselt est d'autant plus marquée que la rhéofluidification est importante (Figure 4.5). Cette amélioration est due à l'augmentation du gradient pariétal avec la diminution de l'indice de structure  $n$ .

**Remarque :** Pour raison de symétrie un seul cas de décalage (Haut) est présenté pour les deux sections traitant la convection forcée.

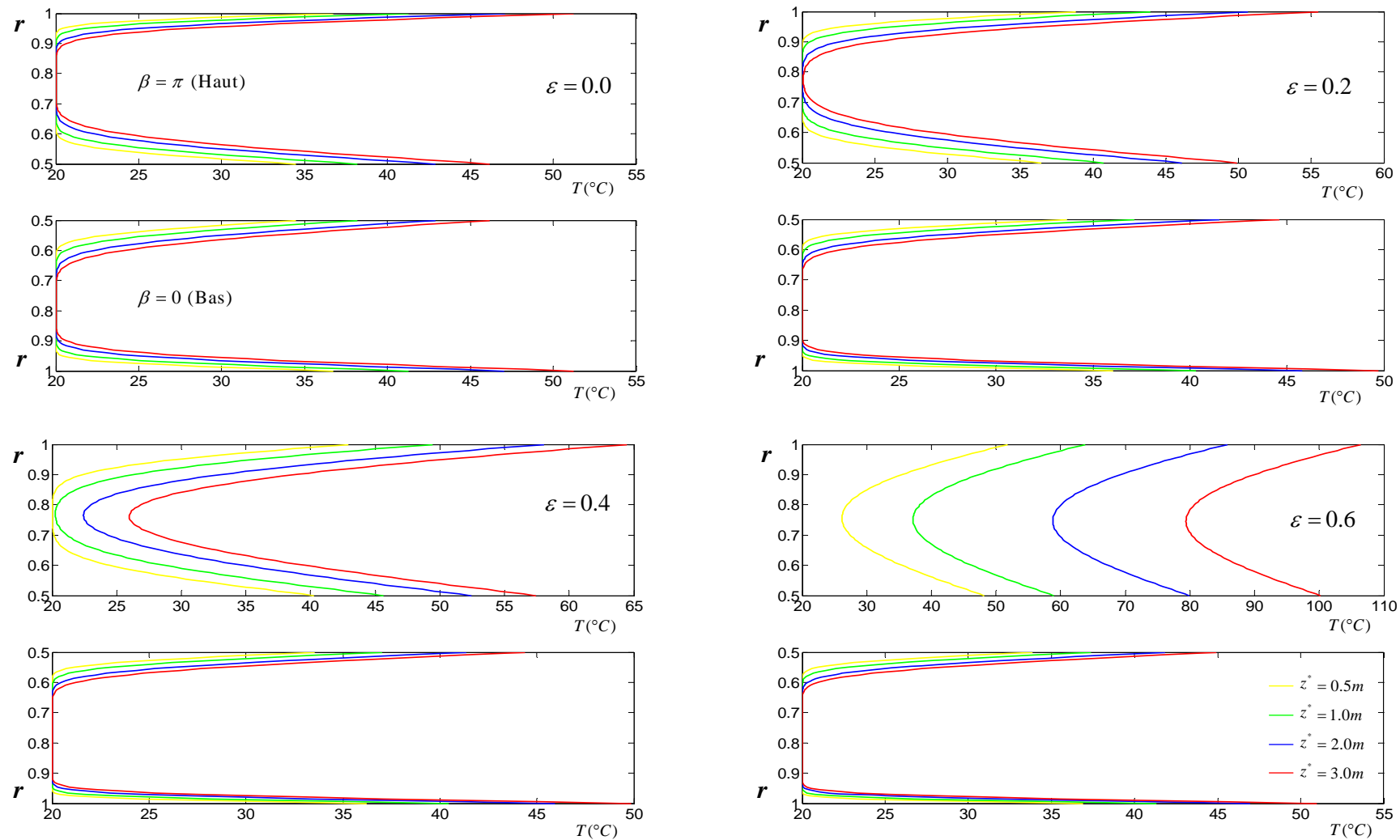


Figure 4.2 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection forcée; Décalage Haut;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $T_e = 20^\circ\text{C}$

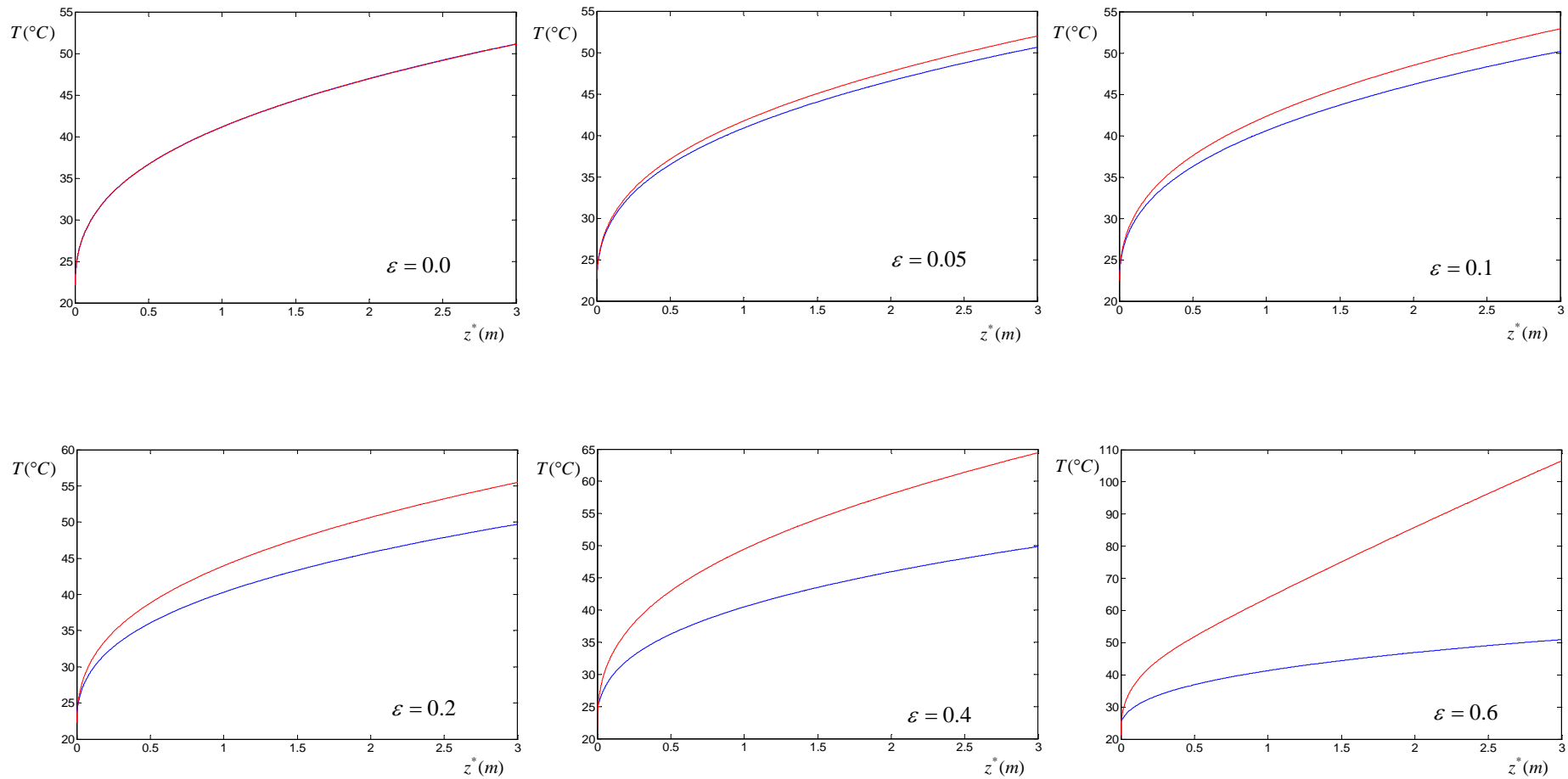


Figure 4.3 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Haut**;  
 Convection forcée;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ; (— haut — bas)

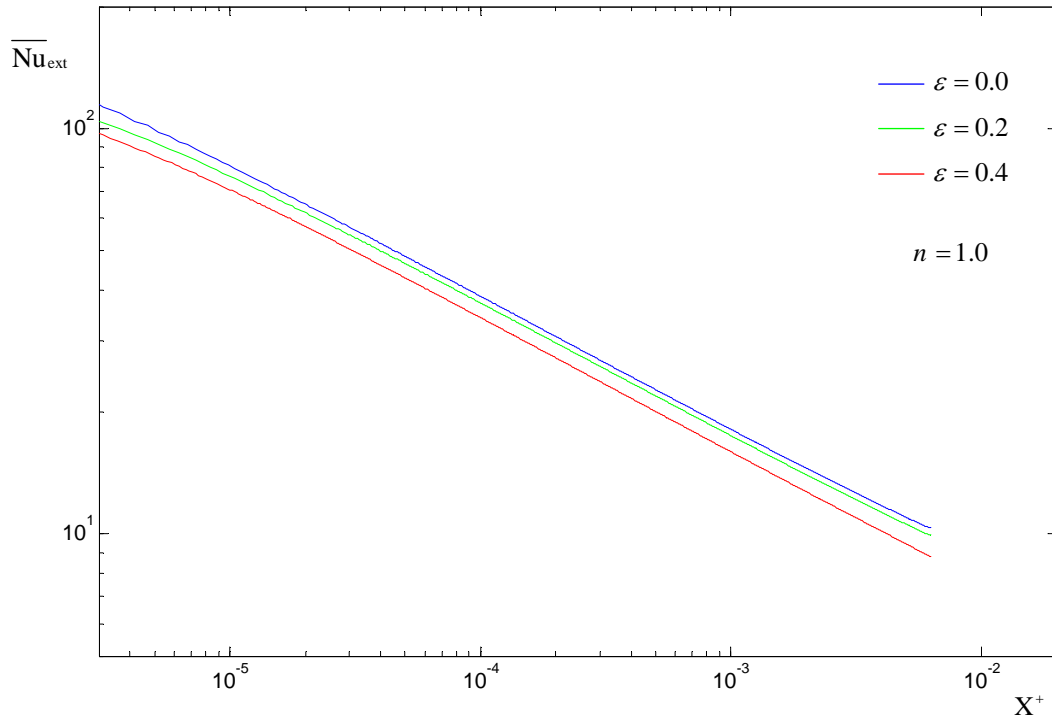


Figure 4.4 Influence de l'excentricité sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée,  $n = 1.0$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 27$ ;  $Pr = 891$

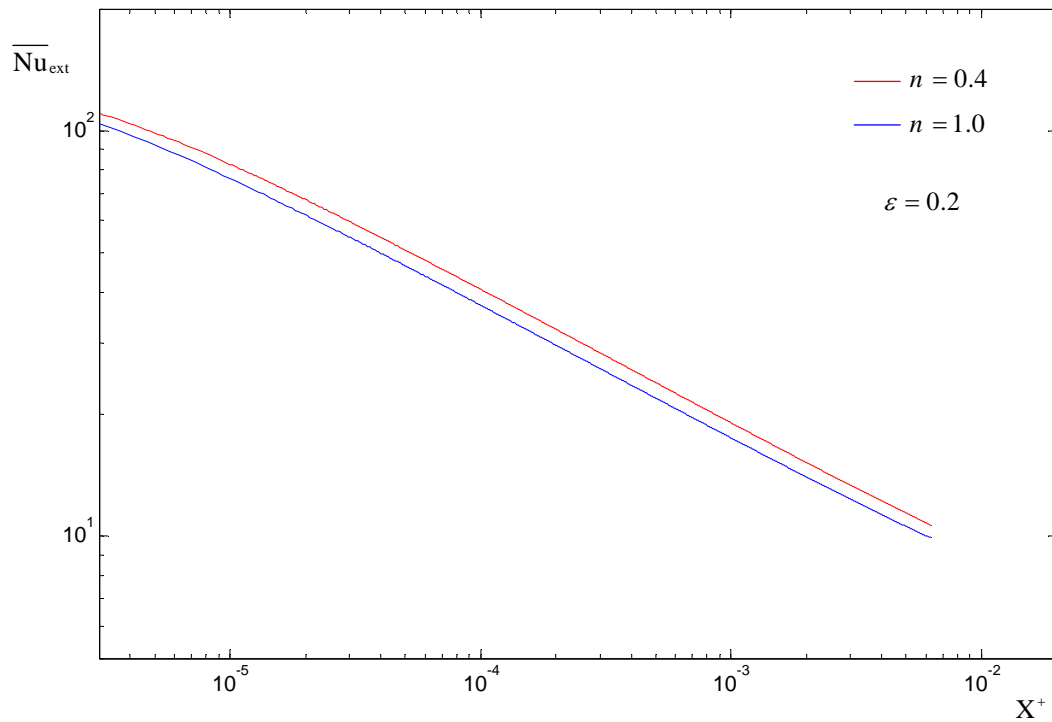


Figure 4.5 Influence de l'indice de structure sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée,  $\varepsilon = 0.2$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 27$ ;  $Pr = 891$



### **4.3 Convection forcée avec consistance thermodépendante :**

La diminution de la consistance  $K$  avec l'augmentation de la température  $T$ , induit une réorganisation de l'écoulement. Cette dernière est caractérisée par un déplacement radial des particules fluides de la zone centrale vers les parois chauffées. Le gradient pariétal de la vitesse augmente en favorisant l'échange thermique proche des parois, la vitesse axiale diminue dans la zone centrale par conservation de débit. Ce résultat a été très bien montré par BENAOUA-Z.B [1] pour le cas concentrique. Mais il ne reste valable pour le cas d'une conduite excentrique que pour des faibles excentricités ( $<0.2$ ). Pour des excentricités élevées, un nouveau phénomène apparaît, l'écoulement qui a été accéléré proche des parois et décéléré dans la zone centrale, commence à accélérer dans la zone centrale aussi, ceci est remarqué uniquement dans partie étroite, cette accélération est essentiellement due à la diminution de la viscosité dans toute cette partie sous l'effet de la forte propagation de la chaleur traduite par un développement rapide de la couche limite thermique (Figure 4.6). L'accélération intégrale de l'écoulement dans la partie étroite aide à favoriser l'échange thermique et à affaiblir le problème de blocage de l'écoulement rencontré pour les fortes excentricités. Les phénomènes rencontrés dans la partie étendue reste inchangés (Figure 4.7).

Le mouvement radial des particules fluides plus froides de la zone centrale vers les parois, fait refroidir ces dernières et une différence de température moins accentuée que dans le cas non thermodépendant de la consistance entre le haut et le bas de la paroi externe, est sensiblement observée dans les figures (Figure 4.6) et (Figure 4.8).

L'accélération de l'écoulement principal proche des parois due à la thermodépendance entraîne une amélioration du nombre de Nusselt par rapport au cas non thermodépendant (Figure 4.9). Cette amélioration est d'autant plus meilleure que le nombre de Pearson est plus grand [1].

