

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BLIDA 01



Institut d'Aéronautique et des Etudes
Spatiales de Blida

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

Pour l'obtention du diplôme Master en Aéronautique

Option : Propulsion avion

THEME :

Ecoulement dans des tuyères supersoniques type détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique dimensionnées par le modèle à haute température

Fait par :

M^r. GHANEM Ibrahim
M^r. MEGARI Mohamed

Dirigé par :

PR. ZEBBICHE TOUFIK : Promoteur

Année universitaire 2013/2014

Résumé

Dans ce travail, nous avons essayé de développer un programme de calcul numérique permettant de voir l'erreur causé par le modèle du gaz parfait lors de l'écoulement dans une tuyère supersonique à détente centrée (MLN) bidimensionnelle dimensionnée sur le modèle à haute température en utilisant le modèle des équations de compatibilité et de caractéristiques d'un gaz parfait (GP), calorifiquement parfait et thermiquement parfait . La forme de la tuyère est donnée, elle est déterminée en utilisant le modèle de la méthode des caractéristiques à haute température afin de donner un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie de la tuyère.

Le but de ce travail consiste à prouver que si le modèle de calcul utilisé pour les équations de compatibilité et caractéristiques est celui de GP, l'écoulement à la sortie de la tuyère MLN dimensionnée par le modèle à haute température ne sera plus uniforme à la section de sortie. Précisément il sera accéléré, autrement dit le nombre de mach à la section de sortie sera supérieur à celui de la tuyère dimensionnée. De même, l'écoulement à travers la tuyère sera complètement modifié en comparaison avec celui donné par le modèle HT.

Les résultats trouvés nous donnent la variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère et le long de l'axe longitudinal de la tuyère. Même variation sera déterminée pour la pression, la température et la masse volumique.

Tous ces paramètres, et autres, peuvent être déterminés en fonction du nombre de Mach M_s de la section de sortie et la température génératrice T_0 de la chambre de combustion et le rapport des chaleurs spécifiques pour le modèle GP.

Mots clés :

Écoulement supersonique, Haute Température, gaz calorique imparfait, interpolation, Méthode des caractéristiques, fonction de Prandtl Meyer, Tuyère à Détente Centrée bidimensionnelle et axisymétrique.

Abstract

In this work, we tried to develop a program of numerical computation allowing to see the error caused by the model of perfect gas during the flow in a supersonic nozzle has relaxation centered (MLN) two-dimensional dimensioned on the basis of assumption of a gas at high temperature by using the model of the equations of compatibility and characteristics of a perfect gas (GP), calorifically perfect and thermically perfect. The contour of the nozzle is given .it is given by using the model of the method of the characteristic at high temperature in order to give a flow uniform and parallel with the section of exit.

The goal of this work consists in proving that if the model of calculation used for the equation of compatibility and characteristics is that the GP, the flow at the exit of conduit MLN dimensioned by the model at high temperature will not be uniform any more with the section of exit. Precisely it will be accelerated. In other words, the Mach number to the section of exit higher than that of will be dimensioned conduit. In the same way, the flow through the conduit will be completely modified in comparison with that given model HT.

The results are therefore the variation of parameters through the wall of the nozzle and along the longitudinal axis of the nozzle. Even variations will be given for the pressure, temperature, density.

All these parameters and others can be determined according to Mach number M_s of the section of exit and the T_0 generator of the combustion chamber and the report of the specific heats for model GP.

Key Words :

Supersonic Flow, High Temperature, Calorically Imperfect Gas, Interpolation, Method of Characteristics, Prandtl Meyer Function, Two-dimensional and Axisymmetric Minimum Length Nozzle.

Remerciement

Nous prions et remercions *Allah* le tout puissant de nous avoir donné la foi et le courage afin de réaliser ce modeste ouvrage sans que nous oublions nos très chères parents pour leurs aide très précieuse.

Nous tenons à remercier notre promoteur en premier lieu, le Dr. *Zebbiche Toufik*, qui nous a aidés profondément par son suivi et ses conseils durant notre projet, pour toute sa confiance qu'il nous a témoignée en nous proposant ce sujet. Ses conseils éclairés et sa large expérience scientifique ont permis l'aboutissement de ce travail.

Nous adressons nos vifs remerciements à tous nos enseignants de l'*Institut de l'Aéronautique du Blida*.

Nous tenons à remercier à travers ces quelques lignes les nombreuses personnes qui ont contribué au succès de notre stage et qui, par la confiance, la patience et l'amitié qu'ils ont manifestées à notre égard, nous ont permis d'apprécier pleinement ces deux mois au sein de l'*AC400 (Air Algérie)*.

Sans oublier nos remerciements à notre honorable jury devant lesquels nous venons d'exposer notre projet.

En fin, que tous ceux ou celles qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce long travail ; trouvant ici l'expression de nos remerciements les plus sincères.



Ibrahim & Mohamed.



Abréviations :

- MLN** Minimum Length Nozzle (tuyère à détente centrée).
- HT** Haute Température.
- GP** Gaz Parfait.
- C +** Caractéristique montante.
- C -** Caractéristique descendante.

Indice :

- 13 Valeurs moyennes entre les points 1 et 3.
- 23 Valeurs moyennes entre les points 2 et 3.
- GP Valeur moyenne entre les points G et P.
- GD Valeur moyenne entre les points G et D.
- 3 Concernant la valeur au point 3.
- * Condition critique.
- S Section de sortie.
- D Détente de Kernel.
- (j) Tronçon.
- J Nœud.
- W Paroi.

Exposant :

- * Valeur au col juste après la détente.
- K** Itération.
- Iso** Courbe iso-valeurs.
- Valeur en un point sur la caractéristique descendante.
- + Valeur en un point sur la caractéristique montante

Table des matières

Résumé	
Remerciement	
Dédicace	
Table des matières	I
Liste des figures	vii
Liste des tableaux	xi
Nomenclature	xii
INTRODUCTION GENERALE	01
CHAPITRE I : Généralités sur les tuyères supersoniques	04
I.1 Définition des tuyères supersonique	04
I.2 Applications et rôles des tuyères supersoniques	05
I.2.1 Tuyères de moteurs fusés	05
I.2.2 Tuyères d'avions de combat futurs	06
I.3 Différentes Configurations Des Tuyères Supersoniques	07
I.3.1 Tuyères conventionnelles	08
I.3.1.a Les Tuyères Coniques.....	08
I.3.1.b Les Tuyères A Contour Profilé.....	09
I.3.1.c Les Tuyères Annulaires.....	10
I.3.2 Tuyère adaptée en altitude	11
I.3.2.a Les Tuyères Auto Ajustables	11
I.3.2.b Les Tuyères A Double Galbes	13
I.3.2.c Tuyère à duel mode (duel mode nozzle)	13
I.4 Définition et divers types des souffleries supersoniques	14
I.4.1 Définition d'une Soufflerie.....	14
I.4.2 Souffleries supersoniques.....	15
I.4.2.a Soufflerie à cycle fermé	16
I.4.2.b Souffleries à rafales	16
I.4.2.c Souffleries à impulsion	17
I.5 Ecoulement dans une tuyère	18

I.5.1 Notion sur la mécanique des fluides des écoulements compressibles.....	18
I.5.2 Définition des écoulements compressibles	18
I.5.4 Effets de compressibilité.....	19
I.5.3 Classification des écoulements Compressibles	19
I.6 Écoulement dans une tuyère convergente-divergente	20
I.7 Onde de choc dans une tuyère convergente- divergente	22
I.8 Les paramètre des performances	24
I.8.1 La Force De Poussée.	24
I.8.2 Le Coefficient de Poussée	25
CHAPITRE II : Paramètres thermodynamiques à HT	26
II.1 Relations thermodynamique	26
II.1.1 Equation adiabatique	26
II.1.2 vitesse du son en fonction de la température.....	25
II.1.3 la vitesse en fonction de la température	29
II.1.4 nombre de Mach en fonction de la température	30
II.1.5 la masse volumique en fonction de la température	31
II.1.6 la pression en fonction de la température	32
II.1.7 la section en fonction de la température	32
II.1.8 Débit massique critique	33
II.2 Modèle du gaz parfait	34
II.3 Procédure du calcul	34
II.3.1 Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$	35
II.3.2 Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$	37
II.3.3 Calcul numérique des rapports thermodynamiques	38
II.4 Paramètres critiques au col correspondant à T_0	40
II.5 Paramètres Supersoniques correspondant à T_0	41
II.6 Erreur du modèle du Gaz Parfait	43

CHAPITRE III : Méthode de caractéristiques (MOC)	44
III.1 Présentation de la théorie des caractéristiques	44
III.2 Équations générales des équations d'Euler pour l'écoulement	45
III.3 Hypothèses de calcul	46
III.4 Equations de l'écoulement après l'application des hypothèses	47
III.5 Potentiel des vitesses	49
III.6 Propriétés des équations Hyperboliques	50
III.7 Equations des caractéristiques	51
III.8 Domaine de dépendance – région d'influence	53
III.9 Relations de compatibilité	55
III.9.1 Pour le cas plan	59
III.9.2 Pour le cas axisymétrique	60
III.10 Théorèmes concernant l'écoulement plan	60
III.10.1 Ecoulement en régime non simple	61
III.10.2 Ecoulement en régime simple	62
III.10.3 Ecoulement en régime uniforme	64
III.11 Formulation mathématique	65
III.12 Modèle à haute température	66
III.13 Différent types des points de l'écoulement supersonique	68
III.13.1 Point interne	68
III.13.2 Point interne particulier	70
III.13.3 point sur l'axe de symétrie	71
III.13.4 Point sur la paroi rigide de la tuyère	72
III.13.5 Autres paramètres	74
CHAPITRE IV : résultats et discussions	76
IV.1 Présentation du programme	76
IV.2 Résultats sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle (2D MLN)	78
IV.2.1 Maillages en caractéristiques	78
IV.2.2 Variations des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère	85

IV.2.3 Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère	92
IV.3 Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique	99
IV.3.1 Maillages en caractéristiques	99
IV.3.2 Variation des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère.....	102
IV.3.3 Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère	109
Conclusion générale	116
Annexe : cubic spline	118

Références

Liste des figures

Chapitre I : GENERALITES SUR LES TUYERES SUPERSONIQUES

Figure I.1	Régime sous-détente.....	04
Figure I.2	Régime sur-détente	05
Figure I.3	Tuyère d'une fusée.....	06
Figure I.4	Tuyère d'un avion de Combat.....	07
Figure I.5	Tuyère Conique	08
Figure I.6	Tuyère A Contour Profilé	09
Figure I.7	Tuyère Annulaire	10
Figure I.8	Tuyère Type Bouchon	11
Figure I.9	Tuyère Type Détente Déviation	12
Figure I.10	Tuyère A Double Galbe	13
Figure I.11	Tuyère à duel mode	14
Figure I.12	Soufflerie supersonique	15
Figure I.13	Soufflerie supersonique à cycle fermé.....	16
Figure I.14	Schéma classique d'une soufflerie à rafales à air comprimé	17
Figure I.15	Ecoulement gaz parfait dans une tuyère convergente divergente	22
Figure I.16	Onde de choc dans une tuyère.....	22

Chapitre II : PARAMETRES THERMODYNAMIQUE à HT

Figure II.1	Variation de la fonction $F_p(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$	38
Figure II.2	Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T^*]$	39
Figure II.3	Présentation de la condensation des nœuds.....	39

Chapitre III : METHODE DES CARACTERISTIQUES

Figure III.1	Composantes du vecteur vitesse	52
Figure III.2	Illustration de la relation entre μ et M	52
Figure III.3	Les caractéristiques C^+ et C^- et les lignes de Mach η et ξ	53
Figure III.4	Solution de part et d'autre d'une courbe C	54
Figure III.5	Illustration du domaine de dépendance du point 3.....	54

Figure III.6	Illustration de la région d'influence du point 4	55
Figure III.7	Lignes caractéristiques définies à partir d'un point	56
Figure III.8	Relation entre les lignes de Mach.....	57
Figure III.9	ligne caractéristique pour régime non simple	61
Figure III.10.a	ligne des caractéristiques Q^+	62
Figure III.10.b	ligne des caractéristiques Q^-	63
Figure III.11	ligne caractéristique pour régime uniforme	64
Figure III.12	Illustration des lignes Caractéristiques et des lignes de Mach.....	65
Figure III.13	Différents points de calcul	70
Figure III.14	Nœud sur une paroi rigide	74

Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSION

Partie 01 : Tuyère MLN bidimensionnelle

Figure IV.1	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$, $N_j=0$	79
Figure IV.2	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$, $N_j=20$	80
Figure IV.3	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$, $N_j=100$	82
Figure IV.4	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s=3.0$, $N_j=250$	83
Figure IV.5	Variation de nombre de Mach le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $M_s = 3.00$	85
Figure IV.6	Variation du rapport de température le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $M_s = 3.00$	87
Figure IV.7	Variation du rapport de masse volumique le long de l'axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $M_s = 3.00$	89
Figure IV.8	Variation du rapport de pression le long de l'axe de la tuyère MLN 2D	

	dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K, T_0 = 2000 K,$ $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$ 90	90
Figure IV.9	Variation de nombre de Mach le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K, T_0 = 2000 K$ $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$ 92	92
Figure IV.10	Variation du rapport de température le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K, T_0 = 2000 K$ $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$ 94	94
Figure IV.11	Variation du rapport de masse volumique le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K, T_0 = 2000 K$ $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$ 96	96
Figure IV.12	Variation du rapport de pression le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K, T_0 = 2000 K$ $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$ 97	97

Partie 02 : tuyère MLN axisymétrique

Figure IV.13	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms = 3.0, Nj = 0$ 100	100
Figure IV.14	Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms = 3.0, Nj = 10$ 101	101
Figure IV.15	Variation du nombre de Mach le long de l'axe de la tuyère MLN Axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K,$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $Ms=3.00$ 102	102
Figure IV.16	Variation du rapport de température le long de l'axe de la tuyère MLN Axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $Ms=3.00$ 104	104
Figure IV.17	Variation du rapport de masse volumique le long de l'axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 =$ $1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $Ms=3.00$ 106	106
Figure IV.18	Variation du rapport de pression long de l'axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$	

	$T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $M_s=3.00$	107
Figure IV.19	Variation du nombre de Mach le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $M_s=3.00$	109
Figure IV.20	Variation du rapport de température le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $M_s=3.00$	111
Figure V.21	Variation du rapport de masse volumique le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $M_s=3.00$	113
Figure V.22	Variation du rapport de pression le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$ $T_0 = 2000 K, T_0 = 3000 K$, donnant $M_s=3.00$	114

ANNEXE

Figure A.1	: Interpolation linéaire par morceaux	119
Figure A.2	: les différents interpolation	120
Figure A.3	: interpolation quadratique	121
Figure A.4	: description de cubic spline	121
Figure A.5	: courbe qui représente l'interpolation cubic spline	122
Figure A.6	: interpolation cubic spline de la fonction $\log(x)$	129

Liste des tableaux

Chapitre II : Paramètres thermodynamiques à HT

Tableau II.1	Table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ en fonction de la température pour l'air...	35
Tableau II.2	Coefficients du polynôme $C_p(T)$	36

x	Abscisse d'un point	M	Nombre de Mach
y	Rayon d'un point	M_t	Nombre de Mach turbulent
C_p	Chaleur spécifique à pression constante	\dot{m}	Débit massique
C_v	Chaleur spécifique à volume constante	A	Aire d'une section de la tuyère
r	Constante thermodynamique de l'air	T	Température
A_e	Section de sortie de la tuyère	W_p	Travail de pression
A_0	Section au col de la tuyère	Q	La chaleur
a	Vitesse du son	U	l'énergie interne
C_F	Coefficient de Poussée	E_c	L'énergie cinétique
C^*	Vitesse caractéristique	E_p	L'énergie potentiel
C^+	Caractéristique montante	E_t	Énergie total
C^-	Caractéristique descendante	V	Volume
F	Force de poussé	S	L'entropie
P	Pression statique	h	L'enthalpie
P_a	La pression ambiante	f	Force de masse
P_e	La pression Statique en sortie	μ	Angle de Mach
P_0	Pression total	ν	Fonction de Prandtl Meyer
P^*	Pression statique à la vitesse de son	θ	Angle entre le vecteur vitesse et la normale de la section A
λ	Facteur de perte de poussé	δ	Géométrie de la tuyère $\delta = 0$ pour le Cas 2D, $\delta = 1$ pour le cas axisymétrique
α	Angle de divergence de la tuyère	φ	Potentiel de vitesse
γ	Rapport des chaleurs spécifiques	η	Ligne de Mach montante
ρ	Masse volumique	ξ	Ligne de Mach descendante
ρ_e	Masse volumique des gaz d'éjections	Q^+, Q^-	invariante de Riemann
β	L'axe de la tuyère et la paroi intérieure		
L	Longueur de la tuyère		
k	Énergie cinétique de la turbulence		
V	Vitesse de l'écoulement		
V_e	Vitesse d'éjection		
u, v	Composantes horizontale et verticale du vecteur vitesse		

INTRODUCTION GENERALE

Les tuyères supersoniques jouent un rôle très important pour la conception des engins aérospatiaux. Ils interviennent dans beaucoup de structures telles que les missiles [1], [2] et [3], les moteurs d'avions et dans la fabrication des souffleries supersoniques pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersoniques réels. Les concepteurs aérodynamiciens ont débuté les applications en 1935. A cette époque, toutes les études étaient basées sur les expériences. Le développement par ordinateur n'avait pas commencé [4].

Après quelques années, en parallèle avec les développements expérimentaux et numériques, les concepteurs ont pensé à améliorer les performances des tuyères de Propulsion. Ils ont remarqué que les tuyères coniques délivrent certes une poussée, mais une perte considérable, vu l'inclinaison de la portion supersonique.

Si l'inclinaison de la tuyère à la section de sortie est nulle, la poussée délivrée par le moteur sera donc complètement utilisée pour la propulsion et sera par conséquent maximale [1] et [2]. Ce problème sera donc réglé par la recherche d'une forme de tuyère donnant à la sortie un écoulement parallèle.

Le besoin et le souhait d'obtenir une forme de tuyère diffèrent suivant son utilisation. Pour les applications des moteurs fusés, la conception est basée sur deux facteurs essentiels qui sont ; l'obtention d'une poussée maximale avec un poids le plus petit possible de la tuyère (longueur minimale). Il est connu que la masse de la tuyère contient une grande portion de la masse totale des missiles [5] et [6].

En jouant sur ces facteurs, plusieurs formes de tuyères ont été trouvées, [3] parmi les quelles deux sont le but de ce présent travail : tuyère à détente centrée (MLN) et tuyère à corps central (PN) [7], [8], et [9].

Les expériences en soufflerie ont permis aux concepteurs d'observer des lignes privilégiés dans le champ d'écoulement supersonique, appelées les caractéristique, faisant un angle bien défini de part et d'autre de la vectrice vitesse [6], [10] et [12]. La transformation mathématique des équations de conservation écrites dans le système de coordonnées cartésiennes suivant les lignes caractéristiques permet une simplification remarquable des

équations de conservation [6], [10] et [11]. Ils ont appelé cette méthode la méthode des caractéristiques.

La solution numérique des divers problèmes qui peuvent se poser et qui ne peuvent pas être traités analytiquement à cause principalement de leur complexité est Réalisée grâce à l'application des lois mathématiques décrivant leur comportement physique qui s'exprime généralement par des équations aux dérivées partielles, [10] et [12]. Le principe d'une approche numérique est essentiellement basé sur la transformation des équations différentielles régissant le problème en équations algébriques [13], [14].

Les solutions des équations de base d'un fluide compressible ou non dans un régime Subsonique et supersonique différent selon le type des régimes, et on peut les partager en elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Elles sont de type elliptiques pour un écoulement subsonique et de type hyperbolique pour un écoulement supersonique [13]. Pour obtenir les solutions numériques des équations de base non linéaires de types elliptiques et paraboliques, on utilise de préférence une méthode fondée sur les éléments finis. Par contre dans le cas où l'écoulement est supersonique, une méthode issue de la formulation caractéristique des équations hyperboliques est plus appropriée [15].

L'aérodynamique numérique, ou l'étude des problèmes de l'aérodynamique par voie numérique, est un domaine de recherche relativement récent.

Les aérodynamiciens soulevant la question de savoir si ce domaine de recherche devrait être considéré comme théorique ou bien expérimental. Ils estiment toutefois que l'aérodynamique numérique constitue en effet une discipline spécifique, mais qui représente des points communs avec l'aérodynamique théorique, en raison des nombreux essais numériques nécessaires pour palier aux insuffisances de la connaissance des méthodes de calcul. On peut partager l'aérodynamique en deux branches essentielles, aérodynamique externe et l'autre interne. Cette dernière est spécialisée dans l'étude des écoulements internes des fluides, telle que, les moteurs fusées, les moteurs d'avions et les tuyères. L'autre branche est consacrée à l'étude de l'écoulement en présence de l'air libre, telle que les écoulements autour des Profils d'ailes.

Dans les moteurs fusés, l'organe tuyère constitue la partie essentielle. Elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse, dans le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération [3] et [12].

ORGANISATION DU MEMOIRE

L'étude de la problématique envisagée et réalisée en quatre chapitres et une conclusion générale.

Le *premier chapitre* contient généralité sur les tuyères et les souffleries supersonique et le différent régime d'écoulement, puis les différents profils des tuyères.

Le *deuxième chapitre* contient le modèle mathématique des paramètres à haute température.

Le *troisième chapitre* on expliqués la méthode de caractéristique et ses hypothèse, puis les différents équations qui on a utilisé dans notre études et différents point de l'écoulement supersonique.

Le *quatrième chapitre* contient tous les résultats, interprétations qu'on a obtenues par le programme de calcul en *FORTRAN*

En fin, on a terminés par conclusion général qui reprend les objectifs de notre travail, et aussi quelque perspective proposée.

CHAPITRE I

Généralités sur les Tuyères Supersoniques

CHAPITRE II

**Paramètres thermodynamique à haute
Température**

CHAPITRE III

Méthode des caractéristiques

CHAPITRE IV

Résultats et Discussion

I.1 DEFINITION DES TUYERES SUPERSONIQUE

Tuyère

La tuyère est l'élément de la soufflerie permettant de porter l'écoulement d'air à une vitesse supersonique. Sa forme doit être calculée afin de générer un écoulement exempt d'ondes de choc. Les profils de tuyères supersoniques peuvent être divisés en deux classes : profil à deux dimensions (2D), et profil axisymétrique. Les tuyères axisymétriques sont réalisées par la révolution d'une courbe autour de l'axe central. Les tuyères 2D ont un profil variant dans le plan x-y, mais dont la largeur (plan z) reste constante [46].

Tuyères supersoniques

La propulsion de l'étage principal d'un lanceur est assurée par un moteur alimenté en oxygène et hydrogène liquides, également appelés ergols cryogéniques. Ces derniers sont brûlés dans une chambre de combustion pour produire des gaz qui sont ensuite accélérés dans une tuyère de détente et fournissant la poussée.

Lorsque la tuyère est amorcée (état sonique au col), le régime d'écoulement ne dépend que du rapport entre la pression ambiante P_a (supposée variable) et la pression Statique en sortie $P_{e,vac}$ (ou vac fait référence au vide) que celle-ci a dans le vide.

Dans la pratique, on distingue trois différents régimes de fonctionnement d'une Tuyère, dépendant des niveaux de pression régnant juste en sortie et dans le milieu ambiant:

➤ Si $\frac{P_a}{P_{e,vac}} = 1$, on parle dans ce cas d'un **régime adaptée**.

➤ Si $\frac{P_a}{P_{e,vac}} < 1$, les gaz achèvent de se détendre dans le milieu ambiant. On parle de **régime de sous-détente**. Dans ce cas, un faisceau de détente apparaît à la lèvre de sortie de la tuyère.

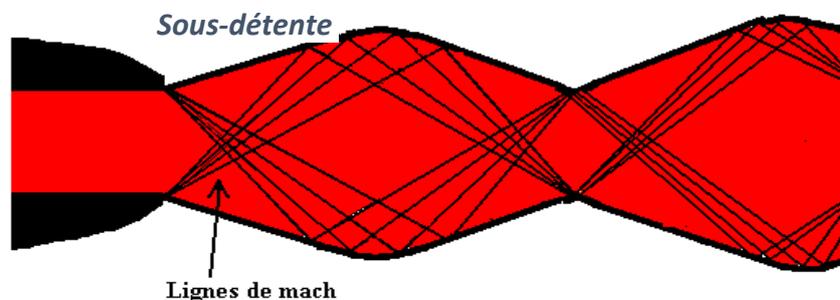


Figure I.1 : Régime sous-détente

- Si $\frac{P_a}{P_{e,vac}} > 1$, les gaz sont recomprimés dans la tuyère ou à la sortie de celle-ci. On parle alors de **régime de sur-détente**. Une onde de choc (choc de recompression ou de décollement) se forme à la lèvre de la tuyère. La couche limite enregistre un gradient de pression adverse, S'épaissit, mais reste attachée à la paroi jusqu'à la lèvre de sortie de la tuyère.

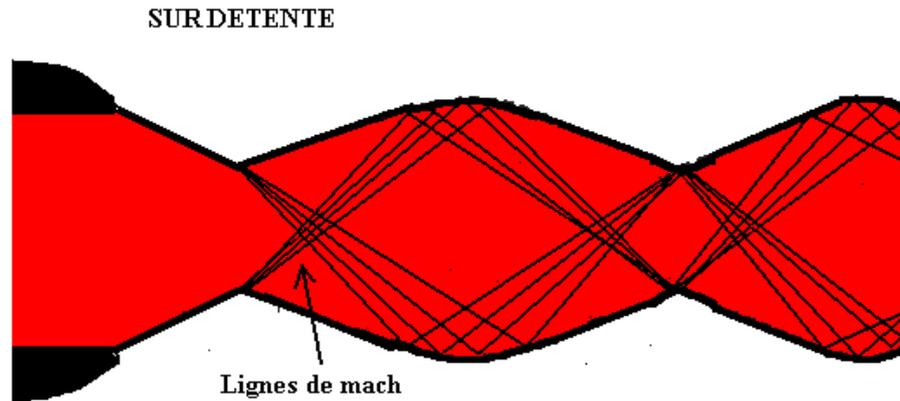


Figure I.2 : Régime sur-détente

Différentes structures de choc (réflexion régulière, réflexion de Mach et choc en chapeau [38]), décrites plus en détails par la suite, peuvent être observées dans le jet.

I.2 APPLICATIONS ET ROLES DES TUYERES SUPERSONIQUES

Les tuyères supersonique interviennent dans beaucoup des structures l'aéronautique et l'aérospatiale telles que les moteurs fusée et missile, moteurs avions et dans la fabrication des souffleries supersonique pour la modélisation et la réalisation expérimentale des écoulements supersonique [6].

I.2.1 Moteurs fusées

Dans les moteurs fusées, l'organe tuyère constitue la partie essentielle, car elle permet d'accélérer les gaz à la sortie de la chambre de combustion jusqu'à une certaine vitesse dont le but d'obtenir une force de poussée comme une résultante de cette accélération.

Notons ici que la structure d'un missile est constituée par la chambre de combustion et la tuyère et que cette dernière constitue environ 70% de la masse totale d'une chambre propulsive.

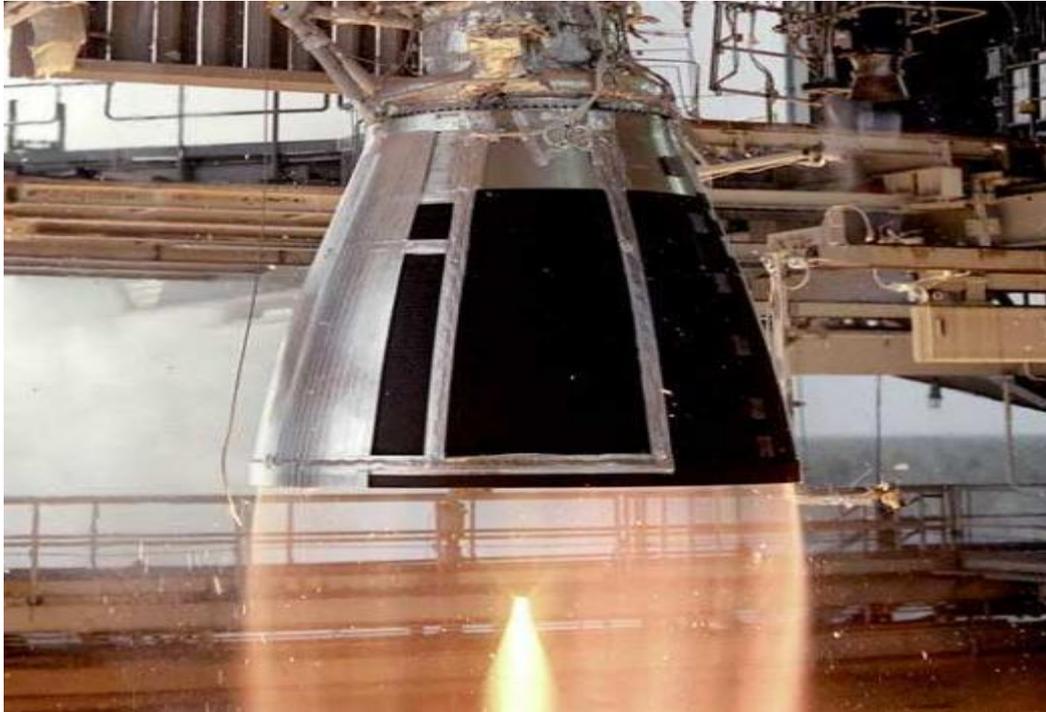


Figure I.3 : Tuyère d'une fusée.

I.2.2 Moteur d'avions de combat

Le progrès majeur qui a été réalisé en aviation au cours de ce siècle, sans doute est l'avènement du vol supersonique, qui a ses débuts n'a d'ailleurs pas provoqué un changement d'attitude immédiat chez les constructeurs, car le souci primordial pour les premiers avions supersoniques militaires c'est d'assurer de bonnes conditions de vol subsonique ou transsonique de sorte que l'emploi d'un divergent était pratiquement proscrit pour éviter les régimes de sur détente à ces vitesses modérées.

La rentabilité de tels projets n'est assurée que si les performances optimales sont obtenues de tous les éléments du moteur, dans tels projets le rôle assigné à la tuyère est définie de la façon suivante :

- La tuyère doit assurer le blocage de l'écoulement aux divers régimes de fonctionnement par la variation de la surface au col en fonction du débit et des conditions de températures et de pression des gaz à évacuer.
- doit assurer la détente optimale des gaz de combustion. C'est -à-dire, la poussée maximale du régime de la croisière. Ce problème est délicat, car la Section de sortie doit être raccordée au maitre couple du moteur ; ou la structure de l'avion par carénage.
- Au régime du vol intermédiaire, la tuyère ne doit pas provoquer des pertes de pousse trop élevées du fait de son inadaptation.
- Elle doit contribuer au freinage de l'avion à la phase d'atterrissage et à l'atténuation de bruit.



Figure I.4 : Tuyère d'un avion de Combat.

I.3 LES DIFFERENTES TYPES DES TUYERES SUPERSONIQUES

La poussée d'une tuyère n'est pas uniquement une image du taux d'accélération des gaz dans la partie divergente mais aussi de la direction des gaz à la section de sortie. Pour avoir une tuyère a poussée maximale il faut ramener les gaz d'éjection a la direction axiale, et pour le faire, on est obligé en quelque sorte d'augmenter la longueur de la tuyère qui induit automatiquement l'augmentation de son poids qui a un effet néfaste sur le rendement de propulsion de la tuyère. Donc le choix d'une tuyère est un compromis.

I.3.1 Tuyères conventionnelles

I.3.1.a Les Tuyères Coniques

C'est la configuration la plus simple d'une tuyère supersonique, elle est largement utilisée pour le cas des moteurs simples qui délivrent de faibles poussées. Car cette configuration engendre une perte considérable de poussée causée principalement par la divergence de l'écoulement à la section de sortie, au lieu d'être axiale pour un maximum de poussée, cette perte est quantifiée par Malin qui a en introduisant un facteur qui dépend de l'angle de divergence du cône :

$$\lambda = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

Avec :

α : Angle de divergence de la tuyère

Le coefficient de poussée de ce type de tuyères devient [16] :

$$C_F = \frac{P_e A_e}{P_0 A_0} + \frac{1 + \cos \alpha}{2} \frac{\rho_e V_e^2 A_e}{P_e A_e}$$

Avec :

P_e : Pression à la sortie de la tuyère

P_0 : Pression total

A_e : Section de sortie de la tuyère

A_0 : Section au col de la tuyère

ρ_e : Masse volumique des gaz d'éjections

Habituellement le demi angle du divergent α utilisé est entre 15° et 30° , le coefficient de poussée développé est approximativement inférieur à 1.7% d'une tuyère idéal, cette configuration est aussi vastement utilisée pour la comparaison entre la longueur et la poussée des tuyères de différentes configurations. Voir Figure (I.5)



Figure I.5 : Tuyère Conique

I.3.1.b Les Tuyères à Contour Profilé

Comme on l'avais vu les tuyeres coniques engendre une perte de poussée considérable a cause de la divergence de l'écoulement a la sortie, donc pour remedier a ça il faut tourner le contour du divergent vers l'interieur pour ramener l'écoulement a une direction axiale et aller avec la partie divergente près du col a des valeurs de divergence relativement importantes pour compenser la detente manquer en faisant incliner le profil vers l'interieur c'est justement le but de notre travail.

Dans ce contexte une approche direct pour la conception d'une tuyere supersonique a été proposé par Guderley et hentsh en 1955, le problème du calcul de la séction de sortie et du contour pouvant fournir une poussé optimale a été posé en specifiant uniquement la longueur et la pression ambiante, un calcul variationnel permettant de résoudre le problème du champ d'écoulement à la sortie nécessaire pour l'atteindre. La dernière étape consiste en l'application de la méthode des caractéristiques pour développer le contour supersonique de la tuyere, le resultat de cette methode est une tuyere devloppant une poussée optimale pour une valeur donnée de la section de sortie et de la longueur figure(I.6)

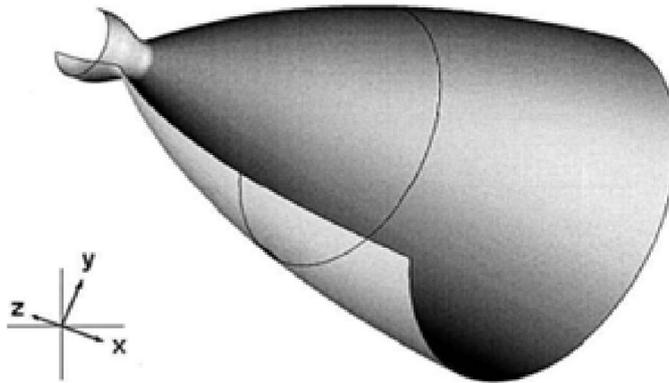


Figure I.6 : Tuyere à Contour Profilé

I.3.1.c Les Tuyères Annulaires

Comme son nom l'indique les gaz d'échappement passent à partir du col jusqu'à la sortie de la tuyère à travers une conduite sous forme d'anneau au lieu d'une section normale d'origine sur l'axe, cet anneau est formé par un corps central au col et par une paroi externe qui définit le Gabarriet de la tuyère. Voir Figure (I.7), Ce type de configuration induit toujours une perte de poussée du faite que le contour est de bordures coniques et que à la sortie, le gaz d'éjection n'est pas d'une direction axiale, dans ce cas, le facteur de perte de poussée est défini par la relation suivante:

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta)^2}{(\alpha + \beta) \sin \beta + \cos \beta - \cos \alpha}$$

Avec :

α et β sont respectivement les angles formés par l'axe de la tuyère et la paroi extérieure, et l'axe de la tuyère et la paroi intérieure.

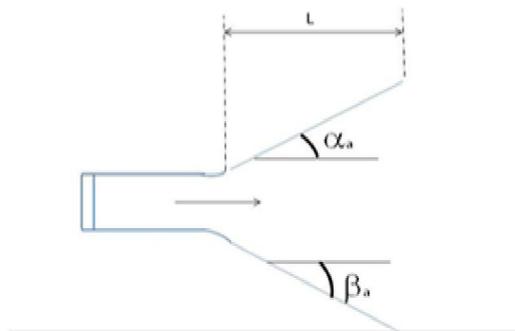


Figure I.7 : Tuyère Annulaire

1.3.2 Tuyère adaptée en altitude

Des progrès plus significatifs dans les performances d'une tuyère peuvent être réalisés à travers l'adaptation de la pression de sortie tuyère à la pression ambiante pendant la montée du lanceur dans atmosphère.

1.3.2.a Les Tuyères Auto Ajustables

Contrairement aux configurations précédemment présentées où le processus de détente de gaz est principalement influencé par le contour de la paroi à la section divergente de la tuyère, le processus de détente de ces gaz dans ce cas est directement ou indirectement régulé par la pression ambiante. L'écoulement des gaz dans ce cas s'ajuste donc de lui-même pour être conforme aux conditions extérieures.

Ces tuyères sont classées en deux catégories :

- ❖ Tuyère type à bouchon (Plug type)
- ❖ Tuyère type détente-déviation (expansion-déflexion type)

➤ *La tuyère type 'bouchon' (Plug type) :*

Le col de ce type de tuyère possède la forme d'un anneau localisé au diamètre extérieur. L'écoulement est contrôlé par des ondes de détente provoquées par la déviation du bouchon dont la surface constitue le principal paramètre qui l'influence. Les gaz d'échappement subissent une détente de la pression de la chambre de combustion P_t jusqu'à la pression ambiante P_a (Figure I.8). La poussée de ce type de tuyères est identique à celle de la tuyère convergente-Divergente.

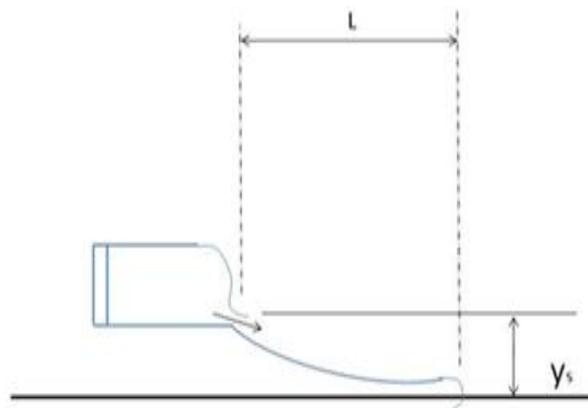


Figure I.8 : Tuyère Type Bouchon

La tuyère type ‘détente-déviat

Les travaux expérimentaux sur de telles tuyères [6]et [17], ont montré qu’une utilisation d’angles de déviation d’une valeur aussi importante que 40° pour des rapports de détente bas n’entraîne que des pertes minimales de poussée (une perte de 1% a été enregistrée pour un angle de 30°).

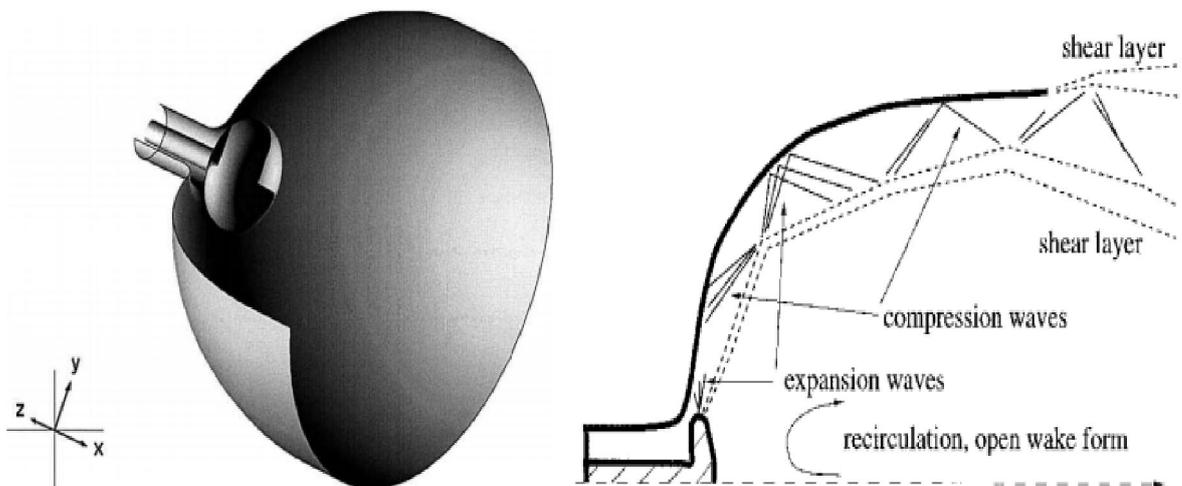


Figure I.9 : Tuyère Type Détente Déviation

I.3.2.b Les Tuyères à Double Galbes

Comme son nom l'indique, c'est une tuyère formée par une jonction de deux tuyères à simple galbe au niveau d'un point dit d'inflexion.

Ce type de tuyère est une nouvelle génération qui a récemment reçu l'attention des motoristes. Elle présente des performances très élevées du moment qu'elle s'adapte pour deux plages de fonctionnement, a des basses altitudes et a de très haute altitudes.

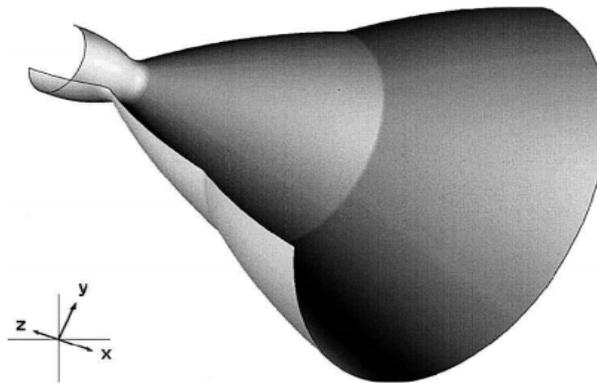


Figure I.10 : Tuyere A Double Galbe

I.3.2.c Tuyère à duel mode (duel mode nozzle)

A basse altitudes les deux chambres de poussées fonctionnent en partageant la même section de sortie, ce qui donne un rapport de section correspondant à une détente modéré.

A un certain point de la mission, l'une des deux chambres s'éteint, permettant à l'autre chambre d'utiliser la totalité de la section de sortie et de créer un grand rapport de section (une grande détente) pour le reste de la mission.

En principe les deux modes d'opérations sont comparables à ceux d'une tuyère à double col [18].

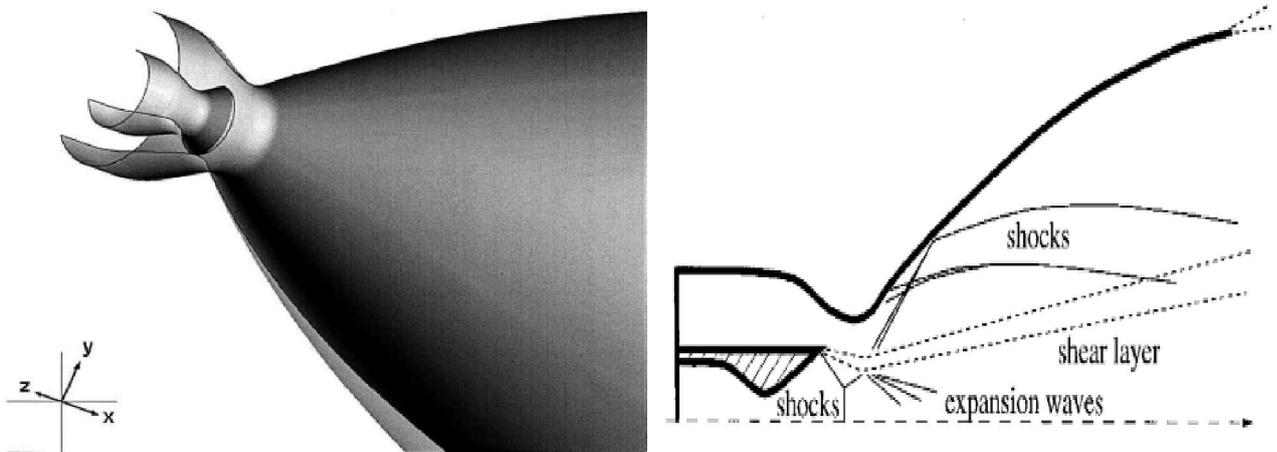


Figure I.11 : Tuyère à dual mode

I.4 DEFINITION ET DIVERS TYPES DES SOUFFLERIES SUPERSONIQUES

I.4.1 Définition d'une soufflerie

Une soufflerie (en anglais Wind Tunnel) est une installation d'essais utilisée en aérodynamique pour étudier les effets d'un écoulement d'air sur un corps, généralement un modèle de dimension réduite par rapport au réel. On peut effectuer dans une soufflerie des mesures d'efforts et des visualisations d'écoulement le plus souvent impossibles à faire dans les conditions réelles de déplacement.

Il existe plusieurs types de souffleries, mais d'une façon générale une soufflerie se compose de trois parties principales :

- Le collecteur ou le convergent.
- La chambre d'expérience.
- Le diffuseur ou divergent.

Le diffuseur ou divergent que l'air traverse à sa sortie de la chambre d'expérience, en direction de ventilateur qui l'aspire et le rejette ensuite à l'extérieur. Le diffuseur à la forme d'un tronc de cône dont la section va en augmentant, ainsi la vitesse du courant d'air se réduit progressivement jusqu'à la pale de ventilateur mû par un moteur électrique.

Parmi les rôles d'une soufflerie, est de faire la simulation de écoulements réels mais sur des prototypes à échelles réduit. Pour arriver à ça, il faut modéliser l'écoulement à la sortie de la tuyère qui doit être uniforme et parallèle comme l'air libre de l'atmosphère [19].

I.4.2 Souffleries supersoniques

Une soufflerie supersonique est une installation destinée à générer un écoulement d'air à une vitesse supérieure à celle du son. C'est par la détente d'air à travers une tuyère que l'écoulement atteint une vitesse supersonique [46].



Figure I.12 : Soufflerie supersonique

Une telle installation doit donc posséder un équipement permettant de générer une différence de pression entre les deux extrémités de la tuyère. Généralement, les tests expérimentaux tentent de recréer des conditions de vol d'un appareil ; l'uniformité du profil de vitesse ainsi que celui du nombre de Mach en sortie de tuyère est alors un facteur clef.

Une installation supersonique peut se présenter sous une variété de configurations différentes. Le choix d'une configuration dépend des besoins ainsi que des moyens dont

dispose l'équipe de conception. Chaque type de soufflerie possède des avantages ainsi que des inconvénients.

I.4.2.a Soufflerie à cycle fermé

Comme son nom l'indique, cette installation est un circuit fermé. L'air y circule en continue à l'aide d'un ventilateur ou d'un compresseur. Une première convergent-divergent porte l'écoulement en régime supersonique. Un second convergent-divergent en aval de la section d'essai ramène l'écoulement en subsonique.

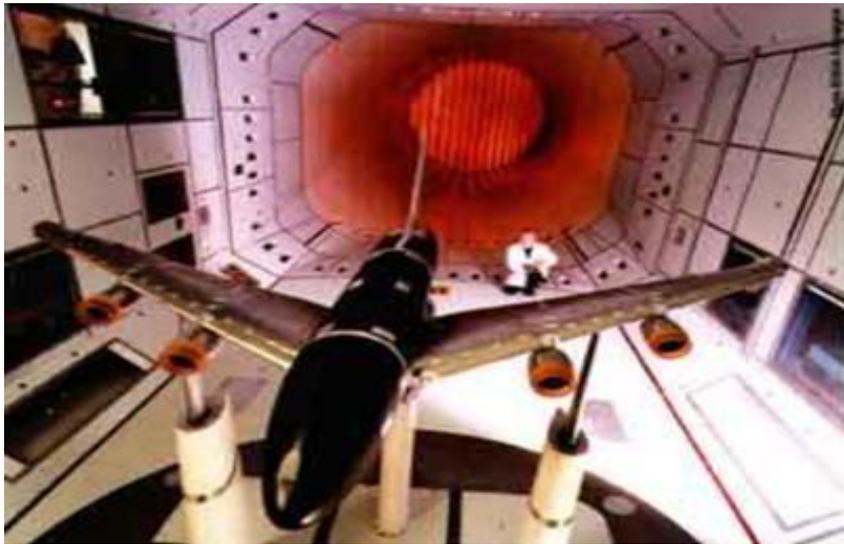


Figure I.13 : Soufflerie supersonique à cycle fermé

L'avantage premier de ce type de soufflerie est qu'il permet des essais de longue durée, ainsi que le maintien de conditions de pression relativement stables tout au long du test. Cependant, il n'est pas aisé d'adapter ce genre d'installation à de Hautes températures. De plus, le démarrage d'un écoulement comporte quelques défis quant au contrôle des ondes de choc de démarrage [20].

Afin d'éliminer les problèmes liés à la condensation de l'humidité dans la tuyère, un système d'assèchement de l'air est requis ou souhaitable. À noter que cette affirmation s'applique à tous les autres types d'installation.

I.4.2.b Souffleries à rafales

Une soufflerie à rafales comme celle présenté à la Figure (I.14) possède une configuration linéaire ; un point de départ et une arrivée. La différence de pression à la tuyère est fournie soit par un réservoir d'air comprimé en amont, ou un réservoir sous vide en aval.

Pour obtenir certaines conditions d'essai, il est parfois nécessaire d'utiliser une combinaison de réservoirs aux deux extrémités.

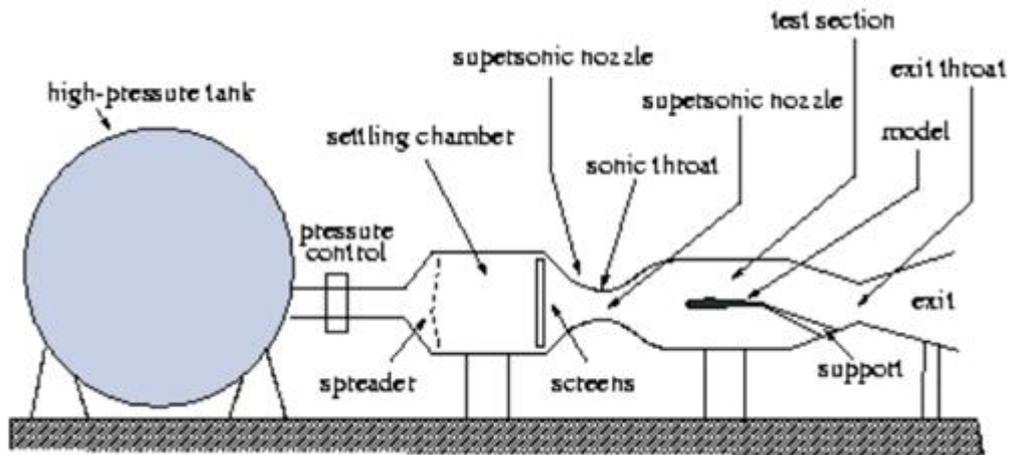


Figure I.14 : Schéma classique d'une soufflerie à rafales à air comprimé [21].

La durée d'un essai est limitée par la quantité d'air comprimé, ou le volume de vide se trouvant dans les réservoirs. En d'autres termes, plus le réservoir d'air comprimé n'est gros et/ou la pression d'air élevée, plus la durée sera longue. Le prix d'un réservoir augmentant avec sa grosseur, le coût de l'installation est donc proportionnel au temps d'essai désiré. Les installations pouvant fonctionner avec seulement un réservoir d'air comprimé permettent généralement des temps d'essai plus long que celles utilisant des réservoirs sous vide. Une autre variante de souffleries en rafales existe, les souffleries à impulsion.

I.4.2.c Souffleries à impulsion

Ce type de soufflerie peut utiliser divers principes tels les réflexions d'ondes de choc dans un tube ou de système de piston. Sans entrer dans les détails, ce qui distingue ces souffleries est qu'avec une tuyère adéquate, elles fournissent un écoulement hypersonique exempt de produits de combustion et possèdent une très haute température. En contrepartie, la durée de l'écoulement est extrêmement courte, moins d'une seconde d'essai. En ce qui concerne les souffleries en rafales autres qu'à impulsion [46].

I.5 ECOULEMENT DANS UNE TUYERE

L'écoulement de systèmes réels des fluides compressibles est un phénomène complexe, mais il peut être interprété comme une combinaison des plusieurs types simples d'écoulement.

Les écoulements compressibles sont importants dans l'aérodynamique et les turbomachines parmi d'autres applications. Dans l'écoulement à grande vitesse, les nombres de Reynolds sont extrêmement hauts et les effets de la turbulence sont restreints pour amincir les couches limite. Il y a beaucoup de méthodes pour résoudre les équations d'écoulement compressible qui ont été développées. Parmi ceux-ci les méthodes spéciales sont pour les équations Euler tel que la méthode des caractéristiques ainsi que de nombreuses méthodes qui peuvent être capable d'extension aux écoulements visqueux. La plupart de ces méthodes sont spécifiquement Conçues pour les écoulements incompressibles sont devenues très inefficace quant à leur application aux écoulements compressibles. Plusieurs variations sur la raison pour ceci peuvent être données. On sait que, dans les écoulements compressibles, l'équation de la continuité contient une dérivée du temps qui s'annule dans la limite incompressible [22].

