

**UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA**

**Faculté des Sciences**

Département de Physique

**MEMOIRE DE MAGISTER**

en Physique

Spécialité : Physique Théorique

L'UTILISATION DE LA REGLE DE QUANTIFICATION

AMELIOREE

POUR

L'ETUDE ET LA DETERMINATION DU SPECTRE

D'ENERGIE DU POTENTIEL DE MANNING-ROSEN

Par

**Mohamed Amine BOUACHA**

Devant le jury composé de :

S.BOUKRAA	Professeur, U. de Blida	Président
M.BENTAIBA	Professeur, U. de Blida	Rapporteur
R.KHELIFI	Maître de conférences A, U. de Blida	Examineur
S.A.YAHIAOUI	Maître de conférences B, U. de Blida	Examineur

Blida, Juin 2012.



## RÉSUMÉ

نعرض هنا قاعدة التكميم المحسنة، من أجل الحالات المستقرات لمعادلة شرودينغر ذات بعد واحد، و المعممة لمعادلة شرودينغر ذات ثلاث أبعاد مع كمون كروي. في قاعدة التكميم المحسنة هذه، إضافة على  $N\pi$ ، نجد عبارة تكاملية ندعوها بالتصحيح الكوانتي و نرمز إليها بـ  $Q_c$ . فيما يخص الأنظمة التي تقبل حلا صحيحا تمكنا من التوصل إلى أن التصحيح الكوانتي عبارة عن ثابت، إنه مستقل عن عدد العقد في التابع الموجي. في مثل أولاء الأنظمة يمكن حساب مستويات الطاقة لكل الحالات المستقرات انطلاقا من قاعدة التكميم المحسنة و، الحل الموافق للحالة الطبيعية (الأساسية، القاعدية) الذي يمكن الحصول عليه من عملية إيجاد حلٍ لمعادلة ريكاتي التفاضلية المكافئة لمعادلة شرودينغر المخصصة بالاهتمام. بواسطة هذا المنهج (القاعدة) الجديد تأكدنا من أطيف الطاقة الموافقة لعدة أنظمة معروفة أغلبها □ ذؤون ثلاث أبعاد، و خصصنا بالذكر نظامين يتمتعان ببعد واحد أولهما متعلق بكمون روزن-مورس المثلاثي و التناظري و الثاني متعلق بنفس الكمون و لكن في شكله الضد تناظري، كما درسنا النظام ثلاثي الأبعاد (D=3) المتعلق بكمون مانينغ-روزن في إطار تقريب بكريس قبل أن نقدم وناقش كل ما توصلنا إليه في إطار النتيجة الإجمالية.

## RESUME

Nous présentons ici la règle de quantification améliorée, pour les états liés de l'équation de Schrödinger à une seule dimension, et généralisée à l'équation de Schrödinger à trois dimensions avec un potentiel sphérique. Dans la règle de quantification améliorée, en plus de  $N\pi$ , on trouve un terme intégrale que l'on appelle correction quantique et que l'on symbolise par  $Q_c$ . Pour les systèmes qui admettent une résolution exacte nous avons pu arriver au fait que la correction quantique est constante, elle est indépendante du nombre de nœuds dans la fonction d'onde. Dans ce genre de systèmes les niveaux d'énergie de tous les états liés peuvent être calculés par l'entremise de la règle de quantification améliorée et, la solution pour l'état fondamental qui peut être obtenue par la résolution de l'équation différentielle de Riccati équivalente à l'équation de Schrödinger prise en considération. Au moyen de cette nouvelle méthode nous avons confirmé plusieurs spectres d'énergie qui correspondent à des systèmes connus dont la plus part d'entre eux sont à trois dimensions, et on s'est contenté d'en présenter deux systèmes à une seule dimension dont le premier est concerné par le potentiel de Rosen-Morse trigonométrique symétrique et le second est concerné par le même potentiel mais dans sa forme antisymétrique ; dans un autre volet nous avons étudié le système tridimensionnel (D=3) concerné par le potentiel de Manning-Rosen dans le cadre de l'approximation de Pekeris avant de préciser et de discuter tout ce dont on a obtenu dans le cadre de la conclusion générale.

## REMERCIEMENTS

*Sur un ton solennel ; j'estime qu'il est de mon devoir de s'adresser à tous les services concernés de l'université SAAD DAHLAB DE BLIDA, en tant que telle et en tant qu'institution de **LA REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**, pour exprimer ma profonde reconnaissance sincère, notamment pour l'accès qu'ils m'ont permis à ce haut niveau d'instruction, et pour tous les moyens inestimables, tant bien sur le plan scientifique que matériel, qui ont été gracieusement mis à disposition, à l'image des deux bases de données ScienceDirect et PROLA.*

*Dans un autre cadre ; tous les travaux qui ont permis l'émergence et la finalisation de ce mémoire de magister, ont été effectués dans la mesure d'une appartenance au laboratoire « LPTHIRM » (Laboratoire de Physique Théorique et Interactions Rayonnements Matière) du département de physique de la faculté des sciences de l'Université Saad Dahlab de Blida.*

*Pour leur accueil chaleureux qui m'a permis l'intégration du laboratoire « LPTHIRM », je remercie vivement tous les cadres scientifiques membres de ce laboratoire sans exception, et particulièrement : M<sup>er</sup> M.Bentaiba, directeur de ce laboratoire. Ainsi que, M<sup>er</sup> M.Ben Kaddour, M<sup>er</sup> M.Chekirine, M<sup>er</sup> R.Khelifi, M<sup>er</sup> S.A.Yahiaoui, M<sup>er</sup> H. Zerguini et M<sup>er</sup> M. Zilabdi.*

*Je m'adresse encore une fois à monsieur M.Bentaiba, en sa qualité de professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida ainsi que directeur de recherche vis-à-vis de ce mémoire de magister, pour lui exprimer cette fois-ci ma considération et ma reconnaissance, pour l'immense honneur qu'il ma fait en m'accordant sa confiance, et pour l'encadrement de qualité qu'il m'a prodigué le long de ce cheminement. Sur tous les niveaux, j'ai pu ainsi bénéficier de plusieurs conseils de pointe, de sa part, et finaliser par suite mes travaux de recherche.*

*Je tien aussi à témoigner l'immense honneur lequel m'ont fait les membres du jury de ce mémoire de magister, je leurs exprime mon estime pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail de recherche. Et je remercie ainsi :*

*M<sup>er</sup> S.Boukraa, professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida et membre du jury en qualité de président, pour sa décision de consacrer de son temps précieux et de son énergie à l'examen et l'expertise de ce mémoire de magister.*

*M<sup>er</sup> R.Khelifi, maître de conférences à l'Université Saad Dahlab de Blida et membre du jury en qualité d'examineur, pour le fait d'accepter d'en faire partie et de prendre des engagements par rapport à ce travail de recherche, aussi pour ses conseils et encouragements continuels.*

*M<sup>er</sup> S.A.Yahiaoui, maître de conférences à l'Université Saad Dahlab de Blida et membre du jury en qualité d'examineur, pour le fait d'accepter d'en faire partie, et en plus de prendre des engagements par rapport à ce mémoire de magister, pour avoir consacré de son temps à m'offrir un encadrement supplémentaire dans la phase de finalisation de mes travaux de recherche, aussi pour ses conseils et encouragements soutenus et continuels.*

*Je remercie également M<sup>er</sup> S.Manseur et M<sup>er</sup> B.Talbi, pour les cours qu'ils ont dispensés aux étudiants, dont j'en faisais partie, de cette promotion de magister de physique théorique durant la première année.*

*Enfin ; ce travail de recherche à été mené à terme sous la direction de M<sup>er</sup> M.Bentaïba professeur à l'Université Saad Dahlab de Blida. Il constitue un processus lequel je l'espère très instructif et porteur d'une matière scientifique de qualité. Au cours duquel j'ai eu le soutien et les encouragements de plusieurs femmes et hommes à qui j'exprime mes remerciements distingués. Ainsi ; je ne peux omettre de témoigner ma reconnaissance absolue, à tous celles ou ceux qui par leurs dévouements et sacrifices, à travers tous les temps et dans toutes les circonstances, m'ont, ou nous ont, permis, entre autres, ce moment majestueux.*

## TABLE DES MATIERES

RESUME	
REMERCIEMENTS	
TABLE DES MATIERES	
LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX	
INTRODUCTION	9
1. LA REGLE DE QUANTIFICATION AMELIOREE	12
1.1. Introduction	12
1.2. Conditions correspondantes des dérivées logarithmiques	13
1.3. La règle de quantification	22
1.4. Généralisation à l'équation de Schrödinger à trois dimensions	27
1.5. Conclusion	28
2. LE SPECTRE D'ENERGIE DU POTENTIEL DE ROSEN-MORSE TRIGONOMETRIQUE SYMETRIQUE	30
2.1. Description du système en termes de la règle de quantification exacte	30
2.2. Détermination des points de rebroussement	31
2.3. Angle de phase et énergie propre relatifs à l'état fondamental	33
2.4. Points de rebroussement et preuve d'existence	36
2.5. La correction quantique	38
2.6. L'intégrale du vecteur d'onde	40
2.7. Conclusion	41
3. LE SPECTRE D'ENERGIE DU POTENTIEL DE ROSEN-MORSE TRIGONOMETRIQUE ANTISYMETRIQUE	43
4. LE SPECTRE D'ENERGIE DU POTENTIEL DE MANNING-ROSEN	58
CONCLUSION	82
APPENDICE	
A. Propriétés de $\phi(x_A)$	84
B. Propriétés de $\phi(x_B)$	87
C. Le théorème de STURM-LIOUVILLE	90
D. Formules d'intégration	93
E. Liste des symboles	94
REFERENCES	95

**LISTE DES ILLUSTRATIONS, GRAPHIQUES ET TABLEAUX**

Figure 1. Intersection de la représentation graphique de l'angle de phase $\phi_0(y)$ avec l'axe des ordonnées	67
Tableau 1. Valeurs propres du potentiel de Manning-Rosen	78



## INTRODUCTION

Physique, science qui étudie, par l'expérimentation et par le développement de concepts et de théories, les propriétés fondamentales de la matière, de l'énergie, de l'espace et du temps, et qui vise à expliquer l'ensemble des phénomènes naturels, en établissant les lois qui les régissent.