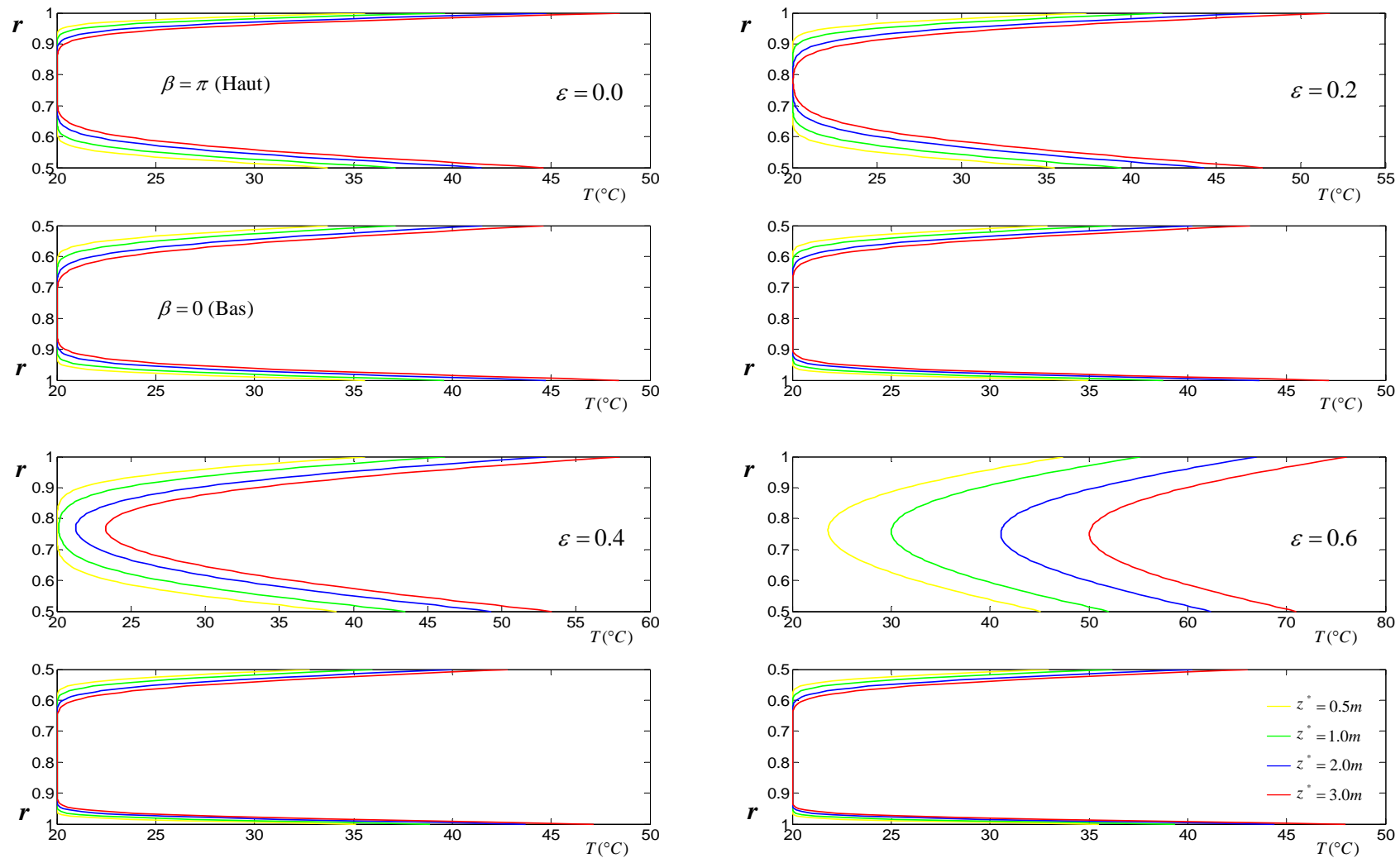


Figure 4.6 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection forcée; **Décalage Haut**;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $T_e = 20^\circ C$

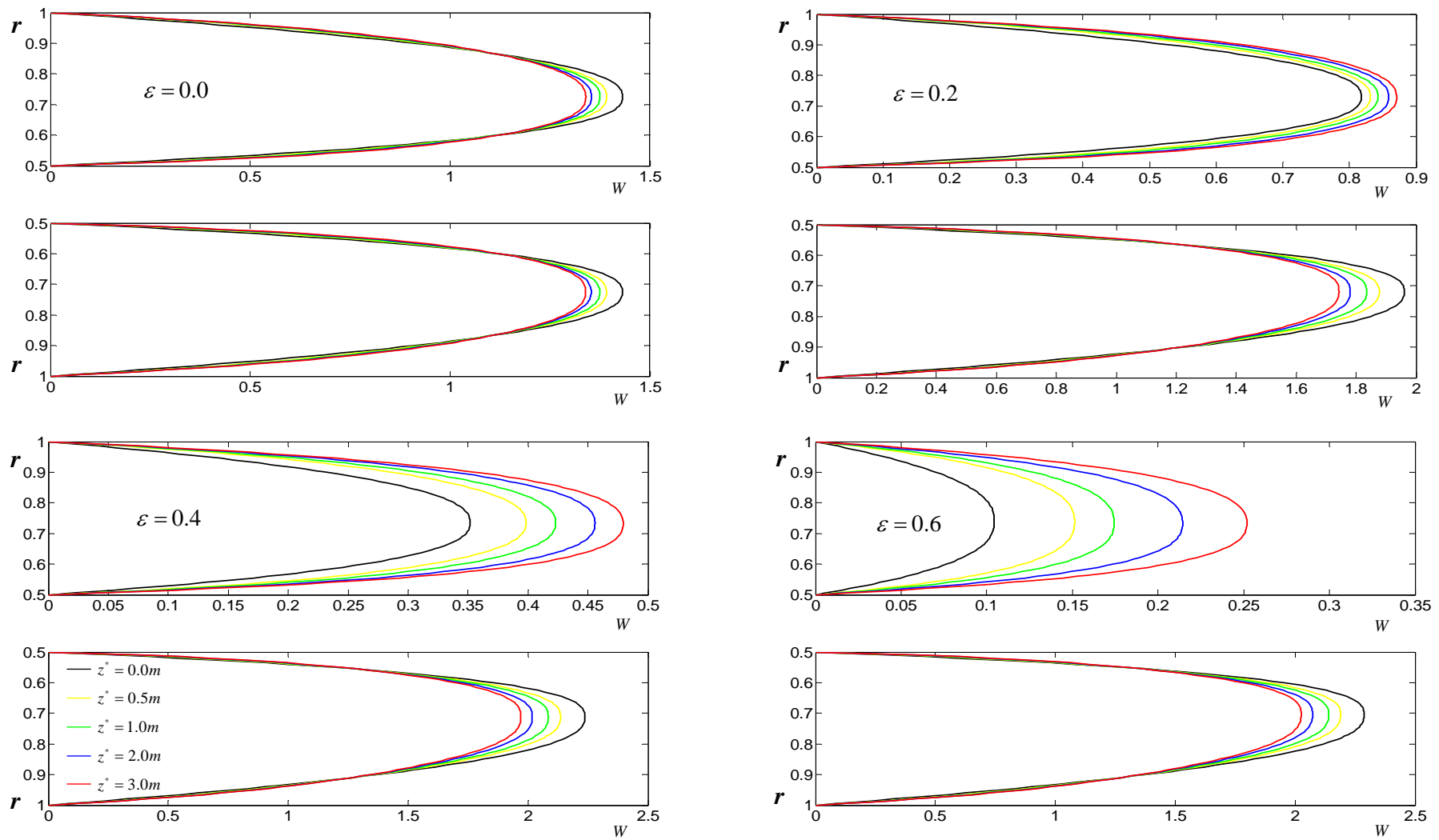


Figure 4.7 Evolution de la vitesse axiale le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités ;

Convection forcée, **D**écalage **H**aut;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $T_c = 20^\circ C$

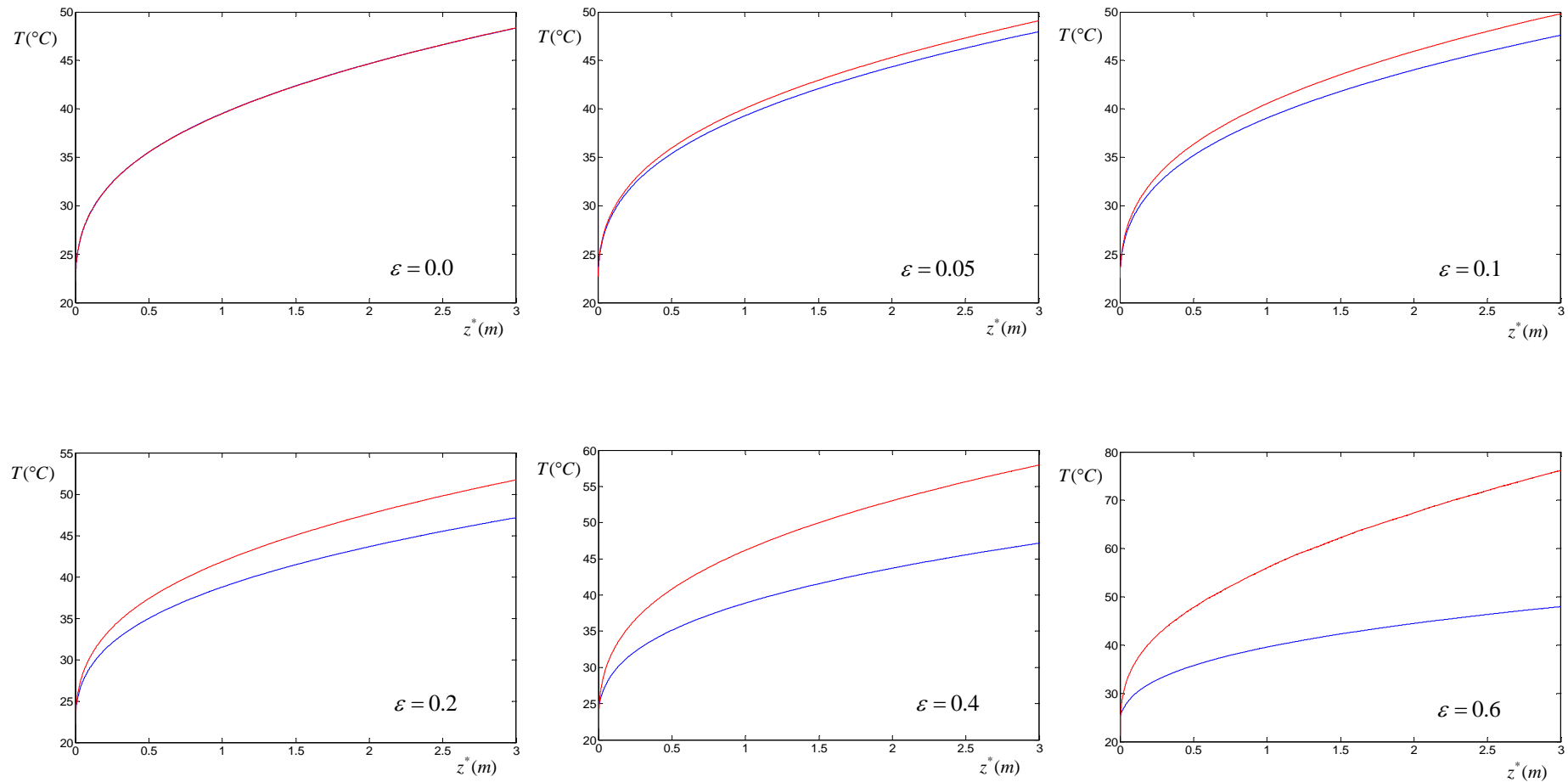


Figure 4.8 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Haut**;

Convection forcée;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ; (— haut — bas)

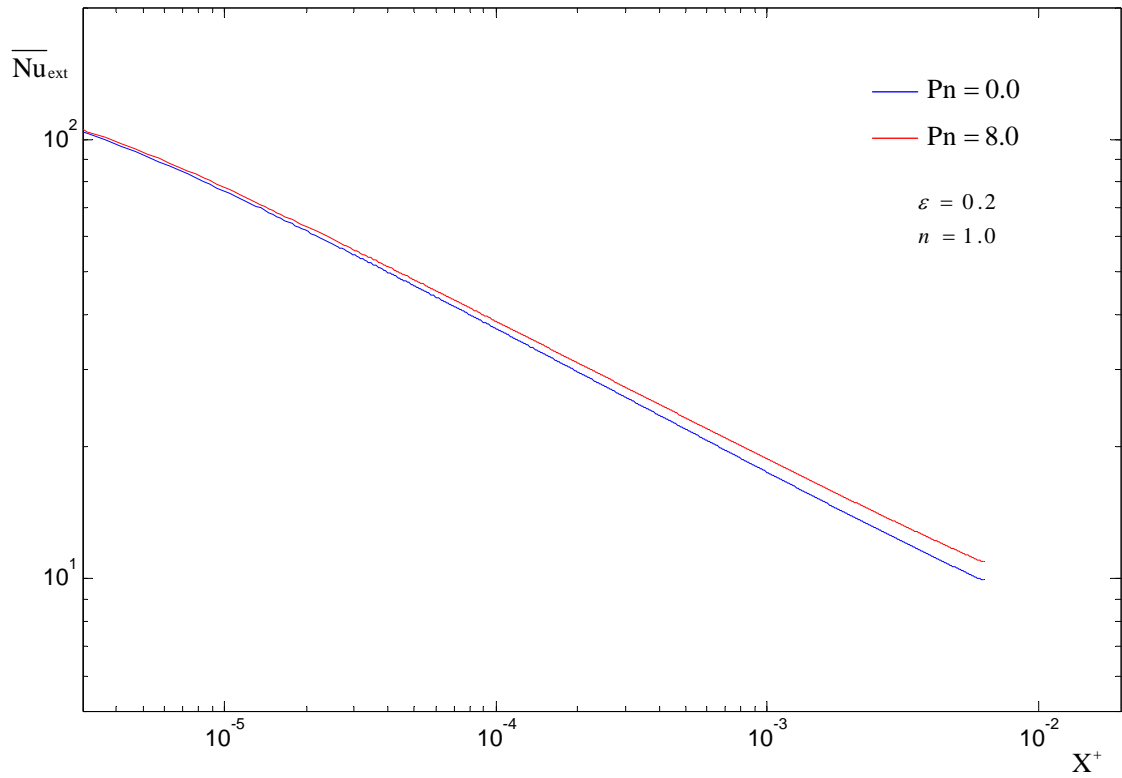


Figure 4.9 Influence de la thermodépendance sur le nombre de Nusselt extérieur moyen circonférentiel le long de la zone de chauffage; Convection forcée,  $n = 1.0$ ;  $\varepsilon = 0.2$ ;  $Re = 27$ ;  $Pr = 891$ ; —  $P_n = 0$ ; —  $P_n = 8$

#### 4.4 Convection mixte avec consistance constante :

Cette partie de l'analyse porte sur la convection mixte pour un fluide rhéofluidifiant non-thermodépendant. La diminution de la densité du fluide  $\rho$  avec la température génère un mouvement ascendant ( $V > 0$ ) du fluide chaud le long des parois et un mouvement descendant ( $V < 0$ ) du fluide froid dans la zone centrale, les particules fluides entrent dans la couche limite dans la partie basse de la conduite et la quittent dans la partie haute (Figure 4.10).