I.5.1 Notion sur la mécanique des fluides des écoulements compressibles

Si l'on fait référence à des critères physiques on peut distinguer des écoulements compressibles, et écoulement incompressibles.

I.5.2 Définition des écoulements compressibles

L'écoulement compressible est l'étude de l'écoulement du fluide avec une vitesse comparable à la vitesse locale sonique. C'est le cas quand la vitesse de fluide est égale à 30% ou plus de la vitesse locale sonique $M = \frac{V}{a} > 0.3$. Dans ces cas, la densité n'est plus une constante.

Deux conséquences importantes de l'écoulement compressible sont :

- ① l'étranglement où l'écoulement est limité par la condition sonique.
- ② l'onde de choc qui introduit des discontinuités dans les propriétés du fluide qui sont très irréversibles.

Étant donné que la variation de la densité ne peut pas être négligée, suivant l'équation d'état, la variation de T et P peut être considérable. Donc, il y aura quatre variables indépendantes, notamment : pression, température, densité et vitesse de l'écoulement. Deux nouvelles variables, température et densité, sont introduites et deux nouvelles équations doivent être utilisées pour une solution complète. Ce sont l'équation d'énergie et l'équation d'état. Dans ce qui suit, nous allons faire l'approximation d'un gaz parfait.

I.5.3 Effets de compressibilité

Dans les écoulements fortement compressibles (en particulier ceux à très grande vitesse), il est important de prendre en compte localement les effets de compressibilité. Ces derniers ne sont importants qu'à partir d'une valeur seuil du nombre de Mach turbulent [47] :

$$M_t = \frac{\sqrt{2k}}{a} \geq 0.25$$

k : Énergie cinétique de la turbulence.

a : Vitesse de son

En général, la compressibilité prend toute son importance dans les couches de mélange et dans les jets libres. Cependant, a émis l'hypothèse selon laquelle les effets de fluctuations de masse volumique, dans une couche limite restent négligeables en comparaison à ceux de la masse Volumique moyenne, à condition que le nombre de Mach reste inférieur à 5, ($M < 5$) [22].

I.5.4 Classification des écoulements Compressibles

Les écoulements compressibles peuvent être classés de plusieurs façons, dont une, est basé sur le nombre de Mach M. Une façon commune est de classer les écoulements comme suit :

- A. Écoulement incompressible** : $M < 0.3$ partout dans l'écoulement. les variations de la densité et de la pression qui peuvent être négligés. Le noyau du gaz est compressible mais la densité peut être regardée comme constant.

- B. Écoulement subsonique :** Le nombre M dépasse quelque part la valeur de M égale à 0.3 dans l'écoulement, mais n'en dépasse pas 1, n'importe où, Les ondes de choc ne paraissent pas dans l'écoulement.
- C. Écoulement Transsonique :** le nombre Mach est situé dans la gamme $0.8 < M < 1.2$ Les ondes de choc apparaissent et mènent à une augmentation rapide de la résistance.
- D. Écoulement supersonique :** Le nombre de mach M repose dans la gamme $1.2 < M < 3$. Les ondes de choc sont généralement présentes.
- E. Écoulement Hypersonique :** $M > 5$ Les très hautes vitesses d'écoulement causent une sévère élévation de la température dans couches limites, il en résulter une dissociation des molécules, ainsi que d'autres effets chimiques.

I.6 ÉCOULEMENT DANS UNE TUYERE CONVERGENTE - DIVERGENTE

Considérant l'écoulement d'un gaz parfait dans une tuyère convergente divergente comme indiqué sur la (Figure I.15). Dans ce cas, la pression de sortie peut être inférieure que a la valeur critique dans la partie du divergent.

Quand $P_b = P_0$, il n'y a pas d'écoulement dans la tuyère ; quand la pression à l'extérieur (back pressure) diminue en dessous de P_0 , le gaz s'écoule à travers la tuyère, sa pression statique diminue dans le convergent atteignant un minimum au col puis augmentant dans la partie du divergent En même temps. La vitesse augmente jusqu'à sa valeur maximale au col de la tuyère, et après la vitesse diminue dans la portion du divergent dans ce cas l'écoulement est similaire à celui dans un venturi conventionnel, où la partie convergente de la conduite agit comme une tuyère alors que la partie divergente agit comme un diffuseur.

Quand le fluide s'accélère dans la partie du convergent de la tuyère, la vitesse augmente à un taux plus grand que celui de la décroissance de la densité, alors que le débit massique de la densité G décroît. Comme la pression à l'extérieur est encore réduite, le débit massique augmente ; toute fois en dessous d'une certaine pression à

l'extérieur le débit massique ne change plus, Bien que la pression de à l'extérieur soit réduite. Ce cas limite représente un écoulement choqué correspondant à un écoulement sonique au col ($M = 1$) et une valeur maximale de G . Si la pression à l'extérieur est assez basse, l'écoulement continu à s'accélérer, après avoir atteint une vitesse sonique au col, et une vitesse supersonique prévaut dans la partie du divergent de la tuyère. Comme le fluide s'accélère avec un écoulement supersonique, la densité diminue avec un taux plus grand que celui de l'augmentation de la vitesse, cela veut dire que le débit massique de densité G diminue.

La tuyère se comporte comme un venturi subsonique si la pression à l'extérieur est égale à P_3 ou plus grande, d'un autre côté, ce sera une tuyère convergente divergente supersonique si la pression à l'extérieur et la même que la pression de design P_d . Que se passera-t-il si la pression à l'extérieur est comprise entre P_3 et P_d ou inférieure à P_d .

Mais pour le moment, on peut dire que l'écoulement sans perte ne peut pas être atteint si la pression à l'extérieur est comprise entre P_3 et P_d ou si elle est inférieure à P_d .

Le taux du débit massique à travers la tuyère est limite par la surface de la section du col. Puisque la surface de la section au Col est minimale, le débit massique par unité de surface à une valeur maximale au col. (*Figure II.15*) montre la variation du débit massique \dot{m} , en fonction du rapport de pression P/P_0 . Et elle montre aussi la variation du rapport de pression de sortie P_e/P_0 , en fonction du rapport de pression à l'extérieur P_b/P_0 .

Quand un fluide s'écoule à travers un passage de section variable le débit maximal par unité de surface à lieu à la section ou le nombre de Mach est égal à l'unité ($M = 1$). Cette section se trouve souvent à la sortie du convergent de la tuyère, ou au col de la tuyère convergente divergente. Pour chaque conduite il y a un minimum rapport de section, A^*/A correspondant à un écoulement choqué. Une réduction de section en dessous de ce rapport de section résulte une diminution du débit massique mais un nombre Mach égale à l'unité ($M = 1$) reste maintenu à la section minimale. Le débit maximal correspondant aux conditions choquées [22].

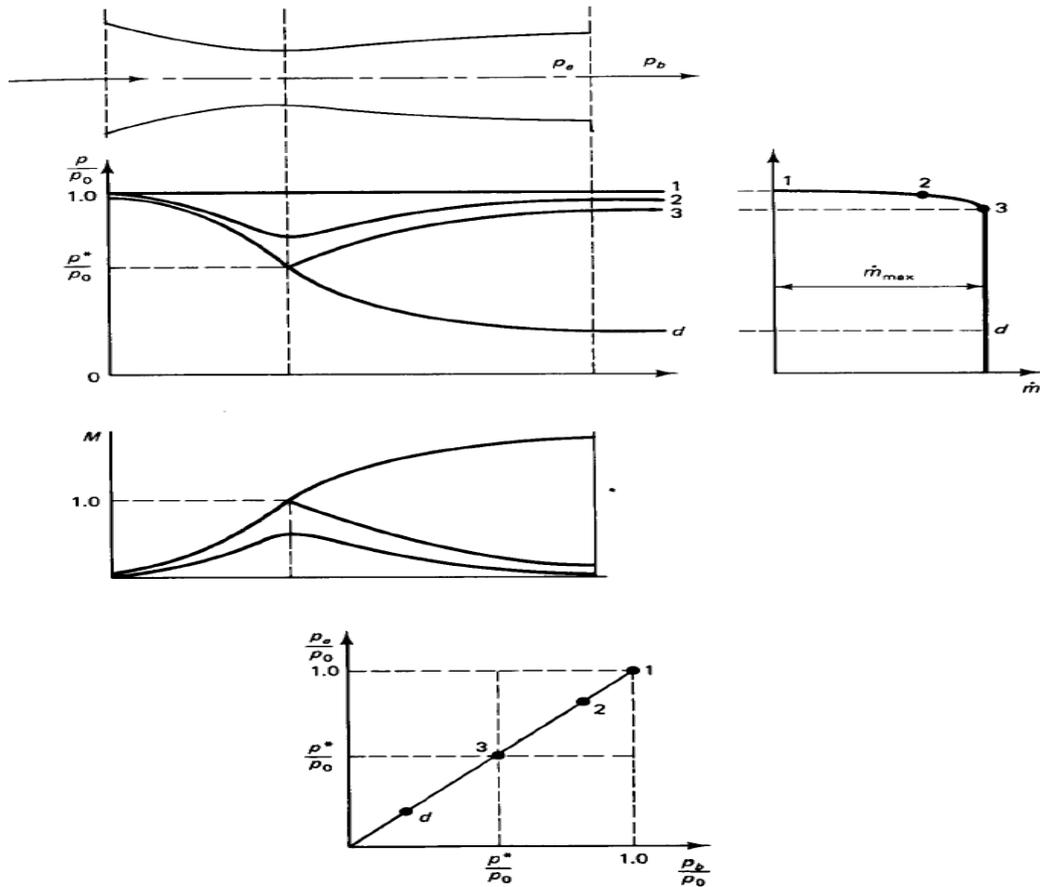


Figure I.15 : Écoulement gaz parfait dans une tuyère convergente-divergente

I.7 ONDE DE CHOC DANS UNE TUYÈRE CONVERGENTE - DIVERGENTE

Un écoulement à travers une tuyère est isentropique seulement si la pression à l'extérieur (back pressure) renferme une certaine relation spéciale par rapport à la pression Totale, autrement, l'écoulement génère des pertes irréversibles. Un écoulement isentropique a lieu dans une tuyère convergente-divergente si la pression de design au plan de sortie basée sur un écoulement isentropique est égal à la pression d'extérieur. Considérons un écoulement adimensionnel à travers une tuyère convergente-divergente comme le montre-la. Pour une pression extérieure entre un intervalle P_2 et P_4 , une onde de choc normale stationnaire apparaît dans la portion du divergent de la tuyère. L'écoulement a lieu isentropiquement dans la tuyère seulement jusqu'à ce point où, une soudaine transition d'une vitesse supersonique à une vitesse subsonique a lieu. Derrière l'onde de choc, l'écoulement a lieu, une fois encore, isentropiquement à une vitesse subsonique.

L'écoulement se ralentit encore, jusqu'à ce que la pression à l'extérieur devienne égale à la pression du plan de sortie.

La localisation de l'onde de choc dans la tuyère dépend de la pression à l'extérieur ; Plus la différence de pression entre la pression de design et la pression à l'extérieur est grande, plus l'avant de l'onde de choc est localisée.

Comme la montre sur la figure I.16, si la pression à l'extérieur est égale à P_4 l'onde de choc apparaît juste au plan de sortie de la tuyère. Si la pression à l'extérieur est inférieure que P_4 , l'écoulement dans la tuyère reste inchangé et l'ajustement à la pression à l'extérieur a lieu à l'extérieur de la tuyère. Avec la pression à l'extérieur entre P_4 et P_6 à la sortie, l'écoulement est supersonique et la tuyère est dite **sur- détendue** (over expanded **fig.I.2**). Dans ces cas, une succession d'ondes de Choc obliques bidimensionnelles et une expansion apparaît en dehors de la tuyère. Les ondes de chocs obliques sont plus faibles que celles normales, et l'angle entre le choc et la direction de l'écoulement et relié à la force du choc, cet angle et la force du choc diminuent quand la pression de retour diminue de P_4 à la pression de design P_6 .

Quand la pression à l'extérieur est égale à la pression de design, le choc disparaît et l'écoulement est isentropique. Quand la pression à l'extérieur est inférieure à la pression de design P_6 , la tuyère est en **sous-détente** (Under expanded **fig.I.1**) et une succession d'ondes bidimensionnelles de détente et de compression ont lieu à l'extérieur de la tuyère. Autrement, quand la pression à l'extérieur est plus grande que P_2 , qui est la pression maximale de sortie correspondent aux conditions sonique au col, l'écoulement à travers la tuyère est entièrement subsonique et le débit massique devient dépendant de la pression à l'extérieur comme le montre la figure le débit massique augmente quand la pression à l'extérieur diminue, mais ceci a lieu seulement jusqu' à ce que les conditions soient atteintes au col de la tuyère. Le débit massique est constant pour toutes pressions à l'extérieur inférieure à P_2 . Montre aussi comment la pression de sortie varie avec la pression à l'extérieur. Quand l'écoulement est subsonique à la sortie, la pression de sortie est égale à la pression à l'extérieur. Quand la tuyère est en sur-détente (over expanded), la pression de sortie est inférieure à la pression à l'extérieur ; quand la tuyère est en sous-détente (Under expanded), la pression de sortie est plus grande que la pression à l'extérieur. Dans une tuyère parfaitement en détente qu'elle soit un convergent ou une

tuyère convergente divergente, sans choc, la pression de sortie est exactement égale à la pression à l'extérieur [22].

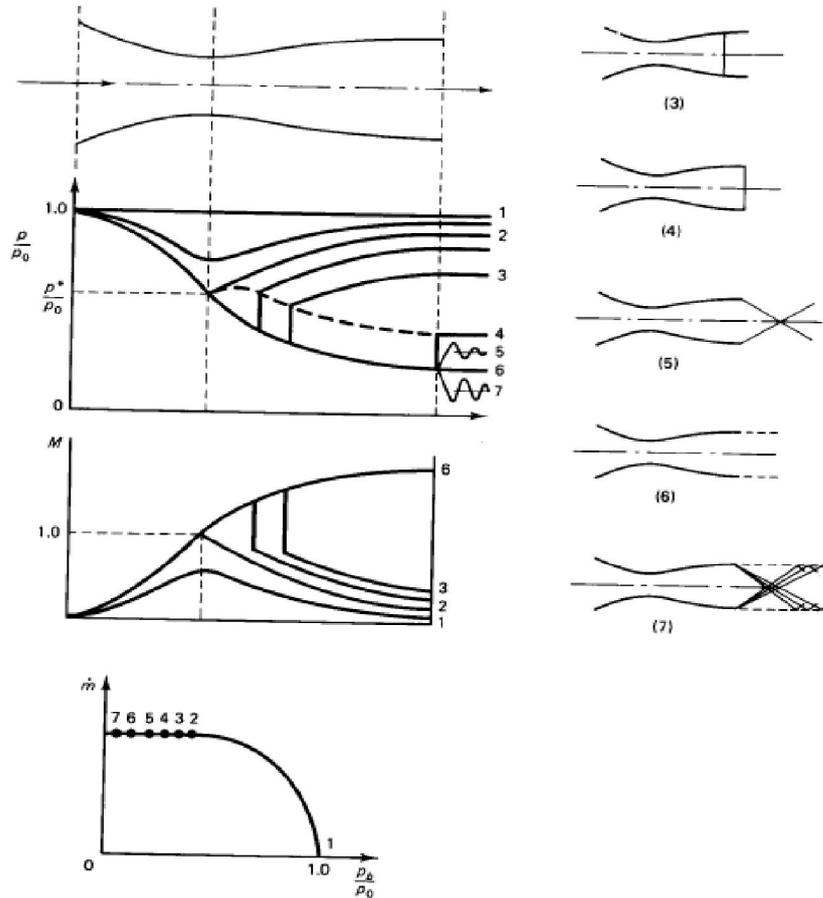


Figure I.16 : Onde de choc dans une tuyère

1.8 LES PARAMETRES DES PERFORMANCES

1.8.1 La Force De Poussée

C'est la force délivrée par la tuyère elle est en fonction de la vitesse d'éjection des gaz et du débit qui la traverse. Elle est décrite par la relation (I.1)

$$F = mV_e + (P_e - P_0) * A \quad (I. 1)$$

$$F = \int V r^2 \rho r dA + \int (P_e r - P_0) dA$$

$$F = \int [V^2 \rho r + (P_e r - P_0)] dA$$

Avec :

V_e : vitesse d'éjection

P_e : Pression de sortie

P_0 : Pression ambiante

1.8.2 Le Coefficient De Poussée

C'est une quantité sans dimension représentant le rapport de la force de poussée sur le produit de la pression génératrice et la section de sortie de la tuyère, elle caractérise la performance de la partie divergente ou encore la qualité de détente dans la section divergente :

$$C_F = \frac{F}{P_t A_e}$$

Avec :

F : Force de poussée

P_t : Pression total

A_e : Section de sortie de la tuyère

Dans ce chapitre on a fait l'étude des paramètres thermodynamique d'un écoulement par le modèle haute température (HT) pour déterminer la limite d'application du modèle de gaz parfait [5],[6],[17].

II.1 Relations thermodynamique

Le développement des relations thermodynamiques est basé sur :

- ✚ équations de conservations sous forme différentielle
- ✚ l'équation d'état d'un gaz parfait [5], [6], [17]

II.1.1 Equation adiabatique

D'après le premier principe de la thermodynamique à cycle fermé [44]

$$W_p + Q = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_p \quad (II.1)$$

Pour un cycle réversible $\Delta E = 0$

On néglige la variation l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$Q + W_p = \Delta U \quad (II.2)$$

Avec
$$\left\{ \begin{array}{l} W_p = - \int_1^2 P dV \\ dU = C_v dT + (L - P)dV \end{array} \right\}$$

Transformation adiabatique $\delta Q = 0$

$$dQ = C_v dT + LdV = C_v dT + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV = 0 \quad (II.3)$$

Donc

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial(L - P)}{\partial T} \right)_V$$

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \quad (II.3.A)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_v}{T} dT + \frac{L}{T} dV \\ dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{C_v}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \\ \frac{L}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \end{array} \right.$$

Donc

$$\left[\frac{\partial \left(\frac{C_v}{T} \right)}{\partial V} \right]_T = \left[\frac{\partial \left(\frac{L}{T} \right)}{\partial T} \right]_V \Rightarrow \frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \frac{\left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_V T - L}{T^2} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{L}{T^2} \right)$$

En simplifiant par T on obtient :

$$\left(\frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_V - \left(\frac{L}{T} \right) \quad (II.3.B)$$

En comparant (II.3.A) et (II.3.B) on obtient :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{L}{T}$$

Donc

$$L = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{rT}{V} \quad (II.4)$$

$$V = \frac{1}{\rho} \quad (II.5)$$

$$dV = - \frac{\delta \rho}{\rho^2} \quad (II.6)$$

Pour régime supersonique le rapport de chaleur spécifique est donné par la relation suivant :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad \Leftrightarrow \quad C_v = \frac{C_p}{\gamma} \quad (II.7)$$

En remplacer la relation (II.4 et (II.5) et (II.7) dans la relation (II.3)

On obtient la relation suivant :

$$\frac{C_p}{\gamma} dT + r T \frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{C_p}{\gamma} dT - \frac{rT}{\rho} d\rho = 0$$

Et d'après la **Relation de MAYER**. On a

$$C_p - C_v = r$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r}$$

Pour un gaz parfait la relation devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \quad (II.8)$$

Après l'intégration de cette relation, on trouve équation adiabatique de gaz parfait à haut température.

II.1.2 vitesse du son en fonction de la température

D'après l'équation de conservation de la masse [5] est défini par :

$$\rho V A = cte$$

Donc
$$d(\rho V A) = 0$$

Peut aussi s'écrire :
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} + \frac{dA}{A} = 0$$

Puisque l'écoulement est supposé isentropique, on peut définir la vitesse du son par :

$$\alpha^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{s=cte} \quad (II.9)$$

Et d'après l'équation d'état des gaz parfait $P = \rho r T$ donc

L'équation différentielle de l'état de gaz parfait est donné par :

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{dT}{d\rho} + r T \quad (II.10)$$

On remplace la relation (II.8) par son égalité dans (II.10), on aura :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T[\gamma(T) - 1]} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{d\rho} = \frac{T[\gamma(T) - 1]}{\rho}$$

$$\frac{dP}{d\rho} = \rho r \frac{T[\gamma(T) - 1]}{\rho} + r T$$

$$a^2(T) = \frac{dP}{d\rho} = r T [\gamma(T)] - rT + rT$$

$$a^2(T) = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s = r T [\gamma(T)]$$

$$a^2(T) = \gamma(T) r T \quad (II. 11)$$

La relation de la vitesse du son, qui reste toujours valable pour le modèle à Haute Température sauf, qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{rT[\gamma(T)]} \\ da = \frac{r[dT \cdot \gamma(T) + T \cdot d\gamma(T)]}{2\sqrt{rT[\gamma(T)]}} \end{array} \right\}$$

Donc

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \left[\frac{d[\gamma(T)]}{\gamma(T)} + \frac{dT}{T} \right] \quad (II. 12)$$

Cette relation présente la différentielle de la vitesse du son en termes de température pour le gaz à Haute Température.

II.1.3 la vitesse en fonction de la température

Si de plus l'écoulement est permanent, on a sur une trajectoire (ou une ligne de courant puisque ces derniers sont confondues pour un écoulement permanent) :

L'équation de conservation d'énergie est donnée sous la forme [5] [49]

$$h + \frac{V^2}{2} = cte \quad \text{ou} \quad C_p T + \frac{V^2}{2} = cte \quad (II. 13)$$

On dérive l'équation (II.13) en obtient :

$$C_p dT + V dV = 0 \quad (II. 14)$$

D'où

$$V dV = - C_p dT \quad (II. 15)$$

On intègre cette relation on obtient :

$$\int_{v_0}^v V dV = - \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (II.16)$$

A la sortie de chambre de combustion on $v_0 \approx 0$ et T_0 donnée

Donc la relation devient :

$$V^2 = - 2 \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (II.17)$$

On pose

$$H(T) = - \int_{T_0}^T C_p(T) dV \quad (II.18)$$

Donc

$$V^2 = 2 H(T) \quad (II.19)$$

On divise la relation (II.14) par V^2 et remplaçons (II.19) dans le résultat obtenu, donc la forme différentielle de la vitesse de l'écoulement en fonction de la température Est donnée par :

$$\frac{dV}{V} = - \frac{C_p(T)}{2 H(T)} dT \quad (II.20)$$

II.1.4 Nombre de Mach en fonction de la température

On a $V = M a$ (II.21. a)

Donc le nombre de mach définie par [5]

$$M = \frac{V}{a} \quad (II.21. b)$$

On remplacer V par sa valeur en trouve la relation suivant :

$$V = \sqrt{2 H(T)}$$

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (II.22)$$

II.1.5 La masse volumique en fonction de la température

Le théorème de Bernoulli s'écrit par la relation suivante :

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = cte \quad (II.23)$$

La forme différentielle de l'équation de Bernoulli est défini par [5] :

$$\frac{dP}{\rho} + V dV = 0 \quad (II.24)$$

On remplace la relation (II.9) dans la relation (II.24), on aura :

$$a^2 \frac{d\rho}{\rho} + V dV = 0 \quad (II.25)$$

On a $a = \frac{V}{M}$ donc on remplace par sa valeur, on trouve :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (II.26)$$

En remplaçant les relations (II.19) (II.20), (II.21) et (II.22) dans la relation (II.26), on obtient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{C_p(T)}{\gamma(T) r \cdot T} dT \quad (II.27)$$

On pose

$$F_\rho(T) = \frac{C_p(T)}{\gamma(T) r \cdot T} = \frac{C_p(T)}{a^2(T)} \quad (II.28)$$

Donc l'équation (II.27) devient :

$$\frac{d\rho}{\rho} = F_\rho(T) dT \quad (II.29)$$

En intégrer l'équation (II.29) on trouve le rapport de masse volumique entre l'état générateur (ρ_0, T_0) et l'état concerné (ρ, T) est défini par :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = EXP \left(- \int_{T_0}^T F_\rho(T) dT \right) \quad (II.30)$$

II.1.6 La pression en fonction de la température

D'après l'équation d'état des gaz parfait

$$P = \rho r T \quad (II.31)$$

On a donc la différentielle de l'équation d'état de gaz parfait est donnée par :

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad (II.32)$$

Et

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \quad (II.33)$$

On remplace la relation (II.29) dans la différentielle de l'équation d'état de gaz parfait (II.32) on obtient La différentielle de la pression en fonction de la température pour le gaz à Haute Température.

$$\frac{dP}{P} = \left(F_\rho(T) + \frac{1}{T} \right) dT \quad (II.34)$$

II.1.7 la section fonction de la température

D'après l'équation de conservation de la masse [10], [12]

$$\rho V A = cte \quad (II.35)$$

La différentielle de cette équation est donnée la relation suivant :

$$\frac{dA}{A} = - \left(\frac{dV}{V} + \frac{d\rho}{\rho} \right) \quad (II.36)$$

En remplaçant $\frac{dV}{V}$ et $\frac{d\rho}{\rho}$ par leurs expressions (II.20) et (II.27) respectivement,

$$\frac{dA}{A} = - \left(- \frac{C_p(T)}{2 H(T)} dT + \frac{C_p(T)}{\gamma(T) r.T} dT \right) \quad (II.37)$$

On obtient la relation suivante :

$$\frac{dA}{A} = F_A(T) dT \quad (II.38)$$

Avec

$$F_A(T) = C_p(T) \left[\frac{1}{2H(T)} - \frac{1}{a^2(T)} \right] \quad (II.39)$$

L'intégration de l'équation (II.38), entre l'état du col (A^* , T^*) et un état quelconque (A , T) du divergent, est donnée le rapport des sections supersonique suivant :

$$\frac{A}{A^*} = \text{Exp} \left[\int_T^{T^*} F_A(T) dT \right] \quad (II.40)$$

Pour calculer les paramètres ρ et A , nous avons besoin de calculer l'intégrale d'une certaine fonction où la procédure analytique est impossible, à cause de la complexité des fonctions à intégrer. Donc on va aller vers le calcul numérique. Tous les paramètres M , ρ et A sont fonctions de la température.

II.1.8 Débit massique critique

Le débit massique traversant une section S est donné par [5], [24] :

$$m = \int_A \rho V \cos \theta dA \quad (II.41)$$

θ : C'est l'angle qu'entre le vecteur vitesse et la normale de la section A .

Si nous divisons la relation (II.41) par la quantité $A^* \rho_0 a_0$, pour rendre le calcul non-dimensionnel, nous aurons :

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \int_A \frac{\rho}{\rho_0} \frac{a}{a_0} M \cos \theta \frac{dA}{A^*} \quad (II.42)$$

Sachant que le débit critique est constant, on peut le calculer au niveau du col de la tuyère. À cette section on a $\rho = \rho^*$, $A = A^*$, $a = a^*$, $M = 1$ et $\theta = 0$ (écoulement horizontal). Donc, la relation (II.42) se réduit à une relation plus simple :

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \frac{\rho^* a^*}{\rho_0 a_0} \quad (II.43)$$

On obtient le rapport des vitesses du son par l'utilisation de la relation (II.11)

Telle que :

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\left[\frac{\gamma(T)}{\gamma(T_0)} \right] \left[\frac{T}{T_0} \right]} \quad (II.44)$$

Cette relation montre qu'il faut tenir compte de la variation du rapport $\gamma(T)$ pour la détermination du rapport des vitesses du son.

II.2 Modèle du gaz parfait

Pour étudier la différence entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait, on rappelle les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait

[5], [6], [17], [24], [10], [12], et [11] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{-1} \\ \frac{P}{P_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} \\ \frac{\rho}{\rho_0} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right]^{\frac{-1}{\gamma-1}} \\ \frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \\ \frac{\dot{m}}{A^* \rho_0 a_0} = \left[\frac{\gamma+1}{2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \end{array} \right. \quad (II.45)$$

Les relations (II.45) donnant les paramètres T, P, ρ, A et le débit sont reliées explicitement avec le nombre de Mach qui est la variable principale pour un gaz parfait. Pour notre modèle, la variable principale est la température à cause de l'équation (II.22), reliant M et T , où la détermination de l'expression analytique de son inverse est impossible.

II.3 Procédure du calcul

Le tableau (II.1) représente la variation de la chaleur spécifique C_p et le rapport γ , pour l'air en fonction de la température [25]. Pour un gaz parfait, les valeurs de γ et C_p sont données à 298.15 K° par [5] et [25].

$$\gamma = 1.402$$

$$C_p = 1001.28932 \text{ J/KgK}^\circ$$

$T(K^\circ)$	$C_p(j/KgK^\circ)$	$\gamma(T)$	$T(K^\circ)$	$C_p(j/KgK^\circ)$	$\gamma(T)$	$T(K^\circ)$	$C_p(j/KgK^\circ)$	$\gamma(T)$
55.538	1001.104	1.402	833.316	1107.192	1.350	2111.094	1256.813	1.296
....	888.872	1119.078	1.345	2222.205	1263.410	1.294
222.205	1001.101	1.402	944.427	1131.314	1.340	2333.316	1270.097	1.292
277.761	1002.885	1.401	999.983	1141.365	1.336	2444.427	1273.476	1.291
305.538	1004.675	1.400	1055.538	1151.658	1.332	2555.538	1276.877	1.290
333.316	1006.473	1.399	1111.094	1162.202	1.328	2666.650	1283.751	1.288
361.094	1008.281	1.398	1166.650	1170.280	1.325	2777.761	1287.224	1.287
388.872	1011.923	1.396	1222.205	1178.509	1.322	2888.872	1290.721	1.286
416.650	1015.603	1.394	1277.761	1186.893	1.319	2999.983	1294.242	1.285
444.427	1019.320	1.392	1333.316	1192.570	1.317	3111.094	1297.789	1.284
499.983	1028.781	1.387	1444.427	1204.142	1.313	3222.205	1301.360	1.283
555.538	1054.563	1.374	1555.538	1216.014	1.309	3333.316	1304.957	1.282
611.094	1054.563	1.370	1666.650	1225.121	1.306	3444.427	1304.957	1.282
666.650	1067.077	1.368	1777.761	1234.409	1.303	3555.538	1308.580	1.281
722.205	1080.005	1.362	1888.872	1243.883	1.300			
777.761	1093.370	1.356	1999.983	1250.305	1.298			

Tableau II.1 : Table de variation de $C_p(T)$ et $\gamma(T)$ en fonction de la température pour l'air

II.3.1 Polynôme d'interpolation de $C_p(T)$

L'interpolation des valeurs de C_p en fonction de la température est réalisée par un polynôme du 9^{ème} degré [26] et [27]. Ce choix est justifié par la petite valeur de l'erreur [28] obtenue entre les valeurs tabulées et les valeurs interpolées [29]. A titre d'information, plusieurs tests d'interpolations [28] ont été effectués afin de choisir la meilleure interpolation. En outre, on a utilisé le schéma de Horner [29] pour la présentation du polynôme $C_p(T)$.

Alors on a :

$$C_p(T) = a_1 + T(a_2 + T(a_3 + T(a_4 + T(a_5 + T(a_6 + T(a_7 + T(a_8 + T(a_9 + T(a_{10})))))))))) \quad (II.46)$$

Les coefficients a_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) sont présentés dans le tableau II.2 suivant :

i	a_i
1	1001.1058
2	4.0661289×10^{-2}
3	$-6.3376997 \times 10^{-4}$
4	2.7474759×10^{-6}
5	$-4.0338459 \times 10^{-9}$
6	$3.0697736 \times 10^{-12}$
7	$-1.3509355 \times 10^{-15}$
8	3.472262×10^{-19}
9	$-4.8467531 \times 10^{-23}$
10	$2.8411878 \times 10^{-27}$

Tableau II.2 : Coefficients du polynôme $C_p(T)$

Un petit problème se pose durant l'interpolation par la formule (II.46). Après une présentation graphique du polynôme de $C_p(T)$ et une comparaison avec les valeurs données par le tableau (II.1), on remarque une variation ondulée à basse température jusqu'à environ 240 K°, au lieu d'avoir une fonction constante dans cette portion conformément aux valeurs de la table. À cet effet, une correction est introduite pour rapprocher les valeurs interpolées des valeurs du tableau (II.1). Alors,

Si $T = \bar{T} = 240K^\circ$ la relation (II.46) devient :

$$\bar{C}_p = C_p(\bar{T}) = 1001.15868 \text{ j}/(Kg K^\circ)$$

Donc, la correction est faite selon deux conditions :

- ✚ Si $T \leq \bar{T}$ on utilise la correction suivante : $C_p(T) = \bar{C}_p$
- ✚ Si $T > \bar{T}$ on utilise la formule (II.46).

Concernant la détermination de la forme analytique de la fonction $C_p(T)$, on peut avoir plusieurs formes de polynômes par plusieurs procédures et méthodes [29] et [30]. Pour le choix de la bonne forme d'interpolation, il faut faire une étude sur les erreurs entre les valeurs du tableau (II.1) et les valeurs données par la substitution dans l'équation analytique du polynôme d'interpolation. L'interpolation choisie donne une erreur meilleure à $\varepsilon = 10^{-3}$

II.3.2 Intégration de la chaleur spécifique $C_p(T)$

Une fois que l'interpolation est faite, on détermine la fonction $H(T)$ de la relation (II.18), par intégration de la fonction $C_p(T)$ dans l'intervalle $[T, T_0]$. Alors, $H(T)$ est une fonction à un paramètre T_0 et elle est définie tant que $T \leq T_0$. Remplaçons la relation (II.46) dans la relation (II.18) et écrivons le résultat obtenu de l'intégration sous la forme du schéma de Horner, on obtient :

$$H(T) = H_0 - [c_1 + T(c_2 + T(c_3 + T(c_4 + T(c_5 + T(c_6 + T(c_7 + T(c_8 + T(c_9 + T(c_{10})))))))))] \quad (II.47)$$

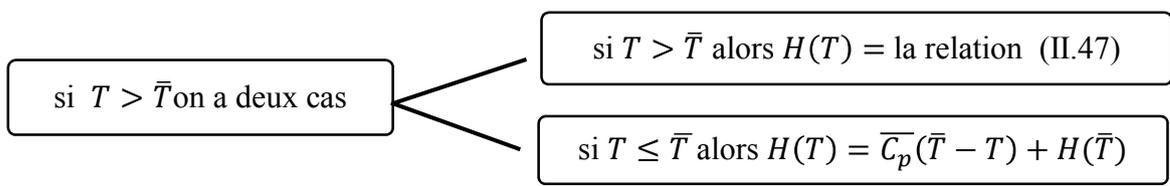
Avec

$$H_0 = T_0(c_1 + T_0(c_2 + T_0(c_3 + T_0(c_4 + T_0(c_5 + T_0(c_6 + T_0(c_7 + T_0(c_8 + T_0(c_9 + T_0(c_{10})))))))))) \quad (II.48)$$

Et $c_i = a_i / i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 10)$

Vu la correction faite sur la fonction $C_p(T)$, la fonction $H(T)$ prend la forme suivante :

si $T_0 < \bar{T}$ donc : $H(T) = \bar{C}_p(T_0 - T)$



II.3.3 Calcul numérique des rapports thermodynamiques

La détermination des rapports des masses volumiques et des sections donnés par les formules (II.30) et (II.40), respectivement, demande l'intégration numérique des fonctions $F_\rho(T)$ et $F_A(T)$ dans les intervalles $[T, T_0]$ et $[T, T^*]$. Notons que la fonction $F_A(T)$ dépend du paramètre T_0 .

Pour avoir une idée sur la variation de chacune des deux fonctions précédentes, avant de prendre une décision sur le choix de la quadrature d'intégration, nous avons tracé leurs courbes de variations. Elles sont illustrées par les figures (II.1) et (II.2) respectivement. Nous pouvons conclure que les quadratures d'intégrations à pas constant demandent une discrétisation très élevée pour avoir une bonne précision vue la variation très rapide aux extrémités gauches de chaque intervalle ($T = T_s$). Pour une bonne présentation à ces extrémités, le traçage des fonctions est choisi pour la température $T_0 = 500 \text{ K}^\circ$ (basse température) et $M_s = 6.00$ (extrême supersonique).

Nous remarquons que chaque fonction présente une dérivée très grande au voisinage de la température T_s . Une condensation des nœuds est alors nécessaire au voisinage de la température T_s pour les deux fonctions [27]. Le but de cette condensation est de calculer la valeur de l'intégrale avec une précision très élevée dans un temps réduit en minimisant le nombre de nœuds de la quadrature.

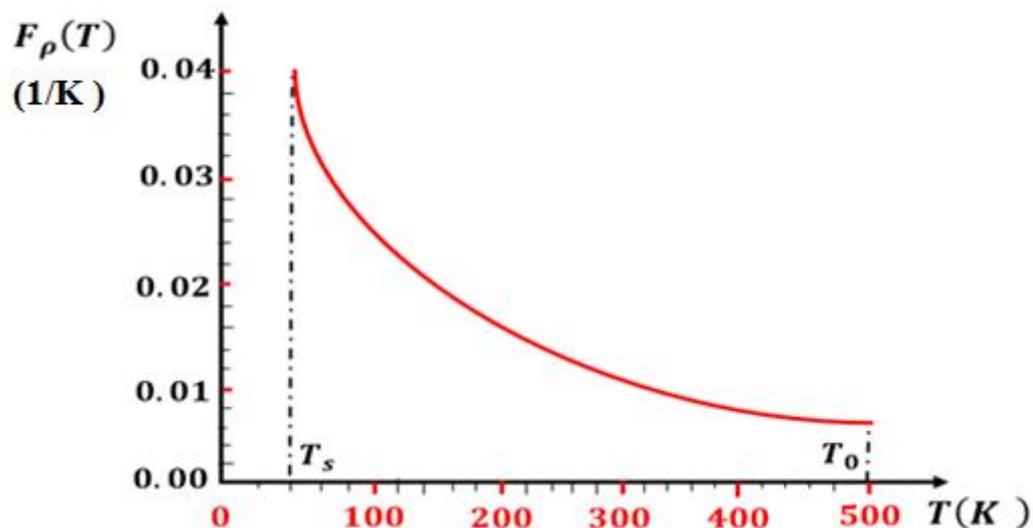


Figure II.1 : Variation de la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$

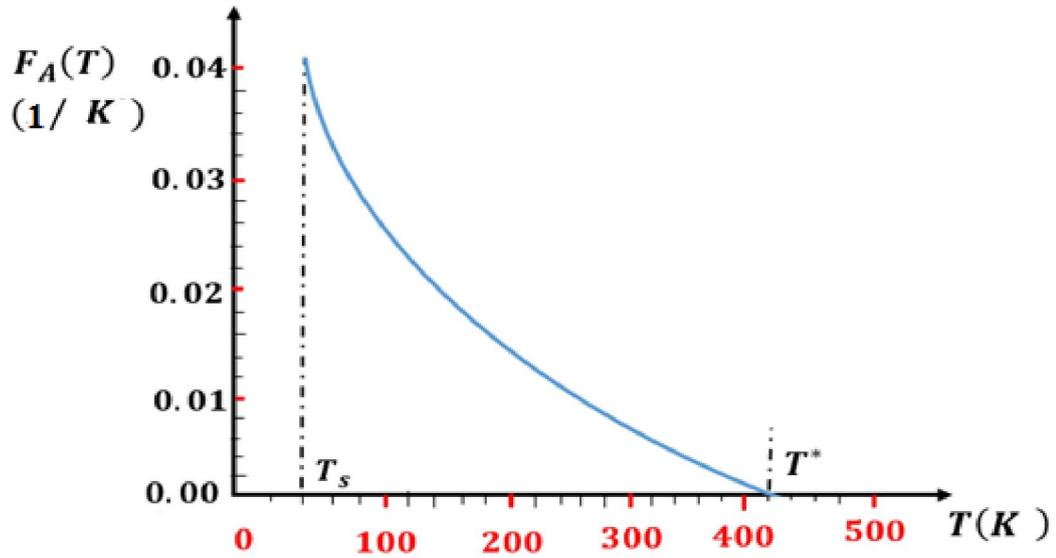


Figure II.2 : Variation de la fonction $F_A(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T^*]$.

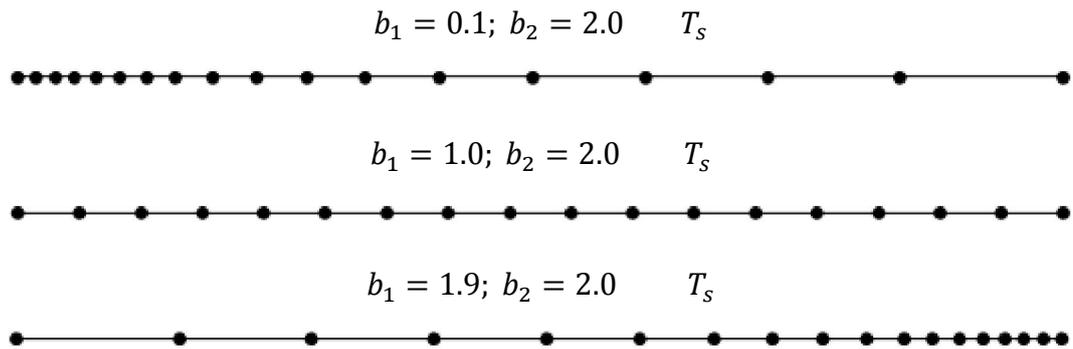


Figure II.3 : Présentation de la condensation des nœuds

La quadrature d'intégration choisie est celle de Simpson [50] et [29], pour le calcul numérique des intégrales (II.30) et (II.40). La fonction de condensation utilisée est celle de Robert [51]. Elle est donnée par :

$$s_i = b_1 Z_i + (1 - b_1) \left[1 - \frac{\tanh[b_2(1 - Z_i)]}{\tanh(b_2)} \right] \quad (II.49)$$

Avec

$$Z_i = \frac{i - 1}{N - 1} \quad 1 \leq i \leq N \quad (II.50)$$

Après la détermination de la fonction de condensations, on peut déterminer la distribution des températures par la relation suivant :

$$T_i = s_i(T_D - T_G) + T_G \quad (II.51)$$

La température T_D égale à T_0 pour la fonction $F_p(T)$, et égale à T^* pour la fonction $F_A(T)$.

La température T_G égale à T^* pour le paramètre critique, et égale à T_S pour le paramètre à une section supersonique.

- ❶ Si on prend une valeur de b_1 proche de zéro ($b_1 = 0.1$) et ($b_2 = 2.0$), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S de l'intervalle.
- ❷ Si on prend des valeurs de b_1 proche de 2 (par exemple $b_1 = 1.9$), on peut condenser les nœuds vers l'extrémité droite.
- ❸ Pour des sous intervalles de même longueurs, on peut prendre $b_1 = 1.0$.

La figure (II.3) présente la distribution des nœuds suivant le choix de la valeur de b_1 . Il faut noter que notre intérêt est de condenser les nœuds vers l'extrémité gauche T_S vu la variation des fonctions $F_p(T)$ et $F_A(T)$.

II.4 Paramètres critiques au col correspondant à T_0

L'état générateur est donné par le nombre de Mach nul ($M = 0$). Alors, les paramètres critiques (T^*, P^*, ρ^* et a^*) correspondant à la température T_0 et au nombre de Mach ($M = 1$) (ce qui est le cas au col de la tuyère), peuvent être déterminés. Si on remplace dans la relation (II.22), les paramètres M et T par les conditions critiques, on obtient :

$$M^{*2} = 2 \frac{2 H(T^*)}{\gamma(T^*) \cdot r \cdot T^*} \quad (II.52)$$

Comme $M^* = 1$, alors, la relation (II.52) devient :

$$F(T^*) = 2 H(T^*) - a^2(T^*) = 0 \quad (II.53)$$

La détermination de la racine T^* de l'équation (II.53) se fait en utilisant l'algorithme de dichotomie [31] et [26]. Sachant que $T^* < T_0$, on peut choisir facilement un intervalle $[T_1, T_2]$ contenant la température T^* et qui doit vérifier la condition $F(T_1) F(T_2) \leq 0$. On peut prendre $T_1 = 0 \text{ K}^\circ$ et $T_2 = T_0$. Une fois que cet intervalle est déterminé, on peut calculer T_1 avec une précision ε , et par suite le rapport T^*/T_0 correspondant à la température T_0 . La valeur T^* obtenue dépend de la précision ε . Le nombre de subdivisions K de l'intervalle $[T_1, T_2]$ correspondant à la précision ε nécessaire pour déterminer la température T^* est donné par [50] :

$$K = 1.4426 \operatorname{Log} \left(\frac{T_0}{\varepsilon} \right) + 1 \quad (II.54)$$

Si $\varepsilon = 10^{-16}$, le nombre de subdivisions K ne peut excéder 66.

Si nous remplaçons $T = T^*$ dans la relation (II.30) et nous intégrons la fonction, dans l'intervalle $[T^*, T_0]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche ($T = T^*$), nous obtenons le rapport critique des masses volumiques suivant:

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \operatorname{Exp} \left(- \int_{T^*}^{T_0} F\rho(T) dT \right) \quad (II.55)$$

Le rapport critique des pressions peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (II.33), on aura :

$$\frac{P^*}{P_0} = \frac{\rho^*}{\rho_0} \frac{T^*}{T_0} \quad (II.56)$$

Le rapport des vitesses critiques du son peut être obtenu en substituant la valeur de T^* dans la relation (II.44) par :

$$\frac{a^*}{a_0} = \frac{\sqrt{\gamma(T^*)}}{\sqrt{\gamma(T_0)}} \sqrt{\frac{T^*}{T_0}} \quad (II.57)$$

Pour trouver la valeur non-dimensionnelle du débit massique critique, il suffit de remplacer l'expression du rapport critique des masses volumiques (II.55), et celle des vitesses du son (II.57), dans l'expression (II.43).

II.5 Paramètres Supersoniques correspondant à T_0

On procède maintenant à la détermination des rapports thermodynamiques et géométrique à une section quelconque du divergent de la tuyère correspondant à un nombre de Mach supersonique M_S . Cette section est caractérisée par :

$$\rho = \rho_S, P = P_S, A = A_S \text{ et } T = T_S$$

L'obtention du rapport des températures se fait en premier lieu par le remplacement de $T = T_S$ et $M = M_S$ dans la relation (II.22), on obtient:

$$M_s^2 = 2 \frac{2H(T_s)}{\gamma(T_s) \cdot r \cdot T_s}$$

Ou

$$F(T_s) = 2H(T_s) - M_s^2 a^2(T_s) = 0 \quad (II.58)$$

La détermination de la racine T_s de l'équation (II.58) se fait de la même manière que celle de T^* et avec la même démarche en utilisant l'algorithme de dichotomie [7], sauf ici, nous avons $T_s < T^*$. Une fois l'intervalle $[T_1, T_2]$ déterminé, on peut facilement obtenir T_s avec une précision ε et par suite le rapport T_s/T_0 correspondant à la température T_0 . On peut prendre dans ce cas $T_1 = 0 \text{ K}^\circ$ et $T_2 = T^*$. La valeur obtenue de T^* dépend de la précision ε .

Remplaçons $T = T_s$ dans la relation (II.30) et intégrons la fonction $F_\rho(T)$ dans l'intervalle $[T_s, T_0]$, en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche, nous obtenons le rapport des masses volumiques.

$$\frac{\rho_s}{\rho_0} = \text{Exp} \left(- \int_{T_s}^{T_0} F_\rho(T) dT \right) \quad (II.59)$$

Le rapport des pressions supersoniques peut être déterminé en remplaçant ceux des températures et des masses volumiques dans la relation (II.33), nous aurons :

$$\frac{P_s}{P_0} = \frac{\rho_s}{\rho_0} \frac{T_s}{T_0} \quad (II.60)$$

Le rapport des vitesses du son peut être obtenu encore en remplaçant T par T_s dans la relation (II.44), nous obtenons

$$\frac{a_s}{a_0} = \sqrt{\frac{\gamma(T_s)}{\gamma(T_0)}} \sqrt{\frac{T_s}{T_0}} \quad (II.61)$$

L'obtention du rapport géométrique des sections se fait par la substitution de T par T_s dans la relation (II.40), ensuite l'intégration de la relation obtenue dans l'intervalle $[T_s, T_0]$ en utilisant la quadrature de Simpson avec condensation des nœuds vers l'extrémité gauche T_s . On obtient :

$$\frac{A_s}{A^*} = \text{Exp} \left[\int_{T_s}^{T^*} F_A(T) dT \right] \quad (II.62)$$

Remarque :

- A titre d'information, on peut calculer le débit à cette section en introduisant les paramètres nécessaires dans la relation (II.42) puis en intégrant, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{m}{A^* \rho_0 a_0} = \frac{\rho_s a_s}{\rho_0 a_0} \cdot M_s \cdot \frac{A_s}{A^*} \quad (II.63)$$

Puisque le débit est constant à travers la tuyère, les relations (II.43) et (II.63) donnent le même résultat.

- La précision du résultat de l'intégration de (II.55), (II.59) et (II.62) dépend essentiellement des valeurs de N , b_1 et b_2

II.6 Erreur du modèle du Gaz Parfait

Le modèle mathématique d'un gaz parfait en considérant la chaleur spécifique C_p et le rapport γ constants donne des résultats acceptables avec une certaine erreur pour des faibles températures. D'après cette étude, on peut remarquer une différence des relations données entre le modèle du gaz parfait et notre modèle développé. L'erreur donnée par le modèle du gaz parfait par rapport à notre modèle qui tient compte de la température génératrice peut être calculée pour chaque paramètre. Alors pour chaque couple (T_0, M) , l'erreur relative ε peut être évaluée par la relation suivante [29] :

$$\varepsilon_{paramètre}(T_0, M)\% = \left| 1 - \frac{paramètres\ GP(T_0, M)}{paramètres\ HT(T_0, M)} \right| * 100 \quad (II.64)$$

Le mot paramètre dans la relation (II.64) peut représenter tous les paramètres (T , P , ρ , A , a et débit) mentionnés dans ce chapitre. Dans les applications aérodynamiques, généralement les auteurs acceptent une erreur inférieure à 5 %. [37]. L'erreur maximale commise entre les erreurs données par les paramètres peut être évaluée pour donner une erreur globale des résultats du phénomène physique.

III.1 Présentation de la théorie des caractéristiques

La tuyère est un organe utilisée pour accélérer un écoulement supersonique jusqu'à un nombre de Mach supersonique, afin d'engendrer une force de poussée comme une résultante de cette accélération. Dans ce chapitre, on va présenter la méthode de conception et dimensionnement des tuyères type à détente centrée, bidimensionnelle ou axisymétrique, en utilisant la méthode des caractéristiques, en ajoutant l'effet de variation de la chaleur spécifique $C_p(T)$ et le rapport $\gamma(T)$ en fonction de la température [7], [8] et [34]. Cette hypothèse est valable lorsque la température génératrice de la chambre de combustion est élevée, inférieur au seuil de dissociation des molécules.

- ✚ La théorie des petites perturbations nous permet de linéariser les équations de base de l'écoulement d'un fluide compressible ou non dans un régime subsonique et supersonique. La solution de ces équations est une approximation de la solution exacte. Si la précision désirée dans la solution est insuffisante, il est nécessaire de trouver la solution améliorée en gardant les termes d'ordre de grandeur plus élevés, ou on utilise les équations exactes non linéaires.
- ✚ Les solutions théoriques de ces dernières sont généralement rares on a plus souvent recours à l'approche numérique. Les méthodes numériques utilisées diffèrent selon le type des équations et on peut les partager en elliptiques, hyperboliques et paraboliques.
 - Pour obtenir les solutions numériques des équations non linéaires de types elliptiques et paraboliques, on utilise de préférence une méthode fondée sur les éléments finis,
 - par contre dans le cas d'écoulement supersonique, une méthode issue de la formulation caractéristique des équations hyperboliques est plus appropriée.

La méthode des caractéristiques permet de résoudre les équations d'Euler de façon assez simple. L'application de la théorie des caractéristiques se limite donc seulement aux cas d'écoulement de gaz parfait. Cette condition de gaz parfait peut être contraignante suivant le phénomène que nous voulons étudier. Par exemple, si nous souhaitons définir un écoulement proche paroi, où il est clair que les termes de viscosité jouent un rôle majeur dans la dynamique des gaz. la méthode des caractéristiques sera inappropriée.

Nous pouvons nous demander alors dans quelle configuration d'écoulement cette méthode permet de déterminer la dynamique des gaz ? Autrement dit, quand un écoulement

de fluide réel peut-il être considéré comme un écoulement de gaz parfait cette similitude est obtenue lorsque les termes de viscosités sont négligeables par rapport aux termes inertiels.

Nous aborderons dans ce chapitre quelques éléments de la méthode des caractéristiques pour un écoulement supersonique bidimensionnel plan et axisymétrique [33].

III.2 Équations générales des équations d'Euler pour l'écoulement

La théorie des caractéristiques est une méthode de calcul permettant de déterminer des écoulements d'Euler. Dans un premier temps, même si cela est élémentaire, nous rappelons dans quel cas nous pouvons considérer qu'un fluide réel peut être considéré comme parfait et les nouvelles équations qui en découlent. Elles sont appelées équation d'Euler.