Vers 1880, la physique atteint un état de maturité sereine : la plupart des phénomènes connus peuvent s'expliquer par la mécanique newtonienne, la théorie électromagnétique de Maxwell, la thermodynamique et la mécanique statistique de Boltzmann. Seules quelques données ou phénomènes demeurent inexpliqués, comme la forme des spectres des solides et des gaz, ou la nature de l'éther, substance hypothétique considérée comme universelle et supposée être le support indispensable à la propagation des ondes électromagnétiques. Cependant, une série de découvertes remarquables au cours des dix dernières années du XIX<sup>e</sup> siècle vient remettre en question les bases de la physique classique : l'effet photoélectrique par Heinrich Hertz en 1887, la nature électronique des rayons cathodiques par Jean Perrin, les rayons X par Wilhelm Röntgen en 1895 et la radioactivité par Henri Becquerel en 1896. Ces résultats expérimentaux annoncent le développement de nouvelles théories qui en fourniront une explication au début du XX<sup>e</sup> siècle.

En 1926, Erwin Schrödinger révolutionne l'idée d'orbite électronique en proposant un modèle ondulatoire, dont il parvient à prouver l'équivalence avec le modèle matricielle de Heisenberg paru une année auparavant, dans lequel l'électron n'est plus décrit comme une particule à laquelle on peut attribuer une orbite précise, mais comme une onde à laquelle on associe une orbitale également appelée fonction d'onde, dont le carré du module représente la densité de probabilité de présence d'un électron de l'atome en un point de l'espace et à un instant donné [1-9]. Le point essentiel dans ce modèle est donc l'orbitale qui vérifie l'équation différentielle établie à cet effet par Erwin Schrödinger et à laquelle son nom est désormais attaché.

A peine la mécanique ondulatoire, dans le cadre de la théorie des quanta, vit le jour, que la méthode de son application à la plus part des problèmes importants de l'époque fut conçue. Ces problèmes qui sont toujours d'actualité furent le phénomène de l'effet tunnel, les énergies des états propres d'un puits de potentiel et l'oscillateur ou bien le problème radial dans les spectres atomiques. En général, résoudre des problèmes en mécanique ondulatoire entend la résolution d'équations différentielles pour lesquelles il n'y a souvent pas de solutions analytiques, même à une seule dimension, à l'exception de quelques cas spéciaux. Par l'approximation de la fonction d'onde à l'image d'onde oscillatoire dépendant d'intégrale de phase, beaucoup de problèmes utiles purent ainsi être résolus. Presque simultanément, G. Wentzel, H. A. Kramers et L. Brillouin publièrent leurs applications de cette méthode d'approximation à l'équation de Schrödinger [10-12].

En mécanique quantique, l'intérêt fondamental est d'obtenir des résultats exacts sans avoir à évoquer la mathématique complète de l'équation de Schrödinger (La simplicité est très souhaitée). En l'absence d'alternative substantiellement meilleure, la dernière décennie marque une énorme reprise d'intérêt envers les méthodes semi classiques pour l'obtention de solutions approximatives à l'équation de Schrödinger. Parmi elles, l'approximation WKB et sa généralisation ont attiré l'attention, de plusieurs auteurs [13-15], de par le fait que cette méthode est prouvée comme étant très utile en matière d'obtention de solutions approximatives à l'équation d'onde de Schrödinger avec des potentiels solubles. Par ailleurs, cet engouement n'est pas le fruit du hasard. La résolution de cette équation, avec des potentiels solubles, est impliquée dans plusieurs disciplines de la physique, elle est d'une importance capitale tant sur le plan de la physique fondamentale, ou les sciences fondamentales, que sur le plan de la physique appliquée ou les nouvelles technologies telles que les nano technologies ; dans ces domaines très pointus et principalement dans ce dernier et dans d'autres qui sont futuristes concernant le progrès de l'humanité, en tant que telle, comme, par exemple, la production de l'énergie par des procédés nouveaux et propres, l'exploration et la conquête de l'espace, la médecine et la compréhension de l'univers, le caractère des solutions d'être pour le moins approximatives est un handicap majeur.

La méthode WKB, bien qu'importante et largement fiable, de par ces prédictions, pour l'investigation des solutions des systèmes quantiques ; il n'en demeure pas moins

qu'elle est approximative. Son fondement idiosyncratique lui confère une nature d'être très spécifique dans le sens où, elle est étroitement liée au système étudié et à ses caractéristiques de grandeurs physiques réelles préalablement très bien connues ; le moindre changement dans les conditions initiales du problème, ou bien le changement du problème étudié tout court, engendre une nouvelle considération, radicalement différente de la première, du problème par cette méthode. De plus ; pour le cas du puits de potentiel la profondeur n'est pas toujours infinie, elle est même très réduite pour les cas concrets. Ainsi ; mis à part le fait qu'elle est approximative et encore que l'ordre de grandeur est relatif ; la démarche WKB marque un manque indiscutable de vision d'ensemble depuis même son fondement, ce qui laisse la voie à l'amélioration, tant bien restreinte que innovante, principalement sur ce dernier plan et sur le plan de l'exactitude.

Récemment ; une règle de quantification améliorée « R.Q.A » fut présentée [16] comme étant un outil puissant en matière de calcul des niveaux d'énergie de quelques systèmes physiques quantiques qui admettent une résolution exacte. Cette méthode étudie les systèmes tels que le puits de potentiel carré et fini, l'oscillateur harmonique, l'atome d'hydrogène, le potentiel de Morse et sa généralisation, les potentiels de Rosen-Morse de type hyperbolique, le symétrique et l'antisymétrique, les potentiels d'Eckart, le symétrique et l'antisymétrique et le premier et le second potentiel de Pöschl-Teller ; avec en plus, le potentiel de Morse pivotant dans le cadre de l'approximation de Pekeris [17].

Ainsi ; dans le cadre d'un intérêt qui porte sur cette « R.Q.A », le présent mémoire est organisé de la façon suivante. Dans le premier chapitre nous présentons pas à pas la « R.Q.A » et, nous la généralisons à l'équation de Schrödinger à trois dimensions avec un potentiel à symétrie sphérique ; elle est ensuite appliquée à la détermination du spectre d'énergie du potentiel de Rosen-Morse trigonométrique dans ses formes symétrique et antisymétrique, respectivement dans les chapitres 2 et 3 ; dans le chapitre 4 nous appliquons la règle de quantification améliorée et généralisée « R.Q.A.G » à l'étude du spectre d'énergie du potentiel de Manning-Rosen dans le cadre de l'approximation de Pekeris. Et nous finissons ce travail par une conclusion générale.

# CHAPITRE 1

## LA REGLE DE QUANTIFICATION AMELIOREE

### 1.1. INTRODUCTION

Dans le développement de la mécanique quantique, la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld de l'ancienne théorie des quanta [18] occupe une position intermédiaire entre la mécanique classique et la mécanique quantique dans le cadre de l'étude des états liés de l'équation de Schrödinger à une seule dimension et la détermination de leurs énergies respectives  $E_n$  ; cette règle de quantification est directement déduite de l'approximation WKB, laquelle est une méthode pour le traitement approximatif de la fonction d'onde de Schrödinger dans le cas quasi classique, et a la forme suivante :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad K(x) = \sqrt{2\mu[E_n - V(x)]}/\hbar, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

où  $\mu$  est la masse de la particule,  $V(x)$  est une fonction potentielle réelle et continue par morceaux par rapport à la variable réelle  $x$ ,  $K(x)$  est le vecteur d'onde et enfin  $x_A$  et  $x_B$  sont deux points de rebroussement tels que :

$$E_n = V(x_A) = V(x_B),$$

et (1.2)

$$E_n > V(x), \quad x_A < x < x_B.$$

Avec ; en plus d'être un numéro d'ordre pour l'état lié pris en considération,  $n$  est appelé nombre quantique principale et exprime le nombre de nœuds de la fonction d'onde de Schrödinger, telle qu'elle est considérée par la méthode WKB, dans la région de l'espace où  $E_n \geq V(x)$ . Le nombre demi-entier «  $\frac{1}{2}$  » est la correction quantique au résultat de Bohr-

Sommerfeld, on trouve son explication dans le fait que pour l'analyse WKB la fonction d'onde s'étend jusqu'aux régions classiquement interdites. D'autre part ; la méthode WKB est précise pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, ainsi elle est attendue comme étant fortement adéquate et utile dans le cadre de l'étude des états propres quasi classiques qui correspondent à des valeurs grandes du nombre quantique  $n$ , essentiellement lorsqu'il s'agit de presque toute la région classiquement accessible qui s'étend jusqu'aux voisinages des deux points de rebroussement délimitant la région classiquement accessible pour un état quasi classique donné [18]. Depuis ; divers raffinements furent développés pour améliorer son exactitude où la principale modification fut faite sur la perte de phase aux points de rebroussement. En ce qui nous concerne ; nous allons appliquer les conditions correspondantes des dérivées logarithmiques, (Qui est une méthode standard en mécanique quantique), et le concept fondamental de l'analyse mathématique au problème des états liés de l'équation de Schrödinger à une seule dimension, et dériver par suite une règle de quantification sans aucune approximation. La règle de quantification obtenue est rigoureuse et générale pour n'importe quelle équation de Schrödinger avec seulement une variable. Ce problème auquel nous sommes intéressés est fondamental en mécanique quantique.