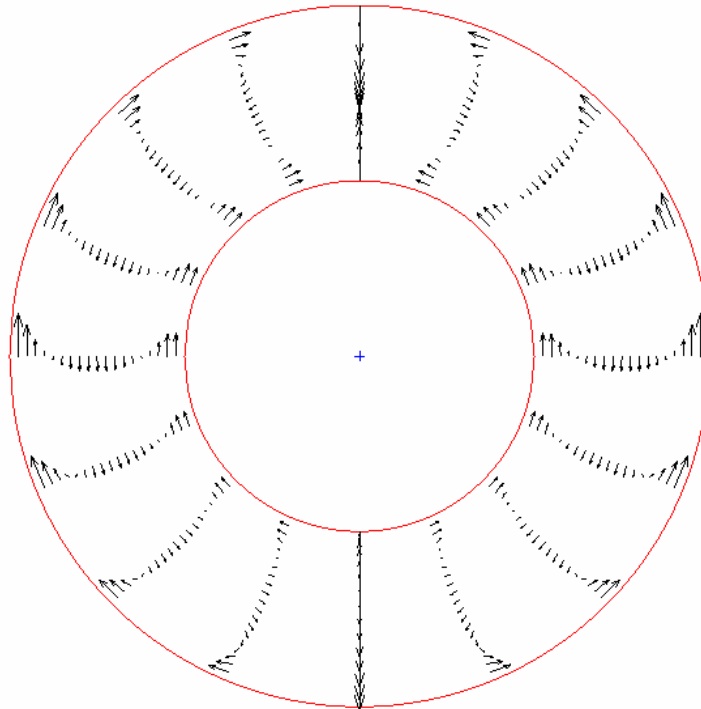


Figure 4.10 Structure de l'écoulement secondaire azimuthal à  $z^* = 1m$  ;

$$n = 0.7; Pn = 0; Re = 40.5; Pr = 1410; Gr = 7497$$

L'analyse des profils de vitesse tangentielle  $V$ , pour une position axiale et pour différentes positions azimuthales, met en évidence une accélération azimuthale du fluide de la partie basse vers le plan où  $\beta = \pi/2$ , puis une décélération pour les  $\beta$  supérieures (Figure 4.11).

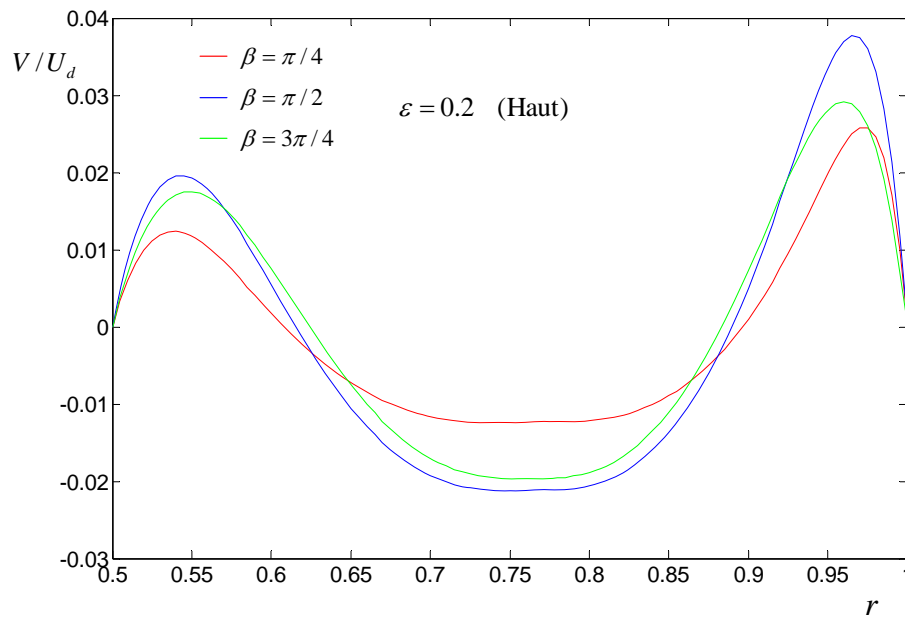


Figure 4.11 Profil de la vitesse tangentielle pour  $z^* = 2m$  et différentes positions azimutales;  
Convection mixte  $n = 0.7$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$

Cela reste valable pour les cas de décalage vers le haut et vers le bas pour des faibles excentricités, pour des grandes excentricités le plan du maximum de vitesse tangentielle peut se déplacer au delà de  $\beta = \pi/2$ . L'intensité de l'écoulement azimutale est de plus en plus importante le long de la zone de chauffage pour toutes les positions azimutales, tous les cas de décalage et pour toutes les excentricités.

La figure (4.12), présente trois profils de vitesse tangentielle pour  $z^* = 3m$  et  $\beta = \pi/2$  et pour trois valeurs de l'indice de structure ( $n = 0.4, 0.7, \text{et } 1.0$ ). Elle montre que la rhéofluidification s'accompagne d'une décroissance de la vitesse tangentielle. Cela est dû à l'augmentation du gradient pariétal de la vitesse axiale avec la rhéofluidification, par conséquent, une réduction de l'épaisseur de la couche limite thermique et par là celle associée à l'écoulement secondaire. L'écart de température entre la paroi et le fluide diminue, il s'en suit alors une diminution de l'intensité de recirculation [1,28]. Le phénomène observé reste valable pour le cas excentrique pour toutes les valeurs de  $\beta$  et  $z^*$ .

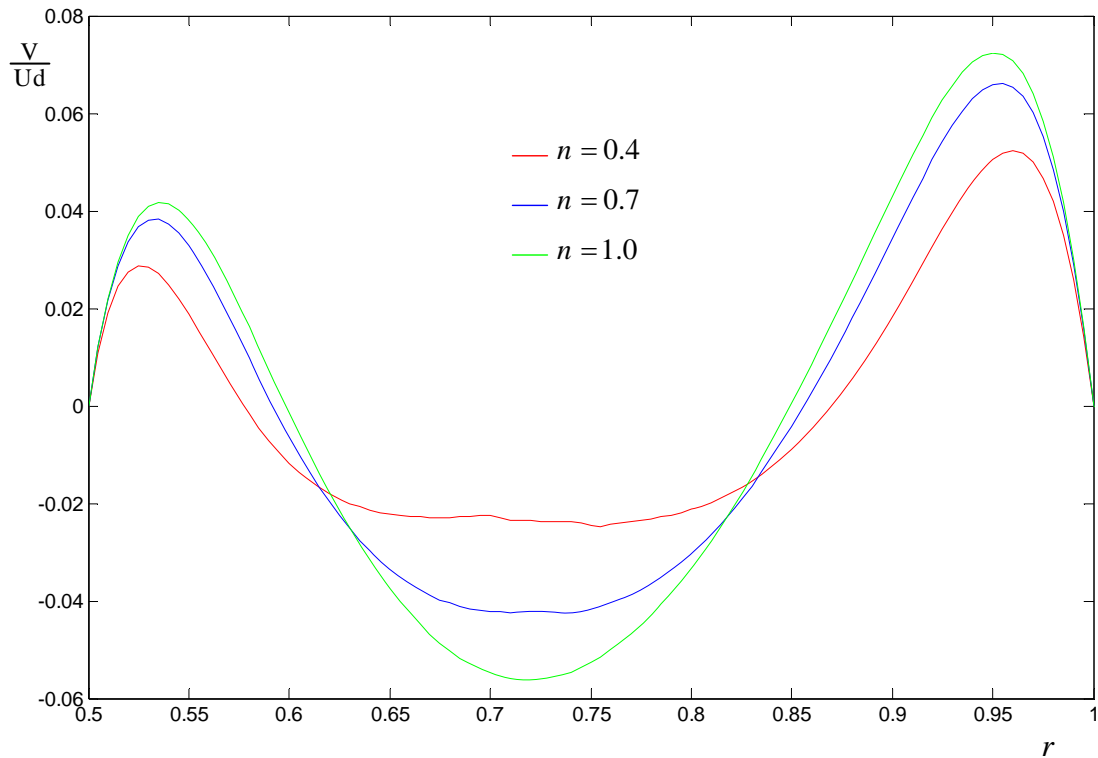


Figure 4.12 Effet de l'indice de structure sur le profil de la vitesse tangentielle pour  $z^* = 3m$  et  $\beta = \pi/2$ ; Convection mixte  $\varepsilon = 0$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$

Le mouvement ascendant qui se cumule le long de la conduite engendre une stratification du champ thermique entre le haut et le bas de cette dernière. Cette stratification est observée pour les deux cas de décalage.

Pour le cas du décalage vers le haut, l'intensité de l'écoulement ascendant diminue avec l'accroissement de l'excentricité à cause de l'éloignement des deux parois dans la partie inférieure, mais le rapprochement de ces dernières dans la partie supérieure va à l'encontre de cette diminution, la stratification dans ce cas est donc croissante avec l'excentricité (Figure 4.13 Gauche). Pour le deuxième cas du décalage, une augmentation rapide de la température de la paroi extérieure dans la partie inférieure, due au rapprochement des deux cylindres est observée (voir les sections 4.2 et 4.3), cette augmentation est d'autant plus forte que l'excentricité est grande; le mouvement ascendant commence dès l'entrée de la conduite, pour cela une augmentation progressive de la température de la paroi extérieure en haut est observée. Loin de la section d'entrée, la convection naturelle devient le mécanisme dominant dans le transfert de chaleur ainsi la température de la paroi extérieure en haut devient plus grande que celle en bas. Pour ce cas de décalage on distingue deux phénomènes; le premier



pour les faibles excentricités ( $<0.2$ ), où une augmentation de la stratification entre le haut et le bas de la conduite par rapport au cas concentrique est remarquée, cela est essentiellement dû au fort chauffage du fluide dans la partie inférieure causé par le rapprochement des deux cylindres. Le deuxième est pour les excentricités supérieures, où la stratification commence à devenir de plus en plus faible lorsque l'excentricité augmente, cette diminution est due à l'augmentation de l'épaisseur des couches du fluide dans la partie supérieure de la conduite (Figure 4.13 Droite).

La variation le long de la zone de chauffage du nombre de Nusselt extérieur circonférentiel moyen pour le cas concentrique, le cas d'un décalage avec  $\varepsilon = 0.2$  vers le haut et de même pour un décalage vers le bas est présentée dans la figure (4.14 **Haut et Bas**). Prés de la section d'entrée, la convection forcée est le mécanisme dominant dans le transfert de chaleur, le  $\overline{Nu}_{ext}$  diminue avec  $X^+$ . L'effet de la convection naturelle est faible, est de ce fait toutes les courbes coïncident avec celles de convection forcée. Loin de la section d'entrée, la convection naturelle devient le mécanisme dominant dans le transfert et les courbes correspondantes à la convection mixte se détachent par valeurs supérieures de celles relatives à la convection forcée. Le décalage vers le bas favorise la convection naturelle pour cela les courbes correspondantes à la convection mixte se détachent de celles de la convection forcée beaucoup plus proche de la section d'entrée par rapport au cas concentrique, ce phénomène est d'autant plus remarqué avec l'accroissement de l'excentricité. Pour le décalage vers le haut, le détachement des deux courbes s'éloigne de plus en plus de la section d'entrée par rapport au cas concentrique lorsque l'excentricité augmente du fait de l'éloignement des deux cylindres dans la partie inférieure.

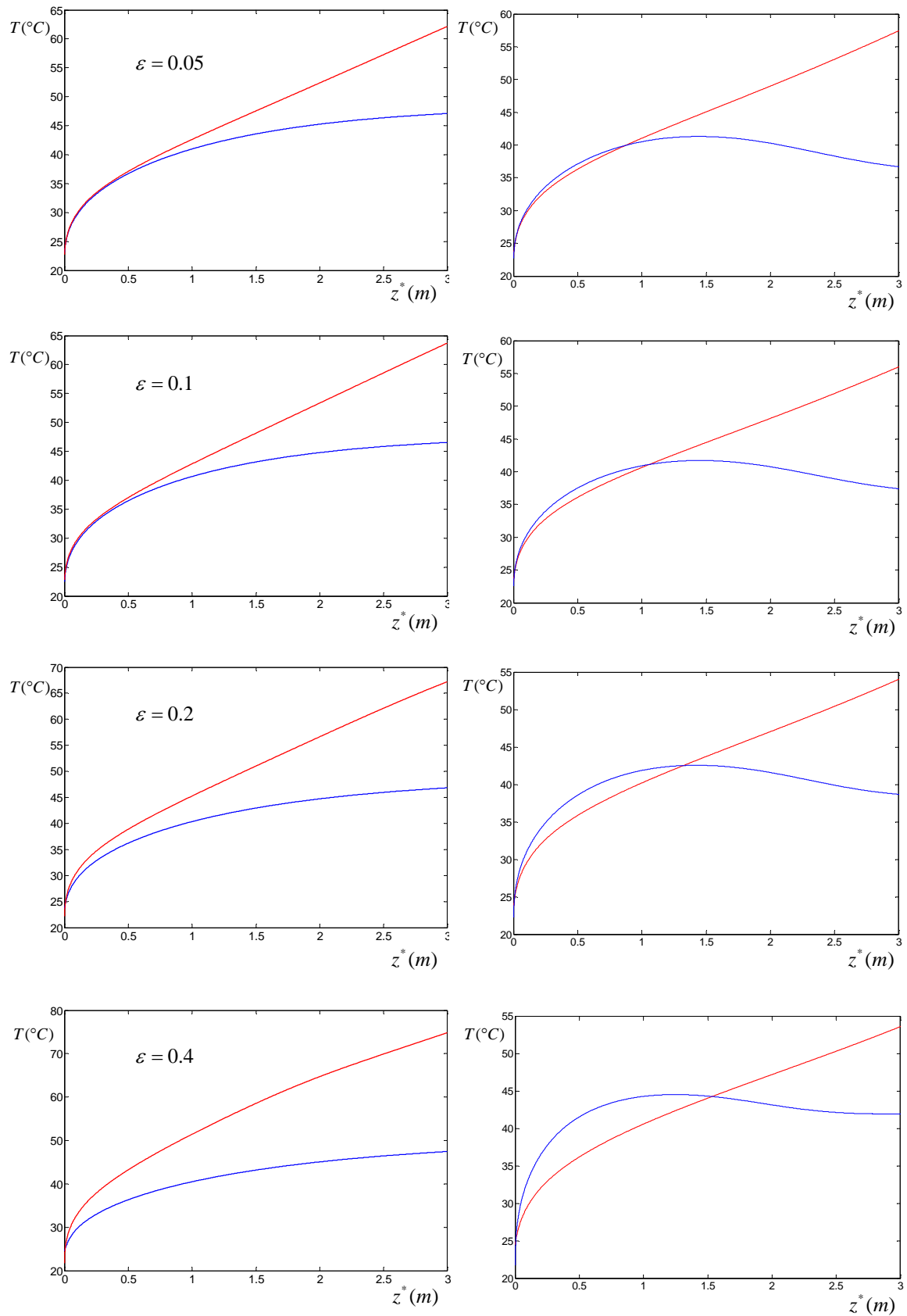


Figure 4.13 Evolution de la température de la paroi extérieure avec l'excentricité;

Convection mixte;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ;

Gauche: Décalage Haut, Droite: Décalage bas; (— haut — bas)