Chaque particule fluide est soumise au sein d'un écoulement à une somme de force (force volumique, force surfacique, force de contact...). Dans un gaz parfait les termes liés à la viscosité et à la conductibilité thermique sont négligés, contrairement au gaz réel, où les particules fluides sont soumises à des forces de frottements dues à l'existence des termes de viscosité, induisant des transports de quantité de mouvement et où il existe aussi une conductibilité thermique produisant des transferts de chaleurs. Ces deux termes de transport sont la conséquence de l'interaction entre molécules au sein du fluide. Dans un écoulement parfait, l'équation de continuité, l'équation de mouvement et l'équation de l'énergie et l'équation d'état d'un gaz parfait s'écrivent donc sous la forme [33] :

1. Équation de continuité :

$$\frac{D}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (III.1)$$

2. Équation de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} p} + \vec{f} \quad (III.2)$$

3. Équation de l'énergie :

$$\rho \frac{DE_T}{Dt} = -\operatorname{div} p \vec{V} + \vec{f} \cdot \vec{V} \quad (III.3)$$

Avec : $E_T = e + \frac{V^2}{2}$ correspondant à l'énergie totale

\vec{f} : Forces de masse

Où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \text{ grad}(\cdot)$ représente la dérivée particulaire.

Ces équations, appelées équations d'Euler, forment un système d'équations aux dérivées partielles du première ordre.

4. Équation d'état d'un gaz parfait :

$$P = \rho r T \quad (III.4)$$

La théorie des caractéristiques permet de résoudre de façon efficace du problème de l'écoulement dans les tuyères supersoniques consiste à résoudre simultanément les équations d'Euler, Ce type de système les équations sont des équations différentielles aux dérivées partielles dont la résolution n'est pas connue a priori, à cause de manque des conditions aux limites pour l'unicité de la solution, et les dimensions de profil de la tuyère est lui-même inconnu et recherché. A ce titre, on a mentionné et considéré en première étape les hypothèses suivantes

III.3 Hypothèses de calcul

1. L'écoulement est entièrement établi (stationnaire). « $\frac{d}{dt} = 0$ »
2. Les forces à distances, telle que, l'effet de la pesanteur, les interactions entre les particules de fluide sont négligées et les forces extérieures de source électrique et magnétique sont absentes.
3. Le gaz est parfait. Cependant, le volume occupé par les molécules du gaz est supposé nul, ce qui implique que l'effet de la viscosité est négligé.
4. Le gaz est thermiquement parfait. Cependant, la variation ou l'augmentation de la température ne permet pas la dissociation des molécules.
5. Le gaz est calorifique-ment imparfait, ce qui donne que C_p et γ sont fonction de la température lorsque cette dernière croît.
6. L'écoulement est entièrement isentropique. Cette propriété est expliquée par l'absence de dissipation causée par la naissance des ondes de choc.

7. L'écoulement est idéal, le transfert de chaleur par conduction entre les différentes particules de gaz est négligé.
8. L'écoulement est irrotationnel. Cette hypothèse est vérifiée tant que l'entropie est invariable.
9. Le transfert de chaleur forcé par convection ou rayonnement avec la paroi de la tuyère est absent.

III.4 Equations de l'écoulement après l'application des hypothèses

Après l'application des hypothèses Dans le système des coordonnées cartésiennes, les équations de base de l'écoulement sont écrit aux formes suivantes :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + y^{-\delta} \frac{\partial (y^{\delta} \rho v)}{\partial y} = 0 \quad (III.5)$$

- Equations de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial (\rho u^2 + P)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u v)}{\partial y} = 0 \quad (III.6)$$

$$\frac{\partial (\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + P)}{\partial y} = 0 \quad (III.7)$$

- Equation de conservation de l'énergie (d'après le chapitre II) :

$$V^2 = 2H(T) \quad (III.8)$$

Avec $H(T) = \int_T^{T_0} C_p(T) dT$

Et $V^2 = u^2 + v^2$

Et $a^2(T) = \gamma(T) r T$

- Equation d'état du gaz parfait :

$$P = \rho r T \quad (III.9)$$

Ce système est constitué de cinq équations avec cinq inconnues (ρ, u, v, P, T).

Après des transformations mathématiques des équations (III.5), (III.6), (III.7) et (III.9), on peut obtenir une équation unique pour les composantes du vecteur vitesse de la forme suivante :

$$(a^2 - u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + (a^2 - v^2) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - uv \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \delta \frac{a^2 v}{y} = 0 \quad (III.10)$$

Avec : $\delta = 0 \implies$ Le cas plan

$\delta = 1 \implies$ Le cas axisymétrique

On obtient ainsi l'équation générale de la dynamique des gaz. Dans cette équation la vitesse du son est fonction de la température selon l'équation d'énergie (III.8).

Remarque

Pour l'écoulement axisymétrique, la symétrie est suivant l'axe x . Cependant, la direction y dans les équations est alors celle de la direction radiale.

Nous admettrons en premier lieu que l'écoulement est également isentrope. Selon le théorème de Crocco L'écoulement est donc irrotationnel. Autrement dit :

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{0}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (III.11)$$

Par conséquent les équations de base s'écrivent [43] :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a^2 - u^2) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + (a^2 - v^2) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - uv \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \delta \frac{a^2 v}{y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ V^2 = 2H(T) \\ H(T) = \int_T^{T_0} Cp(T) dT \end{array} \right. \quad (III.12)$$

III.5 Potentiel des vitesses

Il existe un potentiel des vitesses φ défini par :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

L'équation (III.10) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left[a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{a^2}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (III.13)$$

C'est une équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre. Elle est non linéaire. Les coefficients des termes de deuxième ordre contiennent les dérivées de premier ordre de la fonction φ .

L'équation (III.13) est de type hyperbolique, si le discriminant D est supérieur à zéro pour tout point du domaine d'écoulement :

$$D = B^2 - 4 A C > 0 \quad (III.14)$$

Avec :

$$\begin{cases} A = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = a^2 - u^2 \\ B = -2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -2 u v \\ C = a^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = a^2 - v^2 \end{cases}$$

La condition (III.14) se réduit à :

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} > 1 \quad (III.15)$$

Ou $M > 1$

Les coordonnées cartésiennes x et y sont généralement adaptées à une description de l'écoulement supersonique et les équations présentées précédemment ne

peuvent donc être utilisées directement. Dans le plan (x o y), il y a certaines directions pour lesquelles les dérivées des variables de l'écoulement telles que $(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \dots ext)$ sont indéterminées ou discontinues [43]. Ces directions sont appelées les caractéristiques. Si l'on choisit, de nouvelles coordonnées avec l'une d'entre elles dans la direction des caractéristiques, le système d'équations (III.12) est considérablement simplifié. La détermination de ces directions se fera dans le paragraphe (III.7).

III.6 Propriétés des équations Hyperboliques

Sans entrer dans les détails de la théorie mathématique des équations hyperboliques, on peut mentionner les propriétés suivantes :

1. Une équation est de type hyperbolique, si une certaine relation est satisfaite par les coefficients des dérivées de plus grand ordre. Dans notre cas, cette condition est la relation (III.15).
2. La solution en un point ne dépend que de l'état en amont de ce point.
3. Les équations hyperboliques se distinguent par des directions privilégiées dans le plan (x o y). Ces directions sont appelées les caractéristiques. Dans notre cas les caractéristiques sont les lignes de Mach qui sont définies en chaque point où le nombre de Mach est M , tracées l'une vers le haut et l'autre vers le bas faisant un angle μ avec le vecteur vitesse V .

Cependant dans le cas général, il y a une différence entre ligne de Mach et les lignes caractéristiques. Ces dernières sont courbes et tangentes aux lignes de Mach et les vitesses sont continuées à travers les caractéristiques [43]. Sur les lignes caractéristiques, les variables d'état dépendantes obéissent à des relations dites relations de compatibilité. Ces relations sont la base de la méthode numérique.

III.7 Equations des caractéristiques

Les équations des caractéristiques sont obtenues dans la première étape par la multiplication des équations (III.10) et (III.11) par des inconnues σ_1 et σ_2 . Après la sommation on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_1(a^2 - u^2) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_1(a^2 - u^2)} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \sigma_2 \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\ + \sigma_1 \frac{\delta a v^2}{y} = 0 \end{aligned} \quad (III.16)$$

Supposons que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ soient des fonctions continues. On peut écrire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Ou $\lambda = \frac{dy}{dx}$ est la pente des caractéristiques courbes et sont égales aux coefficients de $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ dans (III.16). On a alors :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\sigma_1(-2uv) - \sigma_2}{\sigma_1(a^2 - u^2)} \\ \lambda = \frac{\sigma_1(a^2 - v^2)}{\sigma_2} \end{cases} \quad (III.17)$$

A partir des équations précédentes, on obtient un système d'équations en σ_1 et σ_2 par :

$$\begin{cases} \sigma_1[(a^2 - u^2)\lambda + 2uv] + \sigma_2[1] = 0 \\ \sigma_1[(a^2 - v^2)] + \sigma_2[-\lambda] = 0 \end{cases} \quad (III.18)$$

Le système (III.18) possède des solutions non triviales pour les inconnues σ_1 et σ_2 si le déterminant de ce système est égal à zéro. Ce qui donne :

$$(a^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (a^2 - v^2) = 0 \quad (III.19)$$

L'équation (III.19) donne deux solutions par :

$$\lambda^{\mp} = \left[\frac{dy}{dx} \right]^{\mp} = \frac{uv \mp a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \quad (III.20)$$

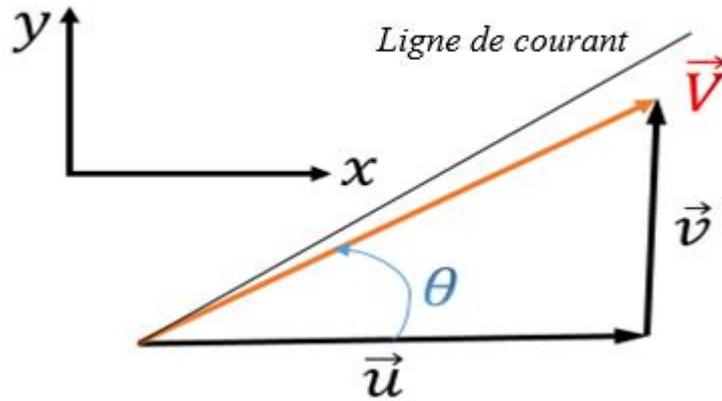


Figure III.1 : Composantes du vecteur vitesse.

Ces deux solutions représentent deux courbes dans le plan (x, y) qui sont appelées les caractéristiques. Une forme très simplifiée de (III.20) est obtenue par introduction de u et v en termes de V et θ et par M en termes de μ . D'après la figure (III.1) on a :

$$\begin{cases} u = V \cos \theta \\ v = V \sin \theta \\ \theta = \arctg \left(\frac{v}{u} \right) \end{cases} \quad (\text{III. 21})$$

D'autre part, la figure (III.2) montre que :

$$\begin{cases} M = \frac{1}{\sin \mu} \\ \sqrt{M^2 - 1} = \cotng \mu \end{cases} \quad (\text{III. 22})$$

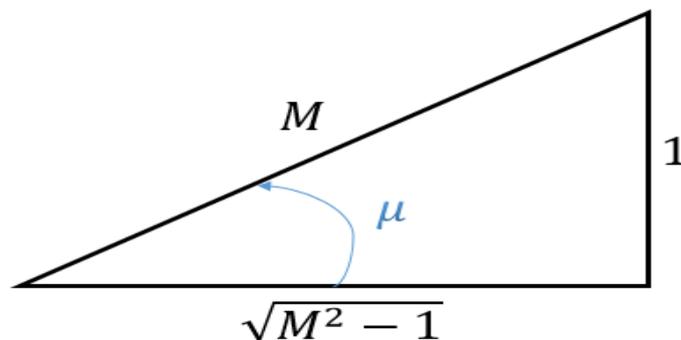


Figure III.2 : Illustration de la relation entre μ et M

Substituons les équations (III.21) et (III.22) dans (III.20) et après quelques transformations trigonométriques on aboutit à :

$$\lambda^{\mp} = \left[\frac{dy}{dx} \right]^{\mp} = \tan(\theta \mp \mu) \quad (\text{III.23})$$

Cette équation est illustrée dans la figure (III.3), et l'on peut voir que C^+ et C^- représentent respectivement les caractéristiques montantes et descendantes.

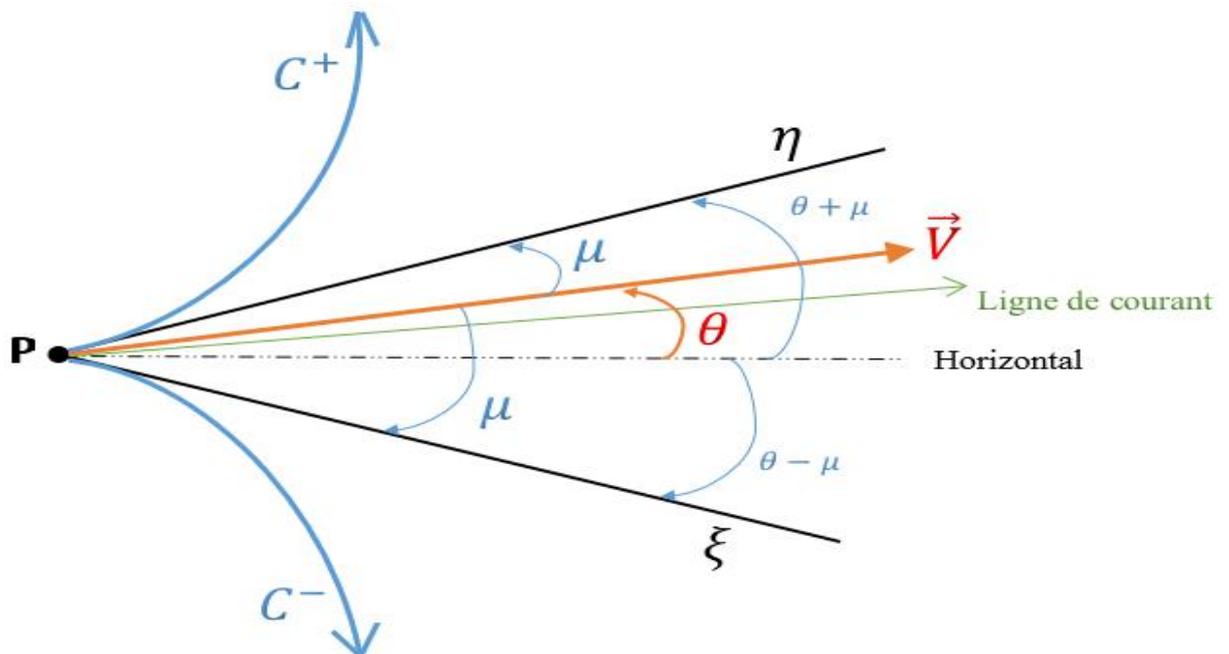


Figure III.3 : Les caractéristiques C^+ et C^- et les lignes de Mach η et ξ

III.8 Domaine de dépendance – région d'influence

Considérons deux points 1 et 2 de la courbe C dans la figure (III.4). On peut voir qu'il y a deux solutions possibles :

- Soit le point d'intersection 4 de la caractéristiques C^- menée par le point 2 et l'autre C^+ menée par le point 1.
- Soit le point d'intersection 3 de la caractéristiques C^+ menée par le point 2 et l'autre C^- menée par le point 1.

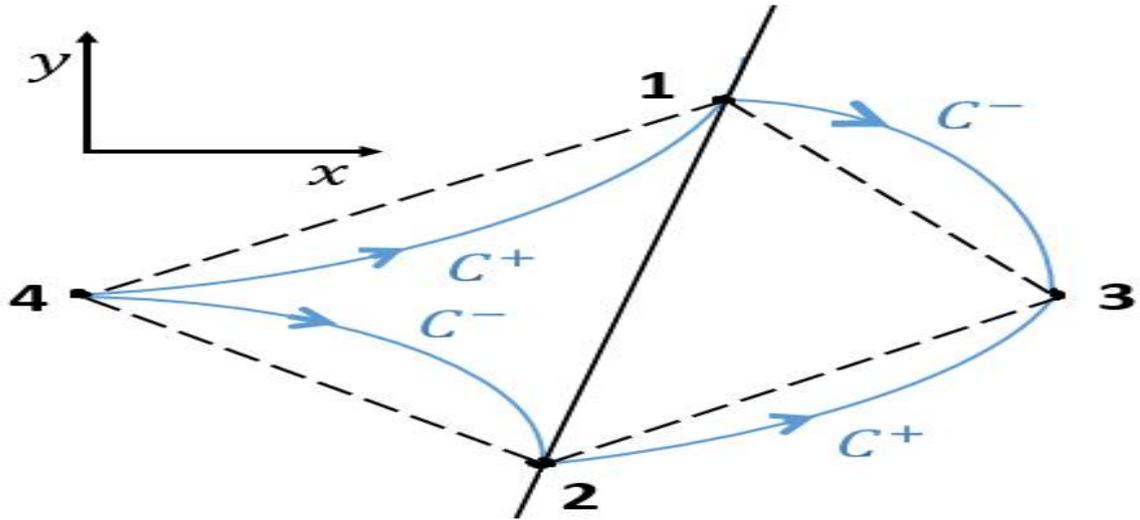


Figure III.4 : Solution de part et d'autre d'une courbe C .

Considérons un point 3 vers lequel convergent deux caractéristiques, une C^- et une C^+ , figure (III.5).

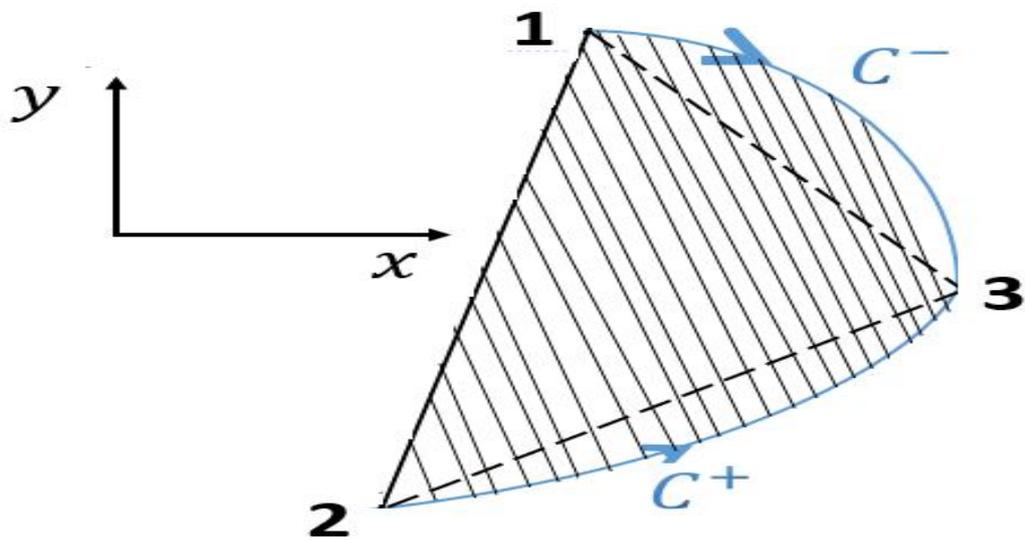


Figure III.5 : Illustration du domaine de dépendance du point 3.

L'état de l'écoulement au point 3 ne dépend que de l'état de l'écoulement dans la zone située entre les deux caractéristiques convergentes vers ce point. C'est ce qu'on a appelé le '*domaine de dépendance*' du point 3. Considérons les deux caractéristiques C^- et C^+ issues d'un point 4, figure (III.6). L'état de l'écoulement au point 4 influence la région du plan comprise entre les deux caractéristiques issues de ce point. C'est ce qu'on appelle la '*région d'influence*' du point 4.

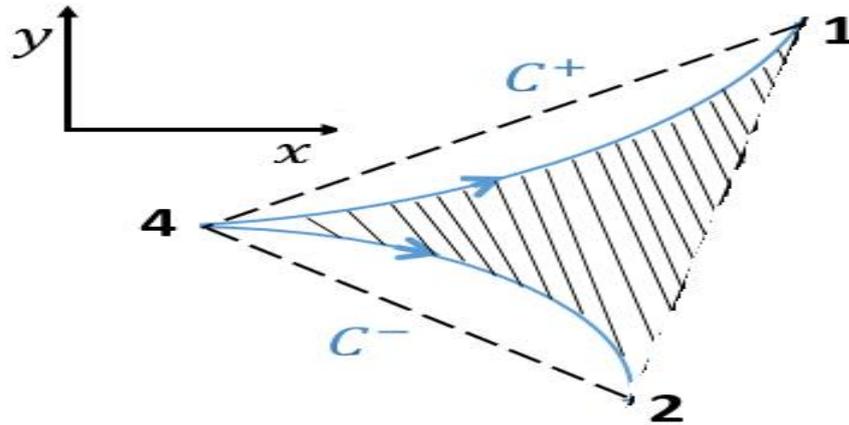


Figure III.6 : Illustration de la région d'influence du point 4.

III.9 Relations de compatibilité

Comme on a mentionné au paragraphe (III.2) que les équations obtenues (III.8) ne peuvent être utilisées directement et dans le paragraphe (III.4) on a déterminé les directions des caractéristiques dans le plan (x, y) . Les équations (III.23) découlent de la localisation géométrique des lignes pour lesquelles ζ et η sont constantes. Ces lignes ainsi définies sont en général des lignes courbes, puisque μ et θ ont des valeurs locales dans le champ d'écoulement. Ces lignes ne sont pas connues a priori. Par conséquent, en introduisant les lignes ζ et η constantes comme nouvelles coordonnées dans les équations (III.10) et (III.11), on peut s'attendre à ce que ce système soit considérablement simplifié. Dans le plan (x, y) , nous obtenons par cette transformation, deux familles de courbes $\zeta(x, y) = \text{constante}$ et $\eta(x, y) = \text{constante}$ qui prennent ainsi la fonction d'un nouveau réseau de coordonnées.

Dans un écoulement supersonique, deux courbes peuvent être définies en chaque point de l'écoulement avec des directions réelles faisant un angle $+\mu$ et $-\mu$ avec les lignes

de courant. Ces courbes qui sont des lignes caractéristiques représentent des « ondes de Mach » et notées respectivement η et ξ . Elles sont représentées par la figure (III.7)

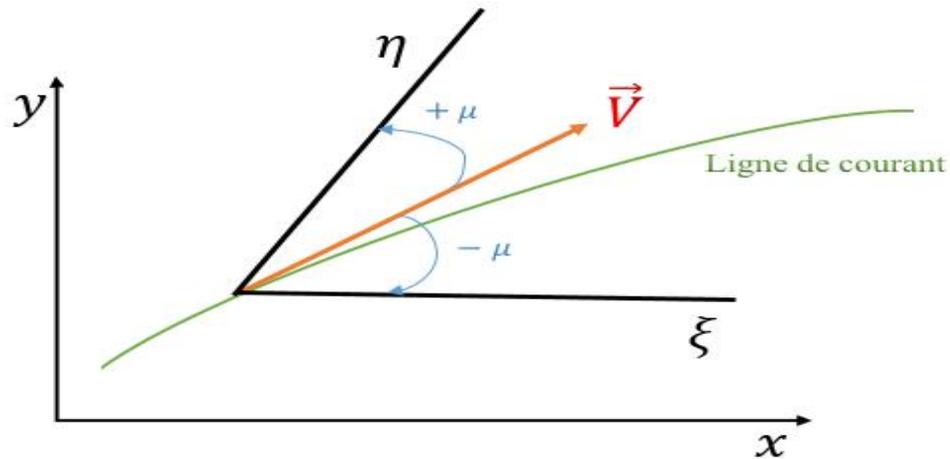


Figure III.7 : Lignes caractéristiques définies à partir d'un point.

Cette transformation se révélera très utile pour la description d'un écoulement supersonique. Lors de la mise en forme des équations de base pour cette transformation, on constate qu'il est avantageux de travailler à partir de (III.8) avec V et θ comme variables dépendantes. D'après la figure (III.1) :

$$\begin{cases} u = V \cos \theta \\ v = V \sin \theta \end{cases} \quad (III.24)$$

Les dérivées partielles deviennent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta - V \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta + V \frac{\partial \theta}{\partial y} \cos \theta \end{cases} \quad (III.25)$$

Par substitution des relations (III.24) et (III.25) dans (III.10) et (III.11) on obtient, à l'aide de la définition de μ selon (III.22) et après quelques manipulation mathématiques et réarrangement :

$$\begin{aligned} & \sin \mu \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial v}{\partial y} \cos \theta \right] + \frac{\cos \mu \tan \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial V}{\partial y} \sin \theta \right] \cos \mu - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (III.26)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta + \frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \sin \theta - \frac{\partial V}{\partial y} \cos \theta \right] = 0 \quad (III.27)$$

Par multiplication de (III.27) par $\cos(\mu)$ et ensuite, soit par l'addition, soit par la soustraction de (III.26) on obtient ; après quelques transformation trigonométriques :

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] + \frac{\cos \mu \tan \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta - \mu) \right] - \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} = 0 \quad (III.28)$$

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] - \frac{\cos \mu \tan \mu}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial V}{\partial y} \sin(\theta + \mu) \right] + \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} = 0 \quad (III.29)$$

On introduit, à cette étape, les coordonnées $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$. D'après la figure (III.8),

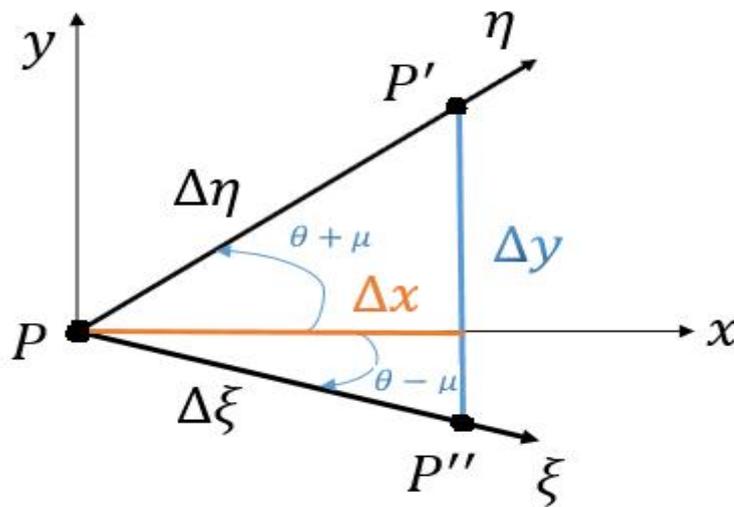


Figure III.8 : Relation entre les lignes de Mach

Si on se déplace de P vers P' le long de la caractéristique η , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta \eta \quad (III.30)$$

Suivant x , puis suivant y , on a :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \quad (III.31)$$

Avec : f une fonction arbitraire.

Par identification de (III.30) et (III.31) on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\Delta \eta}{\Delta x} \quad (III.32)$$

Cependant, d'après la même figure (III.8), on a :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\theta + \mu) \quad (III.33)$$

Et

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta x} = \frac{1}{\cos(\theta + \mu)} \quad (III.34)$$

Remplaçons (III.33) et (III.34) dans (III.32), puis multiplions par $\cos(\theta + \mu)$, on obtient alors :

$$\cos(\theta + \mu) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta + \mu) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (III.35)$$

De même, une relation entre la direction ζ et x, y (coordonnées cartésiennes), en allant de p à p'' sur ζ est donnée par :

$$\cos(\theta - \mu) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (III.36)$$

Par identification de (III.36) et (III.28) .on peut écrire le long de la ligne η =constante nous avons :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \left[\frac{co \tan \mu}{V} \right] \frac{\partial V}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad (III.37)$$

De même, par identification de (III.35) et (III.29) on peut écrire le long de la ligne ξ = constante nous avons :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \left[\frac{co \tan \mu}{V} \right] \frac{\partial V}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad (III.38)$$

Ce résultat est particulièrement intéressant, puisque dans l'équation applicable le long de la ligne η = constante n'interviennent que les dérivées dans la direction η et vice-versa. Les lignes à ξ et η constantes sont les lignes caractéristiques du système d'équations (III.37) et (III.38).

L'utilité de cette propriété est évidente, puisque les deux équations peuvent être intégrées immédiatement le long des deux lignes de Mach. Selon la définition de la fonction v , les «équations (III.37) et (III.38) deviennent :

$$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial \xi} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad \text{suivant } \xi \quad (III.39)$$

$$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial \eta} = \delta \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad \text{suivant } \eta \quad (III.40)$$

III.9.1 Pour le cas plan :

Les équations (III.39) et (III.40) se réduisent à :

$$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial \xi} = 0 \quad \text{suivant } \xi$$

$$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial \eta} = 0 \quad \text{suivant } \eta$$

Qui se simplifient à :

$$v + \theta = Q^- \quad \text{suivant } \xi \quad (III.41)$$

$$v - \theta = Q^+ \quad \text{suivant } \eta \quad (III.42)$$

Où Q^- et Q^+ sont des constantes appelées *invariants de Riemann*.

Ces deux relations sont les relations de compatibilité entre v et θ pour le cas d'un écoulement plan. Elles donnent des résultats simples que $(v - \theta)$ et $(v + \theta)$ sont constants le long des caractéristiques η et ξ respectivement indépendamment de la géométrie de l'écoulement. Cependant, les équations complètes sont données par (III.41) et (III.42) et (III.23).

III.9.2 Pour le cas axisymétrique

Les équations (III.39) et (III.40) deviennent :

$$\frac{\partial(v + \theta)}{\partial\xi} = \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad \text{suivant } \xi \quad (III.43)$$

$$\frac{\partial(v - \theta)}{\partial\eta} = \frac{\sin \mu \sin \theta}{y} \quad \text{suivant } \eta \quad (III.44)$$

Ce résultat est différent de celui du cas plan du fait que l'intégration n'est pas simple, car la géométrie (y) est prise en compte. Pour la résolution complète de l'écoulement il faut ajouter les équations des caractéristiques (III.23).

Remarque

Une fois le problème résolu en fonction de v et θ , on peut facilement obtenir les variations des autres paramètres, tel que M , λ , les rapports thermodynamiques à partir des équations appropriées.

III.10 Théorèmes concernant l'écoulement plan

Pour un écoulement supersonique plan, les équations de compatibilité (III.41) et (III.42) sont valables. Les écoulements peuvent être décomposés en trois types :

- ❖ Ecoulement en zone dite *non simple*.
- ❖ Ecoulement en zone dite *simple*.
- ❖ Ecoulement en zone dite *uniforme*.

III.10.1 Ecoulement en régime non simple

Les caractéristiques sont des courbes (cas général) et chacune d'elles correspond à une certaine valeur de Q^+ et Q^- , [voir figure (III.9)]. Les valeurs de v et θ sont faciles à obtenir aux intersections des caractéristiques par :

$$\begin{cases} v = \frac{(Q^- + Q^+)}{2} \\ \theta = \frac{(Q^- - Q^+)}{2} \end{cases}$$

Si on se déplace le long des caractéristiques η , on a :

$$Q^+ = \text{constante} \quad \curvearrowright \quad \Delta\theta = \Delta v = \frac{\Delta Q^-}{2}$$

Si on se déplace le long des caractéristiques ξ , on a :

$$Q^- = \text{constante} \quad \curvearrowleft \quad \Delta\theta = -\Delta v = -\frac{\Delta Q^+}{2}$$

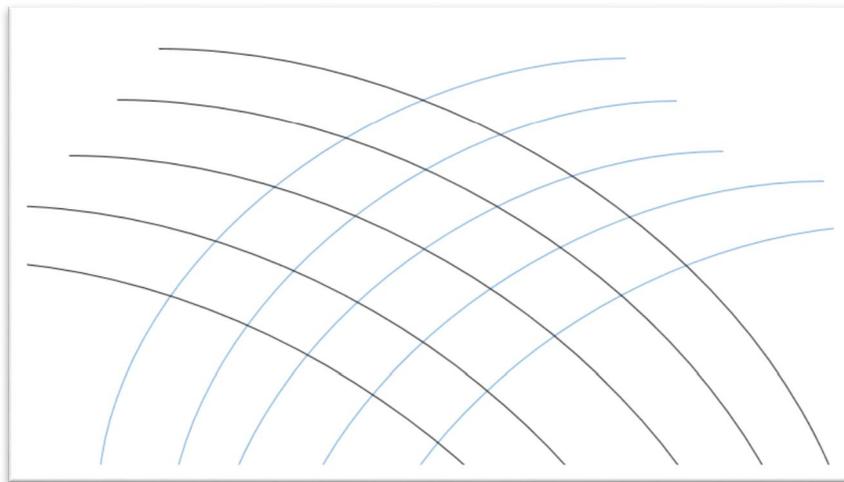


Figure III.9 : ligne caractéristique pour régime non simple

III.10.2 Ecoulement en régime simple

Il est défini par la condition que l'une des quantités Q^+ et Q^- est constante.

- On suppose que $Q^+ = \text{cte}$:

$$Q^+ = Q_0^+ = \text{constante}$$

Si on se déplace le long des caractéristiques ξ , on a :

$$Q^- = \text{constante} \quad \Delta v = -\Delta\theta = -\frac{\Delta Q^+}{2} = 0$$

Ce qui montre que v et θ sont constantes le long des caractéristiques ξ . Comme résultat, les caractéristiques ξ sont des droites comme on peut le voir sur la figure (III.10.a).

En passant d'une caractéristique ξ à l'autre, on a :

$$\Delta v = \Delta\theta = \frac{\Delta Q^-}{2}$$

Les résultats sont valables sur n'importe quelle ligne coupant les caractéristiques et en particulier les lignes de courant.

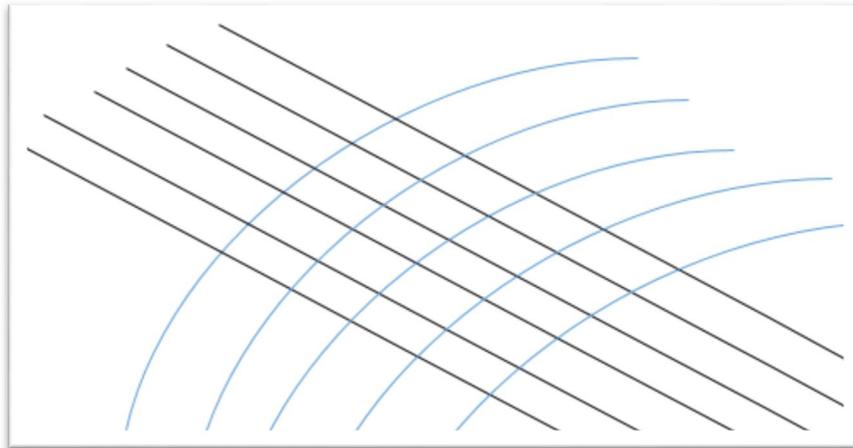


Figure III.10.a : ligne des caractéristiques Q^+

- On suppose que $Q^- = cte$:

$$Q^- = Q_0^- = \text{constante}$$

Si on se déplace le long des caractéristiques η , on a :

$$Q^+ = \text{constante} \quad \Delta v = \Delta \theta = \frac{\Delta Q^-}{2} = 0$$

Ce qui montre que v et θ sont constantes le long des caractéristiques η . Comme résultat, les caractéristiques η sont des droites comme on peut le voir sur la figure (III.10.b).

En passant d'une caractéristique ξ à l'autre, on a :

$$\Delta v = \Delta \theta = \frac{\Delta Q^+}{2}$$

Les résultats sont valables sur n'importe quelle ligne coupant les caractéristiques et en particulier les lignes de courant.

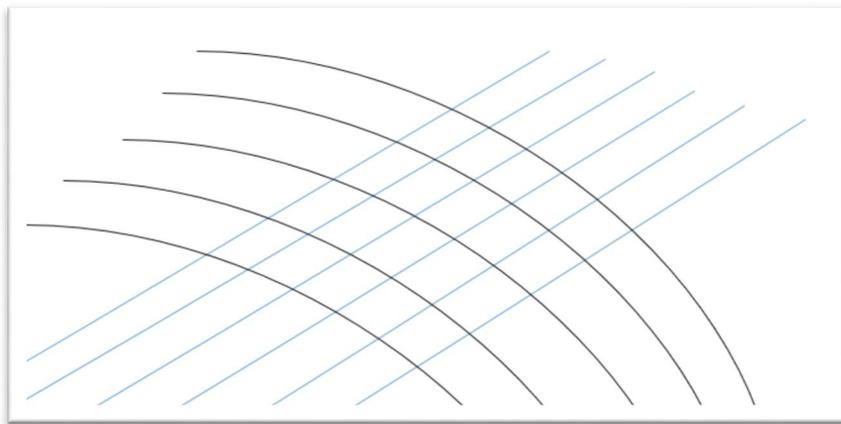


Figure III.10.b : ligne des caractéristiques Q^-

III.10.3 Ecoulement en régime uniforme

Dans ce cas les quantités Q^+ et Q^- sont toutes constantes. Aux intersections les valeurs de v et θ sont données par :

$$\begin{cases} v = \frac{(Q_0^- + Q_0^+)}{2} = \text{constante} \\ \theta = \frac{(Q_0^- - Q_0^+)}{2} = \text{constante} \end{cases}$$

Les caractéristiques sont partout rectilignes [voir figure (III.11)].

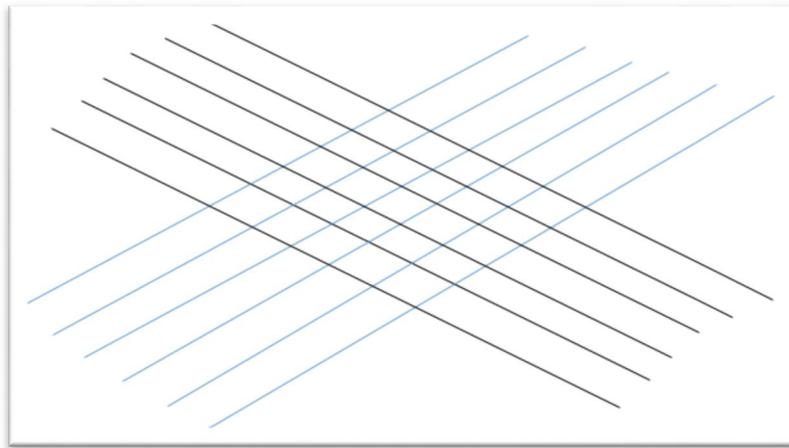


Figure III.11 : ligne caractéristique pour régime uniforme

Convention

Une convention usuelle consiste à omettre de représenter les caractéristiques dans une région d'écoulement uniforme, de ne représenter que les caractéristiques rectilignes dans le cas d'un régime d'onde simple et de représenter les deux types de caractéristiques dans le cas de régime non simple.

Remarque :

Une région uniforme est toujours limitée par des zones d'ondes simples et qu'elle n'est contact avec une zone de régime non simple en un seul point au plus.

III.11 Formulation mathématique

Pour un écoulement supersonique, irrotationnel, adiabatique d'un gaz parfait, la méthode des caractéristiques donne les équations suivantes, dites équations des caractéristiques et de compatibilités [45] et [34] :

Suivant ξ (1-3), voir figure (III.11) :

$$d(v + \theta) = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\xi \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \quad (III.45)$$

Suivant η (2-3), voir figure (III.11) :

$$d(v - \theta) = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y} d\eta \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \quad (III.46)$$

$\delta = 0$ Pour le cas bidimensionnel

$\delta = 1$ Pour le cas axisymétrique

L'axe du col est nommé par y pour le différentiel avec la constante r du gaz. Les équations (III.45) et (III.46) sont valables respectivement sur les caractéristiques C^- et C^+ comme le montre la figure (III.11). Dans le cas réel, les caractéristiques sont courbes, et si le maillage est fin de sorte que les points soient proches l'un de l'autre, on peut rapprocher la courbure par une ligne droite, le calcul sera sur les lignes de Mach nommées ξ sur la caractéristique C^- et par η sur la caractéristique C^+ comme le montre la figure (III.11).

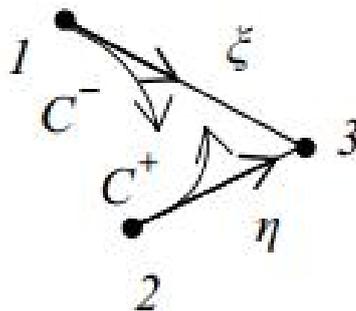


Figure III.12 : Illustration des lignes Caractéristiques et des lignes de Mach.

III.12 Modèle à haute température

Dans les relations (III.45) et (III.46), la fonction de Prandtl Meyer de notre modèle à Haute Température est donnée par la relation suivante [8], [35] et [36] :

$$dv = F_v(T) = -\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT \quad (III.47)$$

Avec [26] et [27]

$$M(T) = \frac{\sqrt{2 H(T)}}{a(T)} \quad (III.48)$$

$$a(T) = \sqrt{r T \gamma(T)} \quad (III.49)$$

$$\gamma(T) = \frac{C_p(T)}{C_p(T) - r} \quad (III.50)$$

Les fonctions $C_p(T)$ et $H(T)$ sont présentés dans le chapitre 2 par les relations (II.39) et (II.40). L'angle de Mach est donné par [5] :

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \quad (III.51)$$

On peut exprimer les directions ξ et η des lignes de Mach en fonction des coordonnées

Cartésiennes x et y par les relations suivantes [37], [31] et [20] :

$$\begin{cases} d\xi = \frac{y}{\cos(\theta - \mu)} \\ d\eta = \frac{y}{\sin(\theta + \mu)} \end{cases} \quad (III.52)$$

Remplaçant les relations (III.52) et (III.47) dans le système (III.45) et (III.46) on obtient, le modèle mathématique à Haute Température de la méthode des caractéristiques
Suivant ξ (1-3) :

$$-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT + d\theta = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \cos(\theta - \mu)} dx \quad (III.53)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta - \mu) \quad (III.54)$$

Suivant η (2-3) :

$$-\frac{C_p(T)}{2H(T)} \sqrt{M^2(T) - 1} dT - d\theta = \delta \frac{\sin \theta \sin \mu}{y \sin(\theta + \mu)} dy \quad (III.55)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta + \mu) \quad (III.56)$$

$M(T)$, $a(T)$ et $\mu(T)$ sont données respectivement par les relations (III.48), (III.49) et (III.50). Comme la fonction $H(T)$ dépend du paramètre T_0 , [26] et [27], alors notre modèle mathématique dépend essentiellement de la température génératrice T_0 de la chambre de combustion.

On a préféré une transformation entre ξ et x et une transformation entre η et y présentées par les relations (III.52). Le cas contraire donne un modèle différent de celui présenté par les équations (III.53) et (III.55).

Le modèle mathématique développé est un système d'équations différentielles de quatre inconnues (x , y , T , θ). Celui du gaz parfait est basé sur les variables x , y , M et θ . A cause de l'équation implicite (III.48) reliant M et T dont l'expression analytique inverse n'existe pas, on a considéré la variable T au lieu de M .

Comme les caractéristiques C^+ et C^- sont courbes, l'application de la méthode des caractéristiques nous oblige à introduire un maillage fin, afin d'approximer chaque caractéristique entre deux points par des segments de droite. Les propriétés (x , y , T , θ , ρ , P) au point 3 de la figure (III.11) peuvent être déterminées à partir de celles des points 1 et 2 qui les relient. On approche dans ce cas la variation des paramètres y , θ et T le long les segments reliant les points 1 et 2 et les points 2 et 3 par les expressions suivantes [34] et [35] :

$$\theta_{13} = C_\theta \theta_1 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{23} = C_\theta \theta_2 + (1 - C_\theta) \theta_3 \quad (III.57)$$

$$T_{13} = C_T T_1 + (1 - C_T) T_3 \quad \Leftrightarrow \quad T_{23} = C_T T_2 + (1 - C_T) T_3 \quad (III.58)$$

$$y_{13} = C_y y_1 + (1 - C_y) y_3 \quad \Leftrightarrow \quad y_{23} = C_y y_2 + (1 - C_y) y_3 \quad (III.59)$$

C_y , C_θ et C_T , sont des coefficients d'interpolation appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Si ces coefficients sont égaux à 0.5, on obtient la valeur moyenne des paramètres.

III.13 Différent types des points de l'écoulement supersonique

III.13.1 Equation et procédure pour un point interne

Le schéma d'un point interne du champ d'écoulement est illustré dans la figure (III.12b). L'intégration des équations (III.53), (III.54), (III.55) et (III.56) donne :

Suivant ξ (1 - 3) :

$$A_{13}(T_3 - T_1) + (\theta_3 - \theta_1) = \delta B_{13}(x_3 - x_1) \quad (III.60)$$

$$y_3 - y_1 = C_{13}(x_3 - x_1) \quad (III.61)$$

Suivant η (2 - 3) :

$$A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \delta B_{23}(y_3 - y_2) \quad (III.62)$$

$$y_3 - y_2 = C_{23}(x_3 - x_2) \quad (III.63)$$

Avec

$$A_{13} = -\frac{C_p(T_{13})}{2H(T_{13})} \sqrt{M^2(T_{13}) - 1} \Leftrightarrow A_{23} = -\frac{C_p(T_{23})}{2H(T_{23})} \sqrt{M^2(T_{23}) - 1} \quad (III.64)$$

$$B_{13} = \frac{\sin \theta_{13} \sin \mu_{13}}{y_{13} \cos(\theta_{13} - \mu_{13})} \Leftrightarrow B_{23} = \frac{\sin \theta_{23} \sin \mu_{23}}{y_{23} \sin(\theta_{23} + \mu_{23})} \quad (III.65)$$

$$C_{13} = \tan(\theta_{13} - \mu_{13}) \Leftrightarrow C_{23} = \tan(\theta_{23} + \mu_{23}) \quad (III.66)$$

$$\mu_{13} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{13}}\right) \Leftrightarrow \mu_{23} = \arcsin\left(\frac{1}{M_{23}}\right) \quad (III.67)$$

$$M_{13} = \frac{\sqrt{2H(T_{13})}}{a_{13}} \Leftrightarrow M_{23} = \frac{\sqrt{2H(T_{23})}}{a_{23}} \quad (III.68)$$

$$a_{13} = \sqrt{\gamma_{13} r T_{13}} \Leftrightarrow a_{23} = \sqrt{\gamma_{23} r T_{23}} \quad (III.69)$$

$$\gamma_{13} = \frac{C_p(T_{13})}{C_p(T_{13}) - r} \Leftrightarrow \gamma_{23} = \frac{C_p(T_{23})}{C_p(T_{23}) - r} \quad (III.70)$$

Les équations (III.60), (III.61), (III.62) et (III.63) constituent un système d'équations algébriques non linéaires à quatre inconnues (x_3, y_3, T_3, θ_3). L'algorithme par itérations successives s'écrit [7], [35], [13], [14], [30] et [34] :

$$x_3 = \frac{E_2 - E_1}{C_{13} - C_{23}} \quad (III.71)$$

$$y_3 = E_1 + C_{13}x_3 \quad (III.72)$$

$$T_3 = \frac{D_1 + D_2 + \delta(B_{23}y_3 + B_{13}x_3)}{A_{13}A_{23}} \quad (III.73)$$

$$\theta_3 = D_1 + \delta B_{13}x_3 - A_{13}T_3 \quad (III.74)$$

$$\begin{cases} E_1 = y_1 - C_{13}x_1 \\ E_2 = y_2 - C_{23}x_2 \end{cases} \quad (III.75)$$

$$\begin{cases} D_1 = \theta_1 + A_{13}T_1 - \delta B_{13}x_1 \\ D_2 = -\theta_2 + A_{23}T_2 - \delta B_{23}y_2 \end{cases} \quad (III.76)$$

Les relations (III.71), (III.72), (III.73) et (III.74) constituent un système d'équations par itérations pour un écoulement supersonique bidimensionnel et axisymétrique, permanent et irrotationnel pour notre modèle à Haute Température.

La résolution du système se fait par la procédure d'intégration numérique de prédicteur correcteur par différences finies [37], [31], [15], [38], [39] et [30]. Pour l'algorithme de prédicteur d'Euler, les valeurs initiales de y_{i3}, T_{i3} et θ_{i3} ($i = 1, 2$) à l'itération, $K = 0$ sont données par :

$$\begin{cases} T_{13} = T_1 & , \theta_{13} = \theta_1 & , y_{13} = y_1 \\ T_{23} = T_2 & , \theta_{23} = \theta_2 & , y_{23} = y_2 \end{cases} \quad (III.77)$$

$$(III.78)$$

Substituons les expressions (III.77) et (III.78) dans les relations (III.64), (III.65), (III.66), (III.67), (III.68), (III.69) et (III.70) ainsi que dans les relations (III.75) et (III.76), ensuite remplaçons les résultats obtenus dans les relations (III.71), (III.72), (III.73) et (III.74) pour obtenir les valeurs prédites des paramètres ($x_3^0, y_3^0, T_3^0, \theta_3^0$) au point 3.

Pour l'algorithme de correcteur d'Euler, les valeurs des relations (III.57), (III.58) et (III.59) sont utilisées et substituées dans les équations (III.71), (III.72), (III.73) et

(III.74) pour obtenir les nouvelles valeurs des paramètres au point 3. Les valeurs corrigées sont $(x_3^1, y_3^1, T_3^1, \theta_3^1)$.

L'algorithme de correcteur d'Euler sera répété jusqu'à obtenir à la précision ε voulue. Autrement dit, pour K itérations, il faut satisfaire la condition suivante pour assurer la convergence :

$$\text{Max} [|y_3^k - y_3^{k-1}|, |\theta_3^k - \theta_3^{k-1}|, |T_3^k - T_3^{k-1}|] < \varepsilon \quad (\text{III.79})$$

La variable x converge automatiquement avec la convergence de la condition (III.79).

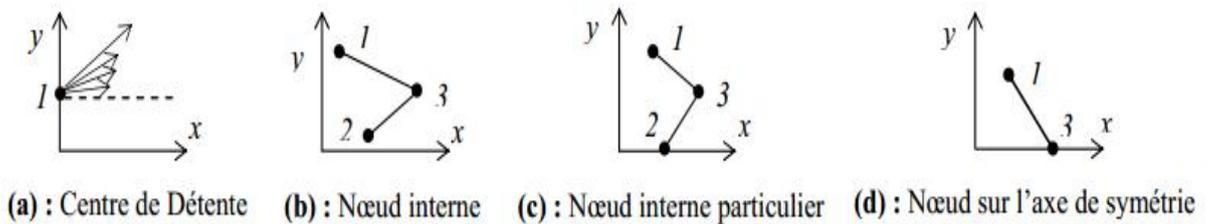


Figure III.13 : Différents points de calcul.

III.13.2 Point interne particulier

On rencontre ce type de points comme le montre la figure (III.12c), lorsque le point 2 se trouve sur l'axe de symétrie pour le cas axisymétrique. Pour le cas bidimensionnel, ce type de point n'a pas de spécificité de calcul. L'utilisation de l'algorithme du point interne pour le cas axisymétrique pose un problème pour la détermination des propriétés de ce point particulier. Le terme B_{23} dans la relation (3.21) est indéterminé pour la valeur prédictee, puisque, au point 2 on a $y_2 = 0, \theta_2 = 0$. Comme le segment de la ligne de Mach montante est petit, le point 3 sera proche de l'axe de symétrie et dans ce cas, on peut rapprocher le numérateur du terme B_{23} par $\sin \theta_{23} = \sin \theta_3 \approx \theta_3$ et le dénominateur par $\sin(\theta_{23} + \mu_{23}) \approx \sin \mu_{23}$. Le terme B_{23} se simplifie à :

$$B_{23} = \frac{\theta_3}{y_3} \quad (\text{III.80})$$

L'équation (III.62) ne reste plus valable, et sera remplacée par :

$$A_{23}(T_3 - T_2) - (\theta_3 - \theta_2) = \theta_3 \quad (III.81)$$

Alors, la résolution de l'équation (III.81) par rapport à θ_3 donne :

$$\theta_3 = \frac{A_{23}T_3 - A_{23}T_2 + \theta_2}{2} \quad (III.82)$$

Remplaçons l'équation (III.82) dans la relation (III.60) et résolvons l'équation obtenue par rapport à T_3 on obtient :

$$T_3 = \frac{2[(D_1 + B_{13}x_3) + A_{23}T_2]}{2A_{13} + A_{23}} \quad (III.83)$$

Comme résultat, l'équation (III.73) sera changée par l'équation (III.83). Donc pour déterminer les propriétés $(x_3, y_3, T_3, \theta_3)$ de ce type de point particulier, on utilise les équations (III.71), (III.72), (III.73) et (III.83).