## 1.2. CONDITIONS CORRESPONDANTES DES DERIVEES LOGARITHMIQUES

Comme nous l'avons susmentionné nous considérons l'équation de Schrödinger à une seule dimension suivante :

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x), \quad (1.3)$$

où  $\mu$  est la masse de la particule et la fonction potentielle  $V(x)$  est une fonction réelle et continue par morceaux par rapport à la variable réelle  $x$ . La dérivée logarithmique  $\phi(x)$  de la fonction d'onde  $\psi(x)$  est définie comme :

$$\phi(x) = \frac{1}{\psi(x)} \frac{d\psi(x)}{dx}. \quad (1.4)$$

Dans la région où  $E \geq V(x)$  la dérivée logarithmique  $\phi(x)$  décroît de façon monotone de telle sorte que lorsque  $x$  croît au travers d'un nœud de la fonction d'onde  $\psi(x)$  alors ;  $\phi(x)$  décroît vers  $-\infty$ , fait un bond jusqu'à  $+\infty$ , et ensuite décroît de nouveau. À partir de (1.3) et (1.4) nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\psi(x)} \frac{d\psi(x)}{dx} \right] \\ &= -\frac{1}{\psi(x)^2} \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\phi(x)^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)].$$

On introduit les deux fonctions  $k(x)$  et  $K(x)$  telles que :

\* Si  $E \leq V(x)$  alors ;  $E - V(x) \leq 0$  et on pose,  $k(x) = \sqrt{2\mu[V(x) - E]}/\hbar$ ,

\* Si  $E \geq V(x)$  alors ;  $E - V(x) \geq 0$  et on pose,  $K(x) = \sqrt{2\mu[E - V(x)]}/\hbar$ ,

\* Si  $E = V(x)$  alors ;  $E - V(x) = V(x) - E = 0$  et donc,  $K(x) = k(x) = 0$ .

De cette façon ;

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -K(x)^2 - \phi(x)^2, \quad E \geq V(x), \quad (1.5)$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = k(x)^2 - \phi(x)^2, \quad E \leq V(x), \quad (1.6)$$

où ;

$$\begin{aligned}
k(x) &= \sqrt{2\mu[V(x)-E]}/\hbar, & E \leq V(x), \\
K(x) &= \sqrt{2\mu[E-V(x)]}/\hbar, & E \geq V(x), \\
K(x) &= k(x) = 0, & E = V(x).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

En admettant que l'énergie  $E$  est un paramètre alors ; nous supposons le potentiel  $V(x)$ , une fonction réelle et continue par morceaux par rapport à la variable réelle  $x$ , et satisfaisant à :

$$\begin{aligned}
V(x) &= V_I > E, & V_I &= Cte, & -\infty < x \leq x_I, \\
V(x) &> E, & & & x_I < x < x_A \quad \text{Ou} \quad x_B < x < x_F, \\
V(x) &= E, & & & x = x_A \quad \text{Ou} \quad x = x_B, \\
V(x) &< E, & & & x_A < x < x_B, \\
V(x) &= V_F > E, & V_F &= Cte, & x_F \leq x < +\infty.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Le potentiel  $V(x)$  de l'équation (1.8) peut être aisément généralisé. Les deux points  $x_A$  et  $x_B$  sont appelés points de rebroussement, et vérifient l'équation  $V(x_A) = V(x_B) = E$  tels que  $x_A < x_B$ .

L'équation de Schrödinger (1.3) est une équation différentielle linéaire du second ordre pour laquelle il y'a deux solutions indépendantes [19-22] dans la région  $-\infty < x \leq x_I$  où  $V(x) = V_I > E$  et  $V_I = Cte$ . Une de ces deux solutions est exponentiellement divergente, l'autre est physiquement admissible ; par conséquent :

$$\psi(x) = C_I e^{k_I x}, \quad C_I = Cte, \quad \phi(x) = k_I = \sqrt{2\mu[V_I - E]}/\hbar > 0. \tag{1.9}$$

De façon similaire ; la solution physiquement admissible dans la région  $x_F \leq x < +\infty$ , où  $V(x) = V_F > E$  et  $V_F = Cte$ , est :

$$\psi(x) = C_F e^{-k_F x}, \quad C_F = Cte, \quad \phi(x) = -k_F = -\sqrt{2\mu[V_F - E]}/\hbar < 0. \quad (1.10)$$

Pour le potentiel général, si  $E < V(\pm\infty)$  alors ; les deux dérivées logarithmiques  $\phi(x_I)$  et  $-\phi(x_F)$  sont strictement positives.

Maintenant ; nous remplaçons le puits de potentiel continu par un assemblage de films minces dont chacun renferme un potentiel constant. On commence en premier lieu par la région  $x_I \leq x \leq x_A$ , où  $E \leq V(x)$ , que nous allons diviser en  $n$  films égaux de largeur  $d_n$  chacun. En conséquences de cette démarche nous avons alors ; le point  $x_A$  est tel que  $x_A = x_I + nd_n$ , et dans le  $J^{ième}$  film  $x$  est compris entre  $x_I + Jd_n - d_n$  et  $x_I + Jd_n$  autrement dit  $x_I + Jd_n - d_n \leq x \leq x_I + Jd_n$ . Quant à la fonction potentielle  $V(x)$  sur le  $J^{ième}$  film, elle est remplacée par le potentiel constant  $V_J$  tel que :

$$V_J = V(x_I + Jd_n - d_n/2), \quad \text{et} \quad k_J = \sqrt{2\mu[V_J - E]}/\hbar. \quad (1.11)$$

En résolvant l'équation de Schrödinger (1.3) en ce  $J^{ième}$  film nous obtenons la solution suivante [19-22] :

$$\psi_J(x) = A_J e^{k_J x} + B_J e^{-k_J x}. \quad (1.12)$$

Sur les deux extrémités de ce film les dérivées logarithmiques  $\phi_{J-1}$  et  $\phi_J$ , qui devraient s'accorder avec les dérivées logarithmiques aux extrémités des films contigus, sont :



$$\varphi_J = \frac{1}{\psi_J(x)} \frac{d\psi_J(x)}{dx} \Big|_{x=x_J+Jd_n} = k_J \frac{A_J e^{k_J(x_J+Jd_n)} - B_J e^{-k_J(x_J+Jd_n)}}{A_J e^{k_J(x_J+Jd_n)} + B_J e^{-k_J(x_J+Jd_n)}}, \quad (1.13)$$

$$\varphi_{J-1} = \frac{1}{\psi_J(x)} \frac{d\psi_J(x)}{dx} \Big|_{x=x_J+Jd_n-d_n} = k_J \frac{A_J e^{k_J(x_J+Jd_n-d_n)} - B_J e^{-k_J(x_J+Jd_n-d_n)}}{A_J e^{k_J(x_J+Jd_n-d_n)} + B_J e^{-k_J(x_J+Jd_n-d_n)}}.$$

De par la seconde formule de l'équation (1.13) nous obtenons la relation intermédiaire suivante :

$$A_J e^{k_J(x_J+Jd_n-d_n)} [k_J - \varphi_{J-1}] = B_J e^{-k_J(x_J+Jd_n-d_n)} [k_J + \varphi_{J-1}].$$

Par la substitution de l'expression  $A_J e^{k_J(x_J+Jd_n-d_n)} [k_J - \varphi_{J-1}]$  dans la première formule du résultat (1.13) nous avons :

$$\varphi_J = k_J \frac{k_J \tanh(k_J d_n) + \varphi_{J-1}}{k_J + \varphi_{J-1} \tanh(k_J d_n)}, \quad J = \overline{1, n}. \quad (1.14)$$

On constate que l'équation (1.14) est une relation récursive faisant le lien entre deux termes successifs, le  $J^{\text{ième}}$  terme  $\varphi_J$  et le  $J^{\text{ième}} - 1$  terme  $\varphi_{J-1}$ , d'une suite réelle  $\{\varphi_J = \phi(x_J) = \phi(x_0 + Jd_n)\}_{J=0, \overline{n}}$  dans la région  $x_I \leq x \leq x_A$  de façon à ce que  $x_J = x_0 + Jd_n$  avec  $x_0 = x_I$ ,  $x_n = x_A$  et  $J = \overline{0, n}$ . De plus ; étant donné que  $\phi(x_I)$  est connue et strictement positive telle que  $\varphi_0 = \phi(x_I) = k_I$  (Voir Éq. (1.9)) alors ; on démontre par récurrence que, pour chaque  $J$  dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\varphi_J$  est lui aussi strictement positif, fini et ne disparaît pas ( $\varphi_J \neq 0$ ). Par ailleurs ;  $\phi(x_A)$  telle que  $\varphi_n = \phi(x_A)$  est calculée depuis  $\varphi_0 = \phi(x_I)$  par le biais de la relation récursive (1.14) lorsque  $J$  croît de 1 jusqu'à  $n$ . De cette façon ;  $\phi(x_A)$  est strictement positive, finie et ne disparaît pas ( $\phi(x_A) \neq 0$ ), (Voir Appendice A). On mentionne pour finir que la précision des calculs repose sur le nombre  $n$  de films. En principe nous pouvons obtenir une  $\phi(x_A)$  précise, moyennant la relation récursive (1.14) dans la région  $x_I \leq x \leq x_A$ , si la valeur de  $n$  est suffisamment grande.