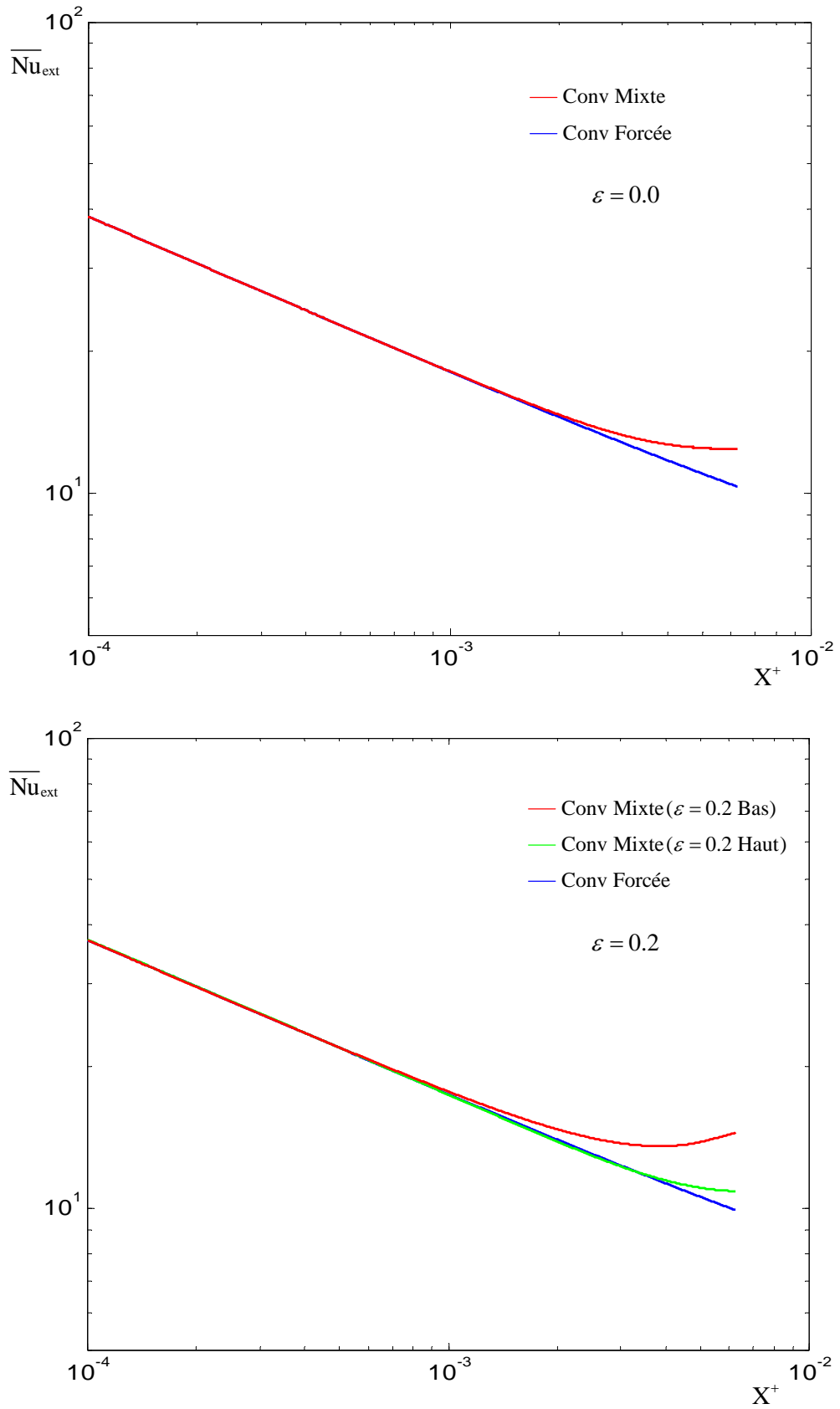


Figure 4.14 Evolution du nombre de Nusselt extérieur moyen circconférentiel le long de la zone de chauffage; **Haut**:  $\varepsilon = 0.0$ ; **Bas**:  $\varepsilon = 0.2$  vers le bas et vers le haut; Convection mixte,  $n = 1.0$ ;  $Pn = 0$ ;  $Re = 27$ ;  $Pr = 891$ ;  $Gr = 4258$

#### **4.5 Convection mixte avec consistance thermodépendante :**

Dans cette dernière section, le problème de convection mixte d'un fluide dont la consistance varie avec la température est analysé. La diminution de la consistance avec la température, réduit d'une part les forces de frottement, ce qui induit une augmentation de l'intensité de recirculation de l'écoulement secondaire, et d'autre part augmente le gradient de la vitesse axiale proche des parois, d'où une diminution de l'épaisseur de la couche limite thermique et une réduction de la température moyenne des parois par rapport au cas non thermodépendant, cela est examiné dans les figures (4.15) et (4.16).

Pour le cas du décalage vers le haut, la couche limite thermique pour ce cas de la convection mixte se développe plus rapidement dans la partie supérieure de la conduite que dans la partie inférieure. Le profil qui a été un peu régulier dans le cas de la convection forcée avec ou sans thermodépendance est perturbé par la montée des courants chauds et la descente des courants froids, la thermodépendance perturbe en plus cette allure à cause du mouvement radial généré par le déplacement des particules fluides du centre vers les parois (Figure 4.17). Dans le cas du décalage vers le bas, et pour des excentricités inférieures ou de l'ordre de 0.2, la couche limite thermique se développe plus rapidement dans la partie supérieure que dans l'inférieure, suite à la montée des courants chauds. Pour des excentricités plus grandes, le phénomène inverse est observé où la couche limite thermique se développe plus rapidement dans la partie inférieure que dans la partie supérieure, cela est dû d'une part au fort rapprochement des deux cylindres dans la partie inférieure et deuxièmement à l'augmentation de l'épaisseur des couches du fluide dans la partie supérieure. On note que le développement de la couche limite thermique dans la partie inférieure pour ce deuxième cas est beaucoup plus lent par rapport au premier cas (partie supérieure), (Figure 4.18).

L'écoulement principal comme il a été présenté dans la section 4.3, subit une accélération proche des parois chauffées à cause de la diminution de la consistance, et une décélération dans la zone centrale suite à la génération du mouvement radial des particules du fluides froides du centre vers les parois, mais à cause de l'écoulement secondaire généré par les forces de poussée, le fluide plus chaud a tendance à se cumuler dans la partie supérieure le long de la conduite d'où une reaccélération de l'écoulement principal dans

cette partie est observée (cas concentrique). Le décalage vers le haut fait augmenter la température du fluide dans la partie supérieure, pour cela une accélération de plus en plus forte a lieu dans cette partie. En comparant avec le cas de la convection forcée thermodépendante, l'accélération dans le cas de la convection mixte est plus intense (Figure 4.19 et 4.7). Pour un décalage vers le bas, et pour des excentricités de l'ordre de 0.2, une accélération très proche de la section d'entrée est observée dans la partie inférieure quand le mécanisme dominant dans le transfert de chaleur est la convection forcée. Lorsque la convection naturelle devient le mécanisme dominant, l'inverse est rencontré, où l'écoulement décélère progressivement dans la partie inférieure et accélère dans la partie supérieure à cause de la stratification du champ thermique. Pour les excentricités plus grandes, une accélération rapide de l'écoulement principal proche de la section d'entrée est observée dans la partie inférieure. Une décélération progressive dans cette partie est ensuite observée en s'éloignant de la section d'entrée avec l'intensification de l'écoulement secondaire dû aux forces de poussée. Dans la partie supérieure, une faible reaccélération est rencontrée loin de la section d'entrée, à cause de l'accroissement des épaisseurs des couches du fluide dans cette partie, (Figure 4.20).

En s'éloignant de la section d'entrée, l'écoulement secondaire dû aux forces de poussée devient de plus en plus intense, ceci indique une détérioration du coefficient de transfert de chaleur dans la partie haute de l'espace annulaire et une amélioration dans la partie basse. La figure (4.21) montre l'évolution du nombre de Nusselt extérieur circonférentiel local pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$ , pour un décalage de  $\varepsilon = 0.2$  vers le haut (4.21. Haut) et de même valeur vers le bas (4.21. Bas). Près de la section d'entrée, l'écart entre  $Nu_{ext}(\beta = 0)$  et  $Nu_{ext}(\beta = \pi)$  est plutôt faible, le mécanisme de transfert de chaleur dominant est la convection forcée. En s'éloignant de la section d'entrée, l'écart devient plus marqué indiquant par là l'effet dominant des forces de poussée, cet écart est d'autant plus marqué lorsque l'excentricité est grande pour le décalage vers le bas, le phénomène inverse a lieu pour le décalage vers le haut. Les courbes en traits continus correspondent au cas non thermodépendant ( $Pn = 0$ ) et celles en pointillés sont pour le cas thermodépendant. Pour les deux cas présentés, le  $Nu_{ext}$  dans le cas thermodépendant est meilleur comparé au cas non thermodépendant, ceci est dû à l'augmentation du gradient pariétal de vitesse axiale et à la réduction de la température des parois (réduction de  $\theta_{1,2} - \theta_m$ ).

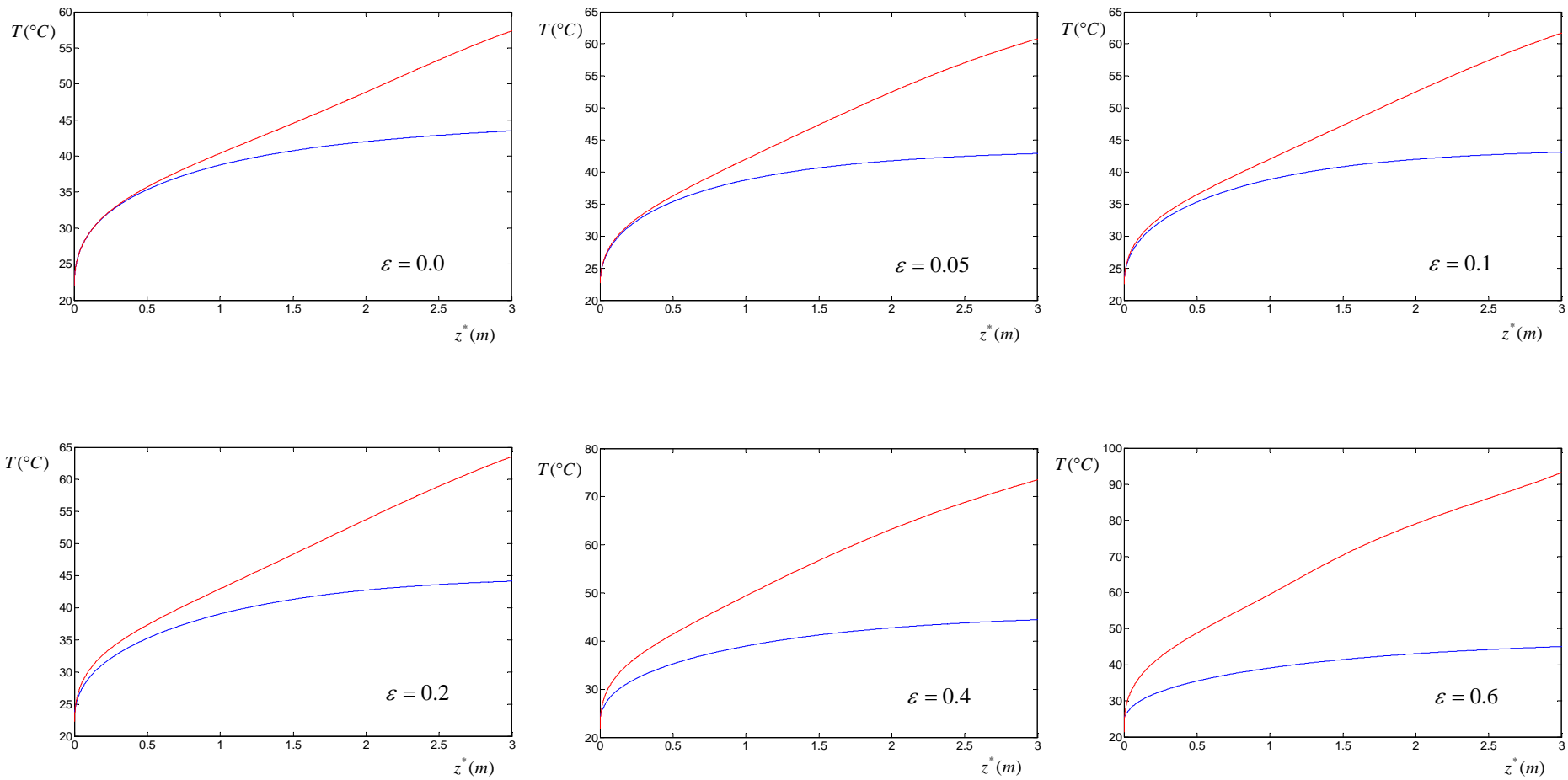


Figure 4.15 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Haut**;  
 Convection mixte;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ; (— haut — bas)

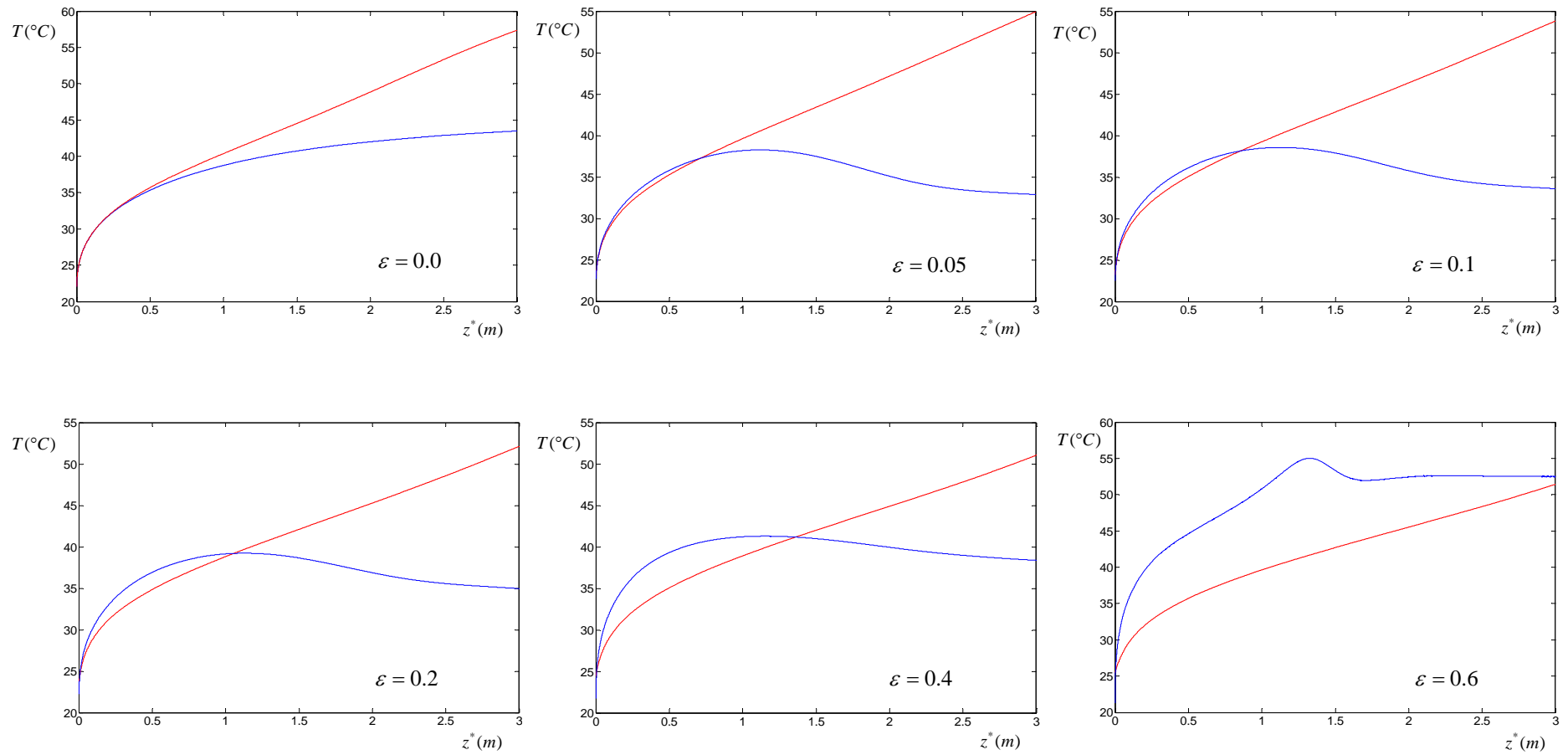


Figure 4.16 Variation de la température de la paroi extérieure (haut et bas) avec l'excentricité ; **Décalage Bas**;  
 Convection mixte;  $n = 0.7$ ;  $P_n = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ; (— haut — bas)