III.13.3 Equations pour un point sur l'axe de symétrie

D'après la figure III.12d, le point 3 se trouve sur l'axe de symétrie de la tuyère. Comme $y_3 = 0, \theta_3 = 0$ en ce point, la procédure est simplifiée et une ligne de Mach ξ joignant les nœuds 1 et 3 est employée. Les équations valables sur cette ligne de Mach sont à utiliser et x_3, T_3 sont respectivement obtenues par la résolution des équations algébriques (III.60) et (III.61). On obtient :

$$x_3 = x_1 - \frac{y_1}{C_{13}} \quad (III.84)$$

$$T_3 = T_1 + \frac{\delta B_{13}(x_3 - x_1) + \theta_1}{A_{13}} \quad (III.85)$$

On peut considérer ce point comme étant un point interne si les propriétés au point 2 sont prises par :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_2 \\ T_2 = T_1 \\ \theta_2 = \theta_1 \end{cases} \quad (III.86)$$

III.13.4 Point sur une paroi rigide de la tuyère

Comme le montre la figure (III.11), le point 1 n'existe plus physiquement, parce qu'il se trouve à l'extérieur du champ d'écoulement. En conséquence, seulement ligne de Mach η joignant les nœuds 2 et 3 est employée. Les équations des caractéristiques et de compatibilité valables sur cette ligne sont utilisées pour déterminer la position et les propriétés de l'écoulement au point 3. Il nous manque de condition pour avoir une solution unique, puisque sur la ligne de Mach η , on peut écrire deux conditions. Cependant, sur la paroi, la direction du vecteur vitesse de l'écoulement doit être identique avec la pente de la paroi (condition de glissement) et que la réflexion de la ligne de Mach montante sur la paroi de la tuyère donne mathématiquement un point d'intersection entre la ligne (ligne de droite) et la courbe de la paroi. Alors, on peut écrire les deux conditions suivantes au point 3 de la figure (III.13) :

$$y_3 = f(x_3) \quad (III.87)$$

$$\theta_3 = \arctan \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_3} \quad (III.88)$$

Avec : $f(x)$ est la fonction, sous forme explicite de la paroi rigide de la tuyère.

Les équations (III.87) et (III.88) constituent donc deux conditions additionnelles pour la détermination de la position et les propriétés du point 3 sur une paroi rigide et qui doivent être ajoutées aux équations [37], [40], [15], [39], [41], [42], [36] pour la résolution simultanée par la méthode des différences finies. Il nous reste de déterminer deux expressions analytiques permettant de corriger les valeurs de T_3 et x_3 pour fermer le processus d'itérations. Résolvons les équations [37], [40], [15], [39] par rapport à T_3 et x_3 donne :

$$T_3 = T_2 + \frac{\theta_3 - \theta_2 + \delta B_{23}(y_3 - y_2) + \theta_1}{A_{23}} \quad (III.89)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{y_3 - y_2}{C_{23}} \quad (III.90)$$

On propose l'algorithme suivant de calcul en présentant les grandes étapes de calcul des propriétés en un point 3 sur la paroi rigide de la tuyère.

1. Les données sont : $(x_2, y_2, \theta_2, T_2), T_0, \delta, \alpha_{\theta_{23}}, \alpha_{T_{23}}, \alpha_{y_{23}}$
2. Approximation initial $K = 0$ est donnée par :

$$x_3^0 = x_2 \quad ; \quad y_3^0 = f(x_3^0) \quad ; \quad T_3^0 = T_2 \quad ; \quad \theta_3^0 = \arctan\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_3^0}$$

3. Calcul de y_{23}, T_{23} et θ_{23} en utilisant les relation dans les références [37], [40],[15],[39] par la considération de l'approximation initiale .alors

$$\theta_{23} = \alpha_{\theta_{23}} \theta_2 + (1 - \alpha_{\theta_{23}})\theta_3^0$$

$$T_{23} = \alpha_{T_{23}} T_2 + (1 - \alpha_{T_{23}})T_3^0$$

$$y_{23} = \alpha_{y_{23}} y_2 + (1 - \alpha_{y_{23}})y_3^0$$

4. Calcul de $M_{23}, \mu_{23}, A_{23}, B_{23}$ et C_{23} en utilisant les relations dans les références [37], [40], [15]
5. Calcul de T_3, x_3, y_3, θ_3 en utilisant respectivement les relations (III.87), (III.88), (III.89), (III.90)
6. Calcul de l'erreur commise pour cette itération et faire le test de convergence par :

$$ER = \text{Max}[|x_3 - x_3^0|, |T_3 - T_3^0|]$$

Si ($ER \leq Tol$) **alors**

Aller à l'étape 7

Sinon

$$x_3^0 = x_3 \quad ; \quad T_3^0 = T_3$$

$$K = K + 1$$

Aller à l'étape 3

Fin Si

7. Calcul les autres paramètres et affichages des résultats

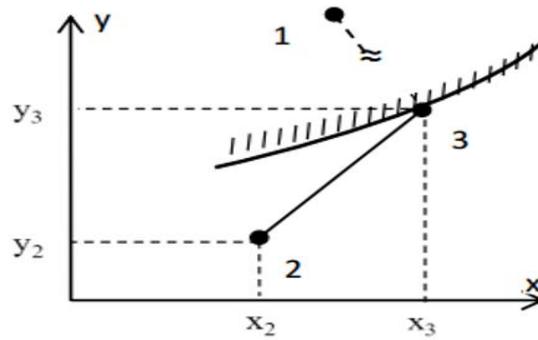


Figure III.14 : Nœud sur une paroi rigide

III.14.5 Autres paramètres

Une fois qu'on a déterminé les propriétés (x , y , T et θ) en un point 3 du champ d'écoulement, on peut déterminer le nombre de Mach M_3 en remplaçant la température $T = T_3$ dans la relation (III.4). Les autres paramètres (rapports des masses volumiques, rapport des pressions, rapport des vitesses du son, vitesse de l'écoulement et composantes de la vectrice vitesse) peuvent être déterminés respectivement par les relations suivantes [36] et [34] :

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_3 = \text{Exp}\left(-\int_{T_3}^{T_0} \frac{Cp(T)}{a^2(T)} dT\right) \quad (\text{III. 91})$$

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)_3 = \left(\frac{T}{T_0}\right)_3 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_3 \quad (\text{III. 92})$$

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)_3 = \frac{a(T_3)}{a(T_0)} = \sqrt{\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \frac{T_3}{T_0}} \quad (\text{III. 93})$$

$$\left(\frac{V}{a_0}\right)_3 = M_3 \left(\sqrt{\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \frac{T_3}{T_0}} \right) \quad (\text{III. 94})$$

$$\begin{cases} \left(\frac{u}{a_0}\right)_3 = M_3 \left(\sqrt{\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \frac{T_3}{T_0}} \right) \cos \theta_3 \\ \left(\frac{v}{a_0}\right)_3 = M_3 \left(\sqrt{\frac{\gamma(T_3)}{\gamma(T_0)} \frac{T_3}{T_0}} \right) \sin \theta_3 \end{cases} \quad (III.95)$$

Dans ce chapitre, on présente les divers résultats obtenus par le programme de calcul élaboré pour la forme de tuyère à détente centrée, ce chapitre est divisé en deux parties, la première Partie IV.1 comporte les résultats obtenus pour la tuyère à détente centrée bidimensionnelle. La deuxième partie IV.2 comporte aussi les résultats obtenus pour la tuyère à détente centrée mais de la géométrie axisymétrique.

L'objectif principal de ce chapitre est la mise en application sur l'ordinateur de la méthode développée. Les résultats trouvés seront présentés sous forme des courbes (des figures). on a choisi la présentation des figures par deux courbes, un pour le cas à Haute température correspondant la variation de la température génératrice, et l'autre pour le cas gaz parfait.

Dans la discussion, on a introduit l'abréviation HT pour le modèle à Haute Température et GP pour le gaz calorifique-ment parfait.

IV.1 Présentation du programme

Le programme de calcul est essentiellement formé d'un programme principal qui nous donne des résultats logiques à l'aide de quinze sous-routines, passant par des étapes logiques d'analyse de l'écoulement dans la partie divergente d'une tuyère supersonique bidimensionnelle et axisymétrique, les résultats obtenus permettent de réaliser un maillage interne à base des valeurs des propriétés pour chaque point de maillage interne, ainsi que les performances de la tuyère.

Le programme principal communique avec quinze sous-routines énumérées leurs fonctions spécifiques ci-dessous :

- ❖ Sous-routine « SIMPSON » : calcul de la valeur d'une intégrale définie d'une fonction par la méthode de Simpson à pas variable.
- ❖ Sous-routine « INTEG_NU (F, A, B, AINTEG_NU) » : pour calculer l'intégrale de la fonction $F_A(T)$, et pour la détermination de la valeur de la fonction de Prandtl-Meyer pour un nombre de Mach donné dans le régime supersonique.
- ❖ Sous-routine « P_INTERNE_P_HT » : pour le calcul des propriétés des points internes pour le cas plan à HT.
- ❖ Sous-routine « P_SYMETRIE_P_HT » : point sur l'axe de symétrie pour le cas plan à HT.
- ❖ Sous-routine « P_INTERNE_A_HT » : pour le calcul des propriétés des points internes pour le cas axisymétrique à HT.

- ❖ Soubroutine « P_SYMETRIE_A_HT » : point sur l'axe de symétrie pour le cas axisymétrique à HT.
- ❖ Soubroutine « P_INTERNE_P_GP » : pour le calcul les propriétés des points internes pour le cas plan à GP.
- ❖ Soubroutine « P_SYMETRIE_P_GP » : point sur l'axe de symétrie pour le cas plan à GP.
- ❖ Soubroutine « P_INTERNE_A_GP » : pour le calcul les propriétés des points internes pour le cas axisymétrique à GP.
- ❖ Soubroutine « P_SYMETRIE_A_GP » : point sur l'axe de symétrie pour le cas axisymétrique à GP.
- ❖ Soubroutine « P_PAROI_A_HT » : point à travers la paroi pour le cas axisymétrique à HT.
- ❖ Soubroutine « P_PAROI_P_HT » : point à travers la paroi pour le cas plan à HT.
- ❖ Soubroutine « P_PAROI_A_GP » : point à travers la paroi pour le cas axisymétrique à GP.
- ❖ Soubroutine « P_PAROI_P_GP » : point à travers la paroi pour le cas plan à GP.
- ❖ Soubroutine « COEF_Y » : pour détermination les constantes nécessaires pour l'interpolation en " cubic spline " de la paroi de la tuyère calculée par le modèle HT.

IV.2 Résultats sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle (2D MLN)

Dans cette partie du chapitre des résultats, on présente les divers résultats obtenus sur la tuyère à détente centrée bidimensionnelle qui a dimensionnée par le modèle HT

IV.2.1 Maillages en caractéristiques

La figure IV.1 représente un type de maillage en caractéristiques dans une tuyère MLN 2D du modèle HT. Avec et sans effet de condensation. Dans ces figures, on a pris l'exemple avec $M_s = 3.00$.

Cette tuyère délivre un écoulement uniforme et parallèle à la section de sortie puisque le gaz à travers la tuyère se comporte comme un gaz parfait suivant le modèle HT. On remarque clairement que la région de l'écoulement est divisée en trois zones comme il est représenté sur la figure IV.1 (région de Kernel, zone de transition, zone uniforme).

Les maillages représentés dans les figures IV.1 et IV.2 sont représentés pour le calcul GP dans une tuyère dimensionnée en utilisant le modèle HT.

Les quatre figures IV.1, IV.2, IV.3 et IV.4 représentent des maillages dans la tuyère MLN 2D lorsque le gaz se comporte comme un gaz parfait et cela pour différents paramètres de maillage ; Dans ce cas on remarque la disparition des trois zones. Alors la figure IV.1.a, représente un maillage avec $N_c = 20 C^-$ à partir du centre de détente et aucune C^- intermédiaire est insérée $N_j = 0$ entre la ligne sonique et la première C^- régulière. Dans ce cas, l'écoulement est mal représenté au voisinage du col ainsi que sur la paroi au voisinage du centre de détente. Dans la figure IV.1.b, on a augmenté le nombre de C^- à partir du centre de détente à $N_c = 80$. Même problème se rencontre au voisinage de la paroi et au col de la tuyère, mais la distance entre la ligne sonique et la première C^- régulière est diminuée. On a augmenté le nombre de C^- sur la figure IV.1.c et IV.1.d, jusqu'à $N_c = 150$ et $N_c = 250$ respectivement, on remarque que la paroi au voisinage du col est bien représentée, la distance entre la ligne sonique et la première C^- régulière est diminuée.

Sur la figure IV.2.a on a pris l'exemple avec un nombre des caractéristiques régulières $Nc = 20$, et le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne sonique et la première caractéristiques descendantes régulières (Nj), est égale à 20.

On remarque clairement pour cet exemple que la paroi de la tuyère est mal représentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première C^- régulière, et pour cela on augmente le nombre des caractéristiques Nc graduellement,

Pour obtenir une bonne présentation de la paroi de la tuyère au voisinage de col et on a essayé de diminuer l'espace entre la ligne sonique et la première C^- régulière.

On a prend le nombre des caractéristique $Nc = 80$, $Nc = 150$, $Nc = 250$ qui a représenté dans les figures IV.2.b, IV.2.c, eIV.2.d respectivement, On remarque que la paroi au voisinage du col est bien présentée, l'écoulement est bien calculée, et la distance entre la ligne sonique et la première C^- régulière est diminuée.

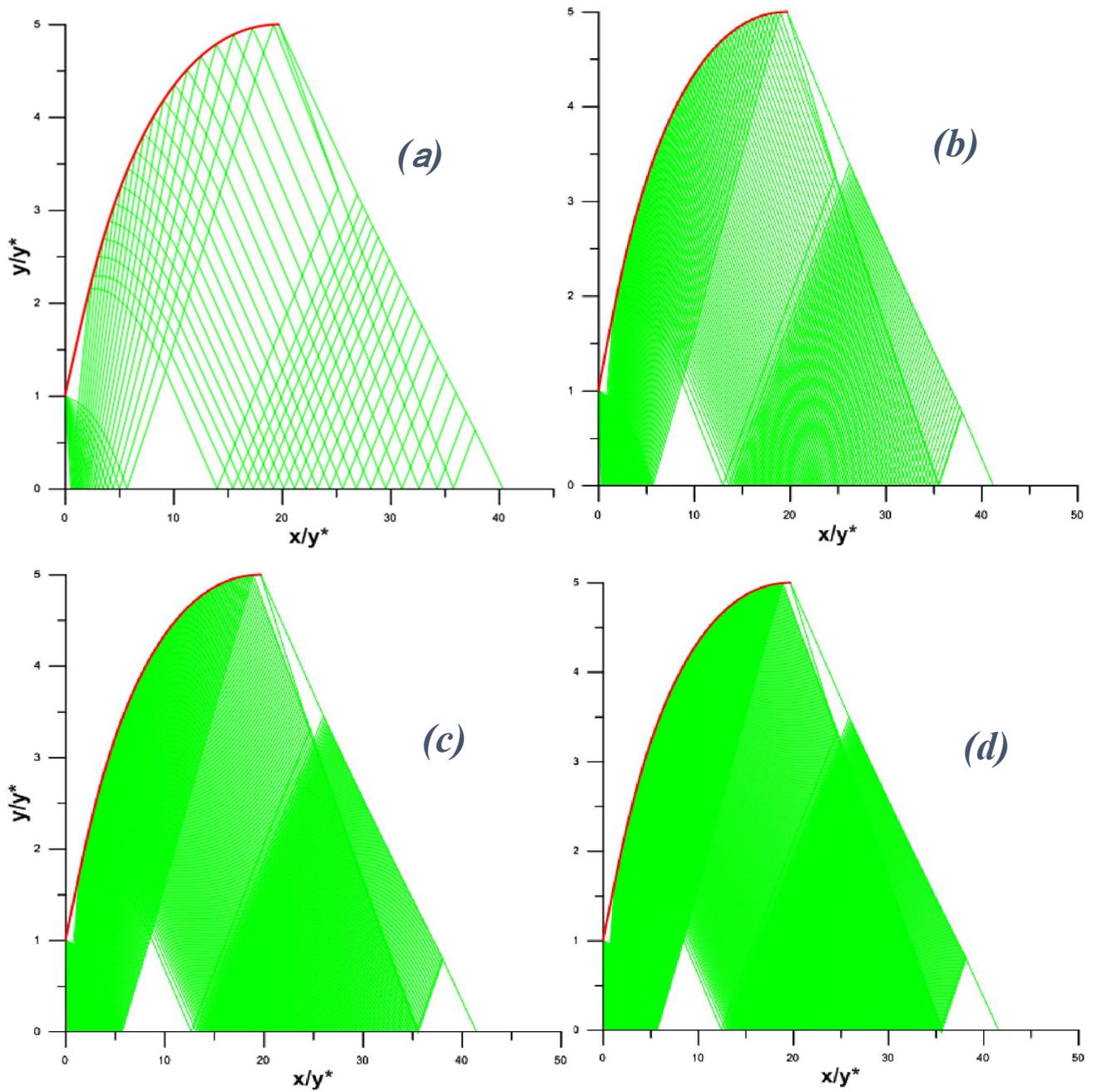


Figure IV.1 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère

MLN 2D avec $Ms = 3.0$, $Nj = 0$

(a) : insertion avec $Nc = 20$. **(b)** : Insertion avec $Nc = 80$.

(c) : Insertion avec $Nc = 150$. **(d)** : Insertion avec $Nc = 250$.

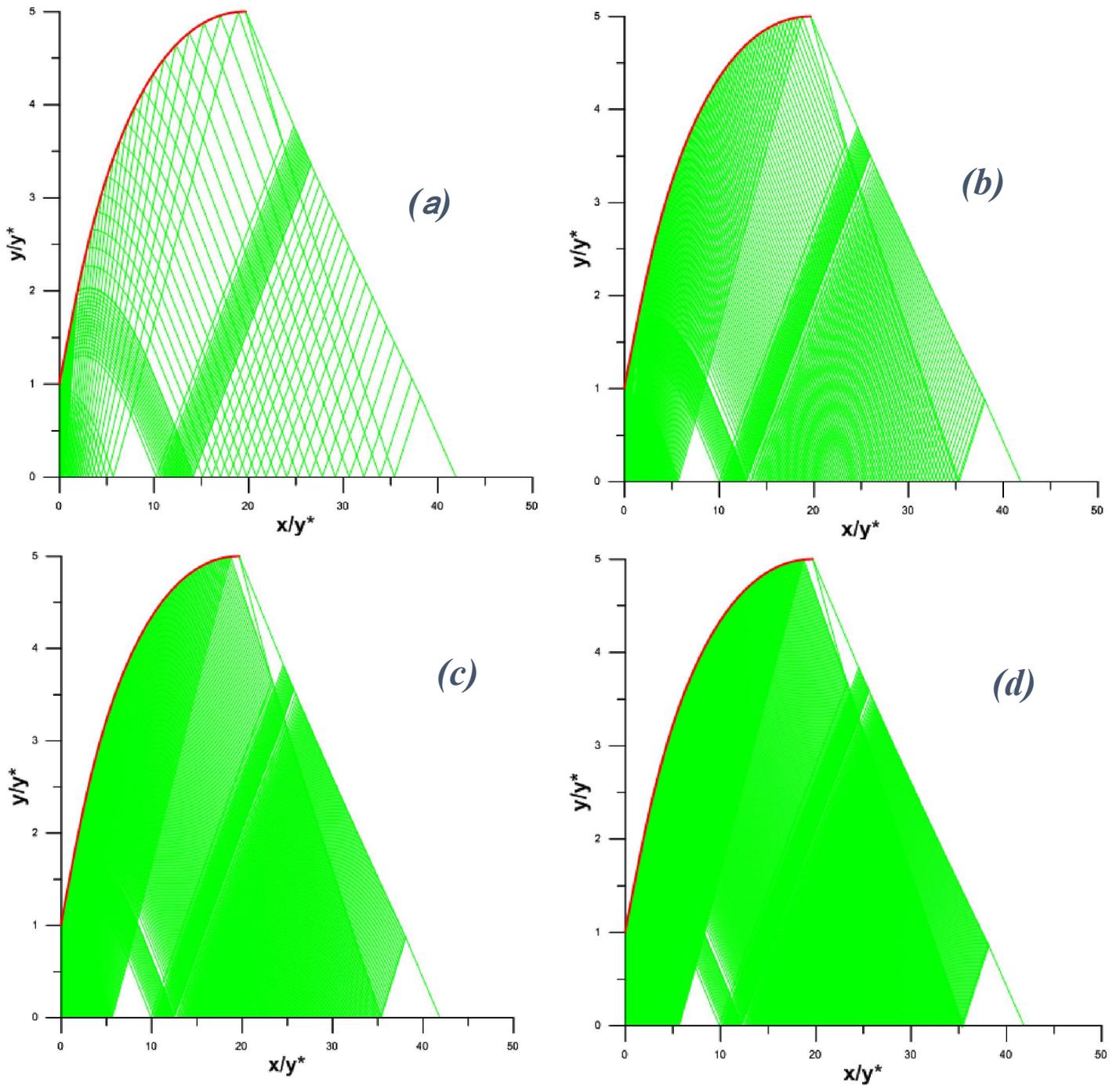


Figure IV.2 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s = 3.0$, $N_j = 20$

(a) : Insertion avec $N_c = 20$. (b) : Insertion avec $N_c = 80$.

(c) : Insertion avec $N_c = 150$. (d) : Insertion avec $N_c = 250$.

La figure IV.3.a Représente un maillage en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée bidimensionnelle pour plusieurs valeurs des C^- respectivement $Nc = 20, 80, 150$ et 250 à partir du centre de détente et la première caractéristique descendante régulière. Le nombre des C^- insérées (Nj) est égal à 100 . Dans ce cas, l'écoulement est bien représenté au voisinage du col ainsi que sur la paroi au voisinage du centre de détente. Dans la figure IV.3.b, on a augmenté le nombre de C^- à partir de centre de détente à $Nc = 80$, Ainsi que l'augmentation du nombre de C^- graduellement sur la figure IV.3.c et IV.3.d jusqu'à $Nc = 150$ et $Nc = 250$ respectivement, On remarque que la paroi au voisinage du col est bien représentée l'écoulement intérieur de la tuyère. La distance entre la ligne sonique et la première C^- régulière est diminuée.

La figure IV.4.a Représente un maillage en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée bidimensionnelle, on a fixé le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne de sonique et la première caractéristiques descendantes régulières (Nj) est égale à 250 . Puis on pose le nombre des caractéristiques régulières $Nc = 20$, On remarque clairement pour cet exemple que la paroi de la tuyère est bien présentée au voisinage du col, en outre on a augmenté le nombre des caractéristique graduellement comme nous voyons dans la figure IV.4.b, ($Nc = 80$), et la figure IV.4.c, ($Nc = 150$), et la figure IV.4.d, ($Nc = 250$), On remarque que la paroi au voisinage du col est bien représentée de l'écoulement intérieur de la tuyère. La distance entre la ligne sonique et la première C^- régulière est diminuée de façon bien que les figures précédente.

On remarque à partir de ce que nous avons fait qu'à chaque fois qu'on augmente graduellement le nombre des caractéristiques régulières Nc le problème est réglé graduellement, surtout si on augmente le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne sonique, et la première caractéristique descendante régulière Nj .

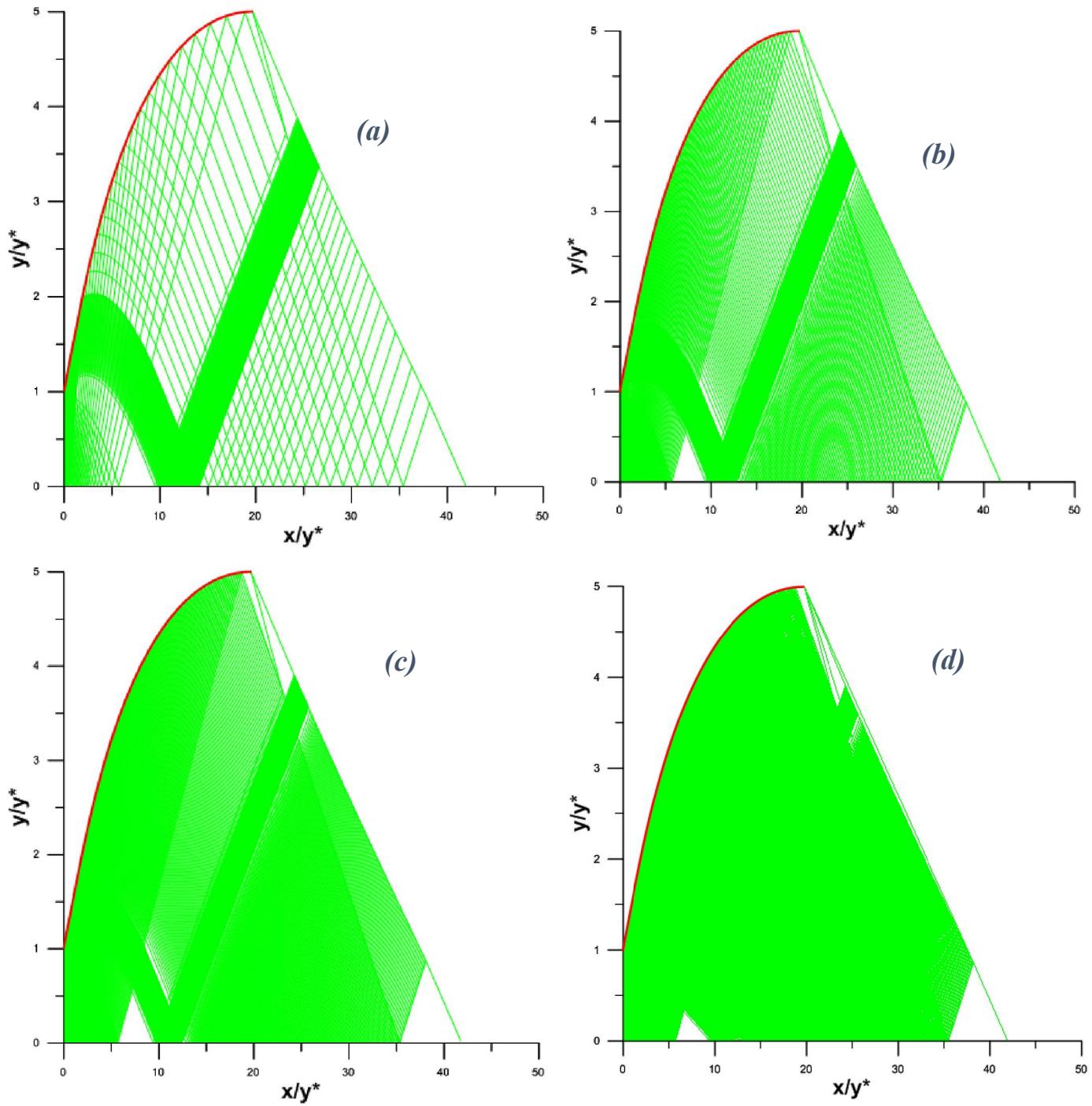


Figure IV.3 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère *MLN 2D* avec $Ms = 3.0$. $N_j = 100$.

(a) : insertion avec $N_c = 20$. **(b)** : Insertion avec $N_c = 80$.

(c) : Insertion avec $N_c = 150$. **(d)** : Insertion avec $N_c = 250$.

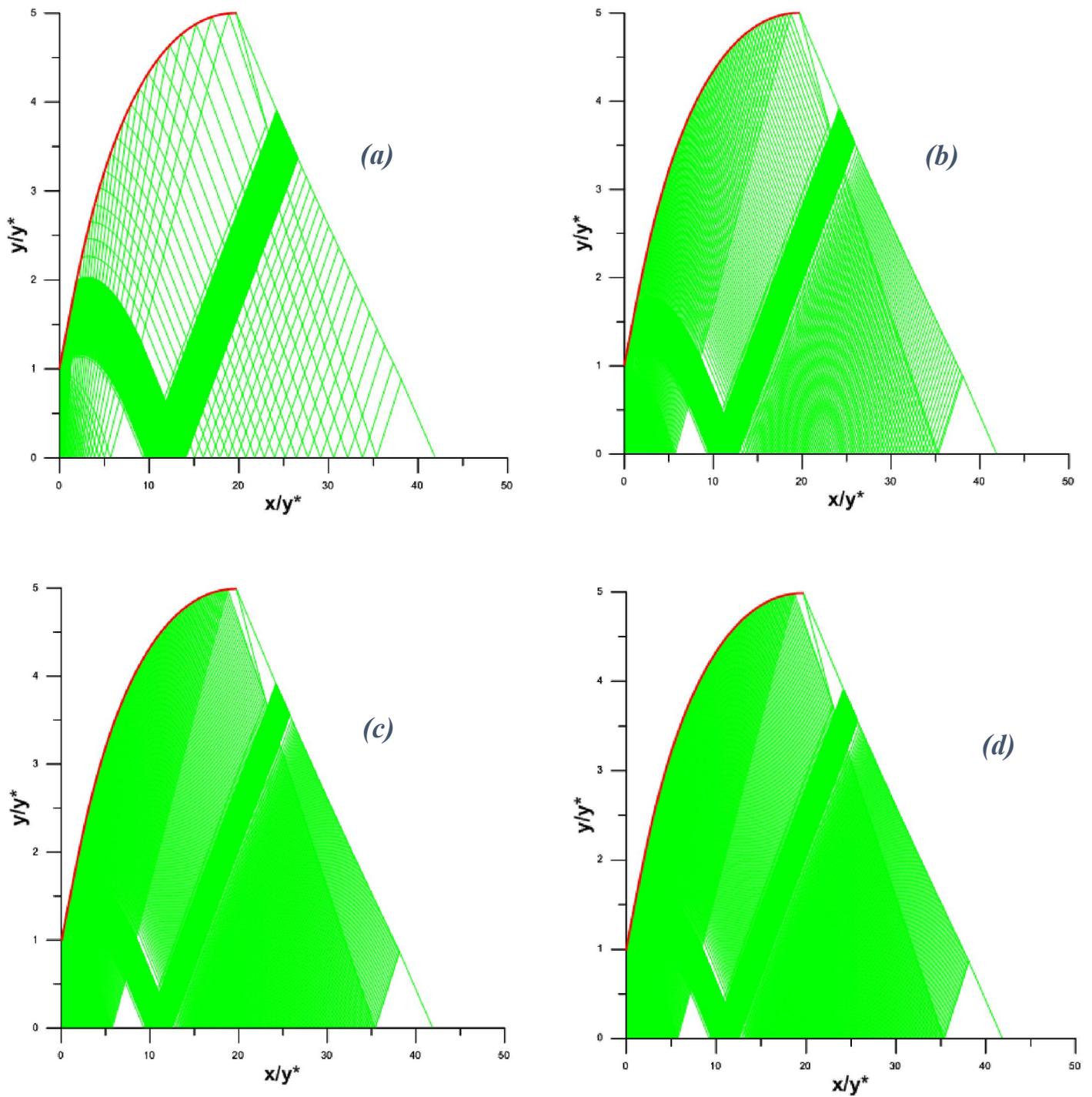


Figure IV.4 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère, $MLN\ 2D$ avec $Ms = 3.0$, $Nj = 250$.
(a) : insertion avec $Nc = 20$. **(b) :** Insertion avec $Nc = 80$.
(c) : Insertion avec $Nc = 150$. **(d) :** Insertion avec $Nc = 250$.

IV.2.2 Variations des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère

La figure IV.5 représente la variation du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie de la tuyère MLN 2D. En considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du nombre de Mach lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $M_s = 3.00$. Dans la région Kernel, on remarque que les courbes du nombre de Mach sur modèle HT et sur modèle GP sont presque confondues pour $T_0 = 1000 K$, par contre pour $T_0 = 2000 K$, et $T_0 = 3000 K$, on observe une séparation entre les deux courbes, il dépend de la température génératrice. Telle qu'on voit que chaque augmentation de cette dernière, la séparation devient plus large, de telle façon que la courbe GP est supérieure à la courbe HT, ce qui montre l'influence de la température génératrice sur le nombre de Mach dans cette zone.

Dans la zone uniforme, on remarque que la courbe du nombre de Mach pour le modèle HT prend une forme constante jusqu'à la section de sortie ($M = 3$), pour les trois variations de température génératrice, par contre M sur le modèle GP est supérieur à celui sur le modèle HT à cause de l'espace de la tuyère qui a été trouvée, et lorsque la température génératrice augmente, le nombre de Mach devient plus grand, ce qui montre l'influence de T_0 .

Donc le modèle GP augmente les performances notamment le nombre de Mach de sortie. Autrement dit le fluide trouve un espace assez large pour faire la détente GP jusqu'à le nombre de Mach de sortie,

Dans la tuyère dimensionnée par le modèle HT. A titre d'information on a remarqué une augmentation du coefficient de poussée pour le modèle GP par rapport au modèle HT. Les valeurs trouvées sont $CF=0.338$ pour le HT et $CF=0.389$ pour le modèle GP.

✚ Nombre de Mach

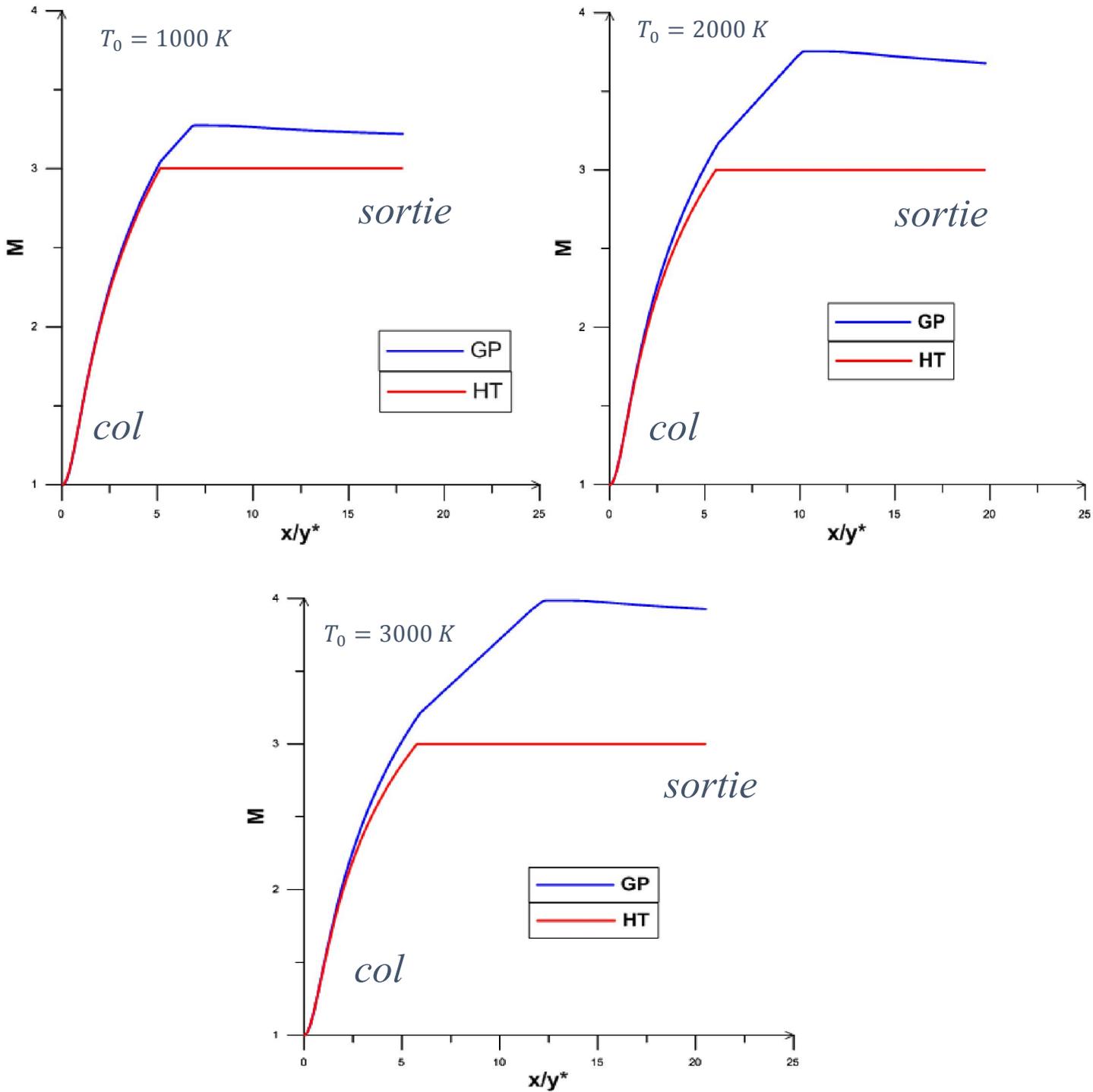


Figure IV.5 : Variation de nombre de Mach le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $M_s = 3.00$.

La figure IV.6 représente la variation du rapport des températures le long de l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base de la modèle haute température. En considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des températures lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On remarque une diminution du rapport de température ($\frac{T}{T_0}$) juste après la détente au col sur les deux modèles HT et GP, mais dans ce dernier, il est diminué de façon plus forte que sur le modèle HT dans chaque augmentation de température génératrice $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, et $T_0 = 3000 K$.

Dans la zone uniforme, la diminution du rapport de température, devient moins importante par rapport à la région de Kernel, et on voit que la diminution sur le modèle GP est plus que celle sur le modèle HT, telle que sur ce dernier le rapport reste presque constante jusqu'à la section de sortie.

D'après les trois graphes du rapport de température pour $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$ et $T_0 = 3000 K$, on remarque une différence entre les courbes sur modèle HT et GP à lui-même, telle que pour le HT, on voit que à chaque augmentation de température génératrice on a une augmentation du rapport de température, mais pour le modèle GP on voit que à chaque augmentation de T_0 on obtient une diminution du rapport de température, ce qui montre l'influence de température génératrice.

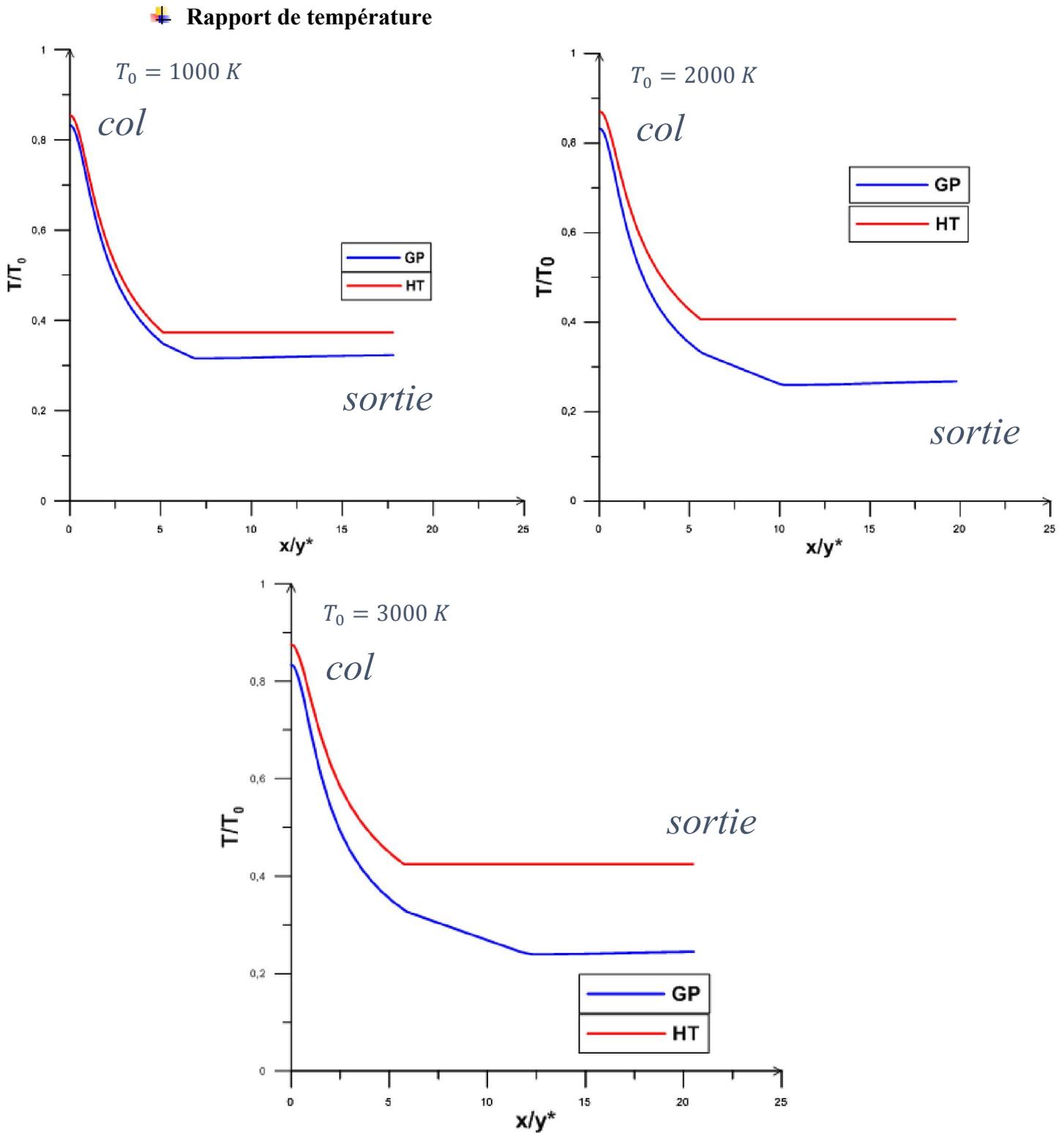


Figure IV.6 : Variation du rapport de température le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

La figure IV.7 représente la variation du rapport des Masses Volumiques sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle HT et on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des Masses Volumiques lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On remarque clairement une diminution très important de la valeur du rapport des masses volumiques, sur les deux modèles HT et GP, juste après la détente au col, et au niveau de la région de Kernel, et dans ce dernier les deux courbes sont confondues, pour les trois valeurs de température génératrice.

Dans la zone uniforme, on voit que le rapport de masse volumique rentre dans la phase de stabilité sur les deux modèle GP et HT, avec une petite déférence entre les deux modèle lorsque $T_0 = 1000 K$, par contre lorsque $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, on observe que le rapport de masse volumique sur le modèle GP diminue quand la température génératrice augmente.

D'après ces graphes, on constate que la température génératrice influe sur le rapport de la masse volumique.

La figure IV.8 représente la variation du rapport de pression le long de l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base du modèle HT, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport de pression lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On voit clairement une diminution très important de la valeur du rapport de pression ($\frac{P}{P_0}$), sur les deux modèles HT et GP dans la région de Kernel, et dans cette région les deux courbes sont confondues, pour les trois valeurs de température génératrice.

A travers la zone uniforme, on remarque que le rapport de pression sur le modèle HT est reste inchangé pour trois valeurs de température génératrice, ce qui montre le non influence de température T_0 sur le rapport dans cette zone, par contre on observe que le rapport de pression sur le modèle GP, est diminué à chaque augmentation de température génératrice, ce qui montre l'influence de T_0 sur le modèle GP.

✚ Rapport de masse volumique

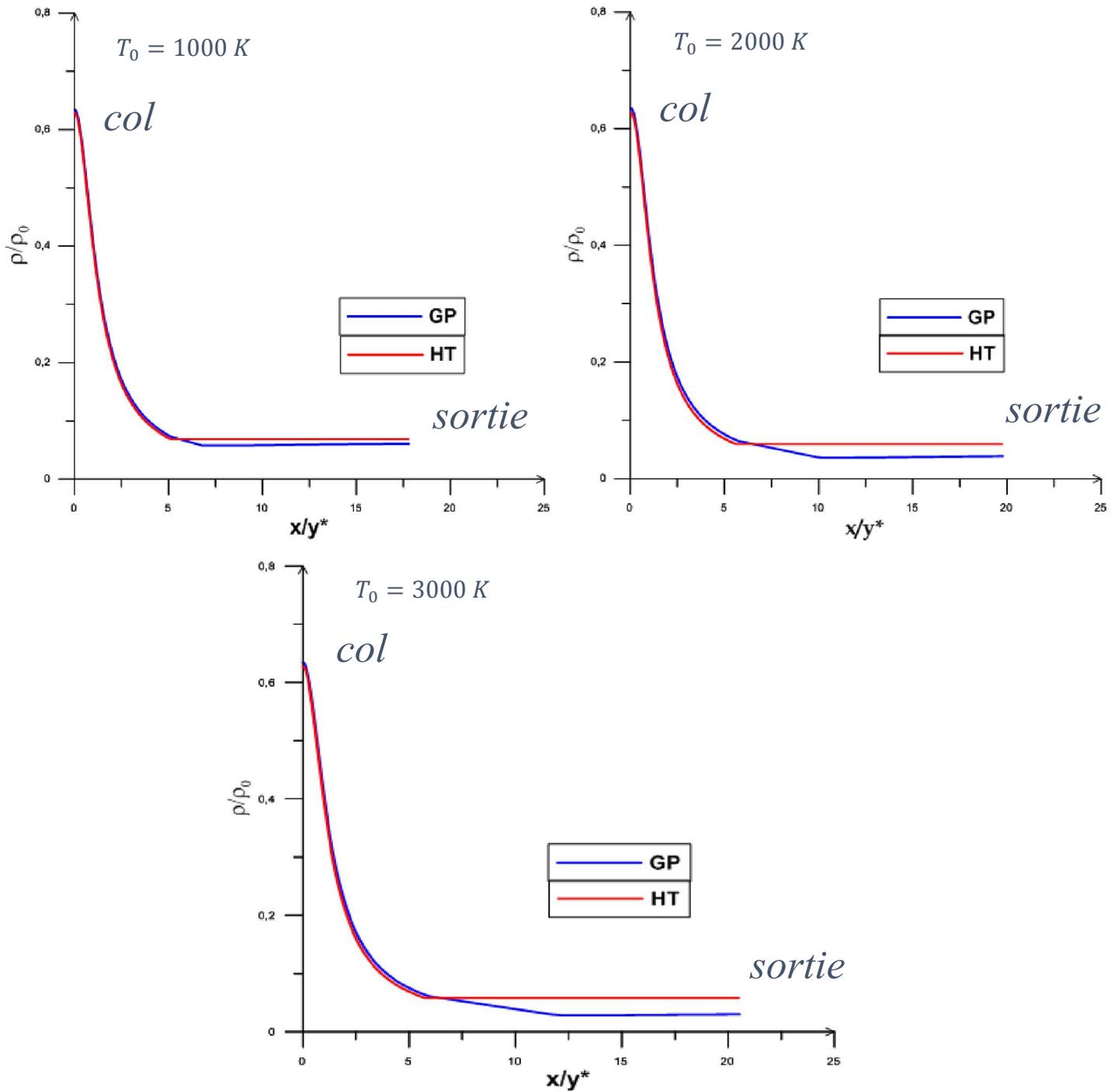
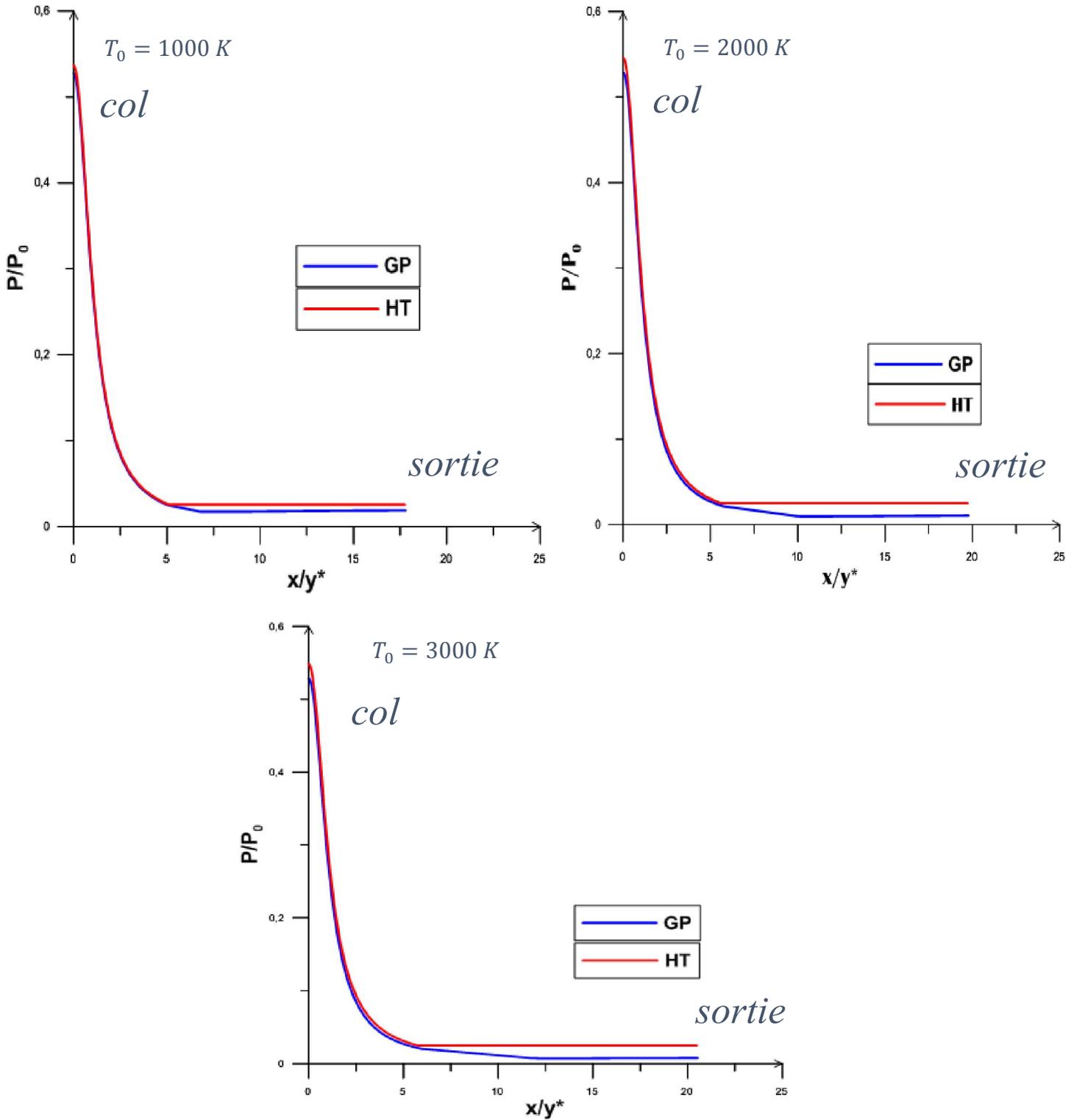


Figure IV.7 : Variation du rapport de masse volumique le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

✚ Rapport de pression



FigureIV.8 : Variation du rapport de pression le long de axe de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

IV.2.3 Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère

La figure IV.9 représente la variation de nombre de Mach M le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base de la modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du nombre de Mach lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $M_s = 3.00$.

On remarque une augmentation brusque du nombre de Mach sur les deux modèle HT et GP, au niveau de col de $M = 1.00$ jusqu'à $M = 1.941$ pour $T_0 = 1000 K$, et $M = 1.962$ pour $T_0 = 2000 K$, et $M = 1.970$ pour $T_0 = 3000 K$.

Juste après la détente au col le nombre de Mach sur le modèle GP est augmentée de façon très importante, et cette augmentation devient plus importante si la température génératrice augmente.

Dans la zone uniforme le nombre de Mach continue à augmenter sur les deux modèles jusqu'à la section de sortie, mais on voit que M sur le modèle GP reste toujours supérieur à celui sur modèle HT, telle que la courbe de ce dernier prendre une forme presque inchangeable avec la variation de température génératrice, par contre le nombre de Mach sur le modèle GP est devient plus important lorsque T_0 augmente.

Au niveau de section de sortie, on remarque le nombre de Mach augmente graduelle avec une détente assez brusque sur le modèle GP, ce qui montre l'existence d'un espace très large dans la tuyère au niveau de cette zone, on remarque aussi que lorsque T_0 augmente le nombre de Mach augmente, telle que $M = 3.384$ pour $T_0 = 1000 K$, et $M = 4.051$ pour $T_0 = 2000 K$, et $M = 4.407$ pour $T_0 = 3000 K$, ce qui montre l'influence de température de chambre de combustion.

Donc le modèle GP augmente les performances notamment le nombre de Mach de sortie, On voit que Plus T_0 augmente, la forme de la tuyère qui adimensionnée par HT est augmenté, plus le nombre de Mach sur l'axe de symétrie à la section de sortie est augmenté, Autrement dit la détente GP devient complète dans la tuyère dimensionnée par le modèle HT. Ce qui permet de donnée l'espace suffisent pour avoir une détente complète jusqu'à donner le nombre de Mach de sortie désiré.