Un calcul similaire se fait dans la région  $x_B \leq x \leq x_F$ , où là encore  $E \leq V(x)$ , après avoir procédé à sa division en  $n$  films égaux de largeur  $d_n$  chacun de façon à ce que  $x_B = x_F - nd_n$ , et dans le  $J^{\text{ième}}$  film  $x$  est compris entre  $x_F - (n - J)d_n - d_n$  et  $x_F - (n - J)d_n$  autrement dit  $x_F - (n - J)d_n - d_n \leq x \leq x_F - (n - J)d_n$ . Qu'elle soit ainsi la démarche adoptée dans cette région  $x_B \leq x \leq x_F$ , nous avons donc comme aboutissement l'équation suivante :

$$\varphi_{J-1} = k_J \frac{\varphi_J - k_J \tanh(k_J d_n)}{k_J - \varphi_J \tanh(k_J d_n)}, \quad J = \overline{1, n}. \quad (1.15)$$

On constate que l'équation (1.15) est une relation récursive faisant le lien entre deux termes successifs, le  $J^{\text{ième}} - 1$  terme  $\varphi_{J-1}$  et le  $J^{\text{ième}}$  terme  $\varphi_J$ , d'une suite réelle  $\{\varphi_J = \phi(x_J) = \phi(x_n - (n - J)d_n)\}_{J=0, n}$  dans la région  $x_B \leq x \leq x_F$  de façon à ce que  $x_J = x_n - (n - J)d_n$  avec  $x_0 = x_B$ ,  $x_n = x_F$  et  $J = \overline{0, n}$ . De plus ; étant donné que  $\phi(x_F)$  est connue et strictement négative telle que  $\varphi_n = \phi(x_F) = -k_F$  (Voir Éq. (1.10)) alors ; on démontre par récurrence que, pour chaque  $J$  dans l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ,  $\varphi_{J-1}$  est lui aussi strictement négative, fini et ne disparaît pas ( $\varphi_{J-1} \neq 0$ ). Par ailleurs ;  $\phi(x_B)$  telle que  $\varphi_0 = \phi(x_B)$  est calculée depuis  $\varphi_n = \phi(x_F)$  par le biais de la relation récursive (1.15) lorsque  $J$  décroît depuis  $n$  jusqu'à 1. De cette façon ;  $\phi(x_B)$  est strictement négative, finie et ne disparaît pas ( $\phi(x_B) \neq 0$ ), (Voir Appendice B). On mentionne pour finir qu'à l'instar de la région  $x_I \leq x \leq x_A$ , la précision des calculs dans la région  $x_B \leq x \leq x_F$  repose sur le nombre  $n$  de films. En principe nous pouvons obtenir une  $\phi(x_B)$  précise, moyennant la relation récursive (1.15) dans cette dernière région, si la valeur de  $n$  est suffisamment grande.

En conclusion ; il est manifeste à ce stade que la dérivée logarithmique  $\phi(x)$  n'admet pas de zéros sur les deux régions  $-\infty < x \leq x_A$  et  $x_B \leq x < +\infty$  ; physiquement cela implique que la fonction d'onde  $\psi(x)$  est exponentiellement décroissante sur ces deux régions en question.

À l'image de ce que nous avons fait dans les deux autres régions,  $x_I \leq x \leq x_A$  et  $x_B \leq x \leq x_F$ , nous allons à présent procéder à la division de la région  $x_A \leq x \leq x_B$ , où  $E \geq V(x)$ , en  $m$  films égaux de largeur  $d_m$  chacun. En conséquences de cette démarche nous avons alors ; le point  $x_B$  est tel que  $x_B = x_A + md_m$ , et dans le  $J^{\text{ième}}$  film  $x$  est compris entre  $x_A + Jd_m - d_m$  et  $x_A + Jd_m$  autrement dit  $x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m$ . Quant à la fonction potentielle  $V(x)$  sur le  $J^{\text{ième}}$  film elle est remplacée par le potentiel constant  $V_J$  tel que :

$$V_J = V(x_A + Jd_m - d_m/2), \quad K_J = \sqrt{2\mu[E - V_J]}/\hbar. \quad (1.16)$$

En résolvant l'équation de Schrödinger (1.3) en ce  $J^{\text{ième}}$  film nous obtenons la solution suivante [19-22] :

$$\psi_J(x) = C_J \text{Sin}(K_J x + \delta_J), \quad (1.17)$$

où  $C_J > 0$  et  $\delta_J$  sont deux constantes arbitraires. Sur les deux extrémités de ce film les dérivées logarithmiques  $\phi_{J-1}$  et  $\phi_J$ , qui devraient s'accorder avec les dérivées logarithmiques aux extrémités des films contigus, sont :

$$\begin{aligned} \phi_{J-1} &= \frac{1}{\psi_J(x)} \frac{d\psi_J(x)}{dx} \Big|_{x=x_A+Jd_m-d_m} = K_J \text{Cotg}[K_J(x_A + Jd_m - d_m) + \delta_J], \\ \phi_J &= \frac{1}{\psi_J(x)} \frac{d\psi_J(x)}{dx} \Big|_{x=x_A+Jd_m} = K_J \text{Cotg}[K_J(x_A + Jd_m) + \delta_J]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Depuis la première formule de l'équation (1.18) nous obtenons la relation intermédiaire suivante :

$$K_J(x_A + Jd_m) + \delta_J = \text{Arctg}\left(\frac{K_J}{\phi_{J-1}}\right) + K_J d_m.$$

Par la substitution de l'expression  $K_J(x_A + Jd_m) + \delta_J$  dans la seconde formule du résultat (1.18) nous avons :

$$\phi_J = K_J \operatorname{Cotg} \left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_{J-1}} \right) + K_J d_m \right]. \quad (1.19)$$

Ainsi ;

$$K_J d_m = \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_{J-1}} \right) + q\pi, \quad (1.20)$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{Pas de zéro de } \phi(x) \text{ sur le film } x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m, \\ 1 & \text{Un zéro de } \phi(x) \text{ sur le film } x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m. \end{cases},$$

où  $\operatorname{Arctg} \beta = \alpha$  dénote la valeur principale de la fonction inverse de la fonction tangente :

$$\operatorname{Arctg} \beta = \alpha, \quad \beta = \operatorname{tg} \alpha, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2. \quad (1.21)$$

On note que  $\phi(x)$  décroît de façon monotone dans la région où  $E \geq V(x)$  (Voir Éq. (1.5)). Et s'il n'y a pas de zéro de  $\phi(x)$  sur le film  $x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m$  alors ; l'équation (1.20) tient toujours avec  $q = 0$  et,

$$\operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_{J-1}} \right) < \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) \leq \pi/2.$$

Par contre, s'il y a un zéro de  $\phi(x)$  sur le film  $x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m$  alors ;  $\phi_{J-1} \geq 0$ ,  $\phi_J < 0$  et,

$$\operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_{J-1}} \right) \approx \pi/2 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) \approx -\pi/2.$$

Nous avons donc à ajouter un  $\pi$  additionnel sur le côté droit de l'équation (1.20) de façon à ce que son côté gauche est strictement positif et égal à  $K_J d_m$ . Nous ne considérons pas le cas où il y a plus d'un zéro de  $\phi(x)$  sur le film en question pour le simple fait que son épaisseur  $d_m$  est très petite.

D'autre part ; l'équation (1.19) est une relation récursive faisant le lien entre deux termes successifs, le  $J^{\text{ième}}$  terme  $\phi_J$  et le  $J^{\text{ième}} - 1$  terme  $\phi_{J-1}$ , d'une suite réelle  $\{\phi_J = \phi(x_J) = \phi(x_0 + Jd_m)\}_{J=0, \overline{m}}$  dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$  de façon à ce que  $x_J = x_0 + Jd_m$  avec  $x_0 = x_A$ ,  $x_m = x_B$  et  $J = \overline{0, m}$ . Par son biais nous calculons  $\phi(x_B)$  telle que  $\phi_m = \phi(x_B)$  depuis  $\phi_0 = \phi(x_A)$  lorsque  $J$  croît de 1 jusqu'à  $m$ . Quant à la précision des calculs, elle dépend du nombre  $m$  de films. En principe nous pouvons obtenir une  $\phi(x_B)$  précise, moyennant la relation récursive (1.19) dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$ , si la valeur de  $m$  est suffisamment grande.

Enfin ; d'après le théorème de Sturm-Liouville (Voir Appendice C), on mentionne que lorsque  $E$  croît  $\phi(x_B^-)$  décroît de façon monotone et  $\phi(x_B^+)$  croît de façon monotone. En choisissant le paramètre  $E$  par dichotomie tel que  $\phi(x_B^-)$  coïncide avec  $\phi(x_B^+)$  nous obtenons par conséquent un état lié avec l'énergie  $E$ .