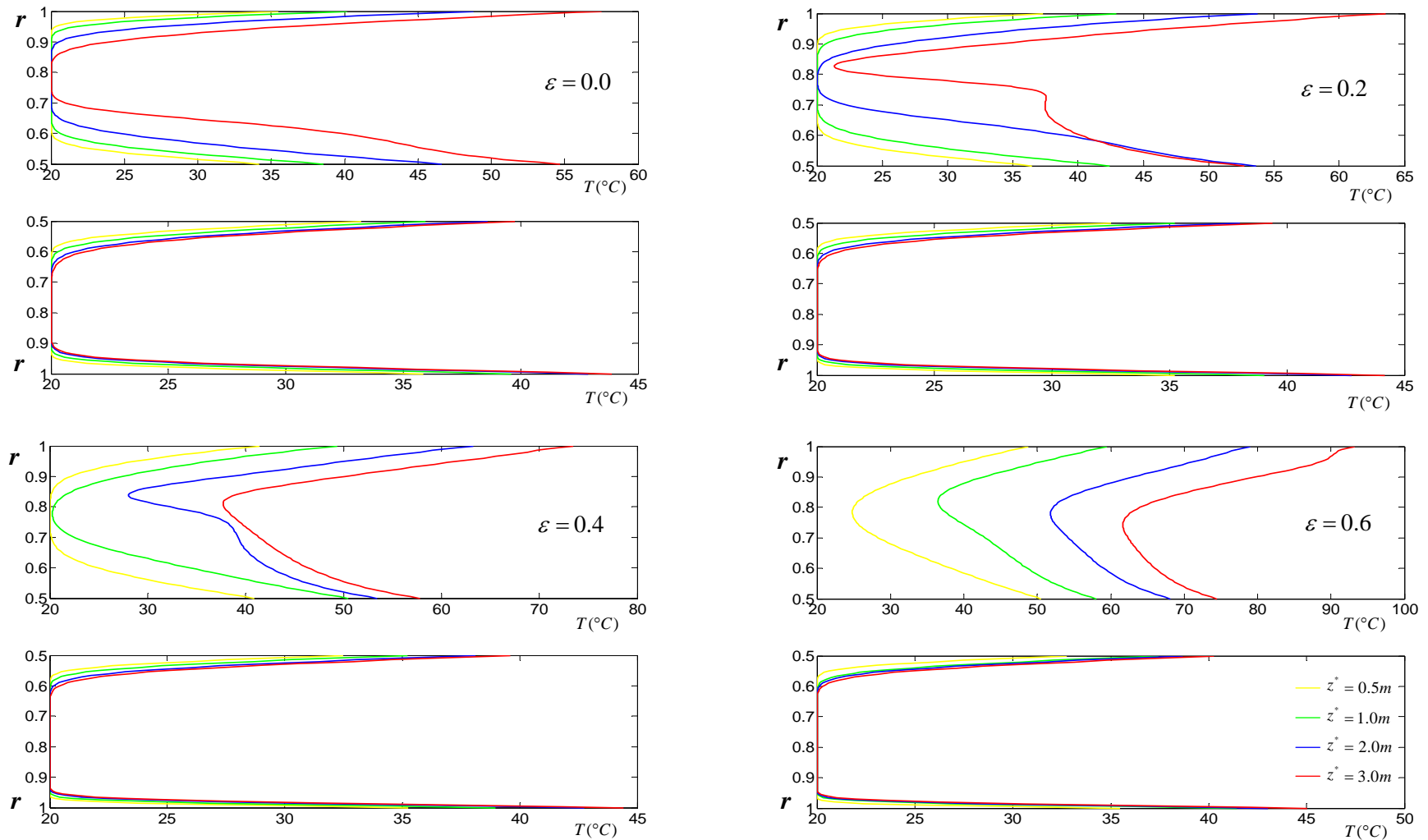


Figure 4.17 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection mixte; Décalage Haut;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ;  $T_e = 20^\circ C$



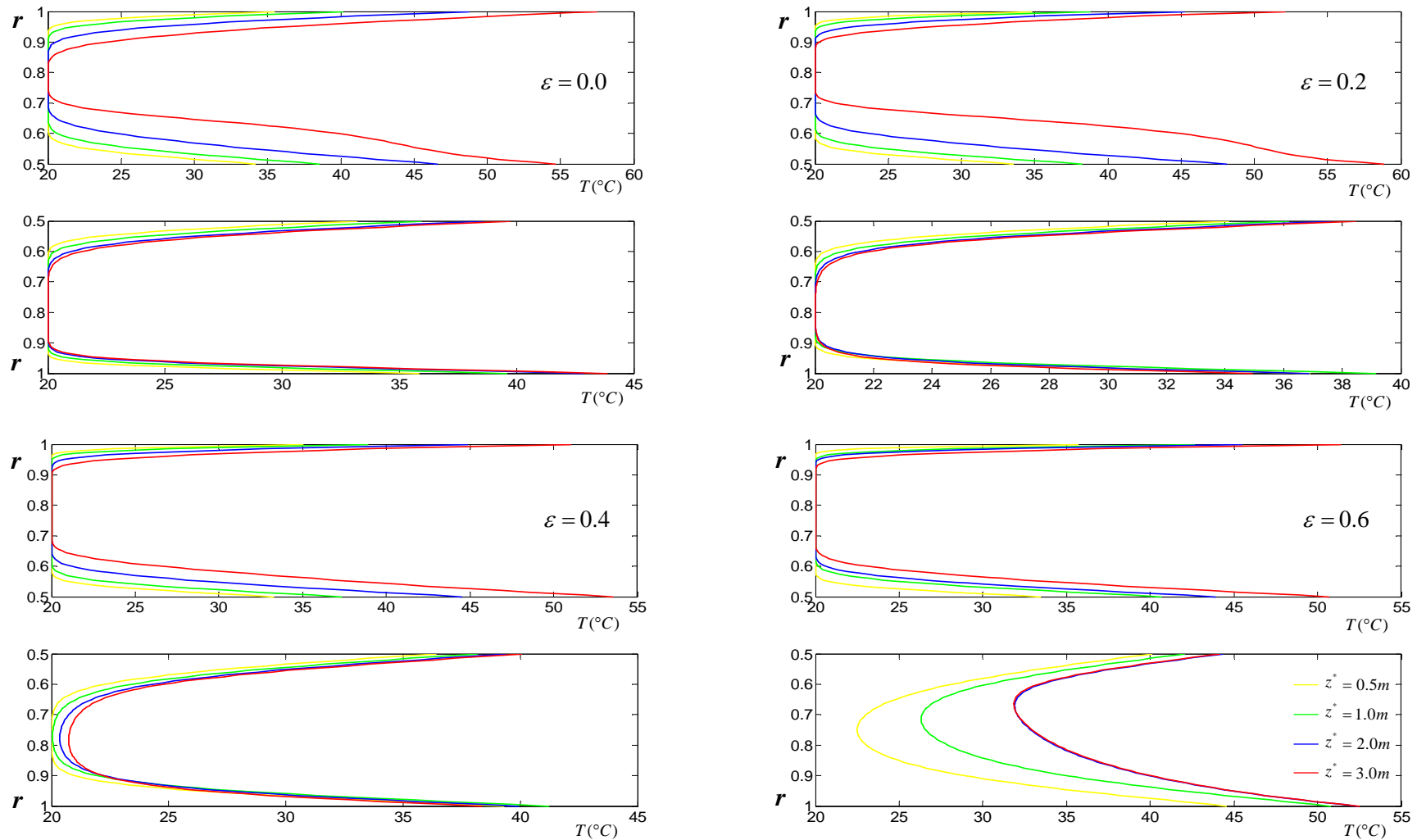


Figure 4.18 Développement de la couche limite thermique le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités; Convection mixte; Décalage Bas;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ;  $T_e = 20^\circ\text{C}$

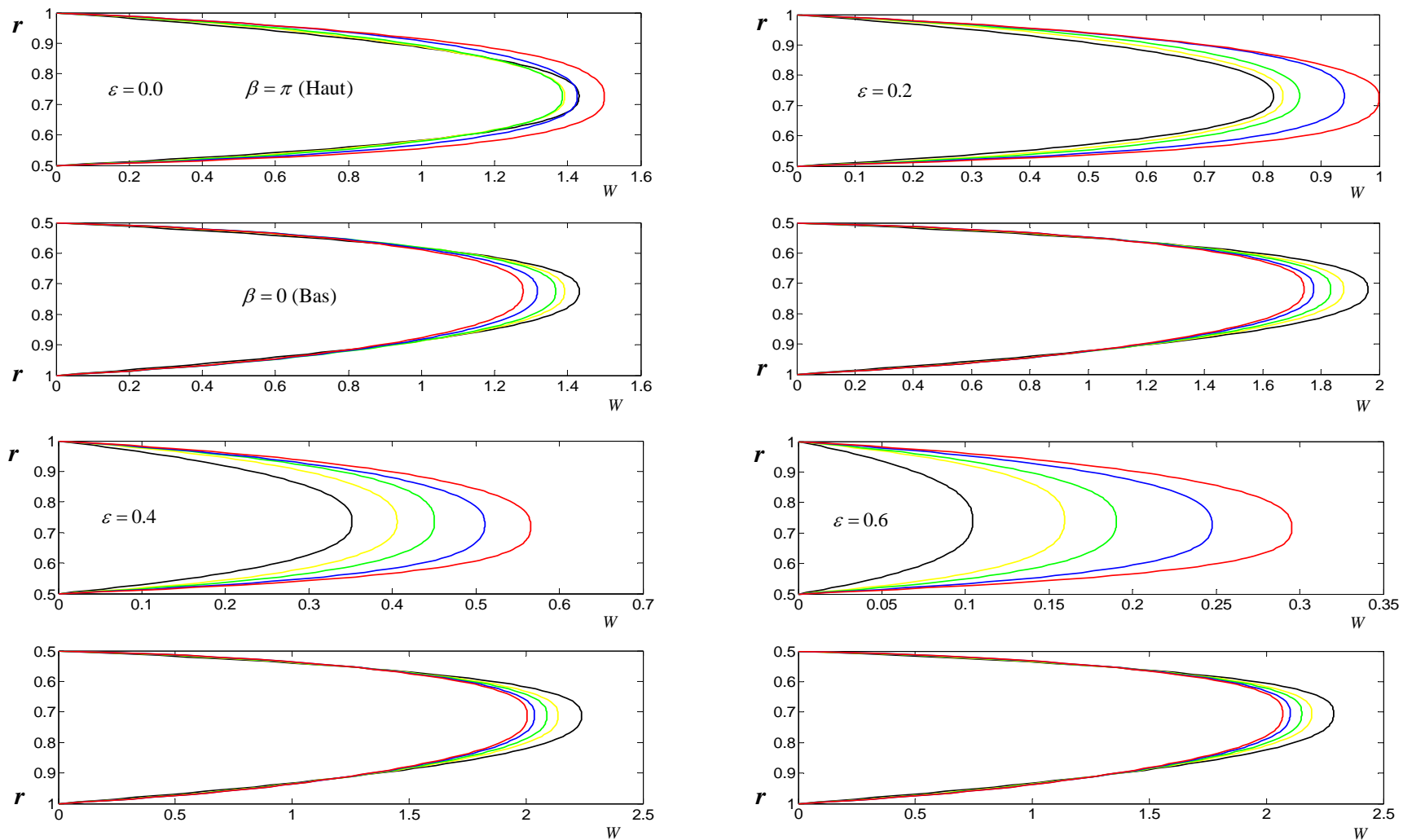
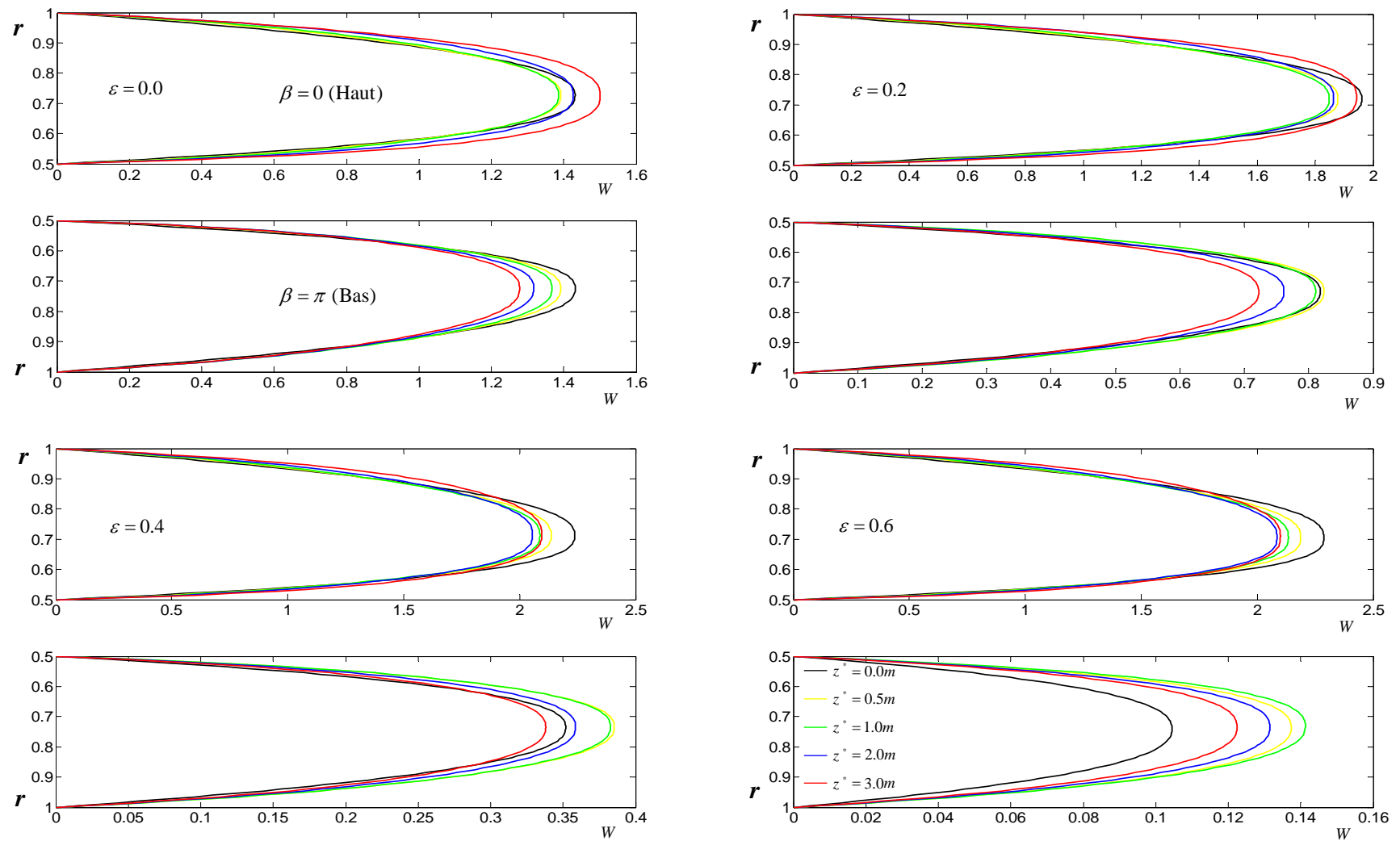