✚ Nombre de Mach

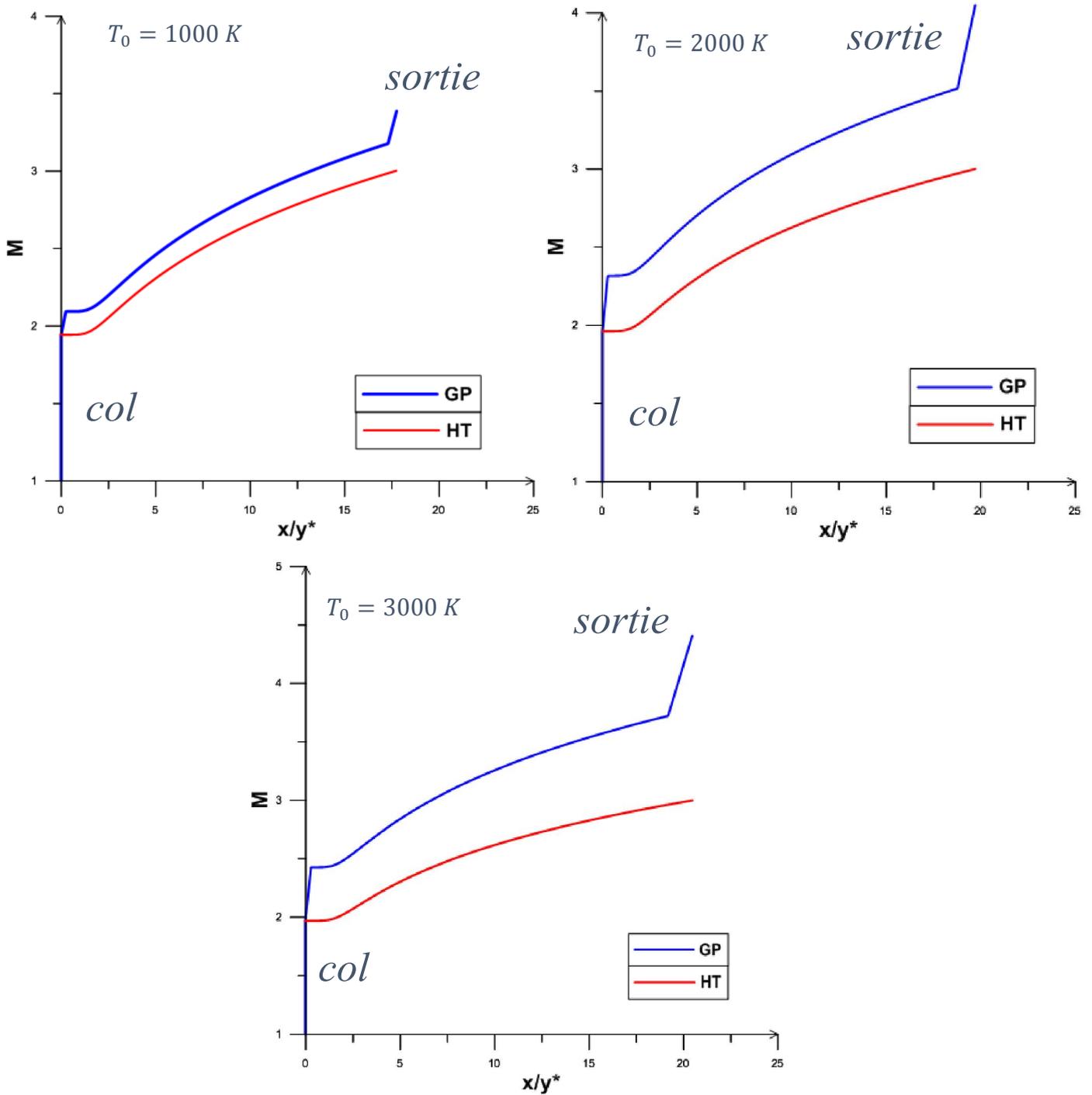


Figure IV.9 : Variation de nombre de Mach le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $Ms = 3.00$.

La variation du rapport de température (T/T_0) nous donne une indication sur le choix convenable du matériau de la construction qui va résister à cette température. Ce rapport nous sert encore pour déterminer la condition au limite interne du modèle mathématique du transfert de chaleur à travers le matériau utilisé pour la construction de la tuyère.

La figure IV.10 représente la variation du rapport de température le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base de la modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des températures lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

Au niveau de col, on remarque une chute du rapport de température sur le modèle GP et HT, de $\frac{T}{T_0} = 0.853$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.596$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{T}{T_0} = 0.868$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.625$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{T}{T_0} = 0.874$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.637$ pour $T_0 = 3000 K$, telle que les deux courbes sont confondues.

Après le col, on voit clairement que les deux courbes diminuent graduellement jusqu'à la section de sortie, Plus le nombre Mach augmente plus le rapport de température diminue, de telle manière le rapport sur le modèle GP inférieur à celui sur le modèle HT.

On remarque aussi que la dégradation du rapport de température devient plus moins à chaque augmentation de température génératrice pour le modèle HT, mais pour le modèle GP la diminution de rapport de température devient plus importante si T_0 augmente, ce qui montre l'influence de température génératrice.

Au niveau de section de sortie de la tuyère à travers la paroi, on remarque une diminution assez brusque du rapport de température sur le modèle GP, telle que $\frac{T}{T_0} = 0.317$ pour $T_0 = 1000 K$, et $\frac{T}{T_0} = 0.264$ pour $T_0 = 2000 K$, et $\frac{T}{T_0} = 0.244$ pour $T_0 = 3000 K$, on voit que cette diminution devient très importante lorsque la température de chambre de combustion augmente, on justifie sa par l'augmentation de nombre de Mach au niveau dans cette zone.

✚ Rapport de température

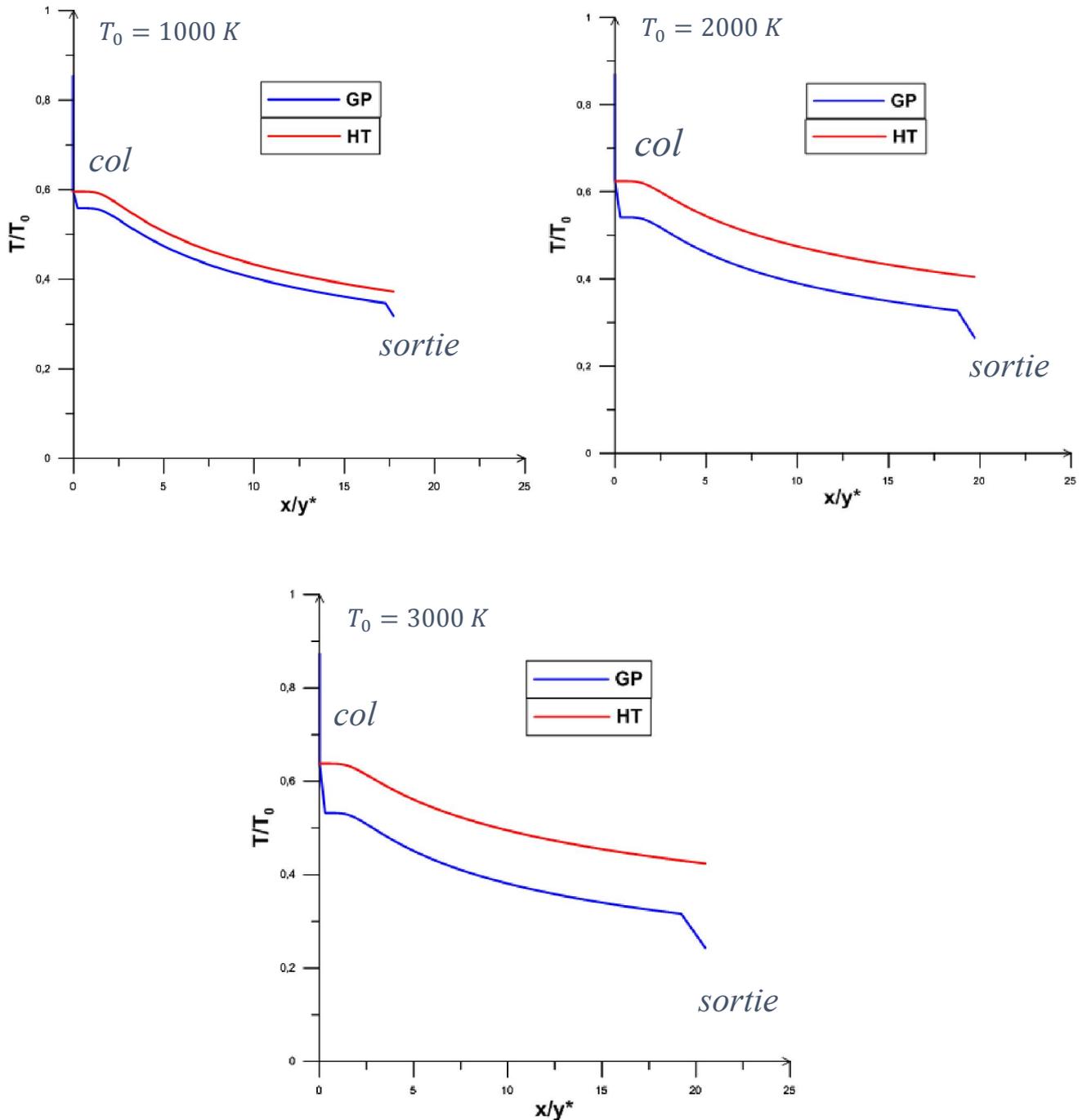


Figure IV.10 : Variation du rapport de température le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

La variation de rapport des Masses Volumiques nous donne une indication sur la quantité du gaz qui va traverser le divergent afin de déterminer la durée de la vie du carburant. Encore il servira pour l'obtention du rapport des pressions.

La figure IV.11 représente la variation du rapport du masse volumique le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base de la modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des Masses Volumiques lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

Au niveau du col on remarque une chute du rapport de masse volumique pour les deux modèles HT et GP, $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.629$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.233$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.627$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.218$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.626$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.213$ pour $T_0 = 3000 K$, telle que les deux courbes sont confondues, après la diminution devient graduelle dans la région de Kernel et la zone uniforme. De telle manière que le rapport de masse volumique sur le modèle GP inférieur à celui pour le modèle HT, l'espace entre les deux courbes devient plus large lorsque T_0 augmente, ce qui montre l'influence de température génératrice.

La figure IV.12 représente la variation du rapport de pression le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée bidimensionnelle dimensionnée sur la base de la modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport de pression lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$

on voit une chute du rapport de pression pour les deux modèles HT et GP, $\frac{P}{P_0} = 0.536$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.139$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{P}{P_0} = 0.544$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.136$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{P}{P_0} = 0.547$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.136$ pour $T_0 = 3000 K$, les mêmes remarques de la masse volumique sur la figure IV.11 sont présentes dans ce cas. Nous servira pour déterminer la force de pression exercée sur la paroi du divergent. Cette figure indique une chute de pression à travers le divergent qui va délivrer une force de pression. Ce rapport servi encore pour faire l'étude sur la distribution de la contrainte radiale et tangentielle, pour but d'étudier la résistance du matériau, on remarque l'effet de température, La pression rentre dans le cadre de calcul de coefficient de poussé.

✚ Rapport de masse volumique

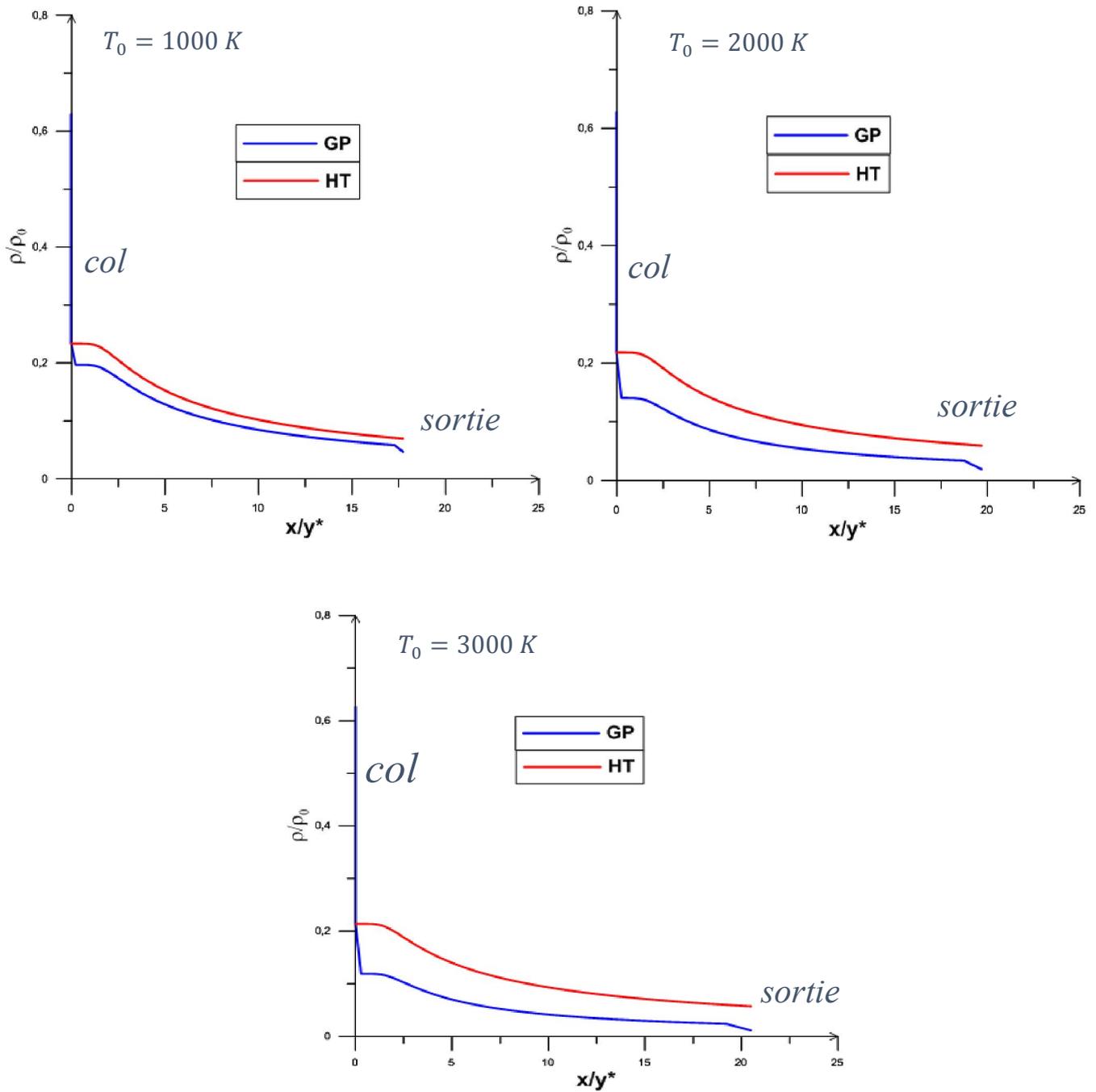


Figure IV.11 : Variation du rapport de masse volumique le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

✚ Rapport de pression

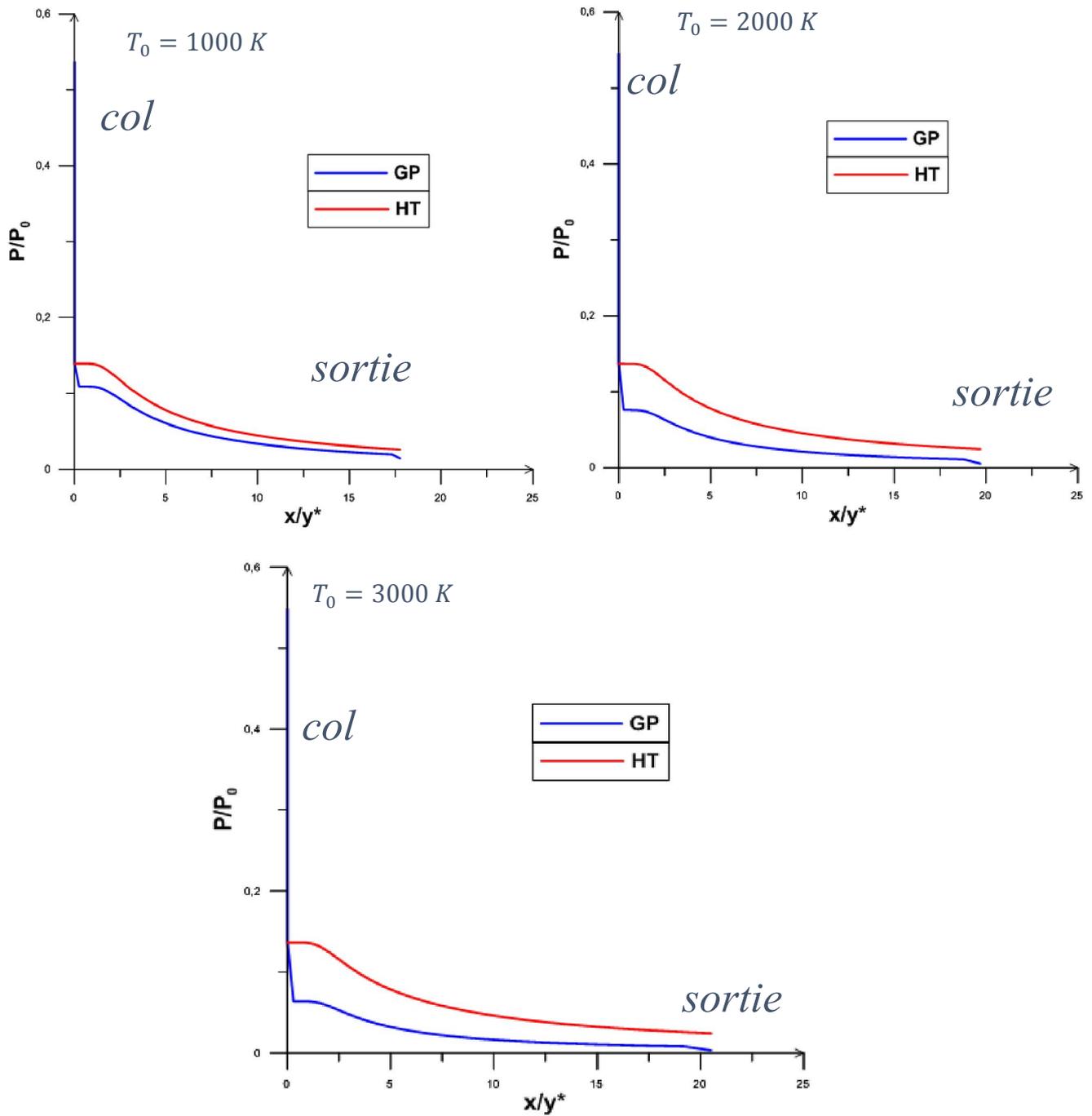


Figure IV.12 : Variation du rapport de pression le long de paroi de la tuyère MLN 2D dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms = 3.00$.

IV.3 Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique

Dans cette partie, on va présenter les divers résultats de dimensionnement et de Conception des tuyères à détente centrée de géométrie axisymétrique.

IV.3.1 Maillages en caractéristiques

Les figures IV.13, IV.14 représenté des maillages en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée axisymétrique, on a pris l'exemple avec $M_s = 3.00$ et $T_0 = 2000K$.

La figure IV.13 Représente un maillage en caractéristiques dans une tuyère à détente centrée axisymétrique pour plusieurs valeurs des C^- , si on utilise l'insertion progressive des Caractéristiques supplémentaires dans la région de Kernel entre la ligne sonique et la première C^- régulière. On a fixé Le nombre des caractéristiques insérées entre la ligne sonique et les premières caractéristiques descendantes régulières, telle qu'on pose $N_j = 0$, puis on change le nombre des caractéristiques régulières graduellement, comme on voit dans la figure IV.13.a ($N_c = 10$), on remarque que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre les lignes sonique et les premières C^- régulière, et même chose pour la figure IV.13.b ($N_c = 50$). Mais on remarque que l'espace diminue un peu par rapport au cas président, pour les figures IV.13.c et IV.13.d, ($N_c = 100$), et ($N_c = 200$) respectivement, on remarque clairement pour cet exemple que La distance entre la ligne sonique et le première C^- régulière est diminuée, de façon remarquable par rapport à les autres exemples, et voit aussi que la paroi est bien présentée.

La figure IV.14 représente de maillage obtenu si on utilise l'insertion progressive des Caractéristiques supplémentaires dans la région de Kernel, entre la ligne sonique et la première C^- régulière.

Dans cette figure on a augmenté le nombre N_c , mais cette fois on pose $N_j = 10$, et on change le nombre des caractéristiques régulières graduellement « figure IV.14.a ($N_c = 10$) », on remarque que la paroi de la tuyère est mal présentée au voisinage du col, ainsi qu'un espace large entre la ligne sonique et la première C^- régulière. Et de même chose pour la figure IV.14.b ($N_c = 100$), mais on remarque que l'espace diminue un peu par rapport au cas présidente, pour les figures IV.14.c et IV.147.d, ($N_c = 150$) et ($N_c = 200$) respectivement. On remarque clairement pour cet exemple que La distance entre la ligne sonique et le première C^- régulière est diminuée, de façon remarquable par rapport à les autres exemples, et voit aussi que la paroi est bien présentée.

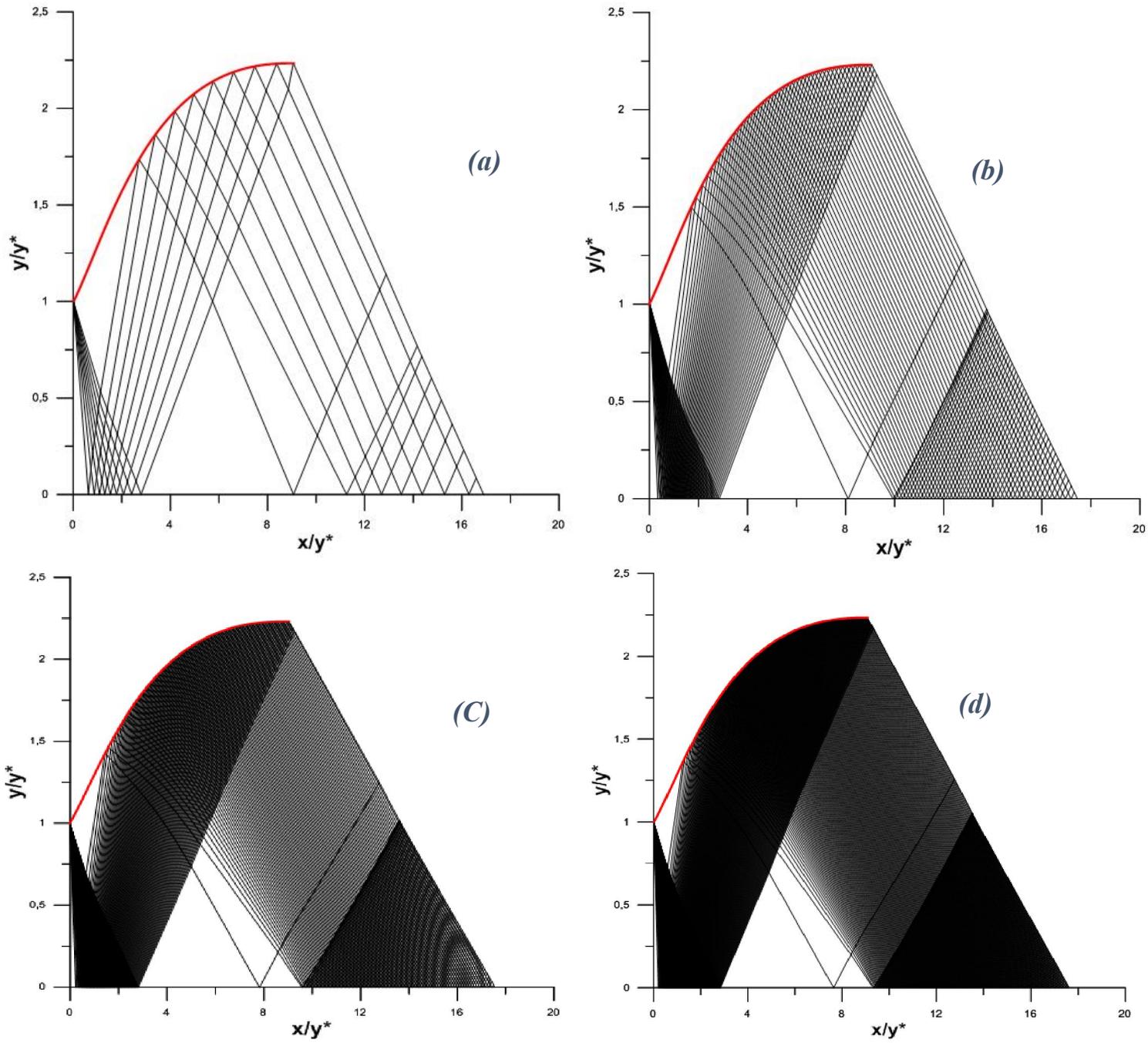


Figure IV.13 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms = 3.0, Nj = 0$

(a) : insertion avec $Nc = 10$. **(b)** : Insertion avec $Nc = 50$.

(c) : Insertion avec $Nc = 100$. **(d)** : Insertion avec $Nc = 200$.

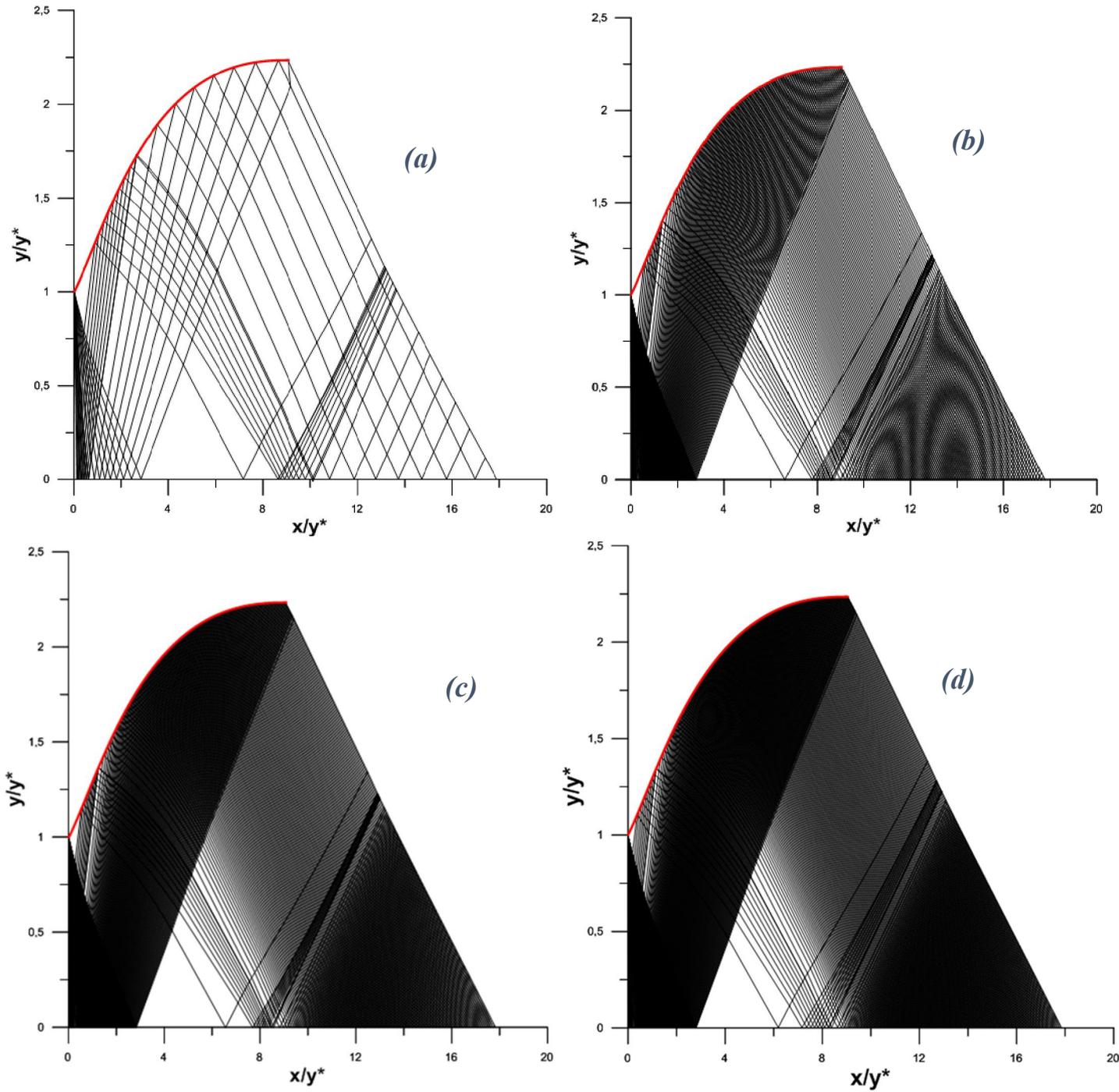


Figure IV.14 : Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN axisymétrique avec $Ms = 3.0$, $Nj = 10$, avec

(a) : insertion avec $Nc = 10$. **(b)** : Insertion avec $Nc = 100$.

(c) : Insertion avec $Nc = 150$. **(d)** : Insertion avec $Nc = 200$.

IV.3.2 Variation des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère

La figure IV.15 représente la variation du nombre de Mach le long de l'axe de symétrie de tuyère MLN axisymétrique, En considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation de nombre de Mach lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $M_s = 3.00$.

Dans la région de Kernel, on a une augmentation graduelle, telle que on remarque que les deux courbes du nombre de Mach sur modèle HT et sur modèle GP sont presque confondues pour $T_0 = 1000 K$, par contre pour $T_0 = 2000 K$, et $T_0 = 3000 K$, on observe une séparation entre les deux courbes, il dépende de la température génératrice. Telle qu'on voit que chaque augmentation de cette dernière, la séparation devient plus large, de telle façon que la courbe GP supérieur à la courbe HT, ce qui montre l'influence de température génératrice sur le nombre de Mach dans cette zone.

Dans la zone uniforme, on remarque que la courbe du nombre de Mach pour le modèle HT prendre une forme constante jusqu'à la section de sortie ($M = 3$), pour les trois variations de température génératrice, par contre M sur le modèle GP est supérieur à celui sur le modèle HT à cause de l'espace de la tuyère qui a trouvée, et lorsque la température génératrice augmente, le nombre de Mach devient plus grand, ce qui montre l'influence de T_0 .

Donc le modèle GP augmente les performances notamment le nombre de Mach de sortie. Autrement dit le fluide trouve un espace assez large pour faire la détente GP complet jusqu'à le nombre de Mach de sortie.

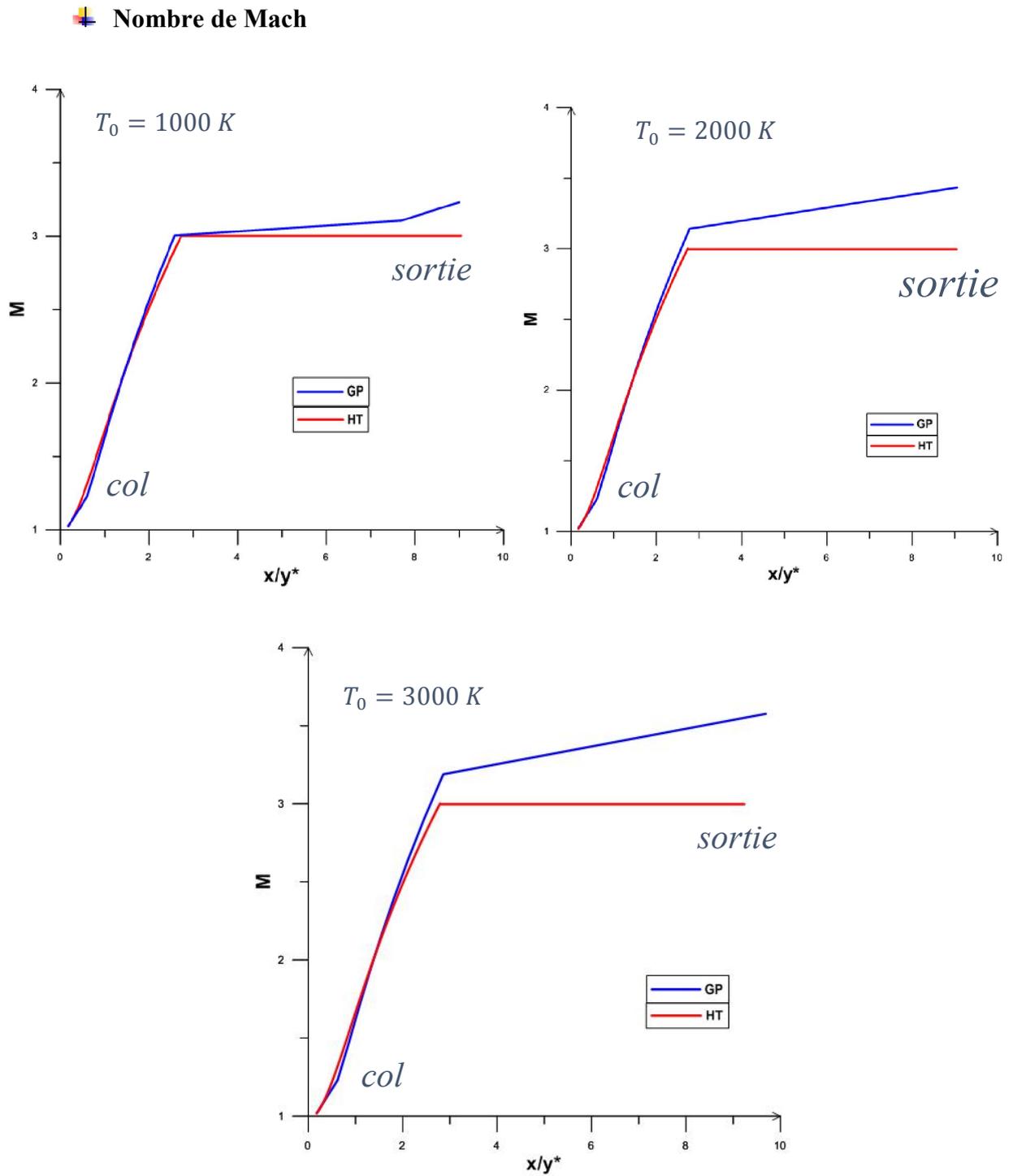


Figure IV.15 : Variation du nombre de Mach le long de axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $M_s=3.00$.

La figure IV.16 représente la variation du rapport des températures le long de l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle haute température. En considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport de température lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$, donnant $Ms = 3.00$.

On voit une diminution graduelle du rapport $(\frac{T}{T_0})$ juste après la détente au col sur les deux modèles HT et GP, pour $T_0 = 1000\text{ K}$ on remarque que les courbes sont confondues, mais pour $T_0 = 2000\text{ K}$ et $T_0 = 3000\text{ K}$ les deux courbes sont séparées, de telle manière que le rapport de température sur le modèle GP est inférieur à celui pour le modèle HT, ce qui montre l'influence de température génératrice.

Dans la zone uniforme, la diminution du rapport de température, devient moins importante par rapport à la région de Kernel, et on voit que la diminution sur le modèle GP est plus que celle sur le modèle HT, telle que sur ce dernier le rapport reste presque constante jusqu'à la section de sortie.

On justifie cette diminution du rapport de température par l'augmentation de nombre de Mach au niveau de la tuyère qui a été dimensionnée par le modèle HT.

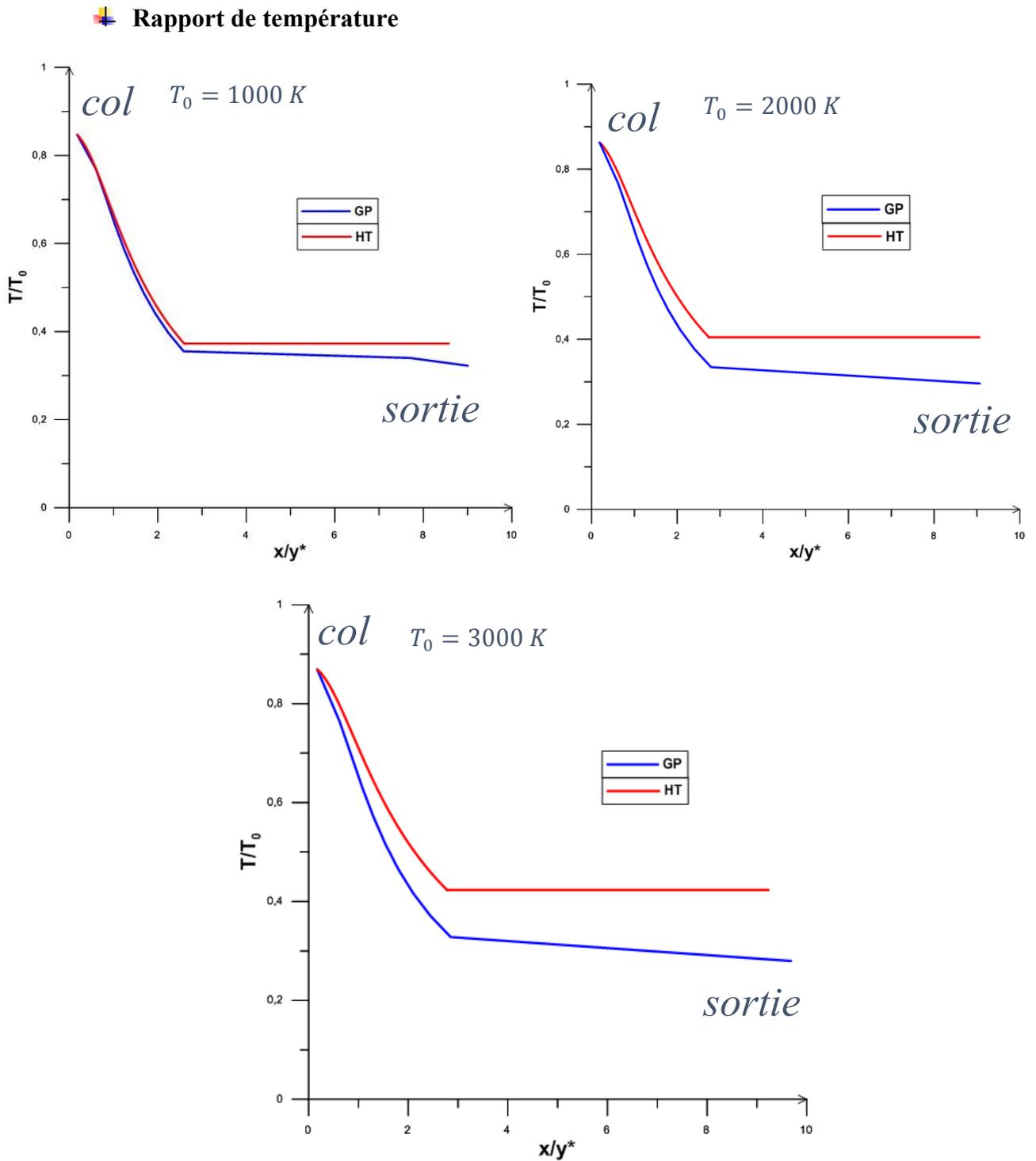


Figure IV.16 : Variation du rapport de température le long de l'axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms=3.00$.

La figure IV.17 représente la variation du rapport des Masses Volumiques sur l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle HT et on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des Masses Volumiques lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On remarque une diminution très important de la valeur du rapport des masses volumiques, sur les deux modèles HT et GP, juste après la détente au col, et au niveau de la région de Kernel, et dans ce dernier les deux courbes sont confondues, pour les trois valeurs de température génératrice.

Dans la zone uniforme, on remarque que le rapport de masse volumique rentre dans la phase de stabilité sur les deux modèle GP et HT, avec une petite déférence entre les deux modèle lorsque $T_0 = 1000 K$, par contre lorsque $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, on observe que le rapport de masse volumique sur le modèle GP diminue quand la température génératrice augmente.

D'après ces graphes, on constate que la température génératrice influe sur le rapport de la masse volumique.

La figure IV.18 représente la variation du rapport de pression le long de l'axe de symétrie de la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle HT, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport de pression lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On voit clairement une diminution très important de la valeur du rapport de pression ($\frac{P}{P_0}$), sur les deux modèles HT et GP dans la région de Kernel, et dans cette région les deux courbes sont confondues, pour les trois valeurs de température génératrice.

A travers la zone uniforme, on remarque que le rapport de pression sur le modèle HT est reste inchangé pour trois valeurs de température génératrice, ce qui montre le non influence de température T_0 sur le rapport dans cette zone, par contre on observe que le rapport de pression sur le modèle GP, est diminué à chaque augmentation de température génératrice, ce qui montre l'influence de T_0 sur le modèle GP.

✚ Rapport de masse volumique

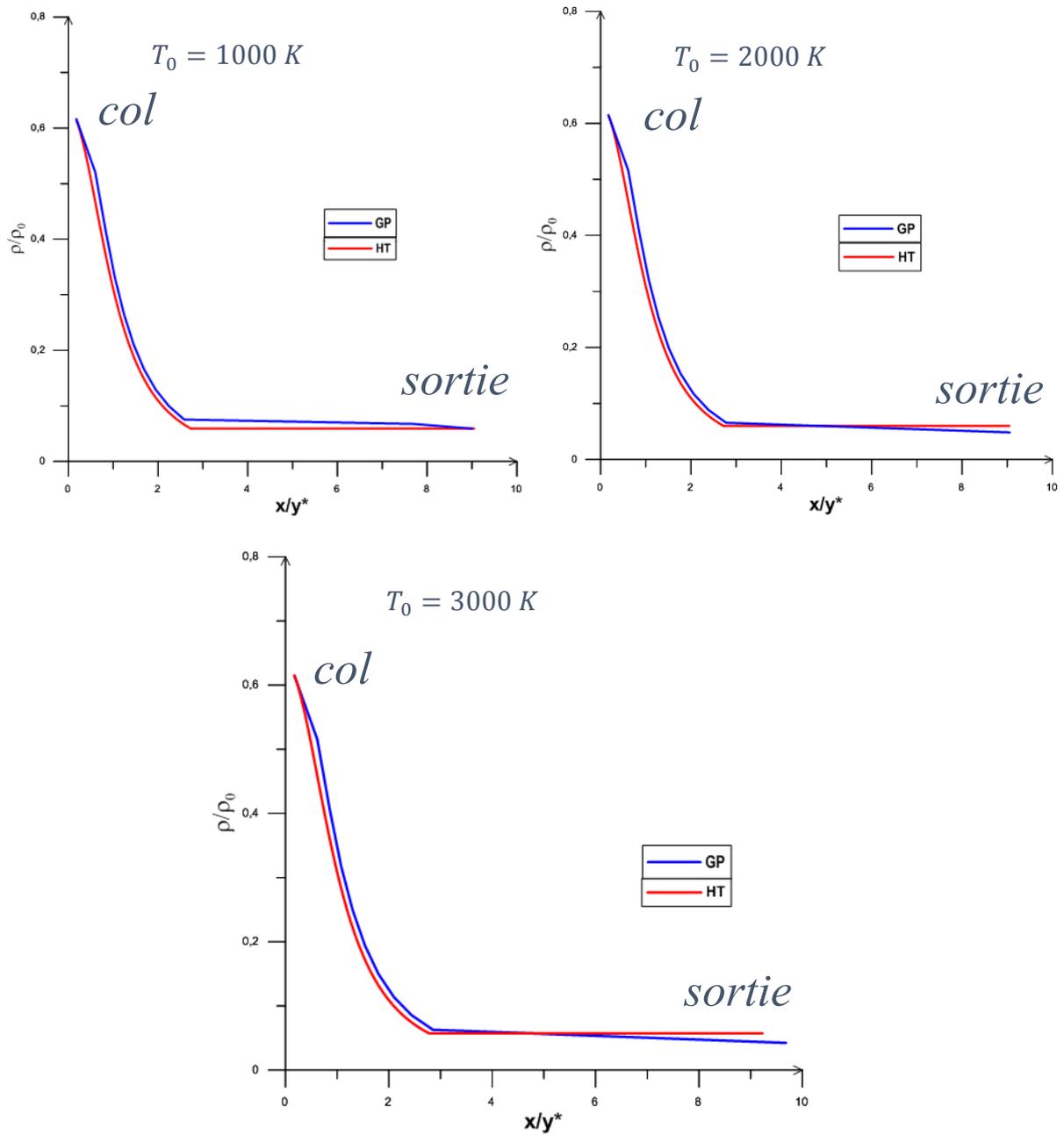


Figure IV.17 : Variation du rapport de masse volumique le long de axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $M_s=3.00$.

✚ Rapport de pression

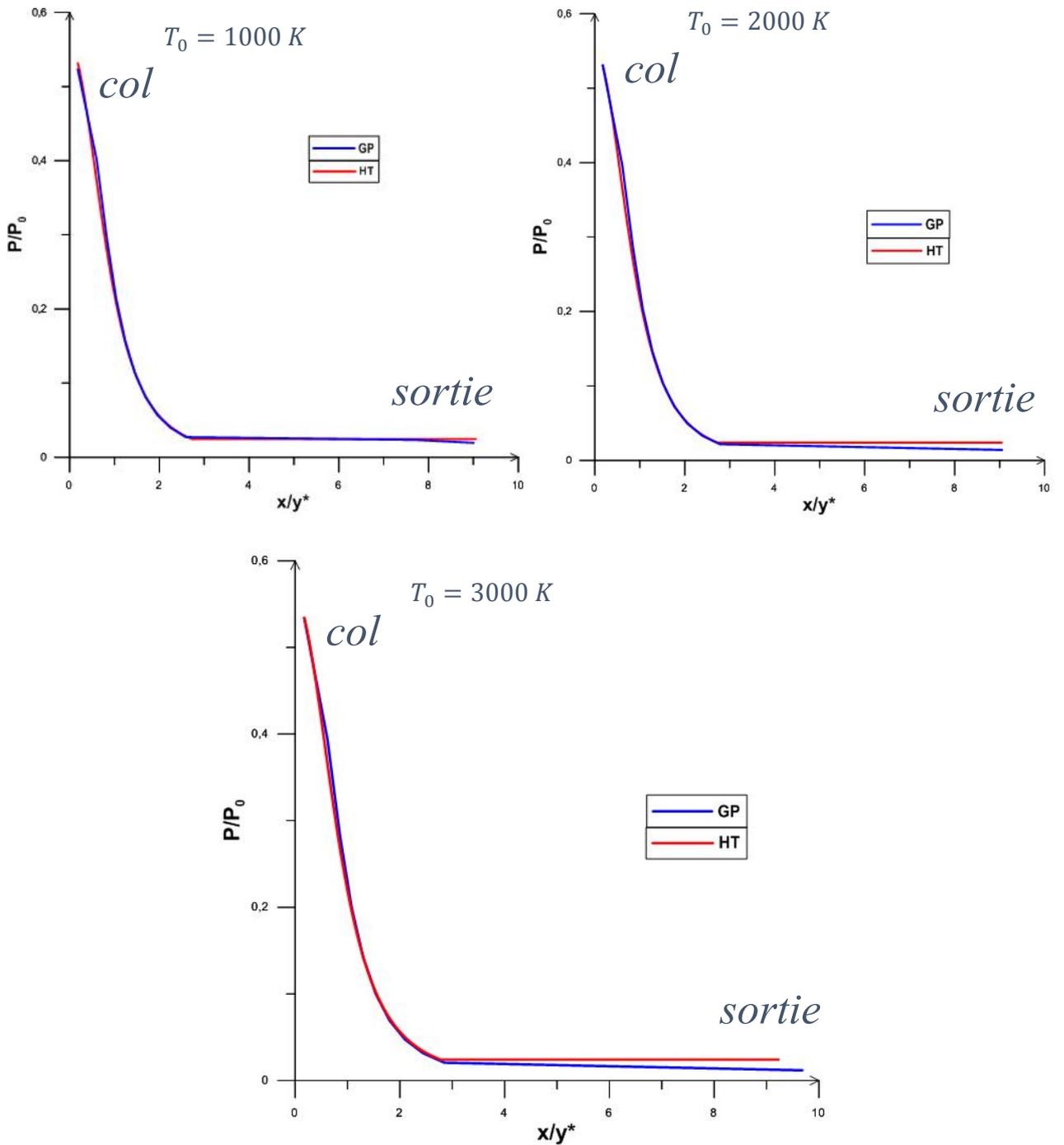


Figure IV.18 : Variation du rapport de pression long de axe de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms=3.00$.

IV.3.3 Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère

La figure IV.19 représente la variation du nombre de Mach le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du nombre de Mach lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $M_s = 3.00$.

Au niveau de col, on remarque une augmentation brusque du nombre de Mach sur les deux modèle HT et GP, de $M = 1.00$ jusqu'à $M = 1.496$ pour $T_0 = 1000 K$, et $M = 1.512$ pour $T_0 = 2000 K$, et $M = 1.518$ pour $T_0 = 3000 K$.

Juste après la détente au col le nombre de Mach augmentée graduelle, de telle manière que M sur le modèle GP est inférieur à celui pour le modèle HT.

Dans la zone uniforme le nombre de Mach continue à augmenter sur les deux modèles jusqu'à la section de sortie, mais on voit que dans cette zone que M sur le modèle GP supérieur à celui pour le modèle HT, telle que la courbe de ce dernier prendre une forme presque inchangeable avec la variation de température génératrice, par contre le nombre de Mach sur le modèle GP est devient plus important lorsque T_0 augmente.

Au niveau du section de sortie, on remarque que le nombre de Mach augmente graduelle avec une détente assez brusque sur le modèle GP, ce qui montre l'existence d'un espace très large dans la tuyère au niveau de cette zone, on remarque aussi que lorsque T_0 augmente le nombre de Mach augmente, telle que $M = 3.264$ pour $T_0 = 1000 K$, $M = 3.613$ pour $T_0 = 2000 K$, et $M = 3.861$ pour $T_0 = 3000 K$, ce qui montre l'influence de température du chambre de combustion.

La détente GP devient complète dans la tuyère dimensionnée par le modèle HT. Ce qui permet de donnée l'espace suffisent pour avoir une détente complète jusqu'à donner le nombre de Mach de sortie désiré.

Dans la section de sortie on peut couper la tuyère pour gagner la masse, mais le coefficient de poussé est diminué.

✚ Nombre de Mach

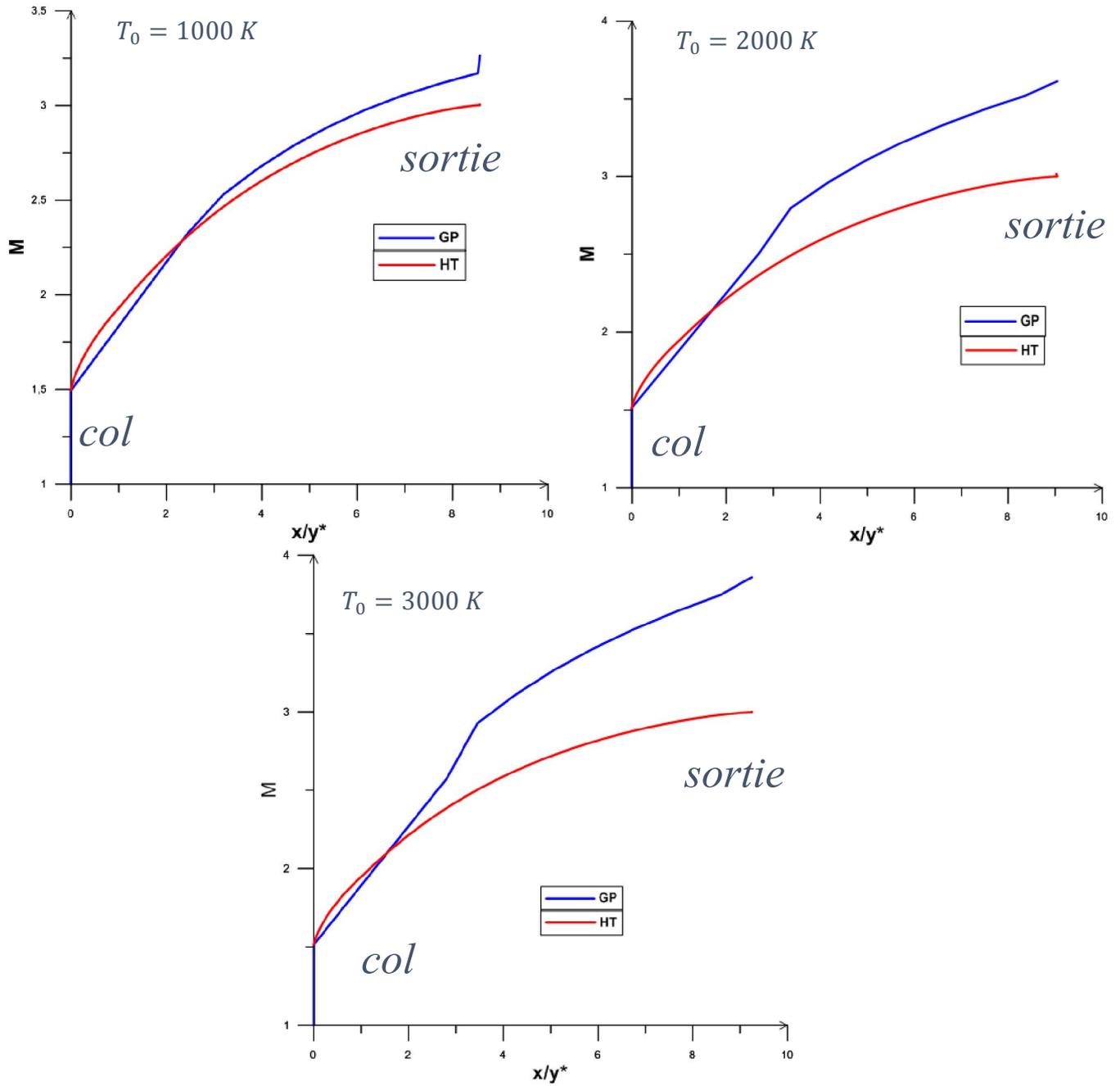


Figure IV.19 : Variation du nombre de Mach le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $M_s=3.00$.