Intéressons nous de nouveau à la solution (1.17) de l'équation de Schrödinger sur le même film que nous avons déjà pris en considération. De cette façon ; du moment que  $C_J$  et  $\delta_J$  sont deux constantes arbitraires alors ; par l'adoption du changement  $\delta_J = \delta'_J + \pi/2$  dans l'équation (1.17) l'équation (1.18) devient :

$$\phi_{J-1} = -K_J \operatorname{tg}[K_J(x_A + Jd_m - d_m) + \delta'_J],$$

$$\phi_J = -K_J \operatorname{tg}[K_J(x_A + Jd_m) + \delta'_J].$$

Ensuite ; par une manipulation, qui est similaire à celle qui a conduit à l'équation (1.20), de ces deux dernières équations, on aboutit à l'équation (1.22) suivante :

$$K_J d_m = \text{Arctg}\left(\frac{\phi_{J-1}}{K_J}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{\phi_J}{K_J}\right) + q' \pi, \quad (1.22)$$

$$q' = \begin{cases} 0 & \text{Pas de zéro de } \psi(x) \text{ sur le film } x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m, \\ 1 & \text{Un zéro de } \psi(x) \text{ sur le film } x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m. \end{cases}$$

### 1.3. LA RÈGLE DE QUANTIFICATION

Dans la partie précédente nous avons entre autre divisé la région  $x_A \leq x \leq x_B$ , où  $E \geq V(x)$ , en  $m$  films égaux de largeur  $d_m$  chacun et obtenu par la suite les deux équations (1.20) et (1.22) pour  $K_J d_m$ . Par la sommation des différents termes de cette dernière expression, depuis  $J=1$  jusqu'à  $J=m$ , moyennant l'équation (1.20) nous avons alors comme résultat l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^m K_J d_m = & N\pi - \text{Arctg}\left(\frac{K_1}{\phi_0}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{K_1}{\phi_1}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{K_2}{\phi_1}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{K_2}{\phi_2}\right) \\ & - \dots + \dots - \text{Arctg}\left(\frac{K_{m-1}}{\phi_{m-2}}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{K_{m-1}}{\phi_{m-1}}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{K_m}{\phi_{m-1}}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{K_m}{\phi_m}\right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $N$  est le nombre de zéros de la dérivée logarithmique  $\phi(x)$  dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$  avec  $\phi_0 = \phi(x_A)$  et  $\phi_m = \phi(x_B)$ . Lorsque  $m$  tend vers l'infini  $d_m$  tend vers zéro et la somme dans l'équation (1.23) devient une intégrale. Ainsi ; nous avons une nouvelle règle de quantification, c'est la suivante :

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = & N\pi + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ -\text{Arctg}\left(\frac{K_1}{\phi(x_A)}\right) + \text{Arctg}\left(\frac{K_m}{\phi(x_B)}\right) \right. \\ & \left. + \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \text{Arctg}\left(\frac{K_J}{\phi_J}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{K_{J+1}}{\phi_J}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

où  $\phi_j$  est calculée récursivement par le biais de l'expression (1.19). Le premier terme du côté droit de l'équation (1.24) est la contribution depuis les nœuds de la dérivée logarithmique de la fonction d'onde de Schrödinger  $\psi(x)$  dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$ . Puisque  $\phi(x_A) > 0$  et  $\phi(x_B) < 0$  alors ; le second et le troisième terme se situant au côté droit de cette équation (1.24) vont disparaître lorsque  $m$  tend vers l'infini si seulement si la fonction potentielle  $V(x)$  est continue aux points de rebroussement. La somme discrète figurant dans l'équation (1.24) dénote quant à elle, la correction quantique.

De la même façon ; en se basant sur l'équation (1.22) nous obtenons une autre expression de la formule (1.24). Ainsi ; nous avons :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = N'\pi + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_A)}{K_1} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_B)}{K_m} \right) + \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_{J+1}} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_J} \right) \right] \right\}, \quad (1.25)$$

où  $N'$  dénote le nombre de nœuds de la fonction d'onde  $\psi(x)$  dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$ . Si la fonction potentielle  $V(x)$  est continue aux points de rebroussement alors ; en vertu du fait que  $\phi(x_A) > 0$  et  $\phi(x_B) < 0$ , le second et le troisième terme sur le côté droit de l'équation (1.25) donnent ce qui suit :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_A)}{K_1} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_B)}{K_m} \right) \right\} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_A)}{K_1} \right) - \lim_{m \rightarrow +\infty} \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x_B)}{K_m} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Ainsi ; si la fonction potentielle  $V(x)$  est continue aux points rebroussement alors ; les deux expressions de la règle de quantification deviennent :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = N\pi + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) \right] \right\}, \quad (1.27)$$

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = (N' + 1)\pi + \lim_{m \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_{J+1}} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_J} \right) \right] \right\}.$$

De la façon suivante ; on réécrit les sommes discrètes figurant dans les deux formules de l'équation (1.27) sous forme d'expressions intégrales :

$$\operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) = \frac{\left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) \right] (K_{J+1} - K_J)}{(K_{J+1} - K_J) d_m} d_m.$$

Alors ;

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) \right] &= - \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) \right] \\ &= - \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{J=1}^{m-1} \left( \frac{\left[ \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) - \operatorname{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) \right] (K_{J+1} - K_J)}{(K_{J+1} - K_J) d_m} d_m \right) \\ &= - \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{d}{dK(x)} \operatorname{Arctg} \left( \frac{K(x)}{\phi(x)} \right) \right] \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] dx. \end{aligned}$$

Or ;

$$\frac{d}{dK(x)} \operatorname{Arctg} \left( \frac{K(x)}{\phi(x)} \right) = \frac{\phi(x)}{K(x)^2 + \phi(x)^2} \quad [19-22].$$

Finalement ;



$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{K_J}{\phi_J} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{K_{J+1}}{\phi_J} \right) \right] = - \int_{x_A}^{x_B} \frac{\phi(x)}{K(x)^2 + \phi(x)^2} \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] dx.$$

Puisque  $K(x)^2 + \phi(x)^2 = -\frac{d\phi(x)}{dx}$  (Voir Éq. (1.5)) alors ; la première formule de l'équation (1.27) devient :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = N\pi + \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx. \quad (1.28)$$

D'autre part ; de façon similaire à ce que nous venons de faire, on transforme la somme discrète se situant au côté droit de la deuxième formule de l'équation (1.27) en expression intégrale. Cela donne ce qui suit :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{J=1}^{m-1} \left[ \text{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_{J+1}} \right) - \text{Arctg} \left( \frac{\phi_J}{K_J} \right) \right] &= \int_{x_A}^{x_B} \left[ \frac{d}{dK(x)} \text{Arctg} \left( \frac{\phi(x)}{K(x)} \right) \right] \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] dx \\ &= - \int_{x_A}^{x_B} \frac{\phi(x)}{K(x)^2 + \phi(x)^2} \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] dx \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx. \end{aligned}$$

En conséquence ; la seconde formule de l'équation (1.27) devient :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = (N' + 1)\pi + \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx. \quad (1.29)$$

Tout calcul fait, on remarque que les deux corrections quantiques qui figurent dans les deux expressions (1.28) et (1.29) sont formellement identiques. Cependant ; ce serait parfait si elles le sont fondamentalement. À vrai dire, départager cette question réside dans les dérivées logarithmiques qui y figurent. En fait ; la première correction quantique est

concernée par la fonction d'onde  $\psi_J(x) = C_J \text{Sin}(K_J x + \delta_J)$  (Voir Éq. (1.17)) sur le film  $x_A + Jd_m - d_m \leq x \leq x_A + Jd_m$ , alors que la deuxième est concernée par la fonction d'onde  $\psi_J(x) = C_J \text{Cos}(K_J x + \delta'_J)$ , avec  $\delta_J = \delta'_J + \pi/2$ , sur le même film. Les deux dérivées logarithmiques  $\phi_1(x)$  et  $\phi_2(x)$  respectivement relatives aux deux fonctions d'onde  $\psi_J(x) = C_J \text{Sin}(K_J x + \delta_J)$  et  $\psi_J(x) = C_J \text{Cos}(K_J x + \delta'_J)$  sur le film en question sont (Voir Éq. (1.4)) :

$$\phi_1(x) = \frac{1}{C_J \text{Sin}(K_J x + \delta_J)} C_J K_J \text{Cos}(K_J x + \delta_J) = K_J \text{Cotg}(K_J x + \delta_J),$$

et

$$\phi_2(x) = \frac{1}{C_J \text{Cos}(K_J x + \delta'_J)} [-C_J K_J \text{Sin}(K_J x + \delta'_J)] = -K_J \text{tg}(K_J x + \delta'_J).$$

Or ;  $\text{Cotg}(\alpha + \pi/2) = -\text{tg}(\alpha)$  et  $\delta_J = \delta'_J + \pi/2$  donc,  $\phi_2(x) = K_J \text{Cotg}(K_J x + \delta_J)$ . De cette façon ;  $\phi_1(x) = \phi_2(x)$  et par conséquent les deux corrections quantiques sont fondamentalement identiques. Finalement ; depuis les deux équations (1.28) et (1.29) et en vertu de cette identité fondamentale avérée entre les deux corrections quantiques précédentes, on en tire directement le fait que  $N = N' + 1$  : le nombre  $N$  de nœuds de la dérivée logarithmique  $\phi(x)$  dans la région  $x_A \leq x \leq x_B$  est plus grand d'une unité que le nombre  $N'$  de nœuds de la fonction d'onde de Schrödinger  $\psi(x)$  dans la même région ( $N$  et  $N' \in \mathbb{N}$ ).

Enfin ; la nouvelle règle de quantification est :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = N\pi + \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx, \quad (1.30)$$

avec,

$$x_A \leq x \leq x_B,$$

$$E \geq V(x),$$

$$K(x) = \sqrt{2\mu[E - V(x)]}/\hbar,$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -K(x)^2 - \phi(x)^2,$$

$$N = N' + 1, \begin{cases} * N \text{ est le nombre de noeuds de } \phi(x) \\ \text{dans la région } x_A \leq x \leq x_B, \\ * N' \text{ est le nombre de noeuds de } \psi(x) \\ \text{dans la région } x_A \leq x \leq x_B. \end{cases}$$

$$Q_c = \int_{x_A}^{x_B} \phi(x) \left[ \frac{dK(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi(x)}{dx} \right]^{-1} dx, \text{ est la correction quantique ,}$$

$$\phi(x_A) > 0,$$

$$\phi(x_B) < 0.$$

Cette règle de quantification est prouvée sans aucune approximation, elle est donc exacte. Elle a fait la preuve de ses capacités à confirmer les spectres d'énergie à l'issue de plusieurs études [23-25] réalisées sur des systèmes quantiques typiques qui admettent une résolution exacte.