Figure 4.19 Evolution de la vitesse axiale le long de la conduite pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  pour différentes excentricités ;

Convection mixte, **D**écalage **H**aut;  $n = 0.7$ ;  $Pn = 8$ ;  $Re = 40.5$ ;  $Pr = 1410$ ;  $Gr = 7497$ ;  $T_c = 20^\circ\text{C}$



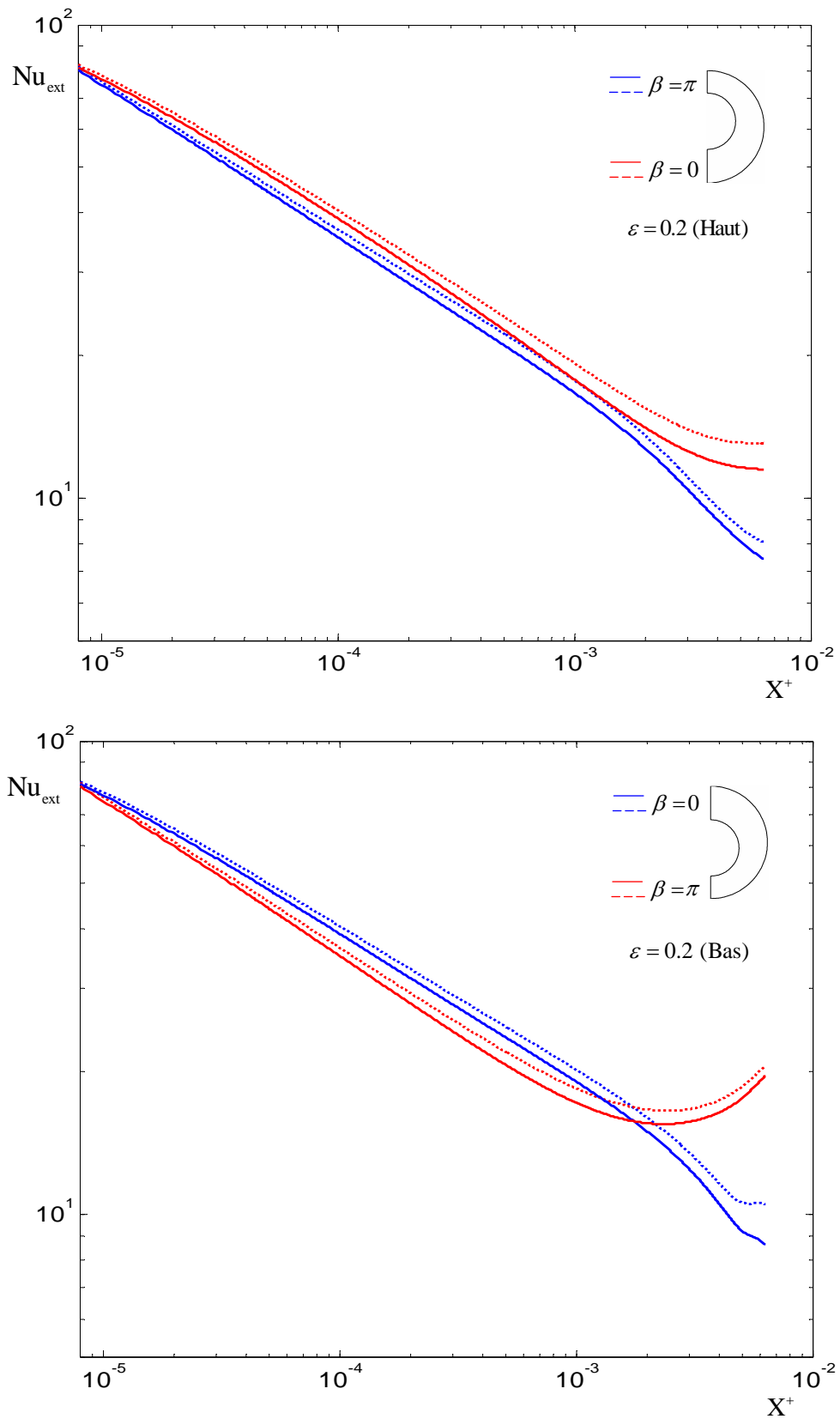


Figure 4.21 Effet de la thermodépendance sur le nombre de Nusselt extérieur local pour  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$  le long de la zone de chauffage;  $\varepsilon = 0.2$  (Haut et Bas); Convection mixte;  $n = 1.0$ ;  $Re = 27$ ;  $Pr = 891$ ;  $Gr = 4258$ ; —  $Pn = 0$  ; ···  $Pn = 8$

# Conclusions Et Perspectives

## CONCLUSIONS

Une analyse numérique de la convection mixte laminaire pour un fluide pseudoplastique dans une conduite annulaire horizontale excentrique, où les deux cylindres sont chauffés à densités de flux de chaleurs constantes, a été menée. Les résultats obtenus font ressortir que:

1. L'accroissement de l'excentricité influe fortement sur le profil de la vitesse axiale en accélérant l'écoulement dans la partie large et en le décélérant dans la partie étroite, cette décélération peut aller jusqu'au blocage de l'écoulement dans la partie étroite notamment pour les faibles indices de structure ;
2. Le rapprochement des deux cylindres pour le cas de la convection forcée favorise le chauffage du fluide, ce chauffage se traduit par un développement rapide de la couche limite thermique dans la partie étroite, en créant ainsi une stratification entre la partie large et la partie étroite;
3. La diminution de la consistance avec la température proche des parois chaudes génère un mouvement radial des particules fluides froides du centre vers les parois, en faisant augmenter le gradient pariétal de la vitesse axiale d'où une accélération du fluide proche des parois est observée, une décélération dans la zone centrale a donc lieu par conservation du débit. Cela n'est valable que pour des faibles excentricités. Or pour des fortes excentricités une accélération est observée dans toute la partie étroite suite à la forte diminution de la viscosité dans toute cette partie, due au rapprochement des deux cylindres. Le mouvement radial participe au refroidissement des parois et une stratification moins accentuée est remarquée par rapport au cas précédent ;
4. La diminution de la densité avec la température pour le cas de la convection mixte non thermodépendante, génère une montée des courants fluides chauds proches des parois et une descente des courants froids dans la zone centrale, une couche limite azimuthale est donc formée. L'augmentation des courants chauds crée une stratification thermique entre le haut et le bas, cette stratification est intensifiée quand un décalage du cylindre intérieur vers le haut est fait, ou pour un décalage vers le bas avec de faibles excentricités ( $< \sim 0.2$ ), alors qu'elle diminue pour des excentricités plus grandes.

5. Pour le cas de la convection mixte avec consistance thermodépendante, l'écoulement secondaire azimuthal produit par la diminution de la densité est favorisé, cela est dû à la diminution de la viscosité proche des parois. Un écoulement secondaire radial se produit de la zone centrale vers les parois en participant à leur refroidissement. La couche limite thermique se développe pour les deux cas de la convection mixte dans la partie supérieure plus rapidement que dans la partie inférieure, sauf pour les excentricités plus grandes que 0.2 pour le cas du décalage bas.

### **Perspectives :**

Les mécanismes fondamentaux qui interviennent dans la convection thermique d'un fluide pseudoplastique dans une géométrie annulaire excentrique, ont été clairement définis. Les travaux pourraient être poursuivis dans les axes suivants :

- Etudes de la convection mixte dans une géométrie annulaire excentrique avec une excentricité arbitraire ;
- Convection thermique pour des géométries plus complexes (Deux ellipses concentriques ou décentrés, un ellipse et un cylindre,...) ;
- Convection thermique pour autres types de fluides non-newtoniens.

# Appendices



**APPENDICE A**  
**LISTE DES SYMBOLES**

$a$	: Grandeur de repérage du pôle ( $m$ )
$A, b$	: Coefficients expérimentaux
$B$	: Coefficient d'expansion thermique ( $^{\circ}C^{-1}$ )
$Br$	: Nombre de Brinkman, $= \mu_0 U_d^2 (1-r_1)^2 / \Phi R_2$
$C_p$	: Chaleur massique spécifique ( $J.Kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$ )
$\overline{\overline{D}}$	: Tenseur des vitesses de déformation ( $m.s^{-1}$ ), $= \frac{1}{2} (V_{i,j}^* + V_{j,i}^*)$
$D_h$	: Diamètre hydraulique ( $m$ ), $= 2(R_2 - R_1)$
$Gr$	: Nombre de Grashof, $= \rho_e^2 g B \Delta T R_2^3 / \mu_0^2$
$h^*$	: Coefficient de proportionnalité ( $Pa$ ), $= a / (\text{ch } \alpha^* - \cos \beta^*)$
$K$	: Consistance du fluide ( $Pa.s^n$ ), $= A.exp(-b.T)$
$n$	: Indice de structure
$Nu$	: Nombre de Nusselt, $= 2(1-r_1)/(\theta - \theta_m)$
$Pe$	: Nombre de Péclet $= \rho_e C_p U_d R_2 / \lambda$
$p_m$	: Pression moyenne dans une section droite ( $Pa$ )
$Pn$	: Nombre de Pearson, $= b \Phi R_2 / \lambda$
$Pr$	: Nombre de Prandtl, $= \mu_0 C_p / \lambda$
$p'$	: Pression variable dans une section droite ( $Pa$ )
$Re$	: Nombre de Reynolds, $= \rho_e U_d R_2 / \mu_0$
$R_1$	: Rayon du cylindre intérieur ( $m$ ), $= a / \text{sh } \alpha_1$
$R_2$	: Rayon du cylindre extérieur ( $m$ ) $= a / \text{sh } \alpha_2$
$r_1$	: Rapport géométrique, $= R_1 / R_2 = \text{sh } \alpha_1 / \text{sh } \alpha_2$
$T$	: Température ( $^{\circ}C$ )
$U^*$	: Composante radiale de la vitesse ( $m.s^{-1}$ )
$U_d$	: Composante azimutale de la vitesse ( $m.s^{-1}$ )
$V^*$	: Vitesse débitante ( $m.s^{-1}$ )
$W^*$	: Composante axiale de la vitesse ( $m.s^{-1}$ )
$X^+$	: Nombre de Cameron $= 2z^* / (D_h . Pe)$

$z^*$  : Cordonnée axiale ( $m$ )

## SYMBOLES GRECS

$\alpha$  : Coordonnée radiale  
 $\beta$  : Coordonnée azimutale  
 $\delta$  : Epaisseur des la couche limite thermique ( $m$ )  
 $\rho$  : Masse volumique ( $Kg.m^{-3}$ )  
 $\lambda$  : Conductivité thermique ( $W.m^{-1}.C^{-1}$ )  
 $\eta$  : Diffusivité thermique ( $s.m^{-2}$ )  
 $\varepsilon$  : Excentricité adimensionnelle,  $= e/(R_2 - R_1)$   
 $\theta$  : Température adimensionnelle  
 $\Phi$  : Densité de flux de chaleur ( $W.m^{-2}$ )  
 $\chi$  : Fonction potentielle  
 $\mu_0$  : Viscosité apparente de référence ( $Pa.s$ )  
 $\bar{\mu}_a$  : Viscosité apparente adimensionnelle ( $Pa.s$ )  
 $\tau^*$  : Contrainte de cisaillement ( $Pa$ )  
 $\bar{\tau}^*$  : Tenseur des contraintes ( $Pa$ )  
 $\dot{\gamma}$  : Vitesse de déformation ( $s^{-1}$ )

## INDICES

$e$  : Entrée  
 $cd$  : Complètement développé  
 $1$  : Cylindre intérieur  
 $2$  : Cylindre extérieur

## APPENDICE B

### Remarque :

Pour ne pas alourdir l'annexe, les termes existant dans les équations gouvernant notre problème sont présentés directement dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales, ils seront calculés en détail par la suite dans le système bipolaire choisi. Pour plus de détails voir [18, 19, 33].

Les étoiles ne seront pas utilisées dans les équations et  $\mu_a^* \equiv \mu$ .

### Coordonnées curvilignes :

En rappel que le système des équations régissant notre problème est :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \rho(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) &= -\nabla P + \rho \cdot \vec{g} + \nabla \cdot \vec{\tau} \\ \rho C_p(\vec{V} \cdot T) &= \lambda \nabla^2 T + \vec{\tau} : \nabla \vec{V}\end{aligned}$$

Où :  $\nabla$  désigne l'opérateur vectoriel (Nabla), définit par :

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \vec{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \vec{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \vec{u}_3$$

$h_1, h_2$  et  $h_3$  : Coefficients de Lamé (de proportionnalité)

$u_1, u_2$  et  $u_3$  : Abscisses curvilignes

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$  : Vecteurs unitaires.

### 1. Equation de continuité :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 V_3) \right]$$

$V_1, V_2$  et  $V_3$  : Composantes du vecteur vitesse.

## 2. Equations de quantité de mouvement :

### Terme convection :

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = & \left[ \vec{V} \cdot \nabla V_1 + \frac{V_2}{h_1 \cdot h_2} \left( V_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_2} - V_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \right) + \frac{V_3}{h_1 \cdot h_3} \left( V_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_3} - V_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) \right] \vec{u}_1 \\ & + \left[ \vec{V} \cdot \nabla V_2 + \frac{V_1}{h_2 \cdot h_1} \left( V_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - V_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) + \frac{V_3}{h_2 \cdot h_3} \left( V_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_3} - V_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) \right] \vec{u}_2 \\ & + \left[ \vec{V} \cdot \nabla V_3 + \frac{V_1}{h_3 \cdot h_1} \left( V_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_1} - V_1 \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) + \frac{V_2}{h_3 \cdot h_2} \left( V_3 \frac{\partial h_3}{\partial u_2} - V_2 \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) \right] \vec{u}_3\end{aligned}$$

### Terme de pression :

$$\nabla P = \frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial u_1} \vec{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial u_2} \vec{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial P}{\partial u_3} \vec{u}_3$$

### Terme de viscosité :

On rappelle que :

$$\nabla \cdot \vec{\tau} = \mu \nabla (\nabla \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V})$$

Où  $\vec{\tau}$  et le tenseur des contraintes, définit par :

$$\vec{\tau} = -\mu \left( \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right)$$

$\nabla \vec{V}$  : Est le gradient du vecteur vitesse, et  $(\nabla \vec{V})^T$  son transposé.