La figure IV.20 représente la variation du rapport de température le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport des températures lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

Au niveau de col, on remarque une chute du rapport de température sur le modèle GP et HT, de $\frac{T}{T_0} = 0.853$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.717$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{T}{T_0} = 0.868$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.740$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{T}{T_0} = 0.874$ jusqu'à $\frac{T}{T_0} = 0.749$ pour $T_0 = 3000 K$, telle que les deux courbes sont confondues.

Après le col, on voit clairement que les deux courbes diminuent graduellement, de telle manière que le rapport de température sur le modèle GP est supérieur à celui pour le modèle HT.

Au niveau de la zone uniforme le rapport $\frac{T}{T_0}$ diminue pour les deux modèles jusqu'à la section de sortie, mais de telle manière que le rapport de température sur le modèle GP est inférieur à celui pour le modèle HT, on justifie cette diminution du rapport de température par l'augmentation du nombre de Mach.

On remarque aussi que la dégradation du rapport de température devient plus moins à chaque augmentation de température génératrice pour le modèle HT, mais pour le modèle GP la diminution de rapport de température devient plus importante si T_0 augmente, ce qui montre l'influence de température génératrice.

✚ Rapport de température

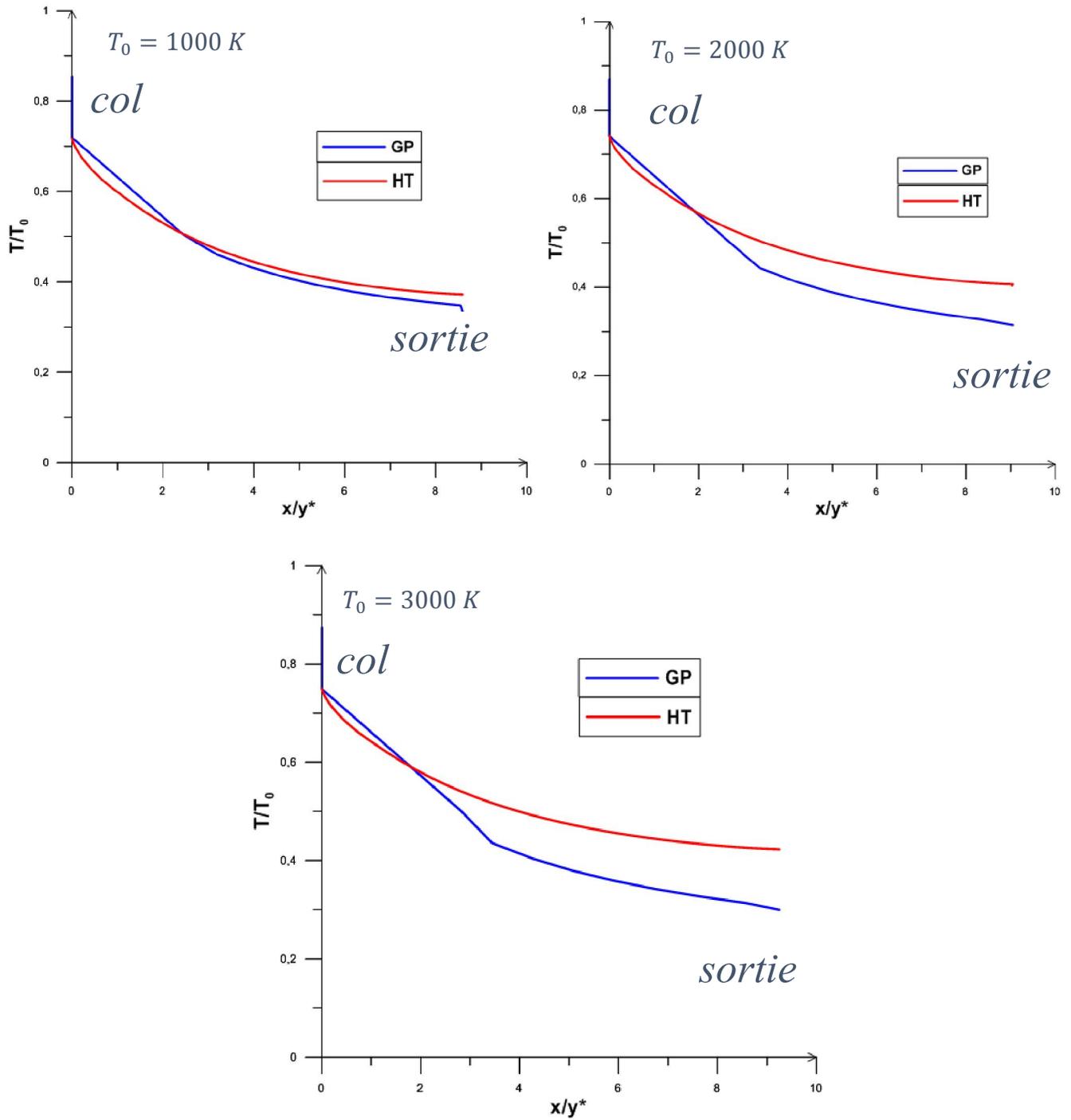


Figure IV.20 : Variation du rapport de température le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $Ms=3.00$.

La figure IV.21 représente la variation du rapport de masse volumique le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine la variation du rapport de masse volumique lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

Au niveau du col on remarque une chute du rapport de masse volumique pour les deux modèles HT et GP, $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.629$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.386$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.627$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.373$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.626$ jusqu'à $\frac{\rho}{\rho_0} = 0.368$ pour $T_0 = 3000 K$, telle que les deux courbes sont confondues, après la diminution devient graduelle dans la région de Kernel et la zone uniforme. De telle manière que le rapport de masse volumique sur le modèle GP est supérieur à celui pour le modèle HT, mais dans la zone uniforme on remarque que le rapport sur le modèle GP est inférieure à celui pour le modèle HT, cette diminution devient plus lorsque la température génératrice augmente.

La figure IV.22 représente la variation du rapport de pression le long de la paroi à travers la tuyère à détente centrée axisymétrique dimensionnée sur la base du modèle Haute température, on considérant l'écoulement en GP, on détermine de rapport du pression lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$, donnant $Ms = 3.00$.

On voit une chute du rapport de pression pour les deux modèles HT et GP, $\frac{P}{P_0} = 0.536$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.277$ pour $T_0 = 1000 K$, et de $\frac{P}{P_0} = 0.544$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.276$ pour $T_0 = 2000 K$, et de $\frac{P}{P_0} = 0.547$ jusqu'à $\frac{P}{P_0} = 0.276$ pour $T_0 = 3000 K$, les mêmes remarques de la masse volumique sur la figure IV.21 sont présentes dans ce cas, mais remarque la courbe HT du rapport de pression reste inchangeable pour les trois valeur de température, par contre le rapport de pression sur le modèle GP est diminué lorsque la température de chambre du combustion augmente.

✚ Rapport de masse volumique

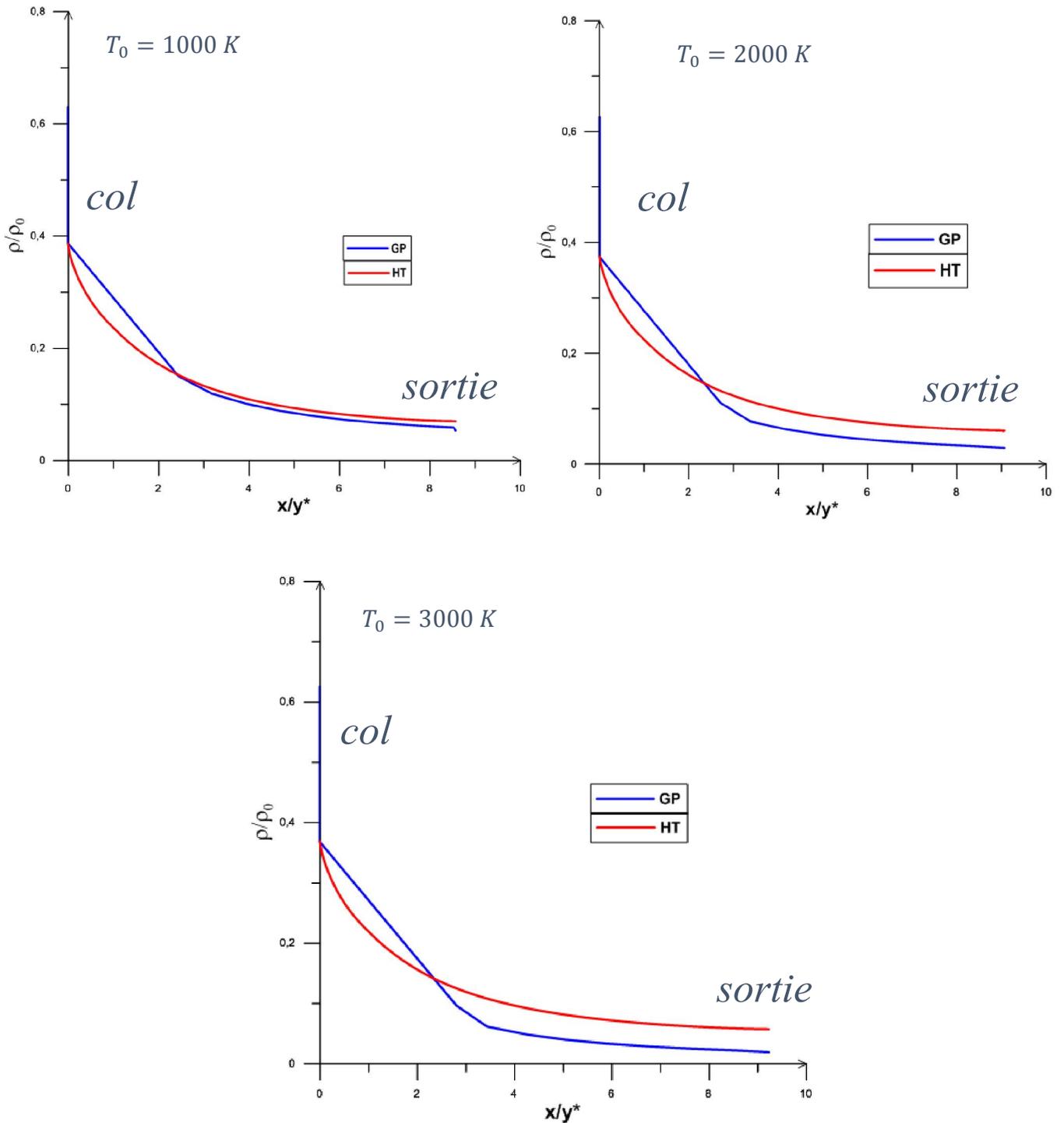


Figure IV.21 : Variation du rapport de masse volumique le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000 K$, $T_0 = 2000 K$, $T_0 = 3000 K$ donnant $M_s=3.00$.

✚ Rapport de pression

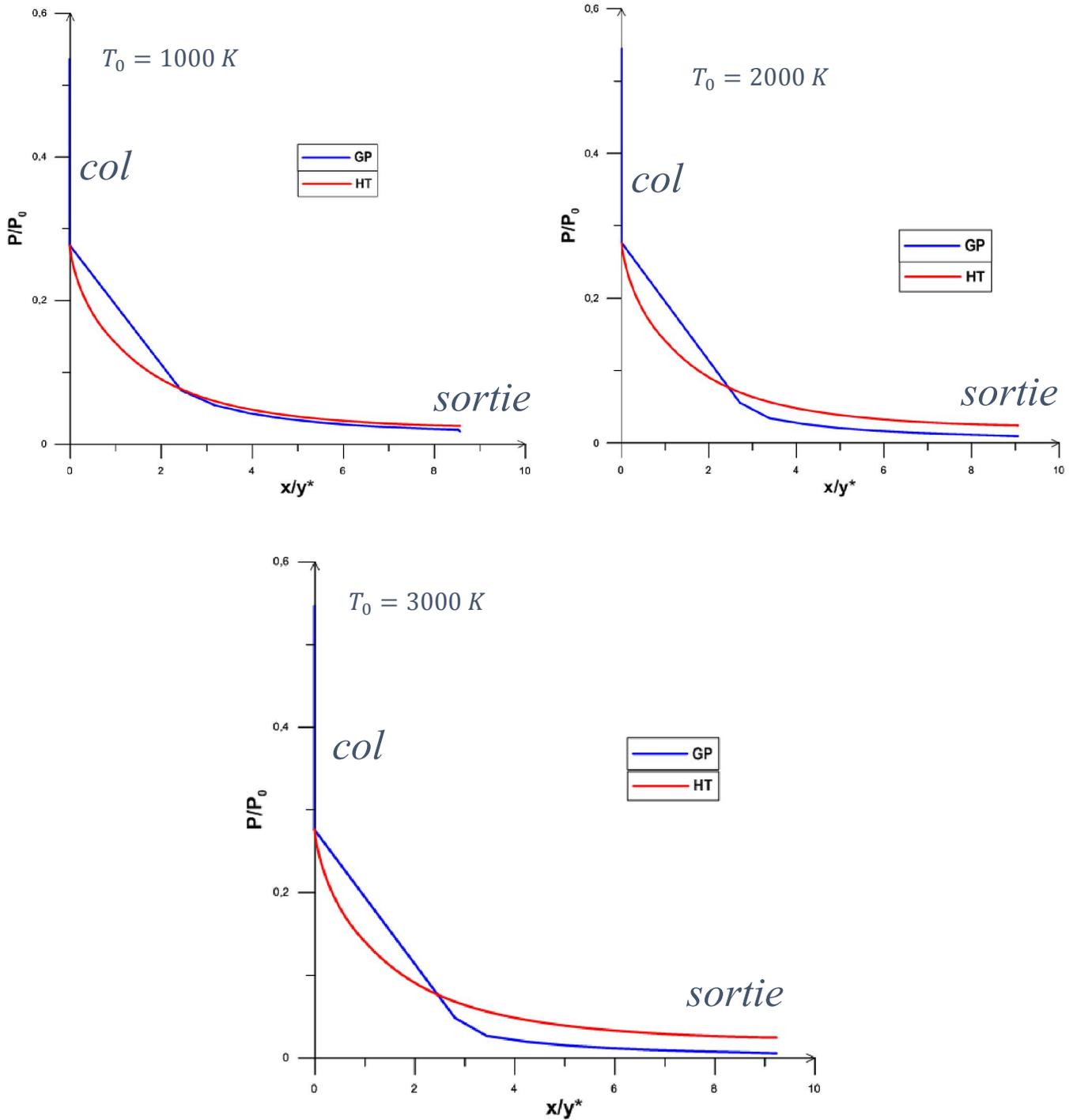


Figure IV.22 : Variation du rapport de pression le long de paroi de la tuyère MLN axisymétrique dimensionnée par le modèle HT lorsque $T_0 = 1000\text{ K}$, $T_0 = 2000\text{ K}$, $T_0 = 3000\text{ K}$ donnant $Ms=3.00$.

CONCLUSION GENERALE

Cette étude nous a permis de calcul de l'écoulement supersonique dans la tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique avec l'hypothèse GP. On a pu avoir nos résultats d'après le programme de calcul numérique, qui permet de faire la correction de l'écoulement dans une tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique sur la base des hypothèses HT, en utilisant le modèle des équations de comptabilités et de caractéristiques à haute température HT, et la forme de tuyère est donnée.

A la fin on peut citer les points suivants :

- ✚ Le modèle HT demande une tuyère très large pour avoir une détente complète
- ✚ La variable principal pour le modèle HT c'est la température, et pour le modèle GP c'est le nombre de Mach
- ✚ Le modèle HT ce caractérisé par la résolution des équations algébrique non linéaire, pour le modèle GP la résolution se fait instantanément
- ✚ On a trouvé une différence entre la tuyère à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique. La détente dans une tuyère axisymétrique est plus rapide que celle dans une tuyère bidimensionnelle
- ✚ Les rapports thermodynamiques peuvent être utilisés pour déterminer les paramètres de conception des diverses formes de tuyères sous la base du modèle HT.
- ✚ Comme l'écoulement à la section de sortie est horizontal, on peut tronquer la tuyère à une section possède une déviation un ou deux degré. Dans ce cas, on peut gagner une portion intéressante de la masse de la tuyère. L'écoulement à la sortie de la tuyère tronquée devient non horizontal au voisinage de la paroi, et dans ce cas on va perdre une petite quantité de la grandeur de la force de pression. Cette idée peut être applicable pour les deux types de tuyères que ce soit de géométrie 2D ou axisymétrique.
- ✚ La température de la chambre de combustion influe sur les paramètres, notamment le nombre de Mach, la température, la masse volumique, la pression.
- ✚ Lorsque la température génératrice T_0 augmente en utilisé le modèle à haute température, pour obtenir de bon résultats. Par contre la théorie d'un gaz parfait commence à donner des résultats qui s'éloignent au fur et à mesure du cas réel si T_0 augmente.

- ✚ le modèle GP augmente les performances notamment le nombre de Mach de sortie, dans la tuyère dimensionnée par le modèle HT, Autrement dit le fluide trouve un espace assez large pour faire la détente GP complet jusqu'à le nombre de Mach de sortie.
- ✚ les relations thermodynamiques isentropiques d'un gaz parfait permet a étudié la déférence entre le cas à Haute Température et le cas d'un gaz parfait.

Perspectives

Nous citons ici quelques thèmes que nous proposerons comme travaux futurs.

- Faire le même travail pour autre type de tuyère
- Faire le calcul de l'écoulement en utilisant les équations d'Euler.
- Faire le Calcul de la couche limite.
- Faire l'extension afin de concevoir des tuyères supersoniques tridimensionnelle de section de sortie arbitraire, par exemple carrée, elliptique, ...en utilisant la définition de la fonction de courant dans l'espace.
- Correction de l'écoulement dans une tuyère dimensionnée sur la base d'utilisation du modèle gaz réelle en utilisant notre modèle HT supérieur au seuil de dissociation des molécules pour le cas d'une tuyère bidimensionnelle et axisymétrique.

Annexe

Interpolation « Cubic spline »

A.1 INTRODUCTION

Fonctions splines: Fonctions interpolantes particulièrement adaptés [52].

Dans le cas général, il est possible qu'une séquence d'interpolation polynomiale $\{p_n(x)\}$ sur un nombre fixé et fini d'intervalles ne converge pas régulièrement à une fonction lissée, c'est-à-dire, si on veut chercher le comportement de ces polynômes entre les points interpolés, on observe dans certains cas, les oscillations des polynômes qui quittent volontairement la variation réelle de la fonction. Les polynômes d'interpolation qui possèdent un degré grand donnent ces situations. Un chemin pour éviter ce problème est de considérer une interpolation polynomiale avec un petit degré sur des petits intervalles de l'intervalle considéré. Avec cela, l'oscillation entre ces points n'est pas significative, ou l'interpolation peut imiter le comportement de la fonction. Cependant, le résultat de la fonction interpolée à partir des petits intervalles avec des polynômes de degré faibles n'est pas nécessairement encore lisse.

- ✚ Puisqu'on souhaite d'imiter le comportement de la fonction, il est recommandé que pour les polynômes d'interpolation soient lisses
- ✚ Dans bon nombre d'applications, il est impératif d'obtenir des courbes très régulières passant par un grand nombre de points. C'est le cas en conception assistée par ordinateur (CAO), où l'on cherche à représenter des objets aux formes lisses.
- ✚ Nous avons déjà constaté que l'utilisation de polynômes de degré élevé est d'élégantes mené parfois à des oscillations de grande amplitude. Les polynômes de degré élevé sont alors peu adéquats.

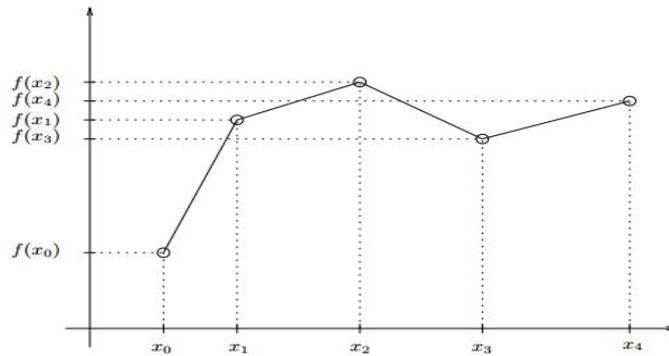


Figure A.1 : Interpolation linéaire par morceaux

On peut mesurer la régularité d'une fonction par le biais de ses dérivées. En effet, plus une fonction est différentiable, plus la courbe qui lui est associée est lisse et plus la fonction est régulière. Le problème, lorsque l'on utilise des polynômes de faible degré, provient du fait qu'il faut en utiliser plusieurs pour relier tous les points. C'est le cas de l'interpolation linéaire par morceaux, illustrée à la figure A.1, qui consiste à relier chaque paire de points par un segment de droite. On utilise aussi l'appellation splines linéaires. On imagine assez mal comment une telle courbe pourrait permettre de faire la conception d'une carrosserie de voiture ou d'une aile d'avion. Il faut donc être plus prudent à la jonction des différents segments de courbe. La spline linéaire est continue mais n'est pas dérivable.

A.2 Différentes type d'interpolation

L'interpolation se fait par ordinateur.

- ✚ Interpolation linéaire
- ✚ Interpolation quadrature
- ✚ Interpolation cubique

Plusieurs auteurs ont développé des procédures d'interpolations des points tabulés. On peut citer à titre d'information :

- L'interpolation de Lagrange.
- L'interpolation par itération.
- Interpolation inverse.
- Interpolation de Hermite.
- Interpolation par différences finis.
- Interpolation par cubique spline.

A partir de quelques points du plan (fig. 1) on peut les relier par une interpolation linéaire (fig. 2) ou polynomiale (fig. 3) ou encore construire une courbe qui approche ces points (fig. 4) [53].

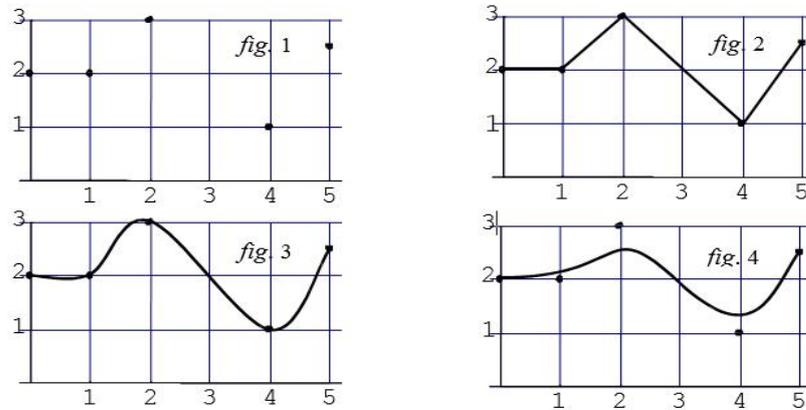


Figure A.2 : les différents interpolations

- ✚ En pratique, la spline cubique est très utilisée.
- ✚ Problemes ouverts en theorie de l'interpolation spline en plusieurs dimensions
- ✚ Importance des splines en CAO/CAD.

A.2.1 Interpolation linéaire

La forme la plus simple est du premier degré ,figure (A.1),nommé fonction d'interpolation linéaire qui n'est pas lisse mais très efficace si la distance entre les nœuds est petite.en effet,toutes les tables des valeurs des fonctions qui utilisent l'interpolation linéaire conduire à une approximation fondamentale des fonctions par ‘‘ Spline Linéaire’’.

Pour $x_i \leq x \leq x_{i+1}$

$$f_i(x) = ax + b \quad (A.1)$$

A.2.2 Interpolation quadratique

Étant donné n points du plan, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, on cherche à construire une courbe formée de $(n - 1)$ arcs de parabole. Le premier de ces arcs est d'extrémités P_1 et P_2 , le deuxième d'extrémités P_2 et P_3 , le $(n - 1)$ ème d'extrémités P_{n-1} et P_n .

Chacun de ces arcs est le graphe d'une fonction

$$f_i(x) = ax^2 + bx + c \quad (A.2)$$

Ces arcs doivent est reliés sans rupture de pente, la dérivée à la fin d'un arc doit donc être égale à la dérivée à l'origine de l'arc suivant.

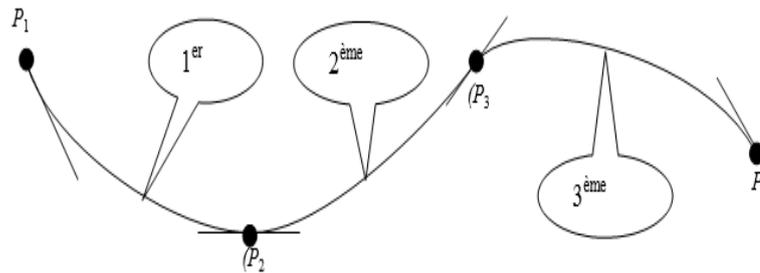


Figure A.3 : interpolation quadratique

A.2.3 Interpolation cubique

On appelle souvent spline une courbe formée d'arcs de polynômes, par exemple d'arcs paraboliques ou d'arcs cubiques. Un vrai spline, ou spline naturel, est formé d'arcs de cubiques et possède les propriétés supplémentaires suivantes : il est partout 2 fois dérivable et possède une deuxième dérivée nulle aux extrémités.

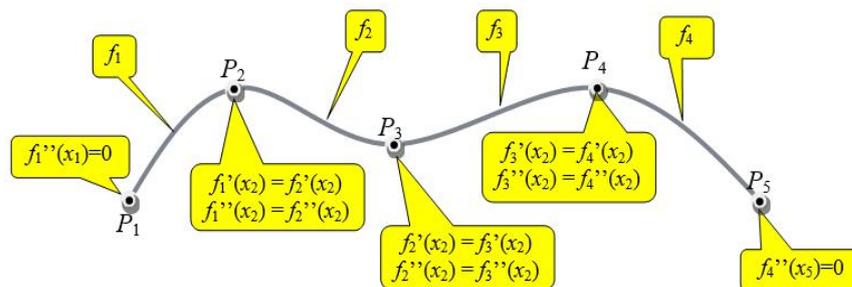


Figure A.4 : description de cubic spline

Étant donné n points du plan, $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, on cherche à construire une courbe qui passe par ces point et qui est formée de $n - 1$ arcs de cubique.

Chacun de ces arcs de cubique est le graphe d'une fonction

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (A.3)$$

Le premier arc de cubique, f_1 passe par les points $P_1(Px(1); Py(1))$ et $P_2(Px(2); Py(2))$, le deuxième, f_2 passe par les points $P_2(Px(2); Py(2))$ et $P_3(Px(3); Py(3))$ et ainsi de suite.

Il faut quatre conditions pour déterminer la cubique qui forme un arc reliant deux points ; ces quatre conditions sont :

- ✚ la cubique passe par les 2 extrémités de l'arc (2 conditions)
- ✚ la pente de la cubique est donnée aux 2 extrémités de l'arc (2 autres conditions).

Ces arcs doivent être reliés sans rupture de pente, la dérivée à la fin d'un arc doit donc être égale à la dérivée à l'origine de l'arc suivant.

Pour créer une telle courbe il faut pouvoir définir de façon automatique la pente en chaque point donné. Il existe plusieurs façons de définir ces pentes ; on peut, par exemple, choisir comme pente en un point donné la même pente que le segment qui relie les deux points adjacents.

Ce choix des pentes ne s'applique ni au premier point, ni au dernier point et il faut donc une autre méthode pour choisir les pentes aux extrémités de la courbe. On peut, par exemple, choisir comme pente au premier point la pente du segment qui relie les deux premiers points et pour le dernier point, la pente du segment qui relie les deux derniers points.

Une autre méthode (meilleure) consiste à choisir, pour le premier point, la pente correspondante d'une parabole passant par les trois premiers points et de même pour le dernier point

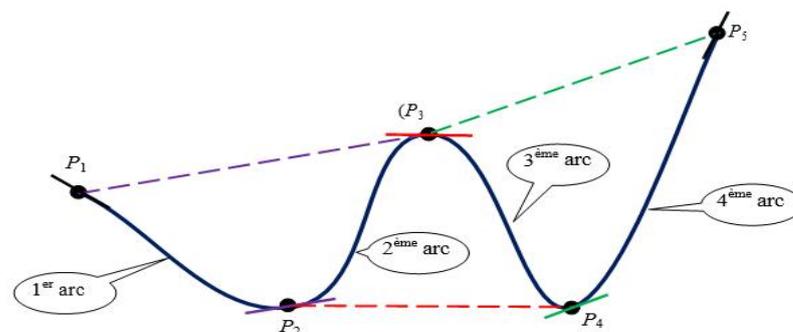


Figure A.5 : courbe qui représente l'interpolation cubic spline

Les splines cubiques représentent un compromis très intéressant entre la régularité de la courbe obtenue et le degré des polynômes utilisés. Nous étudierons dans un premier temps les courbes de la forme $y = f(x)$ et par la suite nous verrons comment aborder les courbes paramétrées.

A.3 Formulation mathématique « cubic spline »

La fonction spline $S(x)$ de degré m est une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b]$

Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ le spline de degré m c'est une fonction $S(x)$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. Quand $x \in [x_i, x_{i+1}]$; $S(x) = S_i(x)$: polynomiale de degré $\leq m$
2. $S^{(m-1)}$ existe et continue dans les points x_1, \dots, x_{n-1} c.-à-d.

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S^{(m-1)}(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S^{(m-1)}(x)$$

Exemple

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$S(x)$ Est une spline de degré $m = 2$ (quadratique spline)

Exemple

$$S(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - (x - 1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$S(x)$ Est n' pas quadratique spline par ce que $\lim_{x \rightarrow 0^-} S'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} S'(x)$

A.3.1 Interpolation Cubic Spline

On donne f, x_0, x_1, \dots, x_n comme ci-dessus, on détermine le cubic spline sachant que $S(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$

$n + 1$ Points $\rightarrow n$ intervalles $\rightarrow 4n$ coefficients

$2n$ Conditions besoin a interpole $f(x_0), \dots, f(x_n)$

$2(n - 1)$ Conditions requise pour s'assure S', S'' est continue dans intervalle I

Ceci laisse 2 conditions libres :

- (i) $S''(x_0) = S''(x_n)$ interpolation cubic spline naturel
 (ii) $\begin{cases} S'(x_0) = f'(x_0) \\ S'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$ interpolation cubic spline maintenu

Donne $f(x); x_0, x_1, \dots, x_n$ comment trouve $S(x)$

Exemple

$$x_i = ih \quad , h = \frac{1}{n} \quad , x_0 = 0 \quad , x_n = 1$$

Etape 1 : condition de 2eme dérivé

$S_i(x)$ Est une polynomiale cubique

$S_i''(x)$ Est linéaire sur x

$$S_i''(x) = a_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right) + a_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{h} \right); i = 0, \dots, n - 1 \quad (A.4)$$

Utilise l'interpolation polynomiale de LAGRANGE de 1^{er} ordre

$$\left. \begin{array}{l} S_i''(x_i) = a_i \\ S_i''(x_{i+1}) = a_{i+1} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{i-1}''(x_i) = a_i = S_i''(x_i) \quad (A.5)$$

$S''(x)$ Est continue sur I

Etape 2 : valeurs de fonction

Intègre deux fois

$$S_i(x) = a_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + a_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + b_i(x_{i+1} - x) + c_i(x - x_i) \quad (A.6)$$

Les dernières deux termes est écrit sous forme spécial pour convienne

$$\left. \begin{array}{l} S_i(x_i) = a_i \frac{h^2}{6} + b_i h = f_i \\ S_i(x_{i+1}) = a_{i+1} \frac{h^2}{6} + c_i h = f_{i+1} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_i h = f_i - a_i \frac{h^2}{6} \\ c_i h = f_{i+1} - a_{i+1} \frac{h^2}{6} \end{array} \quad (A.7)$$

Remplacer

$$S_i(x) = a_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + a_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + \left(f_i - a_i \frac{h^2}{6} \right) \left(\frac{x_{i+1} - x}{h} \right) + \left(f_{i+1} - a_{i+1} \frac{h^2}{6} \right) \left(\frac{x - x_i}{h} \right) \quad (A.8)$$

Etape 3 : condition de 1^{er} dérivé

$$S'_i(x) = -a_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} + a_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h} - \left(\frac{f_i}{h} - a_i \frac{h}{6} \right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - a_{i+1} \frac{h}{6} \right) \quad (A.9)$$

$$S'_i(x_i) = -a_i \frac{h}{2} - \left(\frac{f_i}{h} - a_i \frac{h}{6} \right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - a_{i+1} \frac{h}{6} \right) \quad (A.10)$$

$$S'_i(x_{i+1}) = a_{i+1} \frac{h}{2} - \left(\frac{f_i}{h} - a_i \frac{h}{6} \right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - a_{i+1} \frac{h}{6} \right) \quad (A.11)$$

Nous exigeons $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ donc (décalage $i \rightarrow i - 1$ dans $S'_i(x_{i+1})$)

$$a_i \frac{h}{2} - \left(\frac{f_{i-1}}{h} - a_{i-1} \frac{h}{6} \right) + \left(\frac{f_i}{h} - a_i \frac{h}{6} \right) = -a_i \frac{h}{2} - \left(\frac{f_i}{h} - a_i \frac{h}{6} \right) + \left(\frac{f_{i+1}}{h} - a_{i+1} \frac{h}{6} \right) \quad (A.12)$$

Après la simplification on obtient :

$$a_{i-1} \frac{h}{6} + a_i \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{6} + \frac{h}{2} - \frac{h}{6} \right) + a_{i+1} \frac{h}{6} = \left(\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h} \right) \quad (A.13)$$

Multiplié fois $\frac{6}{h}$ on obtient :

$$a_{i-1} + 4a_i + a_{i+1} = \frac{6}{h^2} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}) \quad ; i = 1, \dots, n-1. \quad (A.14)$$

Etape 4 : condition au limite

$$\begin{cases} S''_0(x_0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \\ S''_{n-1}(x_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0 \end{cases} \quad (A.15)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix} \quad (A.16)$$

Les coefficients de matrice est :

- Tri-diagonale
- Symétrique
- Le domaine de définition est Positif
- Strictement dominant diagonale

Remarque :

1. Pour complète spline, il deux équations additionnel qui concerner a_0 et a_n
 2. Condition (*) explique pourquoi le spline il est à inflexion des points additionnel.
- Voir la distribuer de l'interpolation cubique spline naturel

$A = (a_{ij})$ Est strictement dominant diagonale si :

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{sur } i = 1, \dots, n \quad (\text{A.17})$$

Théorème : si A est strictement dominat diagonale, A est inversible. Suppose A est n'pas inversible. Et il existe de vecteur $x \neq 0$ telle que

$$Ax = 0 ; \text{ On choisit l'indice } i \text{ sachant que } |x_i| = \|x\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\Rightarrow |a_{ii}x_i| = \left| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |x_j| \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow |a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (\text{A.20})$$

Cette contradiction montrée qui A est strictement matrix diagonale

Remarque :

Dans la pratique, les valeurs $a_i = S''(x_i)$ est déterminée par élimination Gaussien pour le système tri-diagonal

Théorème :

Soit f est définie sur l'intervalle $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ et soit S l'interpolation cubic spline naturel de f (ou cubic spline maintenu)

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{5}{384} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \cdot h^4 \quad (\text{A. 21})$$

Ou

$$h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$$

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx \quad (\text{Propriétés minimum de courbure de cubic spline})$$

Remarque :

- 1- L'Interpolation cubic spline est 4eme ordre de précision
- 2- La condition (2) est une propriété optimale : spline $S(x)$ "oscillation lisse" de toutes les fonctions lisses satisfait les conditions d'interpolation + BC (naturel BC ou maintenu spline $S'(x_0) = y'_0, S'(x_n) = y'_n$)

Les courbures

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \approx |f''(x)| \quad (\text{A. 22})$$

$\Rightarrow \int_a^b [f''(x)]^2 dx$ Est une mesure principale de toutes les courbures de l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b [S''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx \quad (\text{A. 23})$$

Toute fonction d'interpolation lisse doit avoir une courbure totale au moins et grande que celle de cubic spline (naturel ou maintenu)

Preuve de(2) pour splines naturel

Par définition algébrique :

$$F^2 - S^2 = (F - S)^2 - 2S(S - F) \quad (\text{A. 24})$$

On Pose $F = f''(x), S = S''(x)$ intégrée sur $[a, b]$

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx - 2 \int_a^b S''(x) [S''(x) - f''(x)] dx \quad (\text{A. 25}) \end{aligned}$$

Le 1^{er} terme ≥ 0 nous remarque que le 2^{ème} terme est 0

Intégration par partie

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx \quad (\text{A. 26})$$

$$\int_a^b S''(x) [S''(x) - f''(x)] dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S''(x) [S''(x) - f''(x)] dx \quad (\text{A. 27})$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(S''(x) [S'(x) - f'(x)] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} S'''(x) [S'(x) - f'(x)] dx \right) \quad (\text{A. 28})$$

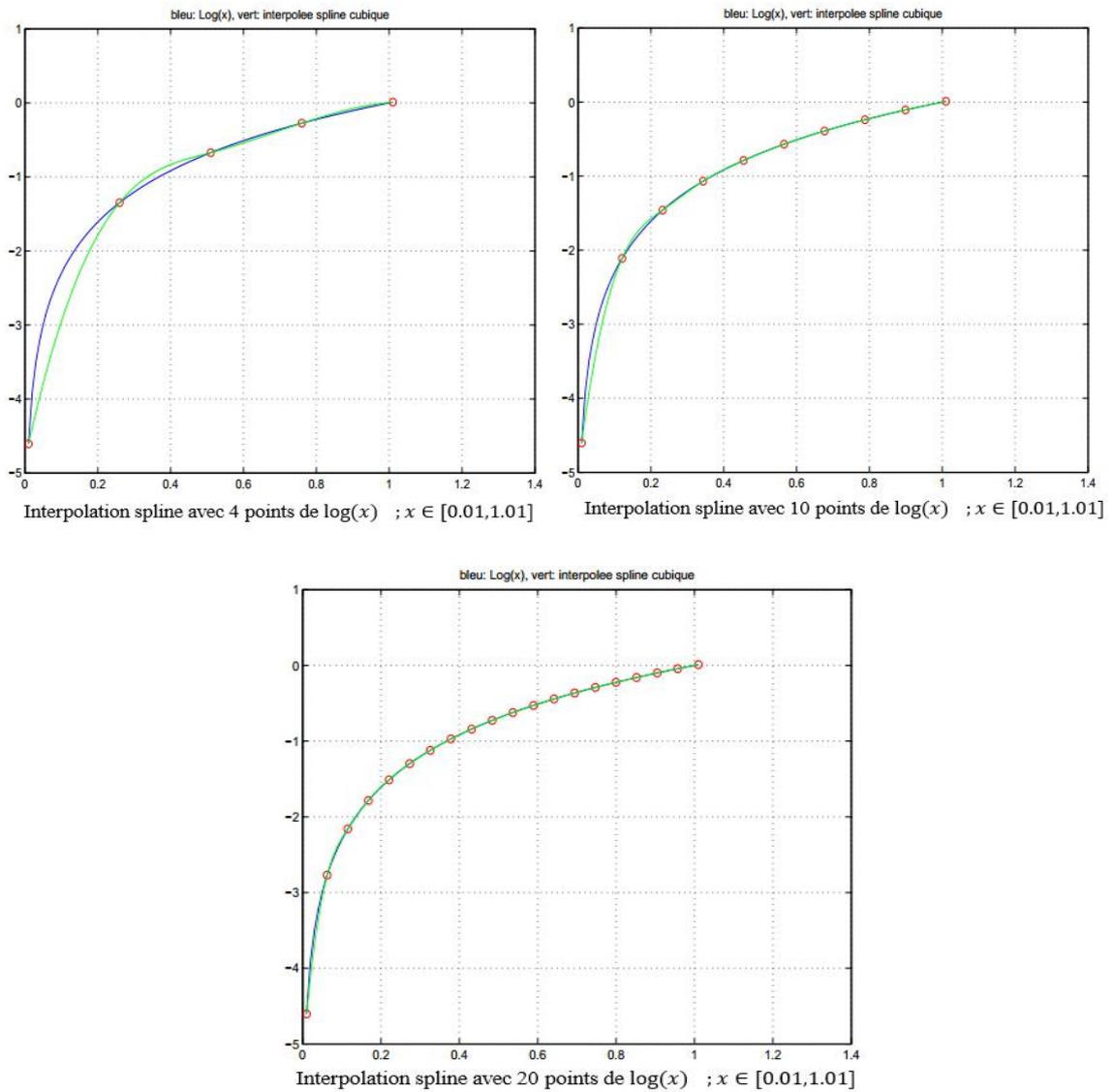
$$= - \sum_{i=0}^{n-1} S'''(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} [S'(x) - f'(x)] dx \quad (\text{A. 29})$$

On Utilise $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ et $S_i'''(x) = cte$

$$= - \sum_{i=0}^{n-1} S'''(x_i) [S(x) - f(x)] \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0 \quad (\text{A. 30})$$

On Utilise $S(x_i) = f(x_i) ; i = 0, \dots, n$.

Exemples :

Figure A.6 : interpolation cubic spline de la fonction $\log(x)$

Références

- [1]: Malina F. J., "Characteristics of the rocket motor based on the theory of perfect Gases," J. Franklin Inst., Vol. 230, PP. 433-450, 1940.
- [2]: Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
- [3]: Rao G. V. R., "Recent development in Rocket Nozzle Configuration", ARS Journal, Vol. 31, N° 04, PP. 1488-1494, 1961.
- [4]: Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," sixth edition, California, 1992.
- [5]: Anderson J. D. Jr., "Fundamentals of Aerodynamics," McGraw-Hill Book Company, New York, 1988.
- [6]: A.H, «Compressible Fluid Flow». Vol.1 .PP.73, 1953.
- [7]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Design of Two-Dimensional Supersonic Minimum Length Nozzle at High Temperature. Application for Air," DGLR 2005-257, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
- [8]: Zebbiche T. et Youbi Z., "Fonction de Prandtl Meyer A Haute Température," Conférence Internationale de la Mécanique Avancée, CIMA'04, Boumerdès (Algérie), 30 Nov., 02 Déc. 2004
- [9]: Zebbiche T., "Supersonic Plug Nozzle Design," AIAA-2005-4490, 41stAIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, Arizona, July 10-13, 2005.
- [10]: Shapiro A. H., "Compressible Fluid Flow," Vol. 1, New York, the Ronald Press, 1953.
- [11]: Zucro M. J. and Hoffman J. D., "Gas Dynamics," Vol. 1 and Vol. 2, New York, Wiley, 1976.
- [12]: Shapiro A. H., "The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow," Vol. 1, the Ronald Press Company, New York, 1953.
- [13]: Raviart P. A. et Thomas J. M., "Introduction à l'Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles," Masson, 1983.
- [14]: Sod G. A., "Numerical Methods in Fluid Dynamics," Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

- [15]: Georing M, "Nozzle Design Optimization by Method-of-Characteristics," AIAA-1990-2024, 26thAIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Orlando, Florida, July 16-18, 1990.
- [16]: Hagemann G, Immich H. and Terhardt M, "Flow phenomena in advanced rocket nozzles - The plug nozzle," AIAA-1998-3522, 34thAIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Cleveland, OH, July 13-15, 1998.
- [17]: H.P.G, Peterson C.R, <<Mechanics and Thermodynamics of Propulsion>>. Addition Wesley Publishing Company Inc.PP.180, 1965.
- [18]: G.HAGEMANN "advanced rocket nozzles", journal of propulsion and power, DLR, German, aerospace research center, Germany, 2004.
- [19]: Sutton G. P., "Rocket Propulsion Elements," sixth edition, California, 1992.
- [20]: Zucker, R.D, & Biblarz.O, Fundamentals of Gas Dynamics Second Edition, John Wiley and Sons, 2002, PI65.
- [21] : Hamel.N, Validation de la simulation numérique d'un écoulement compressible avec ondes de choc utilisant la vélocimétrie par images de particules, Mémoire (M.Sc) Université Laval, 2003.
- [22] : Philippe REIJASSE ONERA « aérodynamique des tuyères supersonique »
- [23]: Evvard J. C. and Maslen. S. H., "Three-Dimensional Supersonic Nozzles and Inlets of Arbitrary Exit Cross Section," NASA TN-2688, April 1952.
- [24]: Oosthuisen P. H. and Carscallen W. E., "Compressible Fluid Flow," Mc Graw-Hill, New York, 1997.
- [25]: Peterson C. R. and Hill P. G. "Mechanics and Thermodynamics of Propulsion," Addition-Wesley Publishing Company Inc. New York. 1965.
- [26]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Parameters of Supersonic Flow at High Temperature. Application for Air," 4th International Conferences on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics HEFAT, 19-22 Sep. 2005, Cairo, Egypt.
- [27]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Flow Parameters at High Temperature. Application for Air in Nozzles," DGLR-2005-256, German Aerospace Congress 2005, 26-29 Sep. 2005, Friedrichshafen, Germany.
- [28]: Powell M. J. D., "On the Maximum Error of Polynomial Approximation Defined by Interpolation and by Least Squares Criteria," Comput. J., Vol. 9, PP. 404-407, 1978.
- [29]: Ralston A. and Rabinowitz P., "A First Course in Numerical Analysis," McGraw-Hill Book Company, 1985.

- [30]: Press W. H., Flannery B. P, Teukolsky S. A. and Vetterling W. T., "Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [31]: Dumitrescu L. Z., "Minimum Length Axisymmetric Laval Nozzles," AIAA Journal, Vol. 13, PP. 520-531, 1975.
- [32]: Comolet R., "Mécanique Expérimentale des Fluides. Statique et Dynamique des Fluides Non Visqueux," Tome 1, 3ème Edition, Masson, 1979.
- [33]: Lionel AGOSTINI "Instationnarités en écoulements décollés supersoniques," Thèse soutenue publiquement devant le jury UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I, le 9 décembre 2011
- [34]: Zebbiche T., "Supersonic Axisymmetric Minimum Length Nozzle Design at High Temperature," Submitted to 45th AIAA Aerospace Meeting and Exhibit, 8-11 Jan. 2007, Reno Hilton, Reno, Nevada, 2007.
- [35]: Zebbiche T. and Youbi Z., "Supersonic Two-Dimensional Minimum Length Nozzle Design at High Temperature. Application for Air," AIAA-2006-4599, 42st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Sacramento, California, July 09-12, 2006.
- [36]: Zebbiche .T, "New Generalized Form of the Prandtl Meyer Function. Application for Air at High Temperature," AIAA-2006-3674, 25th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, California, 5-8 Jun 2006.
- [37]: Anderson. J. Jr., "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982.
- [38]: Lax P. D. and Wendroff B., "Difference Schemes with High Order of Accuracy for Solving Hyperbolic Equations," CIMS Report NY0-9759, July 1962, New York Univ, New York.
- [39]: Ortega J. and Rheinboldt W., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables," New York, Academic Press, 1970.
- [40]: Argrow B.M. and Emanuel G., "Comparison of Minimum Length Nozzles," Journal of Fluids Engineering, Vol. 110, PP. 283-288, September 1988.
- [41]: Rao G. V. R., «Contoured Rocket Nozzles,» Proc. 9Uh Int. Astro-Fed. Congress, Amsterdam, 1958.30 Nov, 02 Déc. 2004.
- [42]: Sauer R., «General Characteristics of the Flow through Nozzles at near Critical Speed» NASA TM-1147, 1947.

- [43] : Mr Zebbiche Toufik Thèse de Magister : Déterminations des profils des tuyères Supersoniques par la méthode des caractéristiques, septembre 1995.
- [44] : Dr HENNI MANSOUR .Z (Cours de thermodynamique)
- [45]: Anderson J. Jr, "Modern Compressible Flow: With Historical Perspective," McGraw Hill Book company, New York, 1982
- [46] : STEPHANE MAILHOT,"conception mise en opération de l'installation supersonique à haute température de RDDC VALCARTIER",Univ Laval Québec ,2010
- [47]: V. Morkovin. Effect of compressibility on turbulent flows. Mécanique de la Turbulence, edited by A. Favre, p. 367, 1961.
- [48] : Jau-motte et al. 1971 ; Délery, 2008 ; Liepmann & Roshko, 1957
- [49] : Ryhming I. L., "Dynamique des Fluides," Presses Polytechnique romandes, Lausanne, Suisse, 1984.
- [50] : Démidovitch B. and I. Maron., "Eléments de calcul numérique," Editions Mir, Moscow, 1987.
- [51]: Fletcher C. A. J. "Computational Techniques for Fluid Dynamics: Specific Techniques for Different Flow Categories," Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [52] : J-P Croisille Université Paul Verlaine-Metz Semestre S7, master de mathématiques M1, année 2008/2009
- [53] : Travaux de Paul Casteljau (1910-1999) chez Citroën et de Pierre Bezier (1910-1999) chez Renault: design des pièces automobile.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur Et de La Recherche Scientifique
Université de Blida 01

Institut d'aéronautique et des études spatiales

Mémoire De Fin D'étude
En Vue de L'Obtention du Diplôme
De Master En Aéronautique
Option : Propulsion

Thème

**Calcul de l'écoulement supersonique dans la tuyère
a détente centrée (**Minimum Length Nozzle**)
bidimensionnelle et axisymétrique sur l'hypothèse
a haute température**

Présenté Par :

GHANEM Ibrahim
MEGARI Mohamed

Directeur de Mémoire :

Pr: ZEBBICHE TOUFIK



Plan de travail



Introduction

Etude bibliographique

Relation Thermodynamique à HT

Méthode des caractéristiques

Résultats & Discussions

Conclusion



INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le cadre des projets numérique , nous avons étudié l'écoulement dans une tuyère supersonique à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique dimensionnée sur l'hypothèse à haute température, on a utilise les équations de compatibilité et des caractéristiques pour calculée l'écoulement sur le modèle GP.

Nous avons pour cela utilisé le programme fortran afin de réaliser à la fois le maillage et calculer les différents paramètres pour les deux cas bidimensionnelle et axisymétriques .