#### 1.4. GENERALISATION À L'EQUATION DE SCHRÖDINGER À TROIS DIMENSIONS

En considérant l'équation de Schrödinger à trois dimensions avec un potentiel à symétrie sphérique, et après séparation de la partie angulaire de la fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  de la façon suivante :

$$\psi(\vec{r}) = r^{-1} R(r) Y_m^l(\theta, \varphi), \tag{1.31}$$

nous obtenons l'équation radiale de Schrödinger suivante [18] :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E - U(r)] R(r), \quad U(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r). \quad (1.32)$$

Puisque l'équation (1.32) est similaire à l'équation (1.3) alors ; ses niveaux d'énergie peuvent être calculés par les conditions correspondantes des dérivées logarithmiques. Dans ce cas, la dérivée logarithmique est définie comme étant :

$$\phi(r) = R(r)^{-1} \frac{dR(r)}{dr}. \quad (1.33)$$

Ainsi ; la règle de quantification généralisée à l'équation de Schrödinger à trois dimensions est :

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = N_r \pi + \int_{r_A}^{r_B} \phi(r) \left[ \frac{dK(r)}{dr} \right] \left[ \frac{d\phi(r)}{dr} \right]^{-1} dr, \quad (1.34)$$

$$N_r = n_r + 1, \begin{cases} * N_r \text{ est le nombre de noeuds de } \phi(r) \\ \text{dans la région } r_A \leq r \leq r_B, \\ * n_r \text{ est le nombre de noeuds de } R(r) \\ \text{dans la région } r_A \leq r \leq r_B. \end{cases}$$

### 1.5. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons présenté en détail comment nous avons pu obtenir la règle de quantification exacte «R.Q.E» par le principe fondamental de l'analyse mathématique et les conditions correspondantes des dérivées logarithmiques qui s'expriment suivant la formule commune (1.4) dont l'origine de sa définition réside dans le fait que « Pour le problème de Sturm-Liouville, l'astuce fondamentale est la définition de

l'angle de phase lequel est une fonction monotone par rapport à l'énergie  $E$  », c'est ce qu'a adressé Yang dans son exposé sur le monopôle [26].

Dans ce cheminement vers la « R.Q.E » nous avons en premier lieu abouti à l'équation (1.24) qui est une formule approximative, de la « R.Q.E », proposée pour les calculs numériques des niveaux d'énergie des états liés de l'équation de Schrödinger à une seule dimension ; par la suite nous avons obtenu la « R.Q.E » (1.30) pour les états liés de l'équation de Schrödinger à une seule dimension moyennant le calcul de la forme intégrale de l'équation (1.24) ; et en dernier lieu nous avons généralisé la « R.Q.E » (1.30) aux états liés de l'équation de Schrödinger à trois dimensions avec un potentiel à symétrie sphérique [18] en raison des similitudes flagrantes existant entre cette dernière équation et l'équation de Schrödinger (1.3).

Enfin ; nous voulons bien signaler que cette règle de quantification exacte « R.Q.E » est confirmée par la vérification de quelques exemples où les solutions de l'équation de Schrödinger sont connues ; dans l'étude de ces exemples il est suffisant de considérer seulement l'état fondamental dans le calcul de la correction quantique. Par conséquent ; pour un système quantique qui admet une résolution exacte, on se contente uniquement du calcul de :

$$\int_{x_A}^{x_B} \phi_0(x) \left[ \frac{dK_0(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right]^{-1} dx, \quad (1.35)$$

où l'indice « 0 » dénote le lien à l'état fondamental. Cependant ; le vecteur d'onde  $K(x)$  sur le côté gauche de la règle de quantification (1.30) reste en étroite relation avec le niveau d'énergie  $E_n$ . Ainsi ; les niveaux d'énergie d'un système quantique qui admet une résolution exacte peuvent être calculés depuis son état fondamental. Désormais ; la règle de quantification que nous avons qualifié dans un premier temps par la règle de quantification améliorée « R.Q.A », et qui s'est avérée exacte par la suite, va être dénotée au court de ce mémoire par la règle de quantification exacte « R.Q.E ».

**CHAPITRE 2**  
**LE SPECTERE D'ENERGIE DU POTENTIEL DE ROSEN- MORSE**  
**TRIGONOMETRIQUE SYMETRIQUE**

Par l'usage de la « R.Q.E » (1.30), le présent chapitre est consacré à l'étude des états liés de l'équation de Schrödinger (1.3) avec la fonction potentielle  $V(x)$  dénommée potentiel de Rosen-Morse trigonométrique symétrique « P.R-M.T.S » [16] :

$$V(x) = U_0 \operatorname{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad x \in [0, a], \quad (2.1)$$

où  $U_0$  et  $a$  sont deux paramètres strictement positifs. Pour cela, on propose de suivre un cheminement en sept étapes vers notre but. Ce plan que nous avons proposé se révélera de lui-même à fur et à mesure qu'on progresse dans l'étude du potentiel (2.1), ainsi il sera élargi à tout ce qui est étude d'une fonction potentielle par l'usage de la « R.Q.E » dans ce qui va suivre comme chapitres au sein de ce mémoire.

2.1. DESCRIPTION DU SYSTEME EN TERMES DE LA « R.Q.E »

Le système quantique objet de notre étude est régi par l'équation de Schrödinger (1.3) avec le « P.R-M.T.S » (2.1) :

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} \left[ \frac{E}{U_0} - \operatorname{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \psi(x). \quad (2.2)$$

Par la définition de l'angle de phase  $\phi(x)$  comme étant la dérivée logarithmique (Voir Éq. (1.4)) de la fonction d'onde  $\psi(x)$ , l'équation de Schrödinger (2.2) est équivalente à l'équation de Riccati suivante (Voir Éq. (1.5), (1.7)) :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -K(x)^2 - \phi(x)^2.$$

Cette équivalence est dans la région où  $E \geq V(x)$ . Avec,  $K(x)$  est le vecteur d'onde entre deux points de rebroussement tel que :

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\left[ \frac{E}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]}, \quad E \geq V(x). \quad (2.3)$$

En conséquence ; l'équation de Riccati devient :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} \left[ \frac{E}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] - \phi(x)^2. \quad (2.4)$$

Enfin ; pour ce système, la « R.Q.E » est à l'image de l'équation (1.30) dans le cadre des équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4).

## 2.2. DETERMINATION DES POINTS DE REBROUSSEMENT

Soit  $y = y(x)$  une nouvelle variable telle que :

$$y = -\text{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad x \in [0, a]. \quad (2.5)$$

Ainsi ; la variable introduite  $y$  est une fonction de l'argument  $x$ , réelle, définie, continue, dérivable et monotone (Croissante) sur l'intervalle ouvert  $]0, a[$  de façon à ce que pour  $x \in ]0, a[$  nous avons  $y \in ]-\infty, +\infty[$  et,

$$\forall x \in ]0, a[ : \frac{dy}{dx} = \frac{\pi(1+y^2)}{a}. \quad (2.6)$$

Maintenant ; pour un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , les deux points de rebroussement  $x_A$  et  $x_B$ , tels que  $x_A < x_B$ , vérifient l'équation  $V(x_A) = V(x_B) = E$  et sont déterminés par la résolution de l'équation  $V(x) = E$ . Ainsi ; depuis l'équation (2.1), leurs détermination se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$\text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{E}{U_0} = 0.$$

En termes de la variable introduite  $y = y(x)$  (Voir Éq. (2.5)), l'équation que nous devons résoudre pour déterminer les deux points de rebroussement en question devient :

$$y^2 - \frac{E}{U_0} = 0. \quad (2.7)$$

D'autre part ; si on dénote par  $y_A$  et  $y_B$  les deux points de rebroussement en termes de la variable  $y$  tels que  $y_A = y(x_A)$  et  $y_B = y(x_B)$  alors ;

$$y_A < y_B, \quad (2.8)$$

en raison du fait que la nouvelle variable introduite  $y$  est une fonction monotone (croissante) par rapport à l'argument initial  $x$  (Voir Éq. (2.6)). Finalement ; depuis (2.7) et (2.8), les deux points de rebroussement en termes de la variable  $y$ ,  $y_A$  et  $y_B$ , sont racines du polynôme du second degré  $y^2 - \frac{E}{U_0}$ . Ainsi ; le discriminant  $\Delta$ , relatif à la détermination des deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui correspondent à un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , est :



$$\Delta = \frac{4E}{U_0}. \quad (2.9)$$

En considérant le discriminant  $\Delta$  comme étant une entité strictement positive nous avons alors ;

$$-y_A = y_B = \sqrt{\frac{E}{U_0}}. \quad (2.10)$$

Finalement depuis (2.5) et (2.10) ; les deux points de rebroussement en termes de l'argument initiale  $x$  sont :

$$x_A = \frac{a}{\pi} \operatorname{Arcotg} \left( \sqrt{\frac{E}{U_0}} \right),$$

et (2.11)

$$x_B = a - x_A.$$

Car,

$$-\operatorname{Cotg}(x) = \operatorname{Cotg}(\pi - x). \quad (2.12)$$

### 2.3. ANGLE DE PHASE ET ENERGIE PROPRE RELATIFS À L'ETAT FONDAMENTAL

D'une part ; d'après les prédictions de la « R.Q.E », ceci est valable pour tous les états liés de ce système,  $\phi(x_A) > 0$  et  $\phi(x_B) < 0$  notamment, pour l'état fondamental nous avons  $\phi_0(x_A) > 0$  et  $\phi_0(x_B) < 0$ . Ainsi ; puisque la fonction d'onde  $\psi(x)$  de l'état fondamental n'a pas de nœuds et sa dérivée logarithmique  $\phi(x)$  n'a pas de pôles et décroît

de façon monotone (Voir Éq. (1.5)) dans la région où  $E \geq V(x)$  alors ; la seule solution possible en termes de la nouvelle variable introduite  $y$  pour l'équation de Riccati (2.4), lorsqu'il s'agit de l'état fondamental, est :

$$\phi_0(y) = -Cy + B, \quad (2.13)$$

où  $C > 0$  et  $B \in \mathfrak{R}$ .