### Développement des termes de : $\nabla \cdot \vec{\tau}$

**a. Terme :**  $\mu \nabla (\nabla \vec{V})$  : De l'équation de continuité :  $\mu \nabla \underbrace{(\nabla \vec{V})}_{=0} = 0$

**b. Terme :**  $\mu \nabla^2 \vec{V}$

On a :  $\nabla^2 \vec{V} = \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times \nabla \times \vec{V}$  ( $\times$ : produit vectoriel)

Où :

$$\begin{aligned}\nabla (\nabla \cdot \vec{V}) = & \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1} \left\{ \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right] \right\} \vec{u}_1 \\ & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial u_2} \left\{ \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right] \right\} \vec{u}_2 \\ & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial u_3} \left\{ \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 \cdot h_3 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right] \right\} \vec{u}_3\end{aligned}$$

On pose :  $\nabla(\nabla \cdot \vec{V}) = a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2 + a_3 \cdot \vec{u}_3$

Le terme  $\nabla \times \nabla \times \vec{V}$  peut s'écrire sous la forme  $\nabla \times (\nabla \times \vec{V})$

Où :

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{u}_1 & h_2 \vec{u}_2 & h_3 \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] \cdot \vec{u}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \cdot \vec{u}_3$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} & h_1 \vec{u}_1 & h_2 \vec{u}_2 & h_3 \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & & & \\ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] & \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] & \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] & \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] \right) \right\} \vec{u}_1$$

$$- \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] \right) \right\} \vec{u}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] \right) \right\} \vec{u}_3$$

On pose :  $\nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = A_1 \vec{u}_1 + A_2 \vec{u}_2 + A_3 \vec{u}_3$

On arrive à :  $\nabla^2 \vec{V} = (a_1 - A_1) \cdot \vec{u}_1 + (a_2 - A_2) \cdot \vec{u}_2 + (a_3 - A_3) \cdot \vec{u}_3$

**c. Terme :**  $(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{V}$

On a :  $(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{V} = \nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}$

$$\text{Où : } \nabla\mu = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \vec{u}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \vec{u}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \vec{u}_3$$

En reprenant la formule de  $\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ , et en remplaçant le premier vecteur  $\vec{V}$  par  $\nabla\mu$  :

$$\begin{aligned} \nabla\mu \cdot \nabla \vec{V} &= \left[ \nabla\mu \cdot \nabla V_1 + \frac{V_2}{h_1 \cdot h_2} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \right) + \frac{V_3}{h_1 \cdot h_3} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) \right] \vec{u}_1 \\ &+ \left[ \nabla\mu \cdot \nabla V_2 + \frac{V_1}{h_2 \cdot h_1} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) + \frac{V_3}{h_2 \cdot h_3} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) \right] \vec{u}_2 \\ &+ \left[ \nabla\mu \cdot \nabla V_3 + \frac{V_1}{h_3 \cdot h_1} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) + \frac{V_2}{h_3 \cdot h_2} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) \right] \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Avec :

$$\nabla\mu \cdot \nabla V_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \cdot \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \cdot \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_1}{\partial u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \cdot \frac{1}{h_3} \frac{\partial V_1}{\partial u_3}$$

De même pour  $\nabla\mu \cdot \nabla V_2$  et  $\nabla\mu \cdot \nabla V_3$ .

#### **d. Terme :** $\nabla\mu \times (\nabla \times \vec{V})$

Les termes  $\nabla\mu$  et  $\nabla \times \vec{V}$  ont été déjà définis.

Donc :

$$\nabla\mu \times (\nabla \times \vec{V}) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{u}_1 & h_2 \vec{u}_2 & h_3 \vec{u}_3 \\ \frac{\partial\mu}{\partial u_1} & \frac{\partial\mu}{\partial u_2} & \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \\ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] & \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] & \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \end{vmatrix}$$

On trouve:

$$\begin{aligned} \nabla\mu \times (\nabla \times \vec{V}) &= \frac{1}{h_2 h_3} \left\{ \frac{h_3}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] - \frac{h_2}{h_1 h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] \right\} \vec{u}_1 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \left\{ \frac{h_1}{h_2 h_3} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial u_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] - \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 V_1) \right] \right\} \vec{u}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial u_1} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 V_3) \right] - \frac{h_1}{h_2 h_3} \frac{\partial\mu}{\partial u_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 V_2) \right] \right\} \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Donc pour avoir  $\nabla \cdot \bar{\tau}$ , on doit faire la sommation;

Comme  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$  ; le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\bar{\tau} = -\mu \left( \nabla \vec{V} + (\nabla \vec{V})^T \right)$$

Où :

$$\nabla \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) & \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) & \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) \\ \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \right) & \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{V_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) & \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) \\ \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) & \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) & \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) \end{bmatrix}$$

On arrive finalement à :

$$\bar{\tau} = -\mu \begin{bmatrix} \frac{2}{h_1} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_1} + \frac{V_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} + \frac{V_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) & \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_1} - \frac{V_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial u_2} \right) + \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_2} - \frac{V_2}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} \right) & \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_1} - \frac{V_1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial u_3} \right) + \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial V_1}{\partial u_3} - \frac{V_3}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} \right) \\ \frac{2}{h_2} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_2} + \frac{V_1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial u_1} + \frac{V_3}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) & \frac{1}{h_2} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_2} - \frac{V_2}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial u_3} \right) + \frac{1}{h_3} \left( \frac{\partial V_2}{\partial u_3} - \frac{V_3}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) \\ \text{Symétrique} & \frac{2}{h_3} \left( \frac{\partial V_3}{\partial u_3} + \frac{V_1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial u_1} + \frac{V_2}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial u_2} \right) \end{bmatrix}$$

Ce tenseur peut être représenté sous la forme :

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

**Remarque :** Les termes de convection naturelle, sont remplacés directement dans les équations de mouvement après leur projection.

### **3. Equation d'énergie :**

#### **Terme de convection :**

$$\vec{V} \cdot \nabla T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ h_2 h_3 V_1 \frac{\partial T}{\partial u_1} + h_1 h_3 V_2 \frac{\partial T}{\partial u_2} + h_1 h_2 V_3 \frac{\partial T}{\partial u_3} \right]$$

#### **Terme de conduction :**

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial T}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial T}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial T}{\partial u_3} \right) \right]$$

#### **Terme de dissipation :**

$$\bar{\tau} : \nabla \vec{V} = \bar{\tau}_{ij} \cdot (\nabla \vec{V})_{ji} \quad ( : \text{Produit doublement contracté, et } i, j = 1, 2, 3)$$

Du fait que le tenseur des contraintes est symétrique

$$\begin{aligned} \bar{\tau} : \nabla \vec{V} &= \tau_{11} \cdot (\nabla \vec{V})_{11} + \tau_{22} \cdot (\nabla \vec{V})_{22} + \tau_{33} \cdot (\nabla \vec{V})_{33} + \tau_{13} \cdot [(\nabla \vec{V})_{13} + (\nabla \vec{V})_{31}] \\ &+ \tau_{23} \cdot [(\nabla \vec{V})_{23} + (\nabla \vec{V})_{32}] + \tau_{12} \cdot [(\nabla \vec{V})_{12} + (\nabla \vec{V})_{21}] \end{aligned}$$

#### **Développement des termes en coordonnées bipolaires :**

Dans ce système de coordonnées, les indices 1, 2 et 3 dans le cas curviligne, sont remplacés par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $Z$ , respectivement :

Avec :

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{a}{\text{ch } \alpha - \cos \beta} = h \quad \text{et} \quad h_z = 1$$

On note que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\text{sh } \alpha) &= \text{ch } \alpha & \frac{\partial}{\partial \alpha} (\text{ch } \alpha) &= \text{sh } \alpha \\ \frac{\partial h}{\partial \alpha} &= \frac{-\text{sh } \alpha}{(\text{ch } \alpha - \cos \beta)} h & \Rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \alpha} &= \frac{-\text{sh } \alpha}{a} \\ \frac{\partial h}{\partial \beta} &= \frac{-\sin \beta}{(\text{ch } \alpha - \cos \beta)} h & \Rightarrow \frac{1}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \beta} &= \frac{-\sin \beta}{a} \end{aligned}$$

Où : sh et ch sont respectivement le Sinus et le Cosinus Hyperboliques.



### 1. Equation de continuité :

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (h \cdot U) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h \cdot V) + \frac{\partial}{\partial z} (h^2 \cdot W) \right]$$

( $U, V$  et  $W$  : Sont les composants du vecteur vitesse)

### 2. Equations de quantité de mouvement :

#### Terme de convection

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\alpha} \vec{u}_{\alpha} + (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\beta} \vec{u}_{\beta} + (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_z \vec{u}_z$$

#### Direction $\alpha$ :

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\alpha} &= \left[ U \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + V \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + W \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \frac{V}{h^2} \left( U \frac{\partial h}{\partial \beta} - V \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) + \frac{W}{h} \overbrace{\left( U \frac{\partial h}{\partial z} - W \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right)}^{=0} \\ &= \frac{1}{h} U \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} V \frac{\partial U}{\partial \beta} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{U \cdot V}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \beta} - \frac{V^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\alpha} = \frac{U}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\sin \beta}{a} U \cdot V + \frac{\sin \alpha}{a} V^2 + W \frac{\partial U}{\partial z}}$$

#### Direction $\beta$ :

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\beta} &= \left[ U \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + V \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} + W \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \frac{U}{h^2} \left( V \frac{\partial h}{\partial \alpha} - U \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) + \frac{W}{h} \overbrace{\left( V \frac{\partial h}{\partial z} - W \frac{\partial h}{\partial \beta} \right)}^{=0} \\ &= \frac{1}{h} U \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} V \frac{\partial V}{\partial \beta} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{U \cdot V}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \alpha} - \frac{U^2}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \beta} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_{\beta} = \frac{U}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\sin \beta}{a} U^2 - \frac{\sin \alpha}{a} U \cdot V + W \frac{\partial V}{\partial z}}$$

#### Direction $Z$ :

$$(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_z = \left[ U \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + V \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right] + \frac{U}{h} \overbrace{\left( W \frac{\partial h}{\partial \alpha} - U \frac{\partial h}{\partial z} \right)}^{=0} + \frac{V}{h} \overbrace{\left( W \frac{\partial h}{\partial \beta} - V \frac{\partial h}{\partial z} \right)}^{=0}$$

Donc :

$$\boxed{(\vec{V} \cdot \nabla \vec{V})_z = \frac{U}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + W \frac{\partial W}{\partial z}}$$

**Terme de pression :**

$$\nabla P = \frac{1}{h} \frac{\partial P}{\partial \alpha} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{h} \frac{\partial P}{\partial u_\beta} \vec{u}_\beta + \frac{\partial P}{\partial u_z} \vec{u}_z$$

**Terme de viscosité**

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\tau} = \left( \nabla \cdot \vec{\tau} \right)_\alpha + \left( \nabla \cdot \vec{\tau} \right)_\beta + \left( \nabla \cdot \vec{\tau} \right)_z = & \left[ \mu \nabla^2 \vec{V} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}) \right]_\alpha \\ & + \left[ \mu \nabla^2 \vec{V} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}) \right]_\beta \\ & + \left[ \mu \nabla^2 \vec{V} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}) + \nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}) \right]_z \end{aligned}$$

**Remarque :** Les termes ci-dessus seront développés suivant l'ordre :  $\nabla^2 \vec{V}$ ,  $(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})$ ,

$$\nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V}).$$

**a. Terme :  $\nabla^2 \vec{V}$** **Direction  $\alpha$  :**

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (hU) + \frac{\partial}{\partial \beta} (hV) + \frac{\partial}{\partial z} (h^2 W) \right] \right) \\ &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h^2} \left[ h \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) - \frac{\text{sh } \alpha}{a} h^2 U - \frac{\sin \beta}{a} h^2 V + h^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right] \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{\text{sh } \alpha}{a} \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) - \frac{\text{ch } \alpha}{a} U - \frac{\text{sh } \alpha}{a} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial z} \right) \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\sin \beta}{a.h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\text{ch } \alpha}{a.h} U + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial z}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (hV) - \frac{\partial}{\partial \beta} (hU) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (hU) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (hW) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h^2} \left[ h \left( \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) - \frac{\text{sh } \alpha}{a} h^2 V + \frac{\sin \beta}{a} h^2 U \right] \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( h \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) - \frac{\text{sh } \alpha}{a} V + \frac{\sin \beta}{a} U \right) - h \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial z} \right\} \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\text{sh } \alpha}{a} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{a} U - h \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial z} \right\}$$

$$A_1 = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sin \beta}{a.h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\cos \beta}{a.h} U - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial z}$$

Donc :

$$\left(\nabla^3 \bar{V}\right)_\alpha = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} - \frac{2 \cdot \sin \beta}{a \cdot h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{2 \cdot \operatorname{sh} \alpha}{a \cdot h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)}{a \cdot h} U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

**Direction  $\beta$  :**

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} U - \frac{\sin \beta}{a} V + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a} V + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial z} \right) \end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\sin \beta}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\cos \beta}{a \cdot h} V + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 W}{\partial \beta \partial z}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (hV) - \frac{\partial}{\partial \beta} (hU) \right] \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial W}{\partial \beta} - h \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial \beta} \right) - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} V + \frac{\sin \beta}{a} U \right) + h \frac{\partial^3 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial \beta \partial z} \right\} \\ &= -\frac{1}{h} \left\{ -\frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h} \left( \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} \right) - \frac{\operatorname{ch} \alpha}{a} V + \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + h \frac{\partial^3 V}{z^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial \beta \partial z} \right\} \end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\operatorname{ch} \alpha}{a \cdot h} V - \frac{\sin \beta}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial^3 W}{\partial \beta \partial z} - \frac{\partial^3 V}{\partial z^2}$$

Donc :

$$\left(\nabla^3 \bar{V}\right)_\beta = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 V}{\partial \beta^2} - \frac{2 \cdot \sin \beta}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{2 \cdot \operatorname{sh} \alpha}{a \cdot h} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{(\operatorname{ch} \alpha + \cos \beta)}{a \cdot h} V + \frac{\partial^3 V}{\partial z^2}$$

**Direction  $Z$  :**

$$a_3 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{h} \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \right) - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} U - \frac{\sin \beta}{a} V + \frac{\partial W}{\partial z} \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta \partial z} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( h \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial W}{\partial \beta} - h \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \left\{ -\frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} h^2 \frac{\partial U}{\partial z} + h \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial z} - \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^2} - \frac{\sin \beta}{a} h^2 \frac{\partial V}{\partial z} + h \frac{\partial^3 V}{\partial \beta \partial z} \right\} \end{aligned}$$

$$A_3 = -\frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial z} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^2} - \frac{\sin \beta}{a} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial^3 V}{\partial \beta \partial z}$$

Donc :

$$\boxed{(\nabla^3 \vec{V})_z = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^3 W}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^3 W}{\partial z^2}}$$