Objectif du Mémoire

*Calcul
numérique*

Dimensionne la tuyère par le modèle HT

Calcul de l'écoulement par le modèle GP

Comparée les différents paramètres



***Etude
Bibliographique***

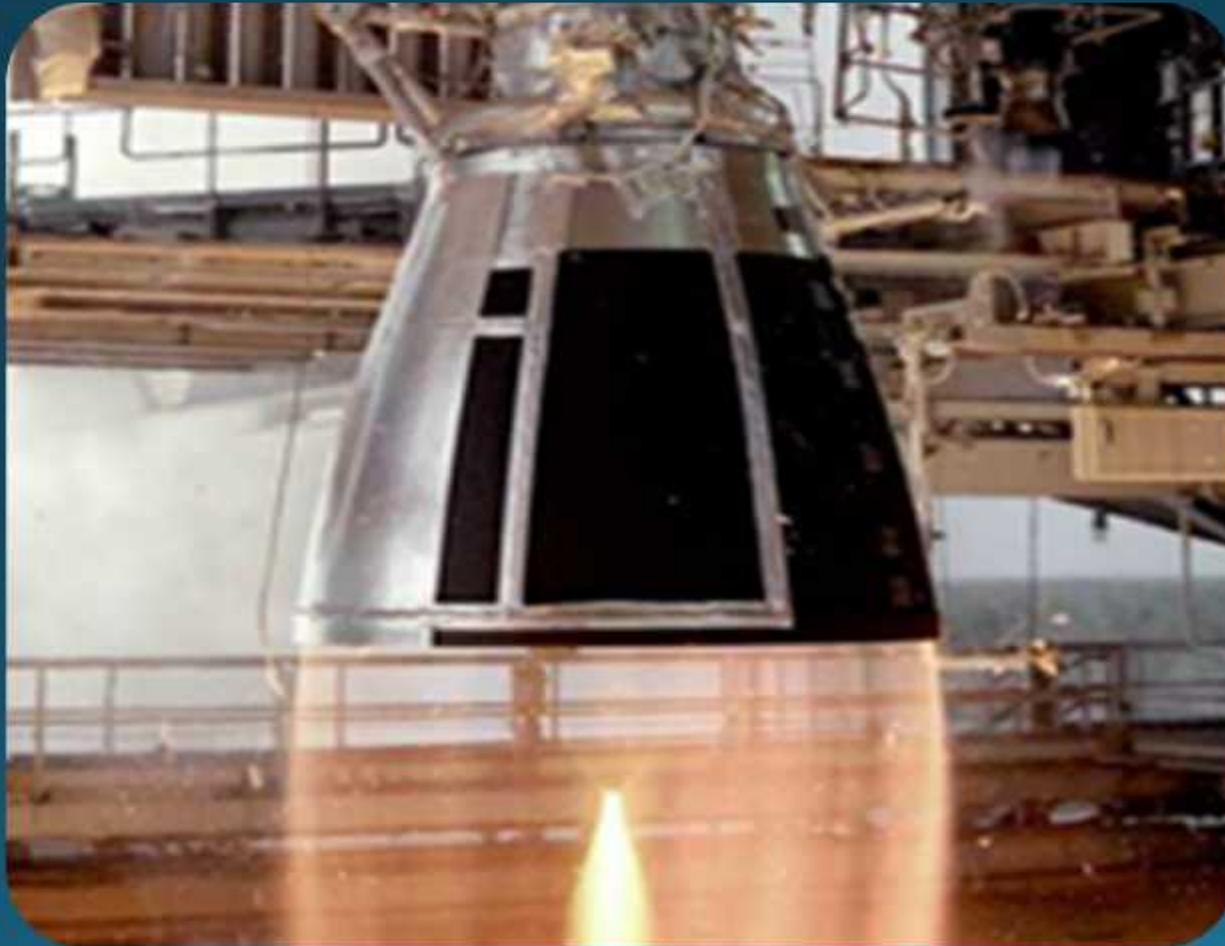
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

C'est quoi un tuyère supersonique ?





différents régimes de fonctionnement

Régime adaptée



$$\frac{P}{P_0} = 1$$

Régime de sous-
détente



$$\frac{P}{P_0} < 1$$

Régime de sur-
détente



$$\frac{P}{P_0} > 1$$



*Etude
Bibliographique*

*Paramètres
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Applications des tuyères supersoniques :

❖ Moteurs fusées





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

❖ Moteur d'avions de combat





***Etude
Bibliographique***

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Différent configuration des tuyère supersonique



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

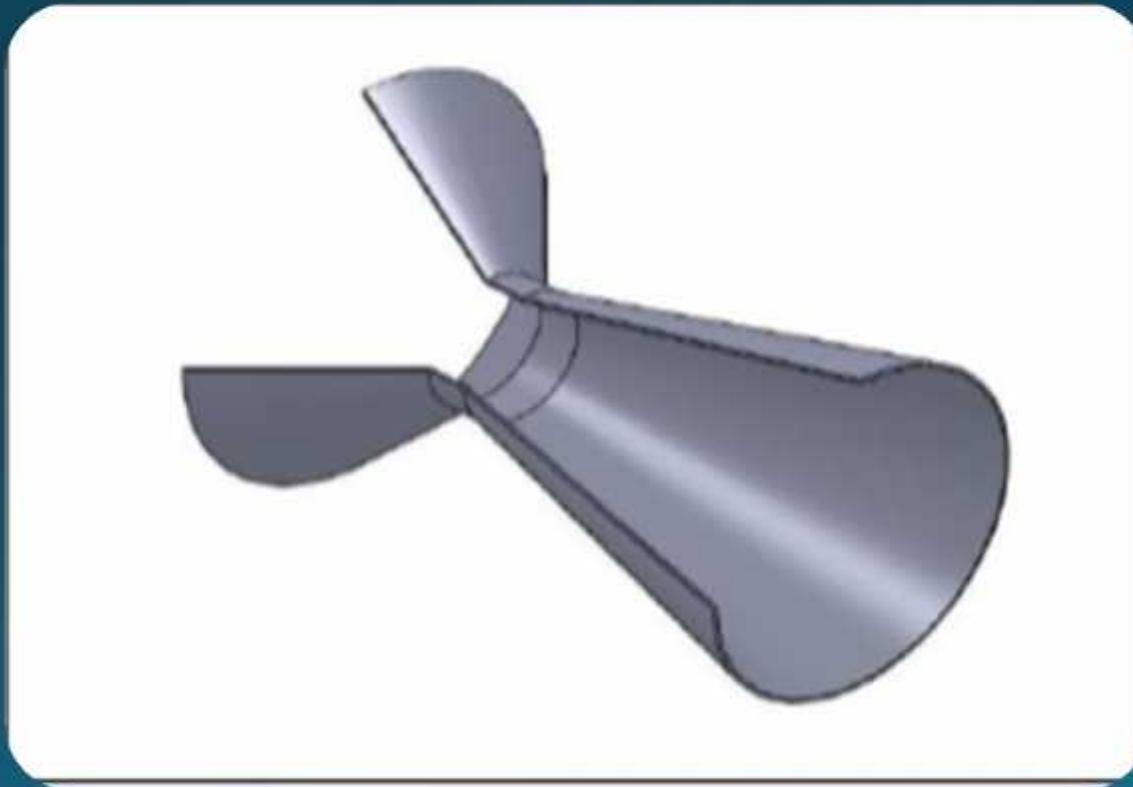
*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

❖ tuyères conventionnelles

Tuyère Conique





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

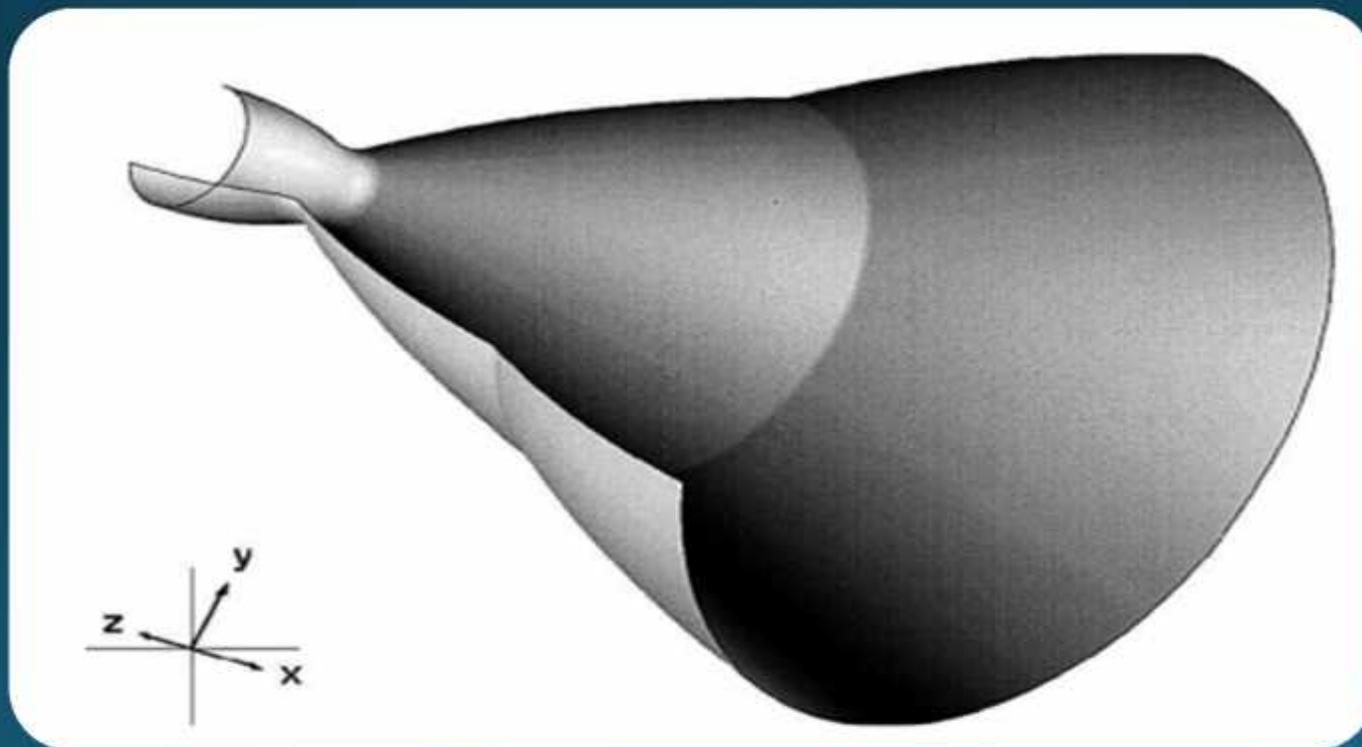
*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

❖ Tuyère adaptée en altitude

Les Tuyères à Double Galbes





***Etude
Bibliographique***

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

❖ Soufflerie supersonique :





❖ Classification des écoulements

- **Écoulement incompressible** $M < 0.3$
- **Écoulement subsonique** $0.3 < M < 0,8$
- **Écoulement Transsonique** $0.8 < M < 1,2$
- **Écoulement supersonique** $1.2 < M < 5$
- **Écoulement Hypersonique** $M > 5$



❖ Haute température



$$- = \frac{[()]}{[()]}$$



$$- = - \left[\frac{[()]}{()} + - \right]$$



$$- = - \frac{()}{()}$$



$$() = \frac{\sqrt{()}}{()}$$



$$- = \left(- \int () \right)$$



$$- = \left(() + - \right)$$



$$-_* = \text{Exp} \left[\int^* (T) dT \right]$$



❖ Gaz parfait

$$\begin{aligned}
 &\longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{M^2}{1} \right] \\
 &\longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\
 &\longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\
 &\longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} \\
 &\longrightarrow \quad \frac{p}{p_0} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}
 \end{aligned}$$



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

La Méthode Des Caractéristiques



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
Des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

La méthode des caractéristiques permet de résoudre de façon efficace du problème de l'écoulement dans les tuyère supersonique consiste a résoudre simultanément les équations d'Euler,



❖ **Hypothèse de travail**

- **Ecoulement stationnaire**
- **Le fluide est idéal**
- **Le gaz est parfait**
- **La conduite est complètement isolée du monde extérieur (pas d'échange d'énergie)**
- **Le gaz est thermiquement parfait**
- **Le gaz est calorifique-ment imparfait**
- **l'écoulement est irrotationnel $rot \vec{V} = \vec{0}$**



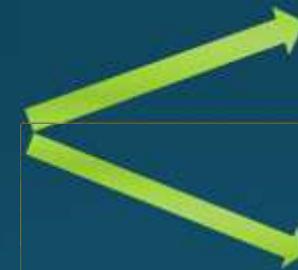
❖ Les équation de base

Équation de continuité



$$\frac{(\quad)}{\quad} + \frac{(\quad)}{\quad} = 0$$

Équation de conservation de quantité de mouvement



$$\frac{(\quad)}{\quad} + \frac{(\quad)}{\quad} = 0$$

$$\frac{(\quad)}{\quad} + \frac{(\quad)}{\quad} = 0$$

Équation de conservation d'énergie



$$= 2 (\quad)$$

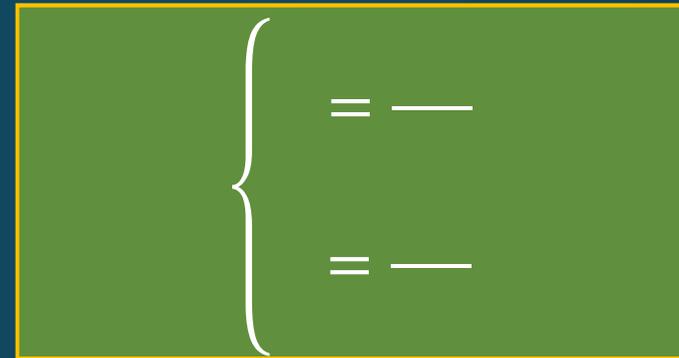
Équation d'état d'un gaz parfait



$$=$$



❖ **Potentiel des vitesses**



❖ **Equations des caractéristiques**

$$\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right) \left[- + \frac{(-2 \quad) -}{(\quad -)} - \right] + \left[- + \frac{(\quad -)}{-} - \right] + \text{---} = 0$$

$$\bar{\tau} = \left[- \right]^{\bar{\tau}} = \frac{\bar{\tau} \sqrt{-1}}{-}$$



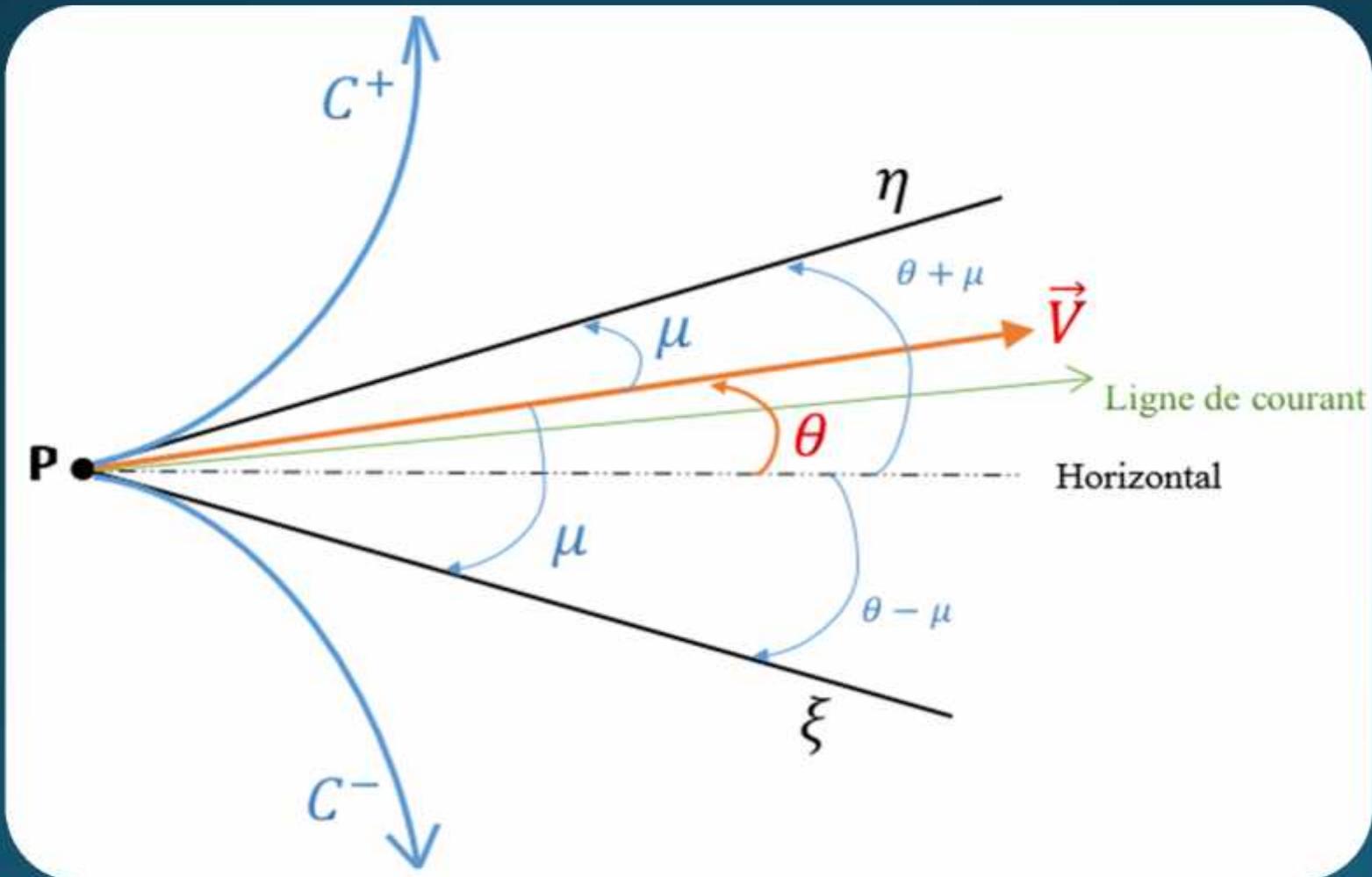
Etude
Bibliographique

Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives





Etude
Bibliographique

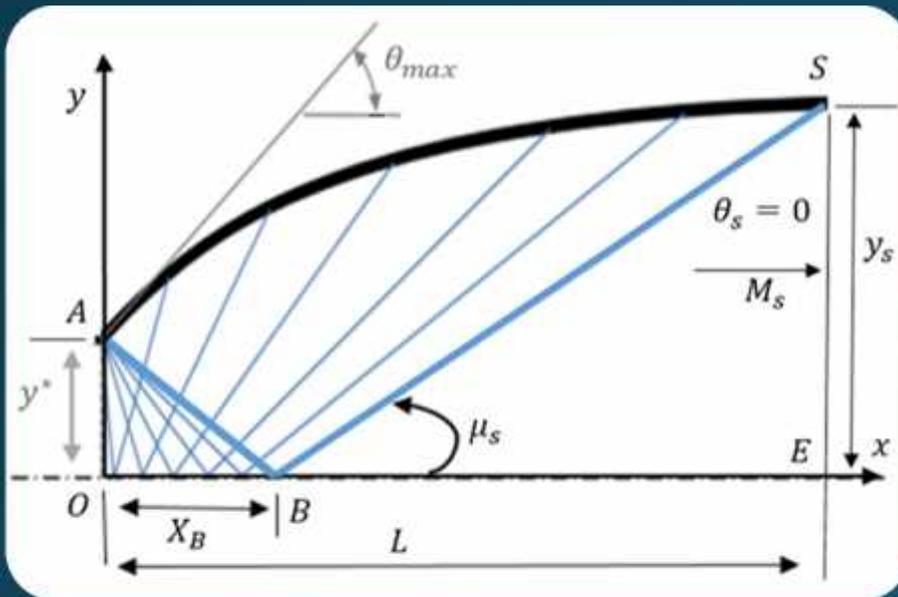
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

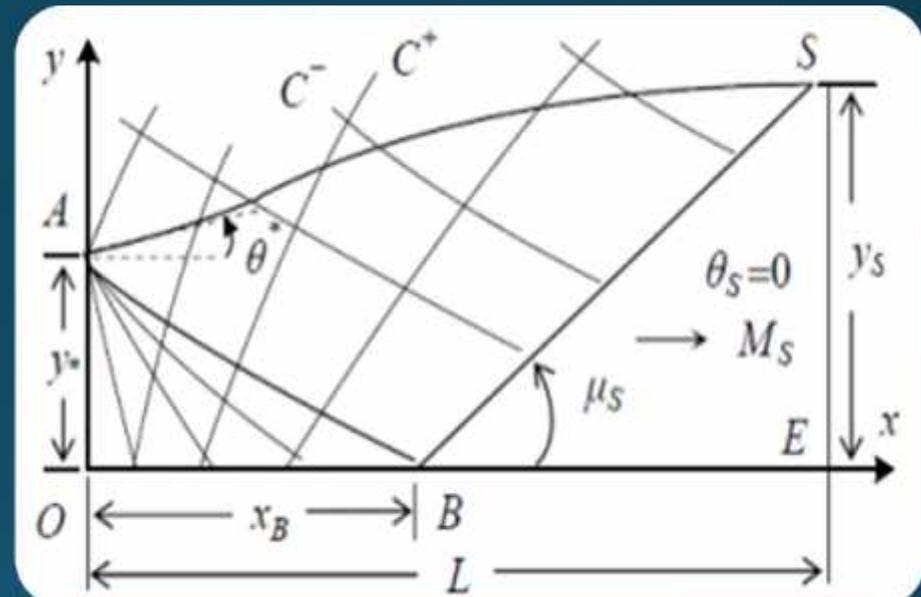
Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Tuyère bidimensionnelle



Tuyère axisymétrique





Formulation mathématique:

Suivant (1-3)

$$\left(\begin{array}{c} + \\ - \end{array} \right) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \gamma)$$

Suivant (2-3)

$$\left(\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\tan \alpha = \tan(\beta + \gamma)$$



Fonction de Prandtl-Mayer :

$$= \dots \quad () = - \frac{()}{()} \sqrt{() - ()}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = \frac{()}{(-)} \\ = \frac{()}{(+)} \end{array} \right.$$



Suivant ξ (1-3):

$$-\frac{(\cdot)}{2} \frac{(\cdot)}{(\cdot)} \sqrt{\cdot (\cdot) - 1} + = \frac{\cdot}{\cos(\cdot - \cdot)}$$

$$= \tan(\cdot - \cdot)$$

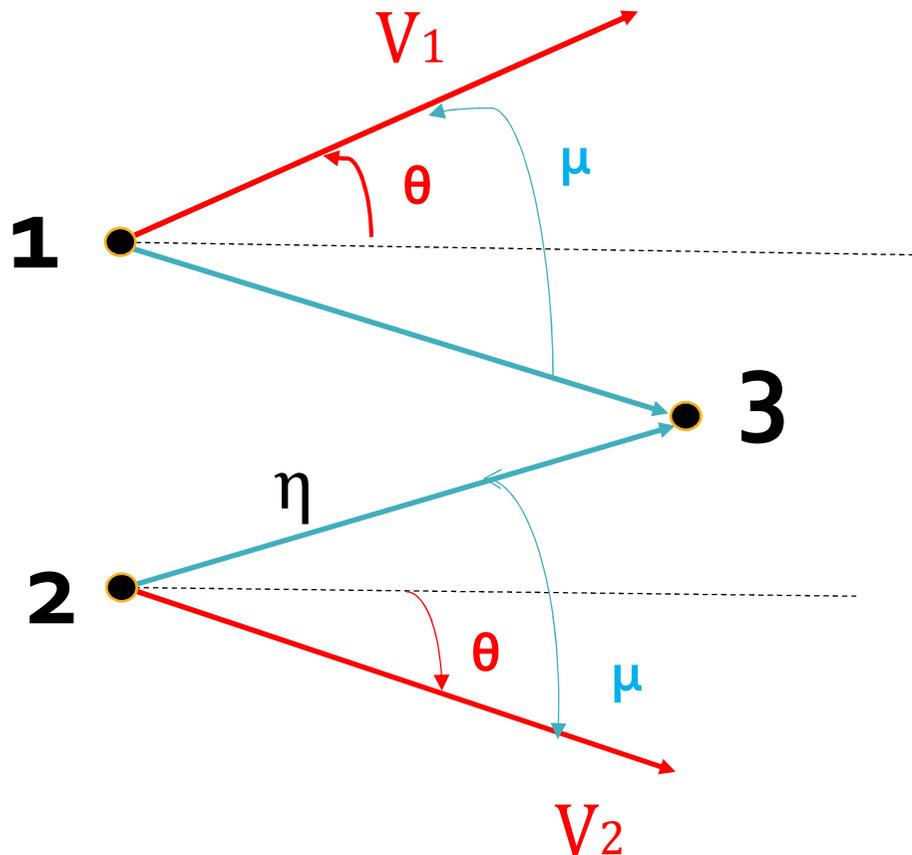
Suivant η (2-3):

$$-\frac{(\cdot)}{2} \frac{(\cdot)}{(\cdot)} \sqrt{\cdot (\cdot) - 1} - = \frac{\cdot}{\sin(\cdot + \cdot)}$$

$$= \tan(\cdot + \cdot)$$



l'écoulement au point 3 est
calculé à partir des points 1 et 2
où il est connu



le point 3 est à l'intersection :

- de la () passant par 1
- de la () passant par 2

• $\{M, \theta\}$ $\{\mu_1, \mu_2\}$ pour les
points $\{1, 2\}$ sont connue



❖ Différent types des points de l'écoulement supersonique :

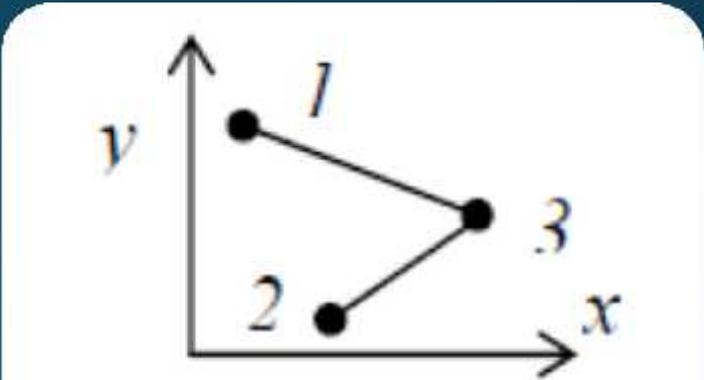
➤ Equation et procédure pour un point interne

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_3 - p_1}{2}$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \left(\frac{p_3 - p_1}{2} \right)$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \frac{p_3 - p_1}{2}$$



(b) : Nœud interne

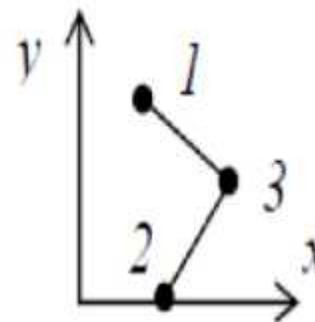
(p) : Nœud interne



Point interne particulier:

$$= \frac{. \quad - \quad +}{2}$$

$$= \frac{2[(\quad + \quad) + \quad]}{2 \quad + \quad}$$



(c) : Nœud interne particulier

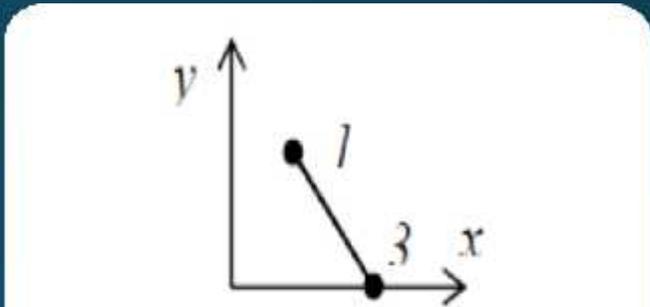
(c) : Nœud interne particulier



Equations pour un point sur l'axe de symétrie:

$$\dots = \dots$$

$$= + \frac{(\dots)}{\dots}$$



(d) : Nœud sur l'axe de symétrie

(q) : ...



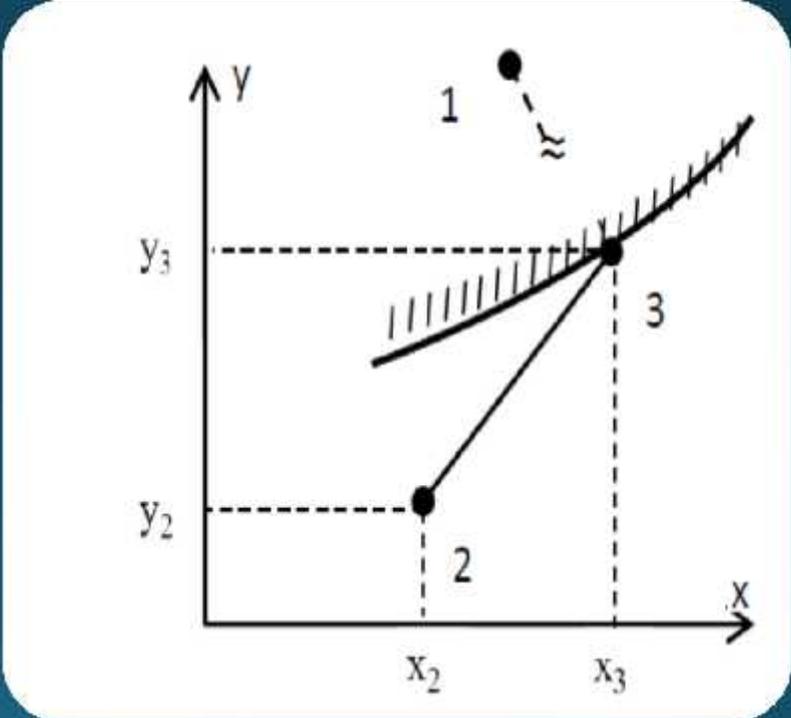
point sur une paroi rigide:

$$= ()$$

$$= \arctan \left(\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \right)$$

$$= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \dots (-) + \dots$$

$$= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$





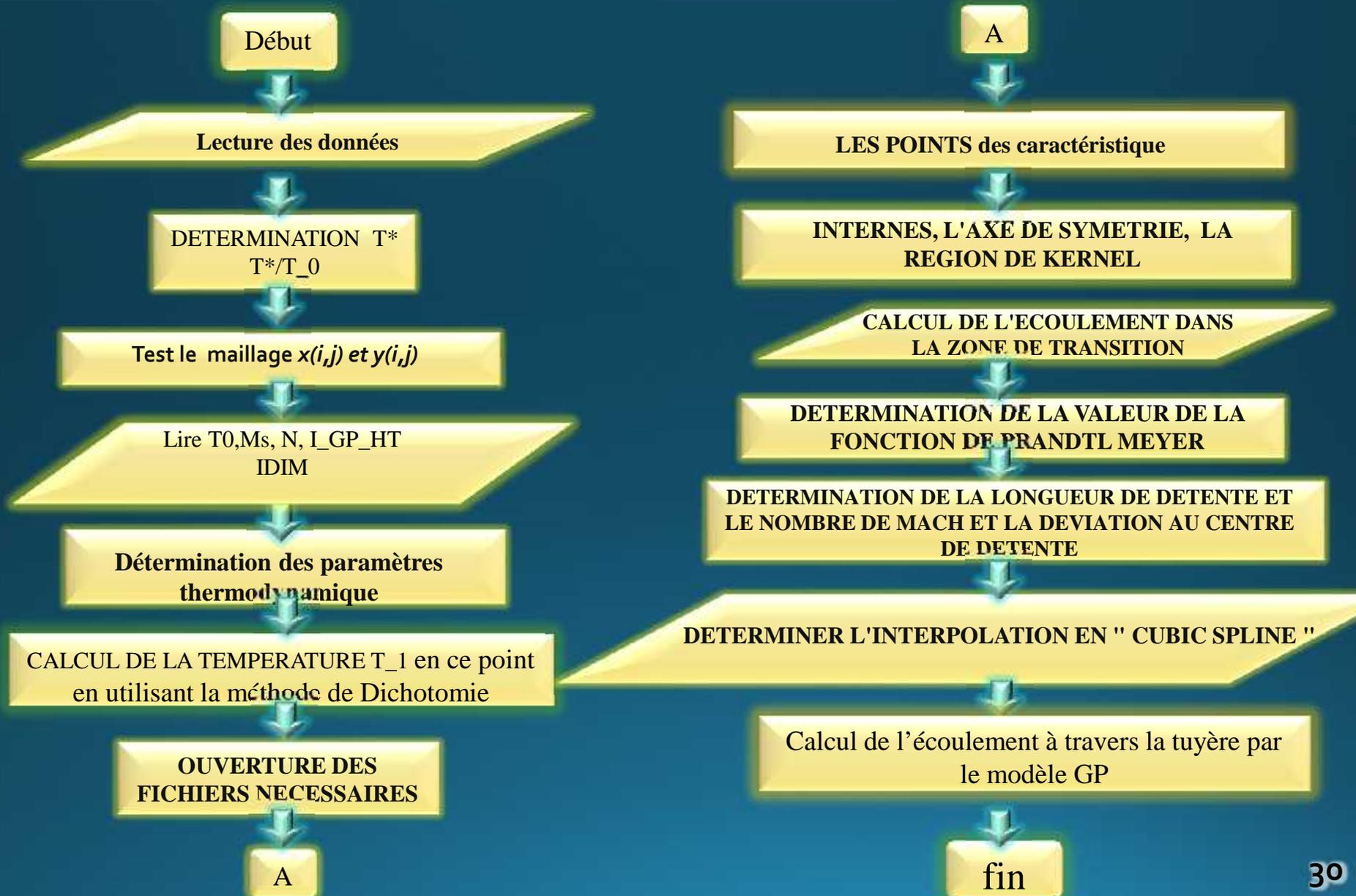
*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Discussions des Résultats



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Résultats sur la tuyère à détente
centrée bidimensionnelle (2D MLN)*



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Maillages en caractéristiques



*Etude
Bibliographique*

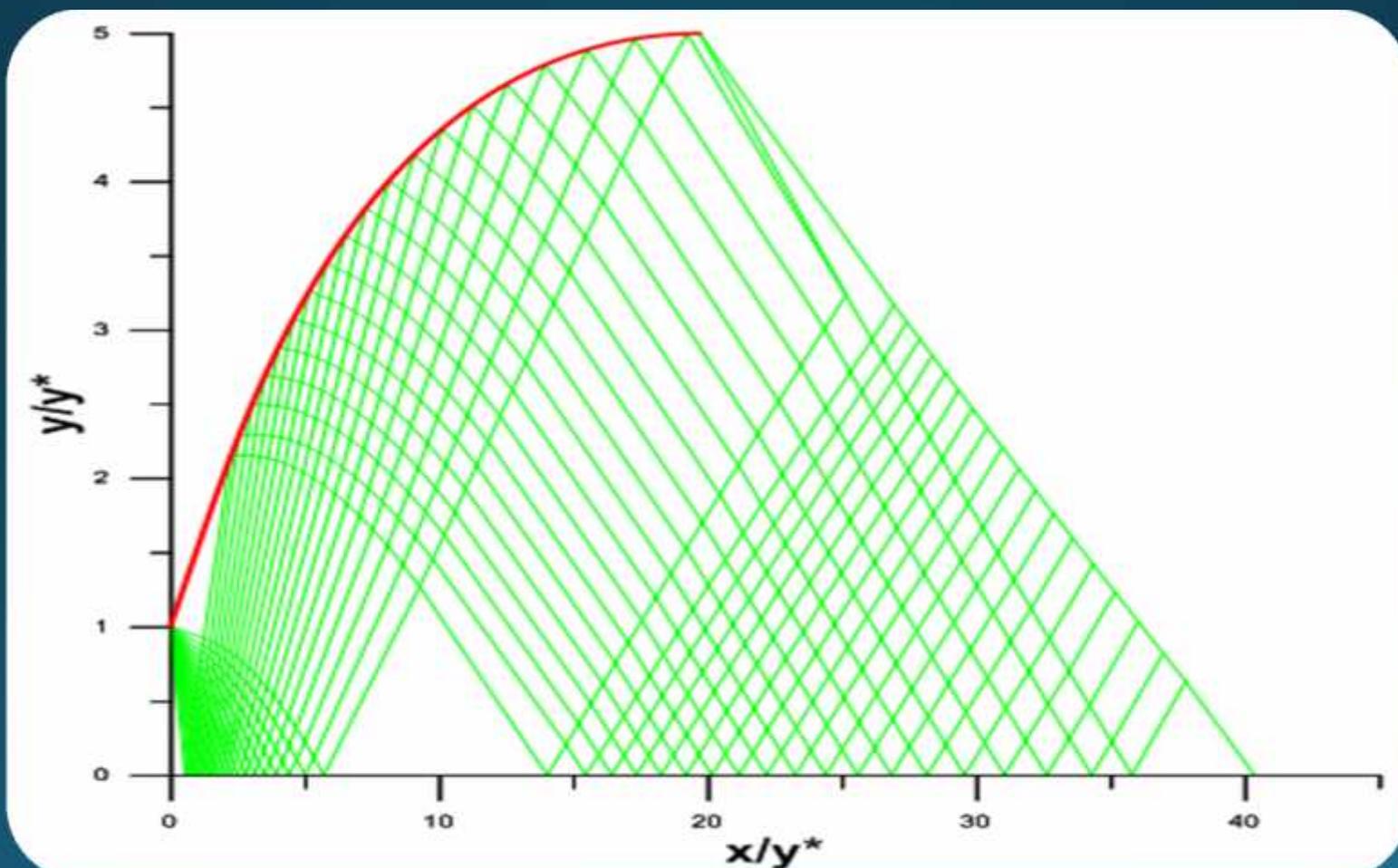
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s = 3.0$, $N_j = 0$, $N_c = 20$





*Etude
Bibliographique*

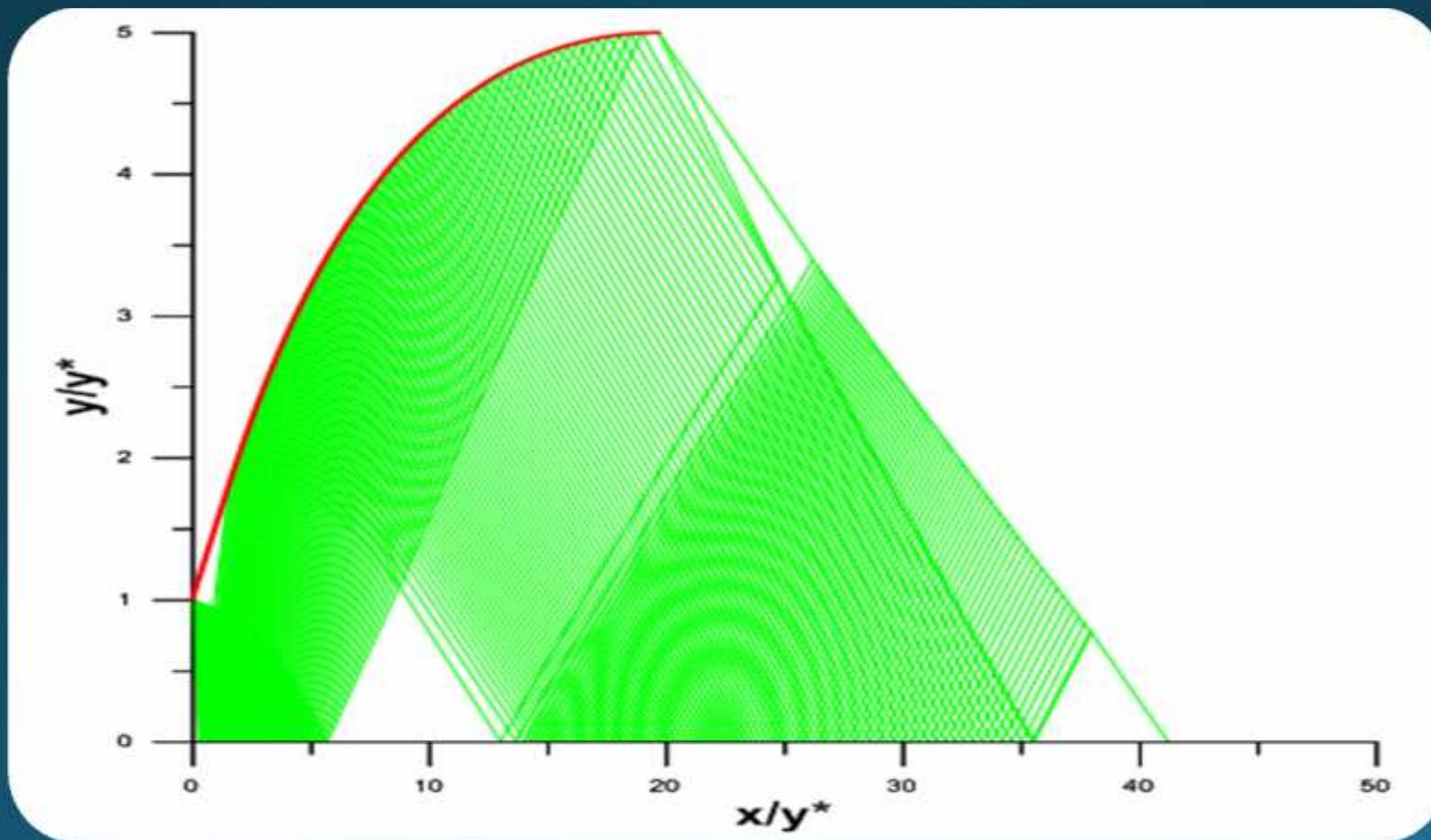
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une
tuyère MLN 2D avec $Ms = 3.0$, $Nj = 0$, $Nc = 80$*





*Etude
Bibliographique*

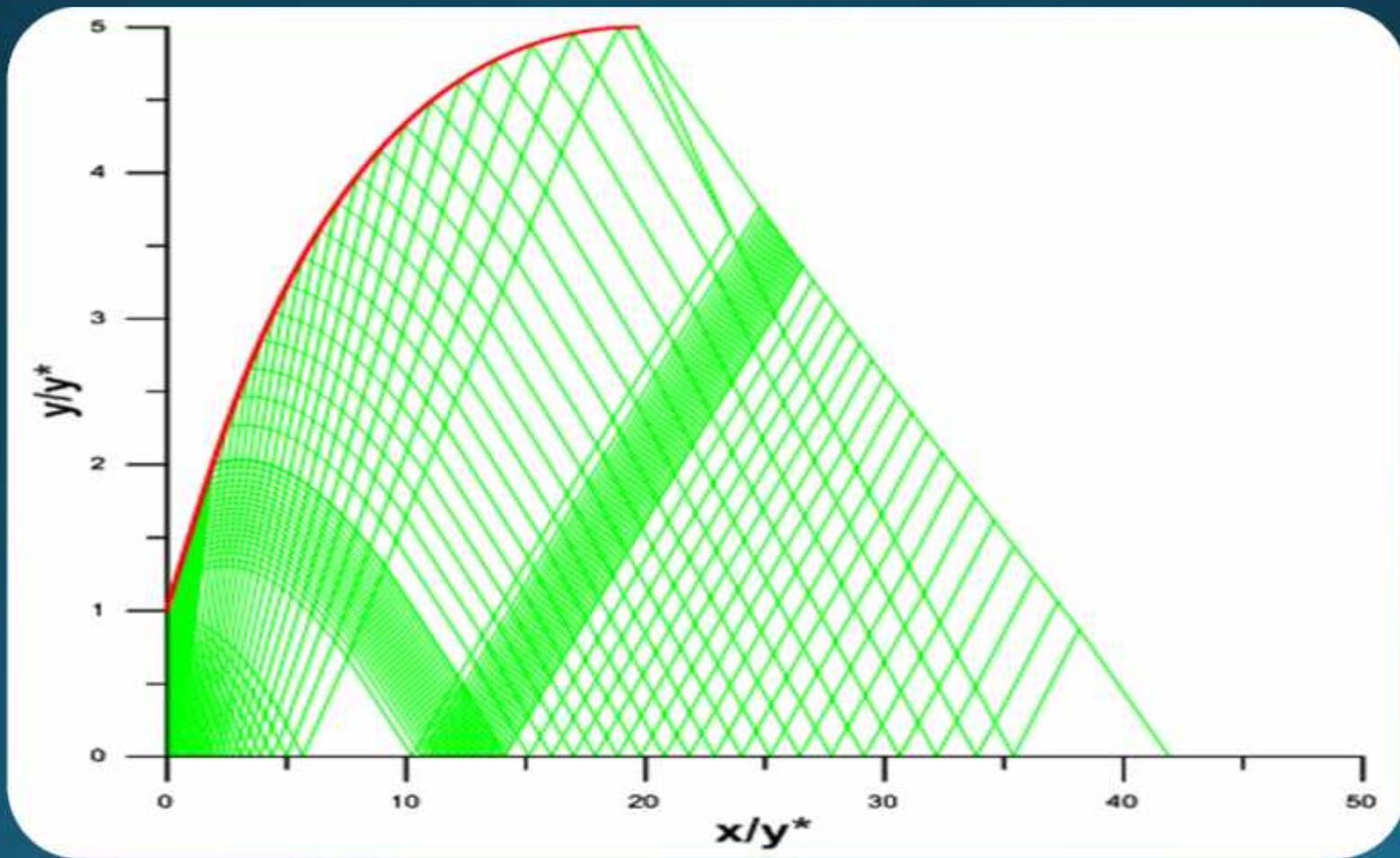
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de
Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $Ms = 3.0$, $Nj = 20$, $Nc = 20$*





Etude
Bibliographique

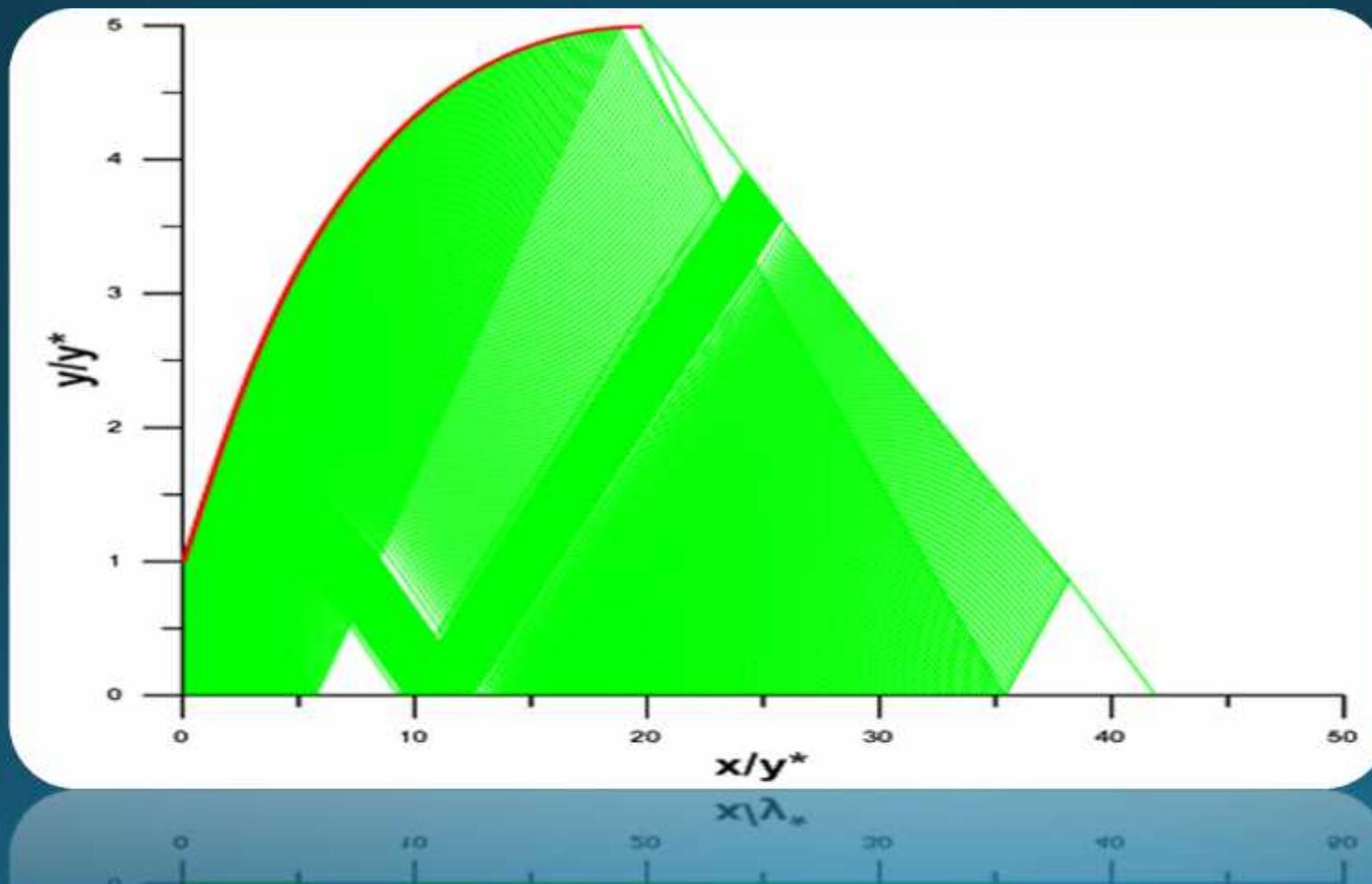
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN 2D avec $M_s = 3.0$, $N_j = 250$, $N_c = 150$





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Variation des paramètres le long de
l'axe de symétrie de la tuyère MLN
2D*



Etude
Bibliographique

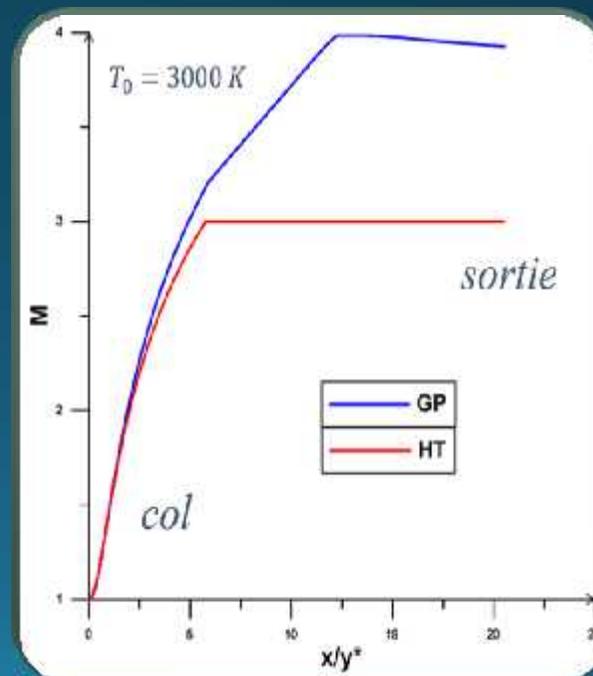
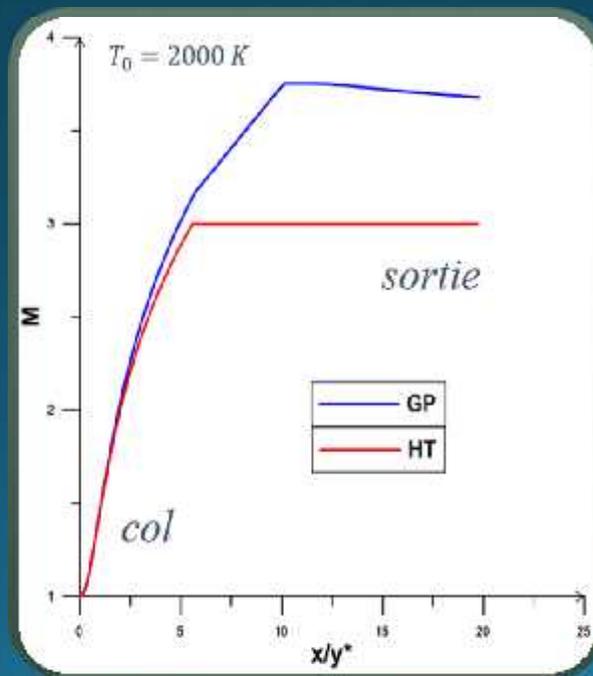
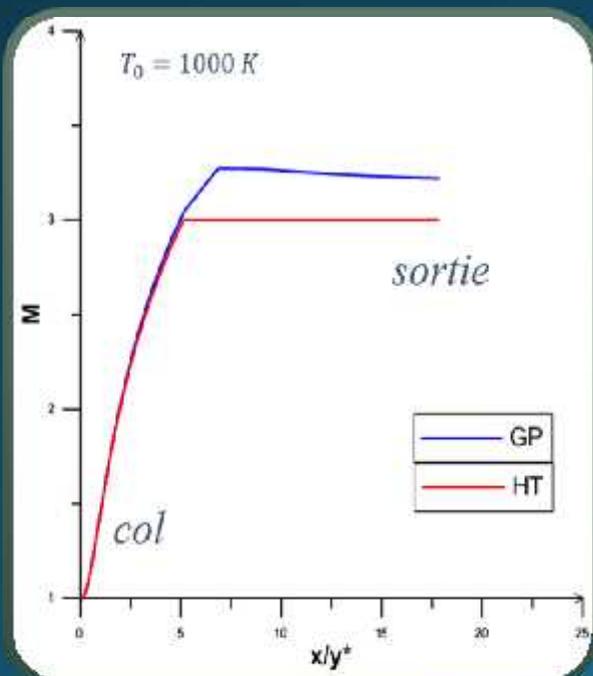
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du nombre de Mach





Etude
Bibliographique

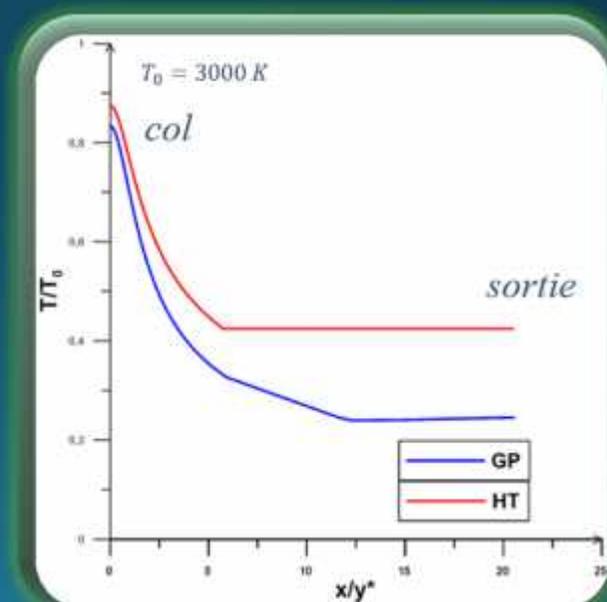
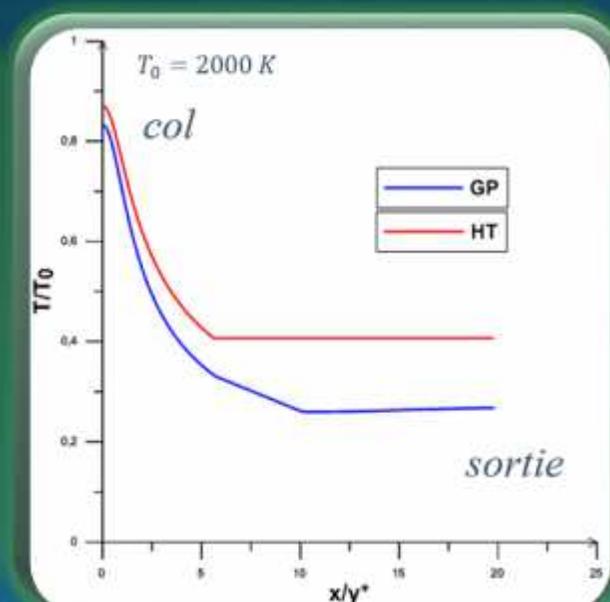
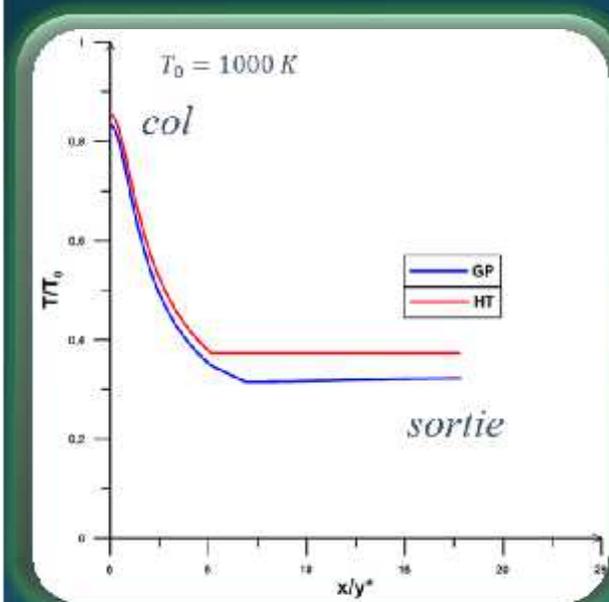
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Rapport de température