D'autre part ; d'après (2.5), (2.6) et (2.10), l'expression de l'équation de Riccati (2.4) en termes de la variable introduite  $y$  est :

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi(y)}{dy} = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} [y_B^2 - y^2] - \phi(y)^2. \quad (2.14)$$

Or ; l'équation (2.14) est valable pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  et pour n'importe quel point  $y$  compris entre les deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui sont assujetties à cet état lié. Donc, l'écriture exacte de l'équation (2.14) est la suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall y \in [y_A, y_B]_{(n)} :$$

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi_n(y)}{dy} = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} [y_B^2 - y^2] - \phi_n(y)^2,$$

sachant que tous les paramètres qui y figurent sont relatifs à l'état lié d'énergie  $E_n$ . Ainsi ; concernant l'état fondamental nous avons  $n = 0$  et, l'équation (2.14) devient :

$$\forall y \in [y_A, y_B]_{(0)} :$$

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi_0(y)}{dy} = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} [y_B^2 - y^2] - \phi_0(y)^2. \quad (2.15)$$

Finalement ; par la substitution de la solution (2.13) dans l'équation (2.15) et puisque le résultat de cette opération n'est rien d'autre qu'un polynôme du second degré qui doit être identiquement égal à zéro, nous obtenons le système de relations d'égalités suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{a}C &= \frac{2\mu U_0}{\hbar^2} - C^2, \\ -\frac{\pi}{a}C &= -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} y_B^2 - B^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$2CB = 0.$$

La solution du système (2.16) est donc,

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi}{2a} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 U_0}{\pi^2 \hbar^2}} \right), \\ B &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$y_B = \hbar \sqrt{\frac{\pi C}{2\mu U_0 a}}.$$

On indique juste que pour la détermination du paramètre  $C$ , on introduit le polynôme du second degré  $t^2 - \frac{\pi}{a}t - \frac{2\mu U_0}{\hbar^2}$  qui admet  $C$  comme racine strictement positive.

Concernant le problème de l'existence nous n'avons pas de questions à se poser là-dessus car, il est clair que l'expression  $\left( \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{8\mu U_0}{\hbar^2} \right)$ , du discriminant qui est relatif à la recherche des deux racines du polynôme introduit, est strictement positive. Il faut juste faire attention à ce que la racine qu'on doit adopter comme étant  $C$  est celle dont le signe est strictement positif. Ainsi ; depuis (2.10), (2.13), (2.16) et (2.17) nous avons :

$$\phi_0(y) = -Cy.$$

Et,

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4\mu a} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 U_0}{\pi^2 \hbar^2}} \right) = \frac{\hbar^2 \pi C}{2\mu a} = \frac{\hbar^2 C}{2\mu} - U_0. \quad (2.18)$$

En remaniant l'équation (2.18) nous obtenons le résultat suivant :

$$\sqrt{\frac{E_0}{U_0} + 1} = \frac{\hbar C}{\sqrt{2\mu U_0}} = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \left[ C - \frac{\pi}{a} \right]^{-1}. \quad (2.19)$$

#### 2.4. POINTS DE REBROUSSEMENT ET PREUVE D'EXISTENCE

Dans la partie 2 de ce chapitre nous avons été ramené à calculer les racines du polynôme du second degré  $y^2 - \frac{E}{U_0}$  pour déterminer les deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui sont assujetties à un état lié d'énergie  $E = E_n$ . Pour cela ; il fallait calculer le discriminant  $\Delta = \Delta_n = \frac{4E_n}{U_0}$  (Voir Éq. (2.9)) qui doit être strictement positif. Dans un premier temps nous avons pris le discriminant  $\Delta_n$  en considération comme étant une entité strictement positive ; maintenant nous allons prouver que c'est une entité strictement positive pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  (Pour n'importe quel  $n$  dans l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$ ).

Ainsi ; depuis (2.18) et puisque  $C > 0$ , le discriminant  $\Delta_0 = \frac{4E_0}{U_0}$  relatif à la détermination des deux points de rebroussement qui sont assujetties à l'état fondamental est strictement positif :

$$\Delta_0 = \frac{4E_0}{U_0} > 0. \quad (2.20)$$

De plus ; l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental de ce système correspond à la plus petite valeur des valeurs propres de l'équation de Schrödinger (2.2) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : E_n > E_0. \quad (2.21)$$

Depuis (2.21) et puisque  $U_0 > 0$  nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > \Delta_0. \quad (2.22)$$

De cette façon ; depuis (2.20), (2.22) et d'après la propriété de la relation « > » d'être transitive, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > 0. \quad (2.23)$$

Finalement ; d'après (2.20) et (2.23) nous concluons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Delta_n > 0. \quad (2.24)$$

Enfin ; si  $\Delta$  est le discriminant relatif à la détermination des deux points de rebroussement qui sont assujetties à un état lié bien déterminé qui correspond à la valeur propre bien précise  $E$  de l'énergie de ce système physique quantique qui est décrit par le « P.R-M.T.S » alors ; ce discriminant est strictement positif quel que soit l'état lié pris en considération. De cette façon ; la question de l'existence de racines pour le polynôme  $y^2 - \frac{E}{U_0}$  est réglée, exactement il existe deux racines qui correspondent aux deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  recherchés dans l'ordre où  $y_A < y_B$ .

## 2.5. LA CORRECTION QUANTIQUE

D'après (1.35), on se contente de calculer la correction quantique  $Q_c$  seulement par rapport à l'état fondamental. Ainsi (Voir Éq. (1.30)) ;

$$Q_c = \int_{x_A}^{x_B} \phi_0(x) \left[ \frac{dK_0(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right]^{-1} dx.$$

Depuis (2.5) et (2.6), l'expression de cette correction quantique en termes de la variable  $y$  est :

$$Q_c = \int_{y_A}^{y_B} \frac{a}{\pi(1+y^2)} \phi_0(y) \left[ \frac{dK_0(y)}{dy} \right] \left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} dy. \quad (2.25)$$

Depuis (2.3), (2.5), (2.6) et (2.10), l'expression du vecteur d'onde  $K$  en termes de la variable  $y$  est :

$$K(y) = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{y_B^2 - y^2}, \quad (2.26)$$

et pour l'état fondamental nous avons (Voir Éq. (2.10)) :

$$K_0(y) = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}. \quad (2.27)$$

De plus ; depuis (2.13) et (2.27) nous avons :

$$\frac{dK_0(y)}{dy} = -\frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \frac{y}{\sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}},$$

et

(2.28)

$$\left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} = -\frac{1}{C}.$$

Ainsi ; depuis (2.13), (2.17), (2.25) et (2.28), la correction quantique  $Q_c$  est :

$$\begin{aligned} Q_c &= -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{y^2}{(1+y^2)\sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}} dy \\ &= -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{-y_B}^{y_B} \frac{1+y^2-1}{(1+y^2)\sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}} dy, \text{ (Voir Éq.(2.10))} \end{aligned}$$

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \left[ \int_{-y_B}^{y_B} \frac{1}{\sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}} dy - \int_{-y_B}^{y_B} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\frac{E_0}{U_0} - y^2}} dy \right].$$

En faisant appel aux formules d'intégration (Voir Appendice D), et puisque

$$\frac{E_0}{U_0} = y_B^2 = -y_A^2, \text{ nous obtenons :}$$

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{E_0}{U_0}}} \right].$$

Seulement ; dans le calcul de l'intégrale  $\int_{-y_B}^{y_B} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{y_B^2-y^2}} dy$ , moyennant les formules d'intégration (Voir Appendice D), il faut tenir compte du fait qu'elle est strictement positive du moment que  $\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{y_B^2-y^2}} > 0$ .

Finalement ; en se référant au résultat (2.19), nous concluons que la correction quantique est :

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + (aC - \pi). \quad (2.29)$$

## 2.6. L'INTEGRALE DU VECTEUR D'ONDE

Depuis (1.30) et (2.3) l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\left[ \frac{E_n}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]} dx.$$

En termes de la variable  $y$  l'expression de l'intégrale du vecteur d'onde devient (Voir Éq. (2.6) et (2.26)) :

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} K(x) dx &= \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{\sqrt{y_B^2 - y^2}}{(1+y^2)} dy \\ &= \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{-y_B}^{y_B} \frac{(y_B^2 - y^2)}{(1+y^2)\sqrt{y_B^2 - y^2}} dy, \end{aligned}$$

donc :



$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{-y_B}^{y_B} \frac{-(1+y^2)+(1+y_B^2)}{(1+y^2)\sqrt{y_B^2-y^2}} dy$$

$$= \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \left[ - \int_{-y_B}^{y_B} \frac{1}{\sqrt{y_B^2-y^2}} dy + (1+y_B^2) \int_{-y_B}^{y_B} \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{y_B^2-y^2}} dy \right].$$

En faisant appel aux formules d'intégration (Voir Appendice D) nous concluons que l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\frac{E_n}{U_0} + 1}. \quad (2.30)$$

## 2.7. CONCLUSION

De par les résultats (2.29) et (2.30), la « R.Q.E » pour ce système quantique est :

$$-\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\frac{E_n}{U_0} + 1} = N\pi + \left[ -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + (aC - \pi) \right].$$

Donc ;

$$\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\frac{E_n}{U_0} + 1} = n\pi + aC, \quad (2.31)$$

où  $n = N - 1$  est le nombre de nœuds de la fonction d'onde  $\psi(x)$  dans la région qui se situe entre les deux points de rebroussement assujetties à l'état lié d'énergie  $E_n$ . Ainsi ; par la résolution de l'équation (2.31) par rapport à  $E_n$ , nous obtenons enfin le spectre d'énergie du « P.R-M.T.S » par l'usage de la « R.Q.E » :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} (aC + n\pi)^2 - U_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.32)$$

Pour terminer ; on note que ce résultat coïncide avec celui dans la référence [27].