**b. Terme :**  $\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V}$

**Direction  $\alpha$  :**

$$\begin{aligned} (\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\alpha &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{V}{h^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial h}{\partial \beta} - \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right) + \frac{W}{h} \overbrace{\left( \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial 1}{\partial \alpha} \right)}{=0} \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\sin \beta}{a \cdot h} V + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\text{sh } \alpha}{a \cdot h} V \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a \cdot h} V \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\text{sh } \alpha}{a \cdot h} V \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z}}$$

**Direction  $\beta$  :**

$$\begin{aligned} (\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\beta &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{U}{h^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial h}{\partial \alpha} - \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial h}{\partial \beta} \right) + \frac{W}{h_2} \overbrace{\left( \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial 1}{\partial \beta} \right)}{=0} \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\text{sh } \alpha}{a \cdot h} U + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\sin \beta}{a \cdot h} U \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\beta = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\sin \beta}{a \cdot h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\text{sh } \alpha}{a \cdot h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z}}$$

**Direction Z :**

$$(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_z = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{U}{h} \overbrace{\left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial 1}{\partial \alpha} - \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial h}{\partial z} \right)}{=0} + \frac{V}{h} \overbrace{\left( \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial 1}{\partial \beta} - \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial h}{\partial z} \right)}{=0}$$

Donc :

$$\boxed{(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_z = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}}$$

**c. Terme :**  $\nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V})$

**Direction  $\alpha$  :**

$$\begin{aligned} (\nabla \mu \times \nabla \times \vec{V})_\alpha &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (hV) - \frac{\partial}{\partial \beta} (hU) \right] - \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ h \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\text{sh } \alpha}{a \cdot h} V + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \frac{\sin \beta}{a \cdot h} U - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

Donc: 
$$\left( \nabla \mu \times \nabla \times \vec{V} \right)_\alpha = \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V + \frac{\sin \beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial z} \right]$$

**Direction  $\beta$ :**

$$\begin{aligned} \left( \nabla \mu \times \nabla \times \vec{V} \right)_\beta &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{\partial W}{\partial \beta} - h \frac{\partial V}{\partial z} \right] - \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (hV) - \frac{\partial}{\partial \beta} (hU) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{h} \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V - \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\sin \beta}{a.h} U \end{aligned}$$

Donc : 
$$\left( \nabla \mu \times \nabla \times \vec{V} \right)_\beta = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V - \frac{\sin \beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

**Direction Z :**

$$\left( \nabla \mu \times \nabla \times \vec{V} \right)_z = \frac{1}{h^2} \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ h \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right] - \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{\partial W}{\partial \beta} - h \frac{\partial V}{\partial z} \right] \right\}$$

Donc : 
$$\left( \nabla \mu \times \nabla \times \vec{V} \right)_z = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial \beta} \right]$$

**Sommation des Termes :**  $2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})$  et  $\nabla \mu \times (\nabla \times \vec{V})$

**Direction  $\alpha$ :**

$$\begin{aligned} 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\alpha + (\nabla \mu \times \nabla \times \vec{V})_\alpha &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \sin \beta}{a.h} V \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{2 \text{sh } \alpha}{a.h} V \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V + \frac{\sin \beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial U}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\alpha + (\nabla \mu \times \nabla \times \vec{V})_\alpha &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \sin \beta}{a.h} V \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V + \frac{\sin \beta}{a.h} U \right] \\ &+ \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

**Direction  $\beta$ :**

$$\begin{aligned} 2(\nabla \mu \cdot \nabla \vec{V})_\beta + (\nabla \mu \times \nabla \times \vec{V})_\beta &= \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{2 \sin \beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{2 \text{sh } \alpha}{a.h} U \right] + 2 \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial z} \\ &+ \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial \beta} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\text{sh } \alpha}{a.h} V - \frac{\sin \beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} - \frac{\partial V}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$2(\nabla\mu.\nabla\vec{V})_{\beta} + (\nabla\mu \times \nabla \times \vec{V})_{\beta} = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \frac{\text{sh}\alpha}{a.h} V + \frac{\sin\beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{2\text{sh}\alpha}{a.h} U \right] + \frac{\partial\mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right]$$

**Direction Z :**

$$2(\nabla\mu.\nabla\vec{V})_z + (\nabla\mu \times \nabla \times \vec{V})_z = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial\alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial\beta} + \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial z} \right] + 2. \frac{\partial\mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z}$$

En faisant la sommation avec le terme  $\mu\nabla^2\vec{V}$ , on arrive aux termes visqueux suivant les trois directions :

**Direction  $\alpha$  :**

$$\left( \nabla.\vec{\tau} \right)_{\alpha} = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial U}{\partial\alpha} - \frac{2\sin\beta}{a.h} V \right] + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\text{sh}\alpha}{a.h} V + \frac{\sin\beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial\mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial\alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \mu \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} - \frac{2.\sin\beta}{a.h} \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \frac{2.\text{sh}\alpha}{a.h} \frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{(\text{ch}\alpha + \cos\beta)}{a.h} U + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]$$

**Direction  $\beta$  :**

$$\left( \nabla.\vec{\tau} \right)_{\beta} = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial V}{\partial\alpha} + \frac{\text{sh}\alpha}{a.h} V + \frac{\sin\beta}{a.h} U \right] + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial V}{\partial\beta} - \frac{2\text{sh}\alpha}{a.h} U \right] + \frac{\partial\mu}{\partial z} \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right] + \mu \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} + \frac{2.\sin\beta}{a.h} \frac{\partial U}{\partial\alpha} - \frac{2.\text{sh}\alpha}{a.h} \frac{\partial U}{\partial\beta} - \frac{(\text{ch}\alpha + \cos\beta)}{a.h} V + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right]$$

**Direction Z :**

$$\left( \nabla.\vec{\tau} \right)_z = \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial\alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial z} \right] + \frac{\partial\mu}{\partial\beta} \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial W}{\partial\beta} + \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial z} \right] + 2. \frac{\partial\mu}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 W}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right]$$

### 3. **Equation d'énergie :**

**Terme de convection :**

$$\vec{V}.\nabla T = \frac{U}{h} \frac{\partial T}{\partial\alpha} + \frac{V}{h} \frac{\partial T}{\partial\beta} + W \frac{\partial T}{\partial z}$$

**Terme de conduction :**

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^2 \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right]$$

$$\boxed{\nabla^2 T = \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

**Terme de dissipation :**

Le gradient de vitesse dans le système bipolaire s'écrit :

$$\nabla \vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{V}{a} \sin \beta & \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{U}{a} \sin \beta & \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \\ \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{V}{a} \operatorname{sh} \alpha & \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{U}{a} \operatorname{sh} \alpha & \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} \\ \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\bar{\tau} = -\mu \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{2 \sin \beta}{a} V & \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{U}{a} \sin \beta + \frac{V}{a} \operatorname{sh} \alpha & \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{2}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{2 \operatorname{sh} \alpha}{a} U & \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \\ \text{Symétrique} & & 2 \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Le terme de dissipation est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{\tau} : \nabla \vec{V} &= \tau_{\alpha\alpha} \cdot (\nabla \vec{V})_{\alpha\alpha} + \tau_{\beta\beta} \cdot (\nabla \vec{V})_{\beta\beta} + \tau_{zz} \cdot (\nabla \vec{V})_{zz} + \tau_{\alpha z} \cdot [(\nabla \vec{V})_{\alpha z} + (\nabla \vec{V})_{z\alpha}] \\ &+ \tau_{\beta z} \cdot [(\nabla \vec{V})_{\beta z} + (\nabla \vec{V})_{z\beta}] + \tau_{\alpha\beta} \cdot [(\nabla \vec{V})_{\alpha\beta} + (\nabla \vec{V})_{\beta\alpha}] \end{aligned}$$

En remplaçant, on arrive à :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\tau} : \nabla \vec{V} &= 2\mu \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} V \right]^2 + 2\mu \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} U \right]^2 + 2\mu \left[ \frac{\partial W}{\partial z} \right]^2 \\ &+ \mu \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \right]^2 + \mu \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right]^2 + \mu \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{sh} \alpha}{a} V + \frac{\sin \beta}{a} U \right]^2 \end{aligned}}$$

## APPENDICE C

### Expression de $\overline{\overline{D}}$ et $I_2$ :

Les composantes du tenseur des vitesses de déformation  $\overline{\overline{D}}$ , sont données par :

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla \vec{V} + \nabla \vec{V}^T) \quad (\nabla \vec{V} = V_{i,j})$$

En utilisant la formule du gradient de vitesse donnée dans l'annexe A;

$$\begin{aligned} D_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} V; & D_{\beta\beta} &= \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\text{sh } \alpha}{a} U; & D_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z}; \\ D_{\alpha\beta} &= D_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{U}{a} \sin \beta + \frac{V}{a} \text{sh } \alpha \right); \\ D_{\alpha z} &= D_{z\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \right); & D_{\beta z} &= D_{z\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Le deuxième invariant  $I_2$  du tenseur de vitesse de déformation  $\overline{\overline{D}}$ , est donnée par :

$$I_2^* = -\frac{1}{2} \text{trace} \left( \overline{\overline{D}}^2 \right)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{\sin \beta}{a} V \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\text{sh } \alpha}{a} U \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ \left( \frac{1}{h} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \beta} + \frac{U}{a} \sin \beta + \frac{V}{a} \text{sh } \alpha \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$



# Références

## REFERENCES

1. Benaouda-Zouaoui.B, "Convection mixte laminaire pour un fluide non-newtonien thermodépendant dans une conduite annulaire horizontale", Thèse de doctorat d'état, institut de l'aéronautique, université de Blida, (2003)
2. Kotake.S et Hattori.N, "Combined forced and free convection heat transfer for fully developed laminar flow in horizontal annuli", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.28, (1985) 2113-2120
3. Nazrul.I, Giatonde.U.N et Sharma.G.K "Mixed convection heat transfer in the entrance region of horizontal annuli", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.44, (2001), 2107-2120
4. Ho.C.J, Lin.Y.H et Chen.T.C, "A numerical study of natural convection in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli with mixed boundary conditions", International Journal of Heat and fluid flow, V.10, (1989), 40-47
5. El-Shaarawi.M.A.I et Mokheimer.E.M.A, "Free convection in vertical eccentric annuli with uniformly heated boundary", International Journal of numerical methods for Heat and fluid flow, V.8, (1997), 488-503
6. Hosseini.R, Heyrani-Nobari.M.R et Hatam.M, "An experimental study of heat transfer in an open-ended vertical eccentric annulus with insulated and constant heat flux boundaries", Applied thermal engineering, (2005), 1247-1257
7. Shu.C, Yao.Q, Yeo.K.S, Zhu.Y.D, "Numerical analysis of flow thermal fields in arbitrary eccentric annulus by differential quadrature method", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.38, (2001), 597-608
8. Feldman.E.E, Hornbeck.R.W et Osterle.J.F, "A numerical solution of laminar developing flow in eccentric annular ducts", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.25, (1982), 231-241
9. Fang.P, Manglik.R.M et Jog.M.A, "Characteristics of laminar viscous shear-thinning fluid flows in eccentric annular channels", Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanic, V.84, (1999), 1-17
10. Manglik.R.M et Fang.P, "Effect of eccentricity and thermal boundary conditions on laminar fully developed flow in annular ducts", International Journal of Heat and fluid flow, V.16, (1995), 298- 306
11. Feldman.E.E, Hornbeck.R.W et Osterle.J.F, "A numerical solution of developing temperature for laminar developing flow in eccentric annular ducts", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.25, (1982), 243-253

12. Manglik.R.M et Fang.P, "Thermal processing of viscous non-Newtonian fluids in annular ducts: effects of power-law rheology, duct eccentricity, and thermal boundary conditions", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V.45, (2002), 803-814
13. Tixier.N, Baudu.M et Guibaud.G, "Approche des propriétés rhéologiques de suspensions biologiques floculées", Thèse de doctorat, université de Limoges, (2003)
14. Midoux.N, "Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique", Tec&Doc, Paris, (1993)
15. Briant.J, Denis.J et Parc.G, "Propriétés rhéologiques des lubrifiants", Technip, Paris, (1985)
16. Wolff.C et Dupuis.D, "Viscosité", Tech de l'ingénieur, R2350
17. Piau.J.M, "Fluides non-newtoniens", Tech de l'ingénieur, A710
18. Pillutla.J "Laminar non-Newtonian flows in eccentric annuli with inner cylinder rotation", Thèse de master en science, université de Cincinnati, (2001)
19. Bird.R.B, Armstrong.R.C et Hassenger.O, "Dynamics of polymeric liquids", V.1, Fluid mechanics, Wiley, New-York, (1977)
20. Saadjan.E, "Phénomènes de transport et leurs résolution numériques", Polytechnica, Paris, 2<sup>e</sup> édition, (1998)
21. Gray.D.D, Giorgini.A, "The validity of the Boussinesq approximation for liquid and gases", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, V.19, (1975), 545-551
22. Necati-Özisik.M, "Finite difference methods in heat transfer", Crc Press, Inc, USA, (1994)
23. CrochetM.J, Davies.A.R et Walters.K, "Numerical simulation of non-newtonian flow", Elsevier Science Publishers B.V, Netherlands, 3<sup>e</sup> édition, (1991)
24. Briely.R.W, "Numerical method for predicting three dimensional steady viscous flows in ducts", *Journal of Computational Physics*, V.14, (1974), 8-28
25. Escudier.M.P, Gouldson.I.W, Oliveira.P.J et Pinho.F.T, "Effects of inner cylinder rotation on laminar flow of a Newtonian fluid through an eccentric annulus", *International Journal of Heat and fluid flow*, V.21, (2000), 92-103
26. Oosthuizen.P.H et Naylor.D "An introduction to convective heat transfer", Wcb/McGraw-Hill, USA, (1999)
27. Nouar.C, Benaouda-Zouaoui.B et Youbi.Z, "Laminar mixed convection in a horizontal annular duct. Case of thermodependent non-newtonian fluid", 4<sup>th</sup> Int.Sym of experimental and omputational aerothermodynamics of internal flows, V.2, (1999), 88-97

28. Nouar.C, Benaouda.B, Lai.M, Lebouché.M et Riou.C, "Convection mixte dans une conduite annulaire horizontale. Cas des fluides non newtoniens thermodépendants", Congrès annuel de la société française des thermiciens, (1998), 169-174
29. Nouar.C, "Convection thermique pour un fluide rhéofluidifiant. Cas de l'écoulement de Couette Poiseuille", Thèse de doctorat, I.N.P.L.Nancy, (1986)
30. Liu.S et Masliyah.J.H, "On non-newtonian flow in ducts and porous media". Chemical Engineering Science, V.53, (1998),175-1201
31. Mota.J.P.B et Esteves.I.A.AC, Portugal.C.A.M, Esperança.J.M.S.S, "Natural convection heat transfer in horizontal eccentric elliptic annuli containing saturated porous media", International Journal of Heat and Mass Transfer, V.43, (2000), 4367-4379
32. Szabo.P et Hassanger.O, "Flow of viscoplastic fluids in eccentric annular geometries", Journal of Non-Newtonian fluid Mechanics, V.45, (1992), 149-169
33. Spiegel.M.R, "Analyse vectorielle cours et problèmes", Wcb/McGraw-Hill, USA, (1973)