Etude
Bibliographique

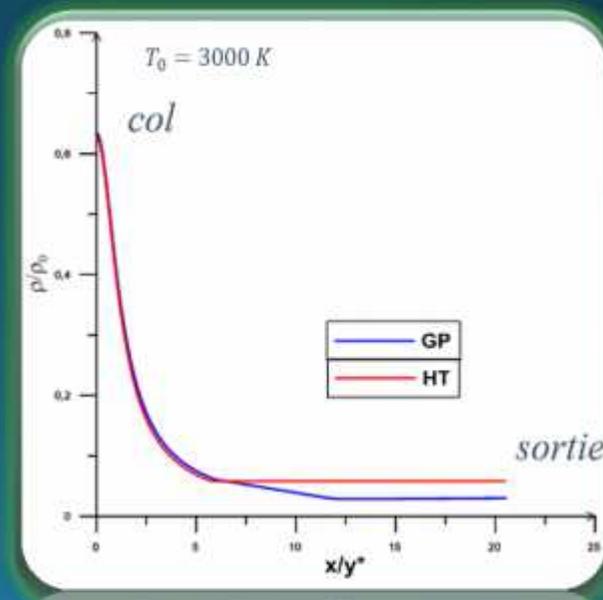
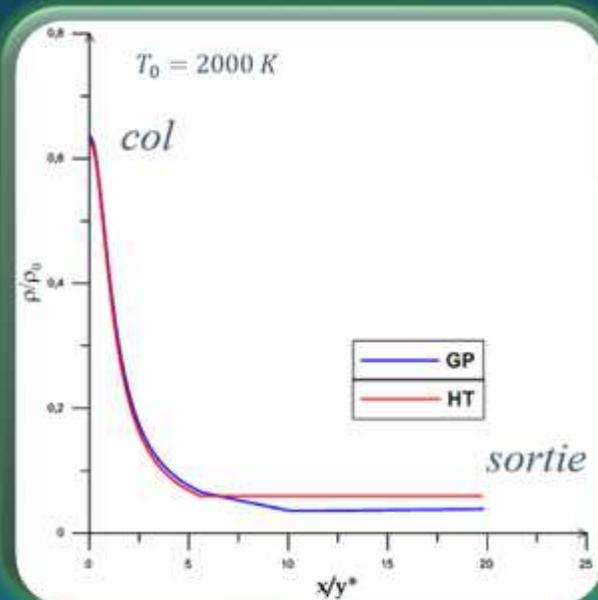
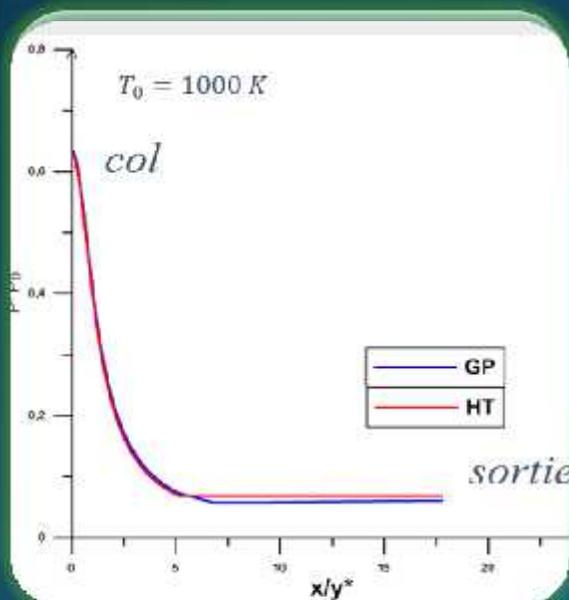
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Rapport de Masse Volumique





Etude
Bibliographique

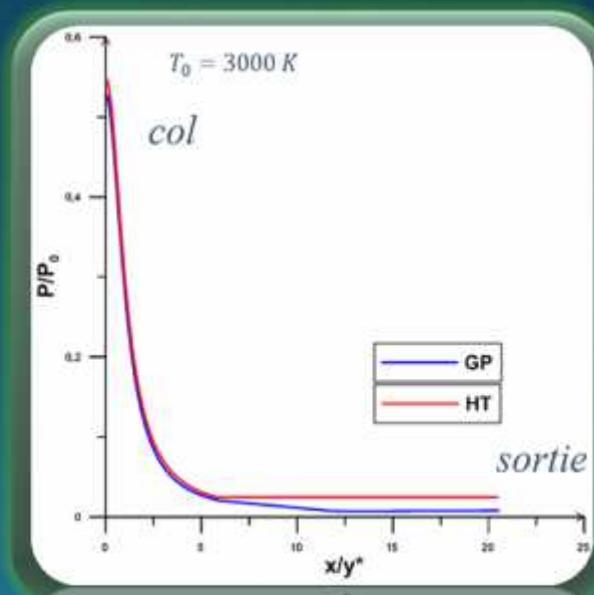
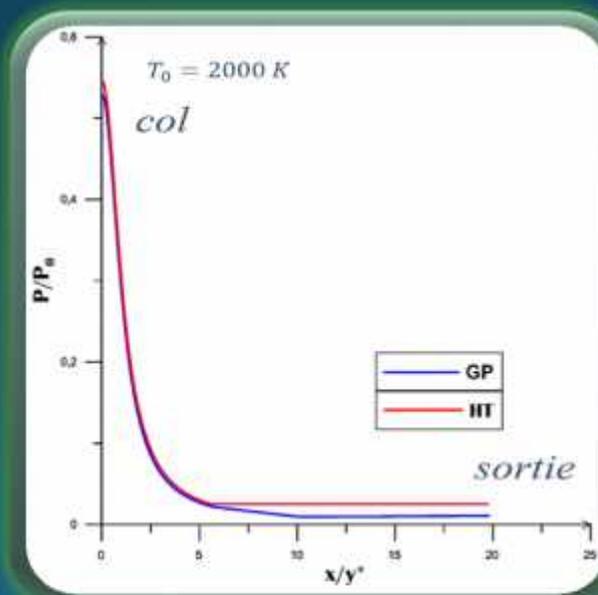
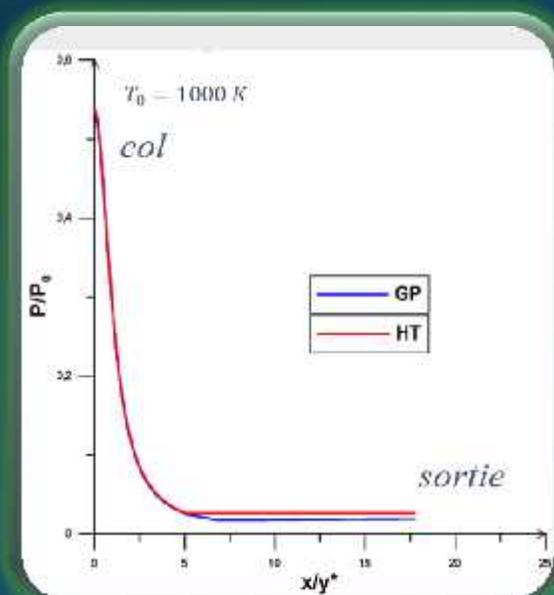
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Rapport de pression





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère MLN 2D



Etude
Bibliographique

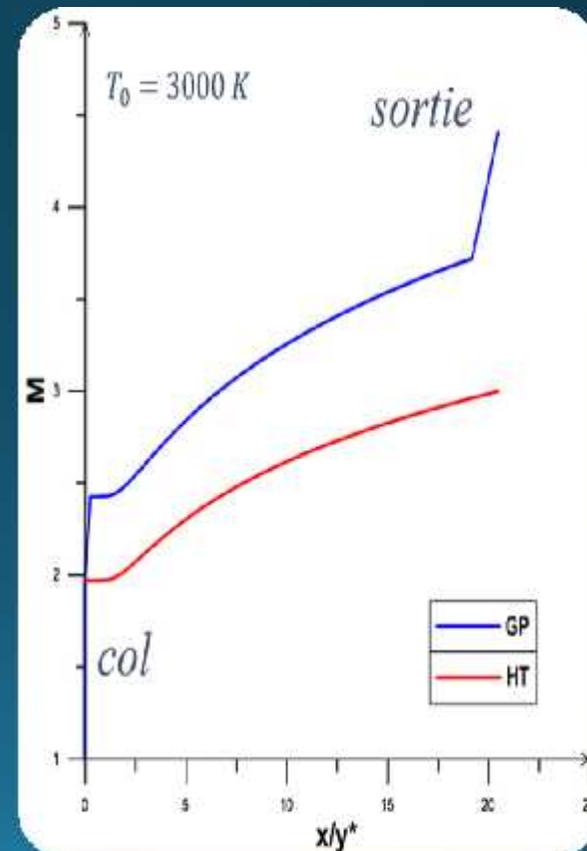
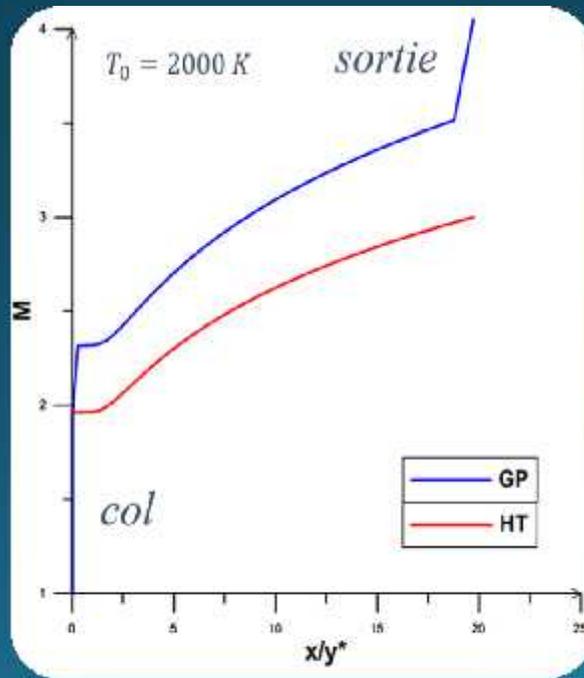
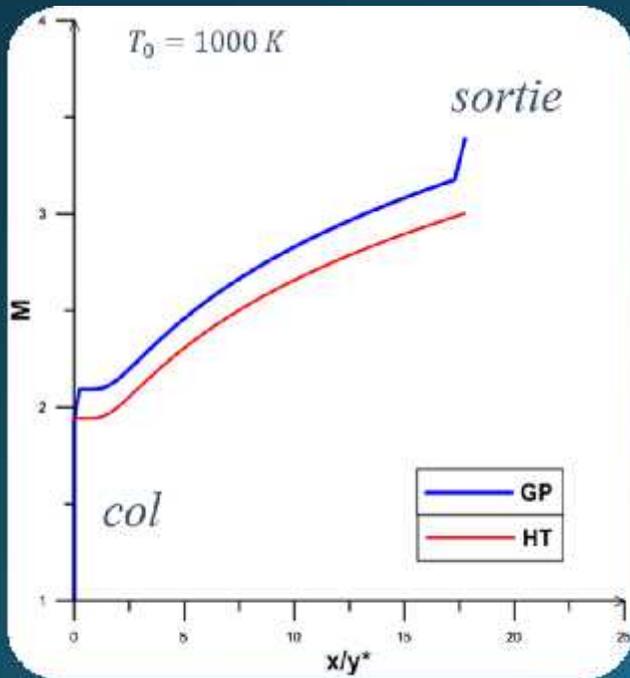
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

variation du Nombre de Mach





Etude Bibliographique

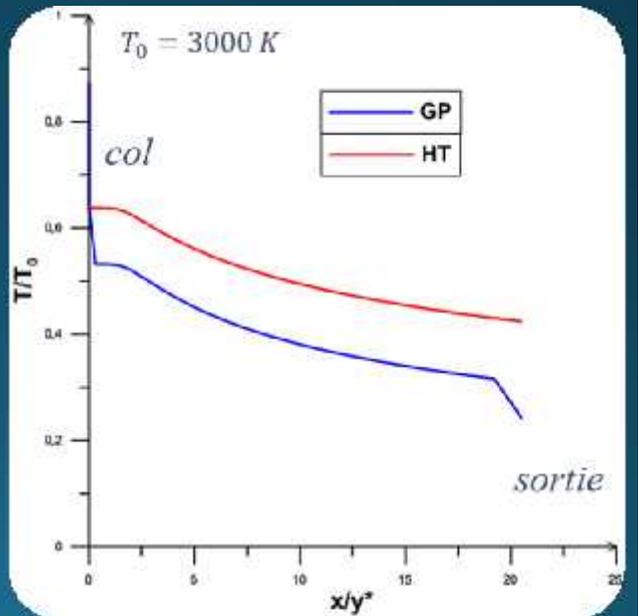
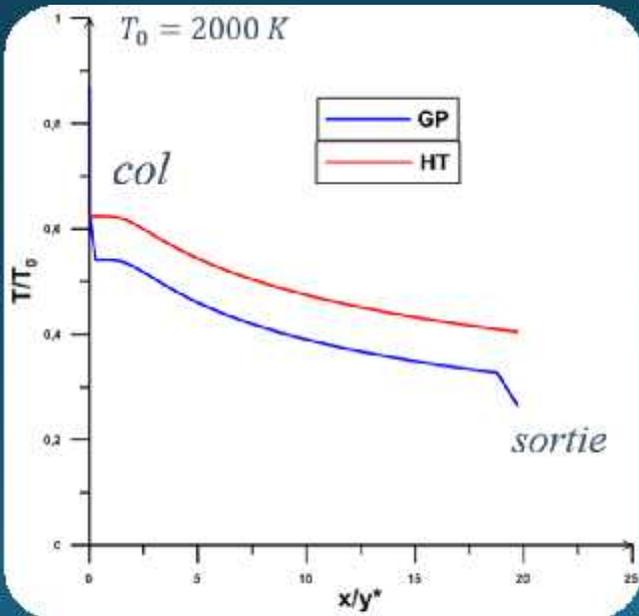
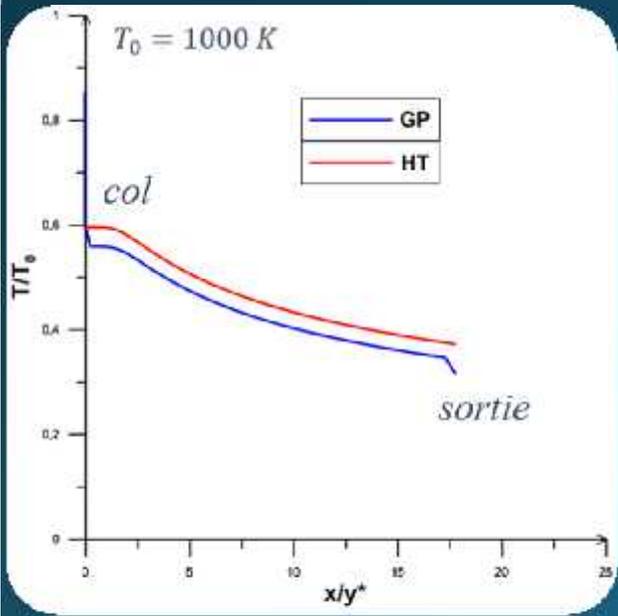
Parameters thermodynamique à HT

Méthode des caractéristique

Résultats & Discussions

Conclusion & perspectives

Variation du Rapport de température





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Résultats sur la tuyère à détente centrée axisymétrique



*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Maillages en caractéristiques



*Etude
Bibliographique*

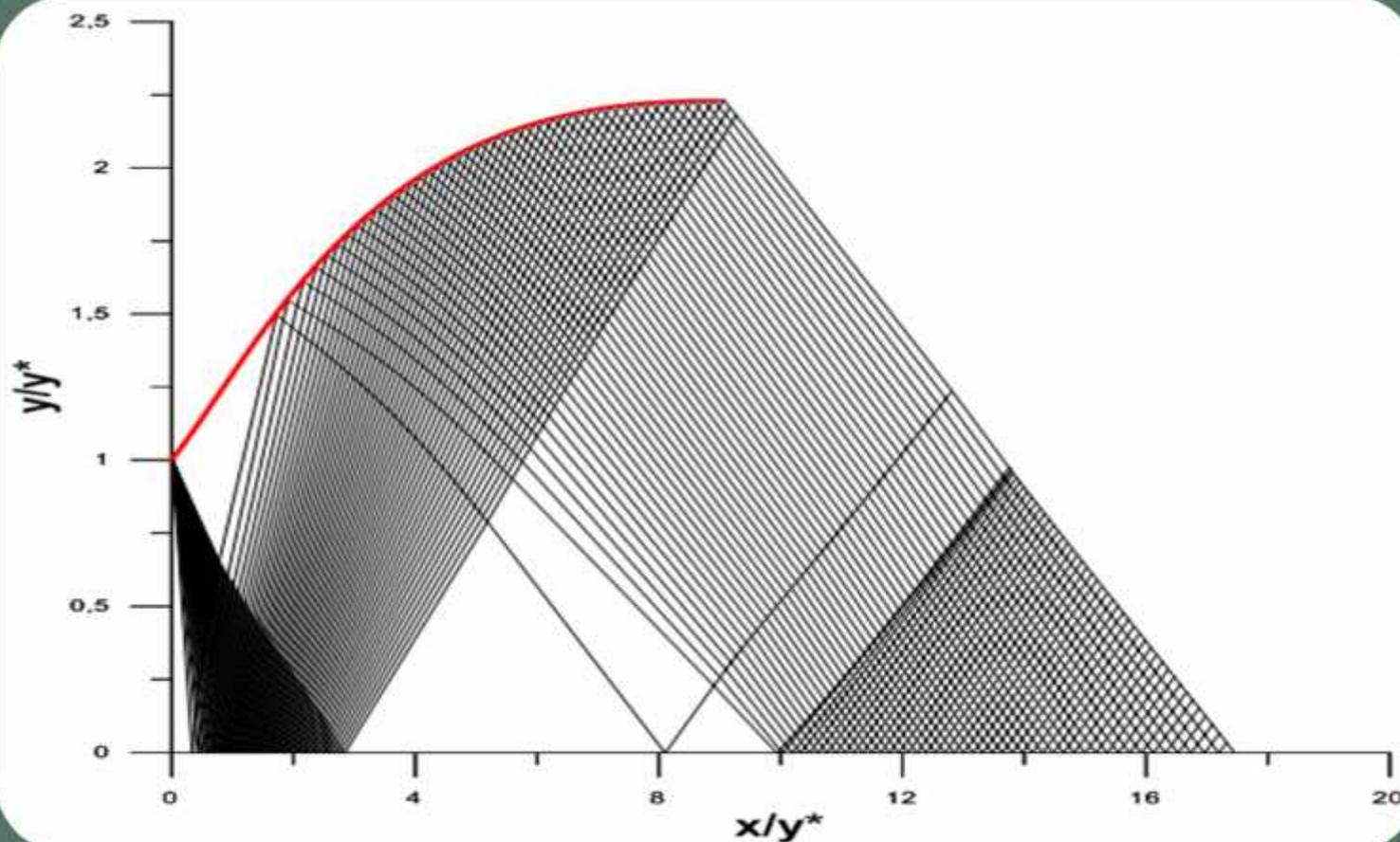
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel
d'une tuyère MLN Axisymétrique avec $M_s = 3.0$, $N_j = 0$, $N_c = 50$*





*Etude
Bibliographique*

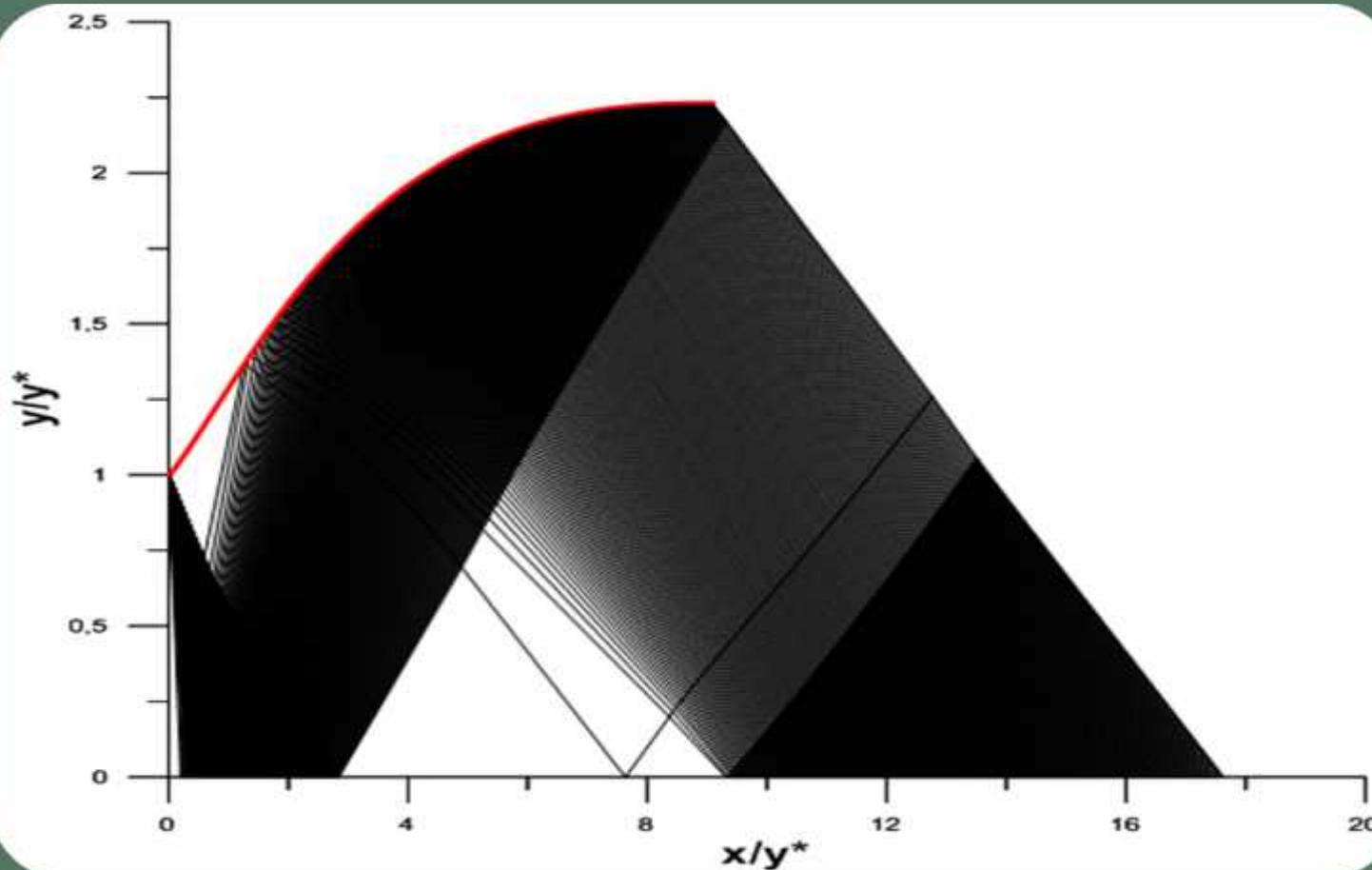
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel
d'une tuyère MLN Axisymétrique avec $M_s=3.0$, $N_j=0$, $N_c=200$*





Etude
Bibliographique

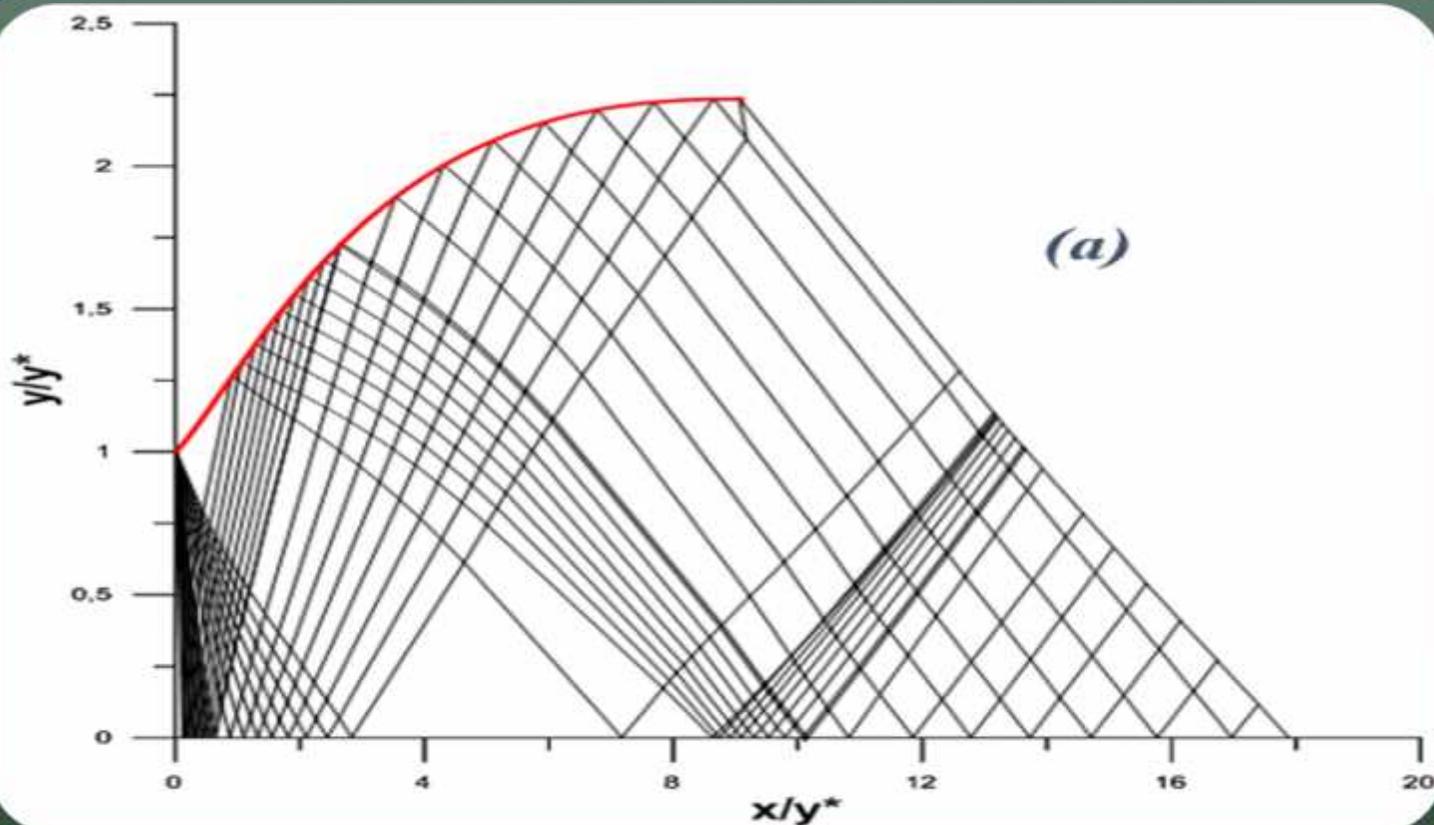
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel d'une tuyère MLN Axisymétrique avec $M_s = 3.0$, $N_j = 10$, $N_c = 10$





*Etude
Bibliographique*

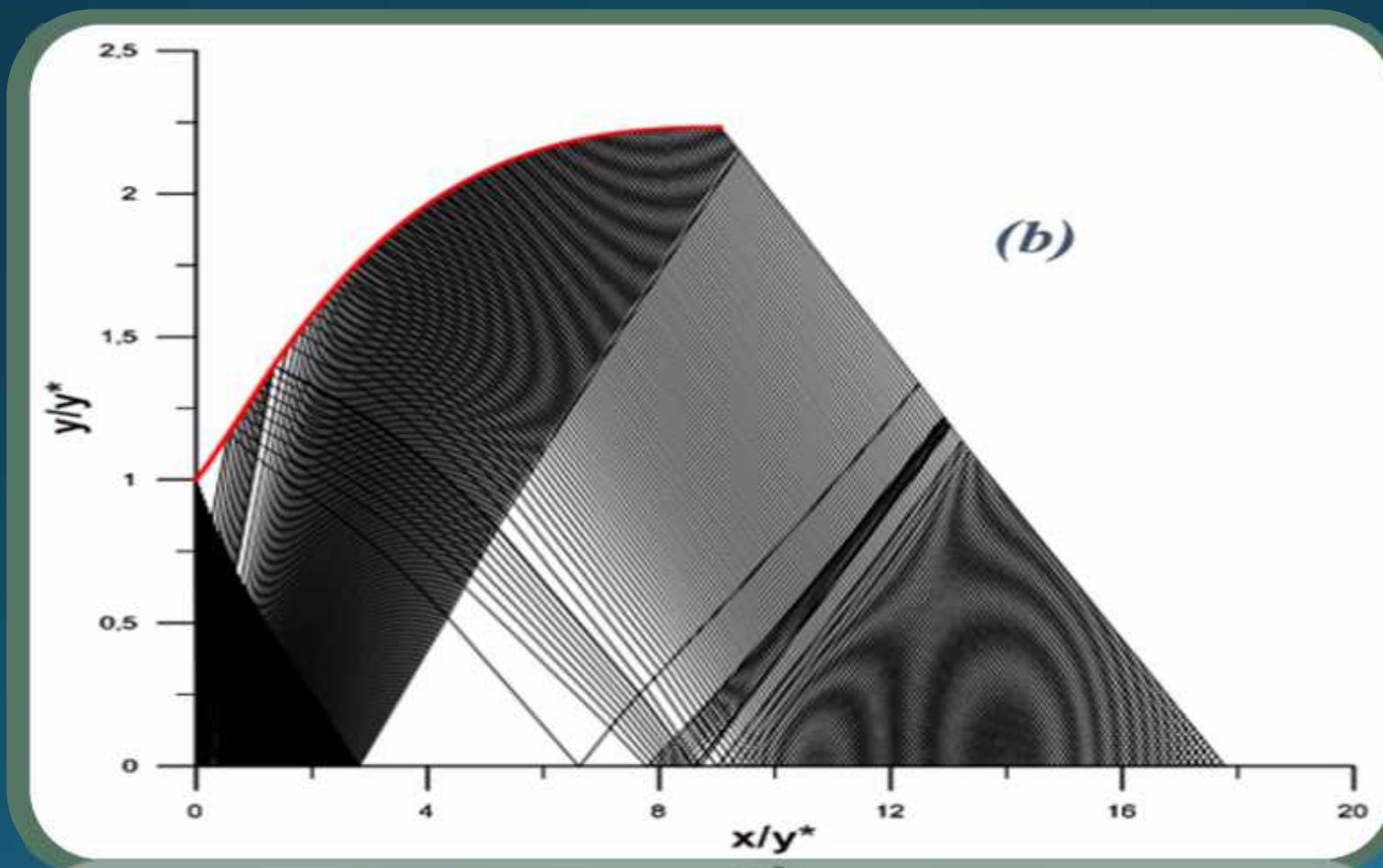
*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

*Insertion des caractéristiques supplémentaires dans la zone de Kernel
d'une tuyère MLN Axisymétrique avec $Ms = 3.0$, $Nj = 10$, $Nc = 100$*





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Variation des paramètres dans l'axe de symétrie de la tuyère MLN axisymétrique



Etude
Bibliographique

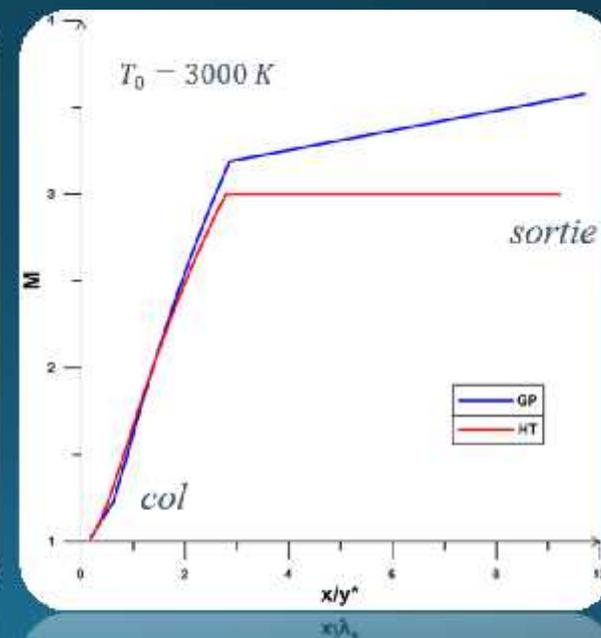
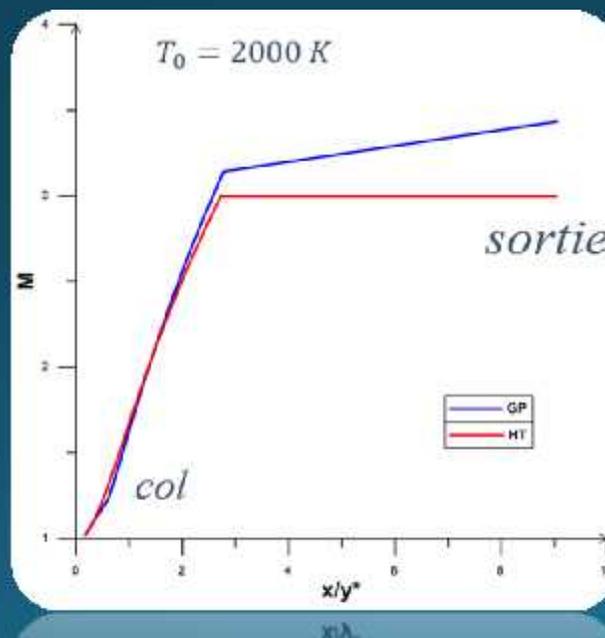
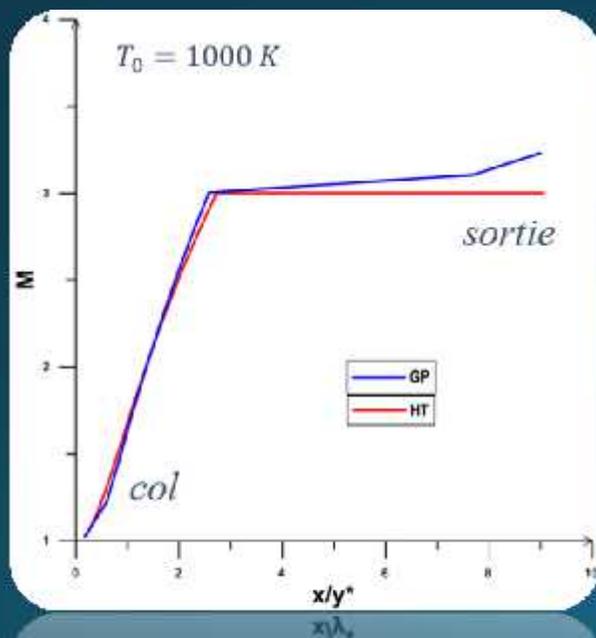
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Nombre de Mach





Etude
Bibliographique

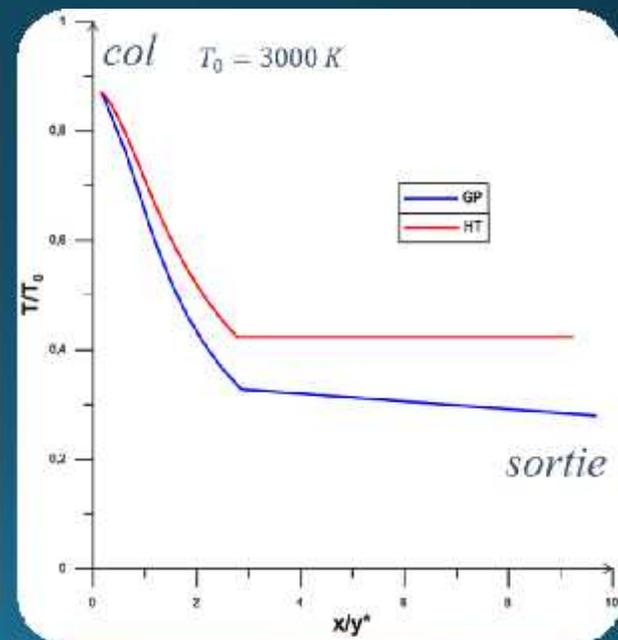
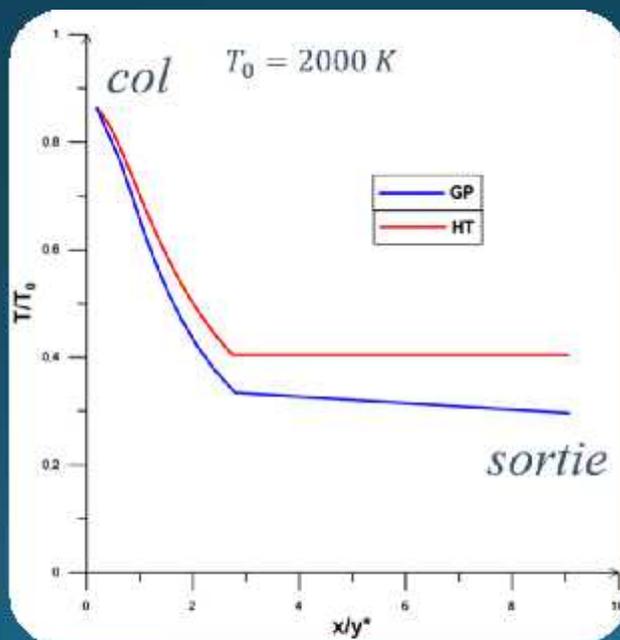
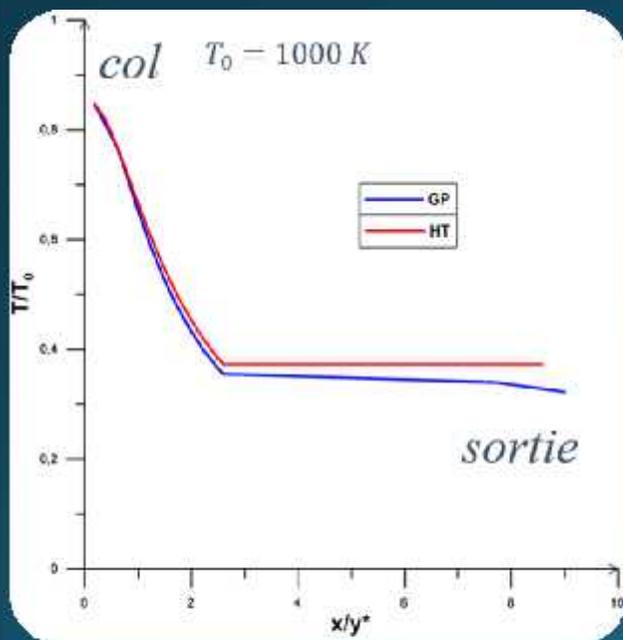
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Rapport de température





*Etude
Bibliographique*

*Parameters
thermodynamique
à HT*

*Méthode
des
caractéristique*

*Résultats
&
Discussions*

*Conclusion
&
perspectives*

Variation des paramètres à travers la paroi de la tuyère MLN axisymétrique



Etude
Bibliographique

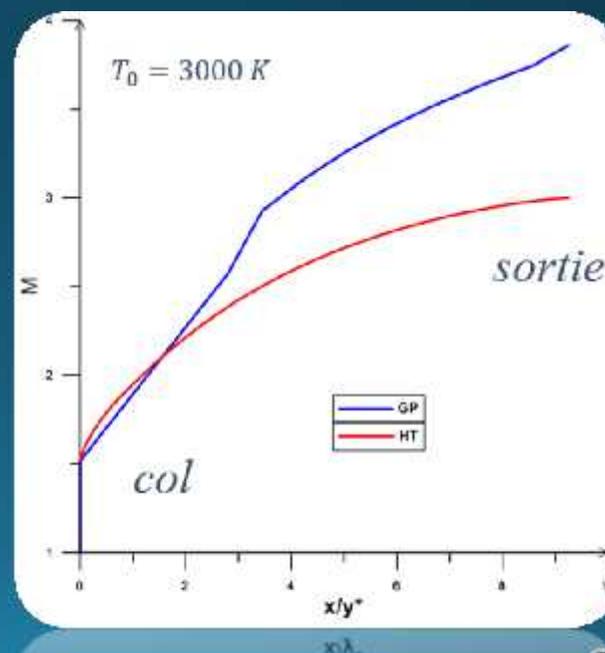
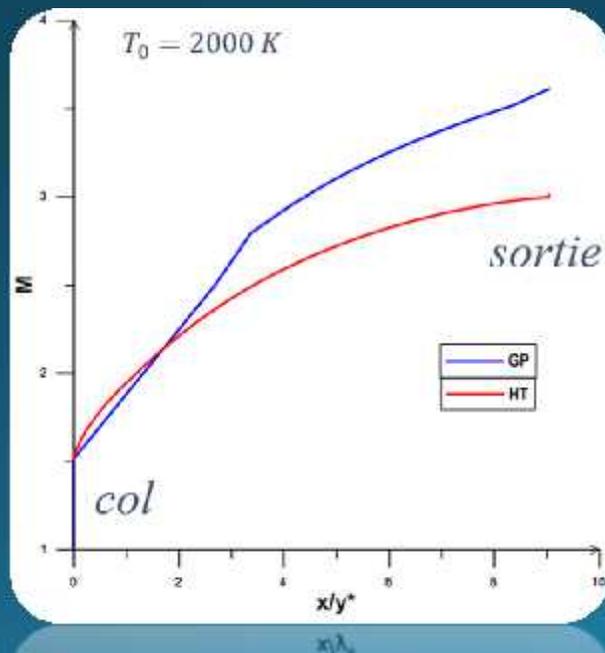
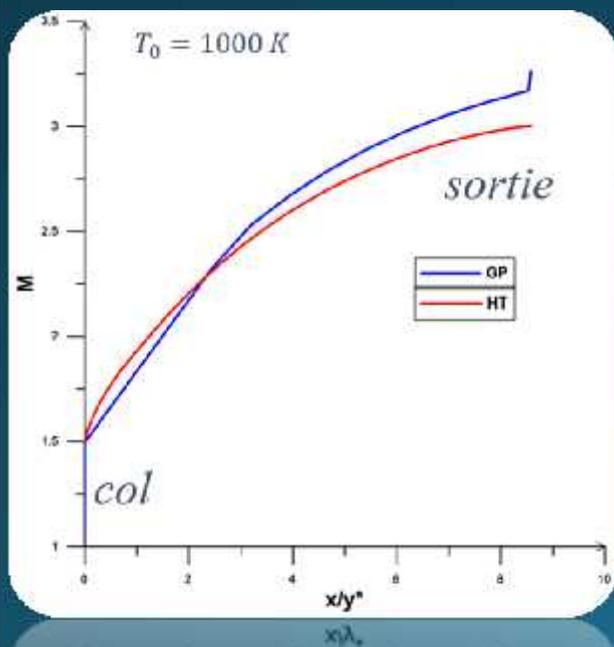
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Nombre de Mach





Etude
Bibliographique

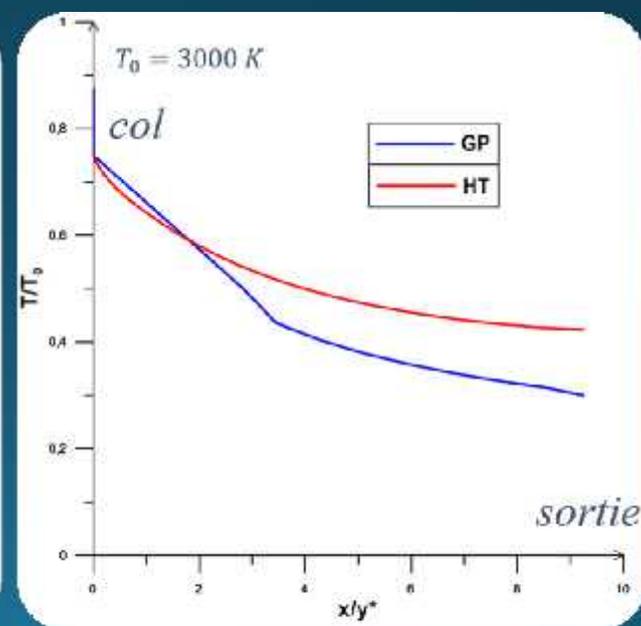
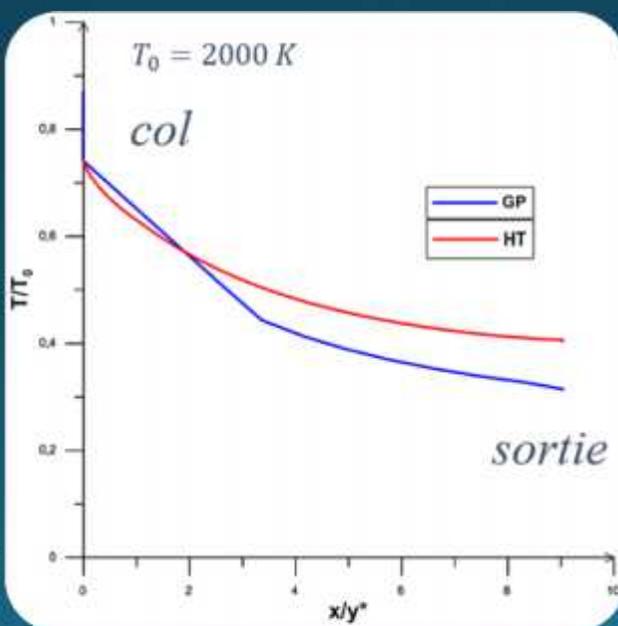
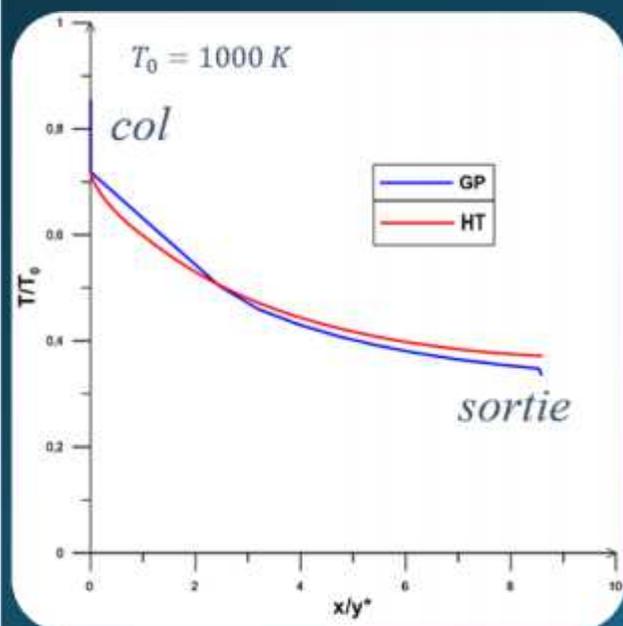
Parameters
thermodynamique
à HT

Méthode
des
caractéristique

Résultats
&
Discussions

Conclusion
&
perspectives

Variation du Rapport de température



Cette étude nous a permis de calcul de l'écoulement dans la tuyère supersonique à détente centrée bidimensionnelle et axisymétrique dimensionnée par le modèle HT, On a pu avoir nos résultats d'après le programme de calcul numérique.

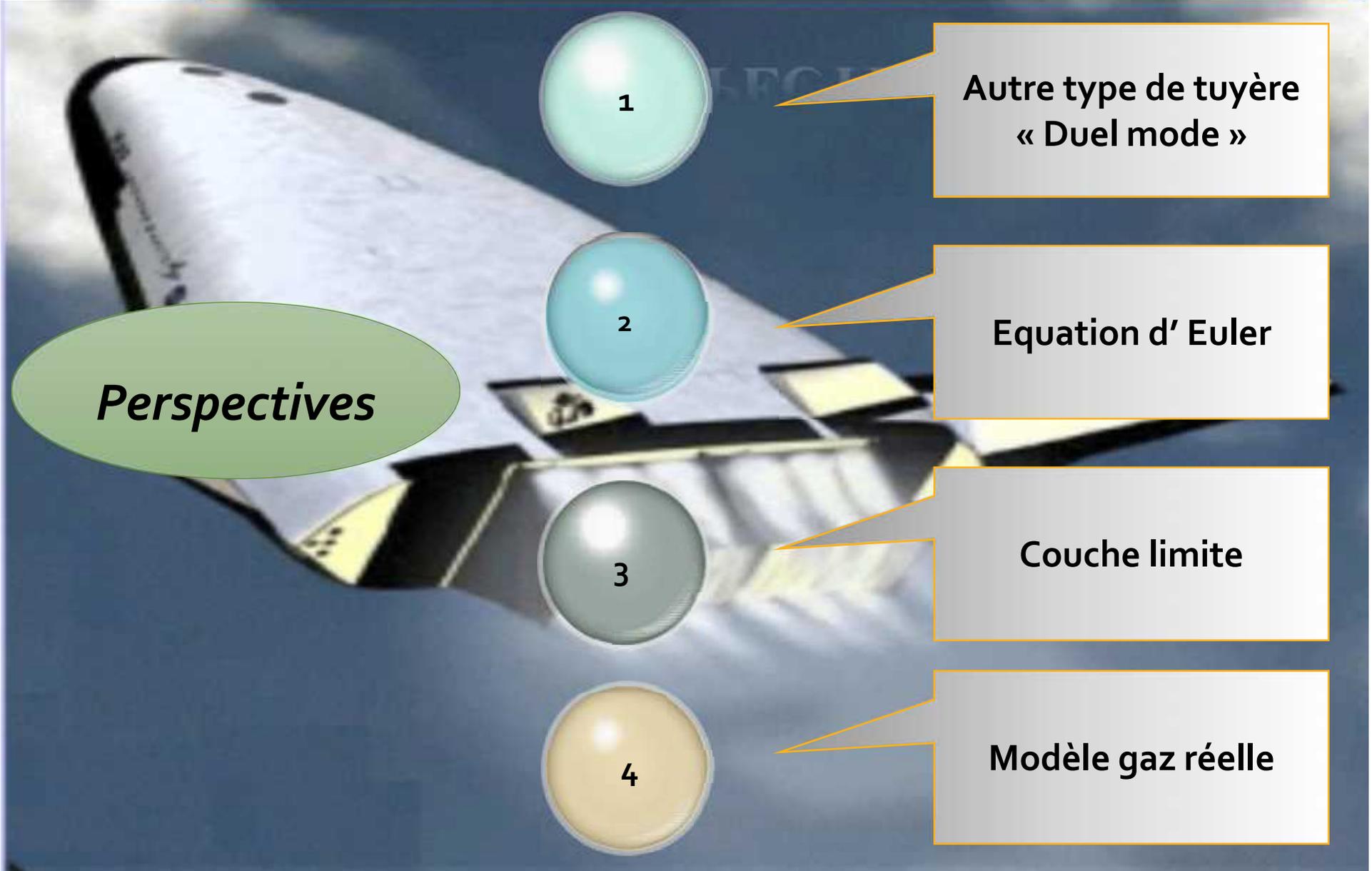
A la fin on peut citer les points suivants :

- **Le modèle HT demande une tuyère très large pour avoir une détente complète.**
- **La variable principal pour le modèle HT c'est la température, et pour le modèle GP c'est le nombre de Mach.**

- **le modèle GP augmente les performances notamment le nombre de Mach de sortie, dans la tuyère dimensionnée par le modèle HT, Autrement dit le fluide trouve un espace assez large pour faire la détente GP complet jusqu'à le nombre de Mach de sortie.**
- **La détente dans une tuyère axisymétrique est plus rapide que celle dans une tuyère bidimensionnelle**



PERSPECTIVES



Perspectives

1

Autre type de tuyère
« Duel mode »

2

Equation d' Euler

3

Couche limite

4

Modèle gaz réelle

Merci de votre attention