**CHAPITRE 3**  
**LE SPECTERE D'ENERGIE DU POTENTIEL DE ROSEN- MORSE**  
**TRIGONOMETRIQUE ANTISYMETRIQUE**

Dans ce chapitre 3 nous allons étudier les états liés de l'équation de Schrödinger (1.3) avec la fonction potentielle  $V(x)$  de Rosen-Morse trigonométrique antisymétrique « P.R-M.T.AS » [16] :

$$V(x) = U_0 \operatorname{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + U_1 \operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad x \in [0, a], \quad (3.1)$$

où  $U_0 > 0$ ,  $U_1 \in \mathfrak{R}$  et  $a > 0$  sont trois paramètres réels.

3.1. DESCRIPTION DU SYSTEME EN TERMES DE LA « R.Q.E »

Le système quantique objet de notre étude est régi par l'équation de Schrödinger (1.3) avec le « P.R-M.T.AS » (3.1) :

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} \left[ \frac{E}{U_0} - \operatorname{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{U_1}{U_0} \operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \psi(x). \quad (3.2)$$

Par la définition de l'angle de phase  $\phi(x)$  comme étant la dérivée logarithmique (Voir Éq. (1.4)) de la fonction d'onde  $\psi(x)$ , l'équation de Schrödinger (3.2) est équivalente à l'équation de Riccati suivante (Voir Éq. (1.5), (1.7)) :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -K(x)^2 - \phi(x)^2.$$

Cette équivalence est dans la région où  $E \geq V(x)$ . Avec,  $K(x)$  est le vecteur d'onde entre deux points de rebroussement tel que :

$$K(x) = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{\left[ \frac{E}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{U_1}{U_0} \text{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]}, \quad E \geq V(x). \quad (3.3)$$

En conséquence ; l'équation de Riccati devient :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{2\mu U_0}{\hbar^2} \left[ \frac{E}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{U_1}{U_0} \text{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] - \phi(x)^2. \quad (3.4)$$

Enfin ; pour ce système, la « R.Q.E » est à l'image de l'équation (1.30) dans le cadre des équations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4).

### 3.2. DETERMINATION DES POINTS DE REBROUSSEMENT

Pour un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , les deux points de rebroussement  $x_A$  et  $x_B$ , tels que  $x_A < x_B$ , vérifient l'équation  $V(x_A) = V(x_B) = E$  et sont déterminés par la résolution de l'équation  $V(x) = E$ . Ainsi ; depuis l'équation (3.1), leurs détermination se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$\text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{U_1}{U_0} \text{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{E}{U_0} = 0.$$

En termes de la variable introduite au chapitre 2,  $y = y(x)$  (Voir Éq. (2.5)), l'équation que nous devons résoudre pour déterminer les deux points de rebroussement en question devient :

$$y^2 - \frac{U_1}{U_0} y - \frac{E}{U_0} = 0. \quad (3.5)$$

D'autre part ; si on dénote par  $y_A$  et  $y_B$  les deux points de rebroussement en termes de la variable  $y$  tels que  $y_A = y(x_A)$  et  $y_B = y(x_B)$  alors ;

$$y_A < y_B, \quad (3.6)$$

en raison du fait que la variable introduite  $y$  est une fonction monotone (croissante) par rapport à l'argument initial  $x$  (Voir Éq. (2.6)). Finalement ; depuis (3.5) et (3.6), les deux points de rebroussement en termes de la variable  $y$ ,  $y_A$  et  $y_B$ , sont racines du polynôme du second degré  $y^2 - \frac{U_1}{U_0} y - \frac{E}{U_0}$ . Ainsi ; le discriminant  $\Delta$ , relatif à la détermination des deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui correspondent à un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , est :

$$\Delta = \frac{U_1^2}{U_0^2} + \frac{4E}{U_0}. \quad (3.7)$$

En considérant le discriminant  $\Delta$  comme étant une entité strictement positive nous avons alors ;

$$y_A = \frac{U_1}{2U_0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_1^2}{U_0^2} + \frac{4E}{U_0}},$$

et (3.8)

$$y_B = \frac{U_1}{2U_0} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_1^2}{U_0^2} + \frac{4E}{U_0}}.$$

Finalement ; on obtient en conséquence le résultat suivant :

$$y_A + y_B = \frac{U_1}{U_0},$$

et (3.9)

$$y_A \cdot y_B = -\frac{E}{U_0}.$$

### 3.3. ANGLE DE PHASE ET ENERGIE PROPRE RELATIFS À L'ETAT FONDAMENTAL

Dans cette partie, nous allons déduire l'expression de l'angle de phase  $\phi_0$ , propre à l'état fondamental, à partir de ses propriétés intrinsèques et les propriétés des angles de phase en général ; ce qui permet de déterminer l'expression de l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental. D'une part ; d'après les prédictions de la « R.Q.E », ceci est valable pour tous les états liés de ce système,  $\phi(x_A) > 0$  et  $\phi(x_B) < 0$  notamment, pour l'état fondamental nous avons  $\phi_0(x_A) > 0$  et  $\phi_0(x_B) < 0$ . Ainsi ; puisque la fonction d'onde  $\psi(x)$  de l'état fondamental n'a pas de nœuds et sa dérivée logarithmique  $\phi(x)$  n'a pas de pôles et décroît de façon monotone (Voir Éq. (1.5)) dans la région où  $E \geq V(x)$  alors ; la seule solution possible en termes de la variable introduite  $y$  (Voir Éq. (2.5)) pour l'équation de Riccati (3.4), lorsqu'il s'agit de l'état fondamental, est :

$$\phi_0(y) = -Cy + B, \tag{3.10}$$

où  $C > 0$  et  $B \in \mathfrak{R}$ .

D'autre part ; d'après (2.5) et (2.6), l'expression de l'équation de Riccati (3.4) en termes de la variable introduite  $y$  (Voir Éq. (2.5)) est :

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi(y)}{dy} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E_n - U_0 y^2 + U_1 y] - \phi(y)^2. \quad (3.11)$$

Or ; l'équation (3.11) est valable pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  et pour n'importe quel point  $y$  compris entre les deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui sont assujetties à cet état lié. Donc, l'écriture exacte de l'équation (3.11) est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [y_A, y_B]_{(n)} :$$

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi_n(y)}{dy} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E_n - U_0 y^2 + U_1 y] - \phi_n(y)^2.$$

Ainsi ; concernant l'état fondamental nous avons  $n=0$  et, l'équation (3.11) devient :

$$\forall y \in [y_A, y_B]_{(0)} :$$

$$\frac{\pi(1+y^2)}{a} \frac{d\phi_0(y)}{dy} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E_0 - U_0 y^2 + U_1 y] - \phi_0(y)^2. \quad (3.12)$$

Finalement ; par la substitution de la solution (3.10) dans l'équation (3.12) et puisque le résultat de cette opération n'est rien d'autre qu'un polynôme du second degré qui doit être identiquement égal à zéro, nous obtenons le système de relations d'égalités suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{a} C &= \frac{2\mu U_0}{\hbar^2} - C^2, \\ -\frac{2\mu U_1}{\hbar^2} + 2CB &= 0, \\ -\frac{\pi}{a} C &= -\frac{2\mu E_0}{\hbar^2} - B^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La solution du système (3.13) est donc,

$$C = \frac{\pi}{2a} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 U_0}{\pi^2 \hbar^2}} \right), \quad (3.14)$$

$$B = \frac{\mu U_1}{C \hbar^2}.$$

On indique juste que pour la détermination du paramètre  $C$ , on introduit le polynôme du second degré  $t^2 - \frac{\pi}{a}t - \frac{2\mu U_0}{\hbar^2}$  qui admet  $C$  comme racine strictement positive.

Finalement ; l'angle de phase propre à l'état fondamental est  $\phi_0(y) = -Cy + B$ , et depuis (3.13) et (3.14) l'expression de l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental est :

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{C\pi}{a} - B^2 \right) = \frac{\hbar^2 C^2}{2\mu} - U_0 - \frac{\mu U_1^2}{2\hbar^2 C^2}. \quad (3.15)$$

#### 3.4. POINTS DE REBROUSSEMENT ET PREUVE D'EXISTANCE

Dans un premier temps nous avons pris le discriminant  $\Delta_n$  (Voir Éq. (3.7)) en considération comme étant une entité strictement positive ; maintenant nous allons prouver que c'est une entité strictement positive pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  (Pour n'importe quel  $n$  dans l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$ ).

Ainsi ; le discriminant  $\Delta_0$  relatif à la détermination des deux points de rebroussement qui sont assujetties à l'état fondamental est (Voir Éq. (3.7)) :

$$\Delta_0 = \frac{U_1^2}{U_0^2} + \frac{4E_0}{U_0}. \quad (3.16)$$



Par la substitution de l'énergie  $E_0$  par son expression d'après l'équation (3.15) dans l'équation (3.16), et en faisant appel à l'équation (3.13), l'équation (3.16) devient :

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{a\mu C U_0^2} [\mu U_1^2 + 2\hbar^2 C^2 U_0].$$

Puisque  $U_0 > 0$ ,  $U_1^2 \geq 0$  pour  $U_1 \in \mathfrak{R}$  et  $C > 0$  alors ;  $\Delta_0$  est strictement positif :

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{a\mu C U_0^2} [\mu U_1^2 + 2\hbar^2 C^2 U_0] > 0. \quad (3.17)$$

De plus ; l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental de ce système correspond à la plus petite valeur des valeurs propres de l'équation de Schrödinger (3.2) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : E_n > E_0. \quad (3.18)$$

Depuis (3.18) et puisque  $U_0 > 0$  nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > \Delta_0. \quad (3.19)$$

De cette façon ; depuis (3.17), (3.19) et d'après la propriété de la relation « > » d'être transitive, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > 0. \quad (3.20)$$

Finalement ; d'après (3.17) et (3.20) nous concluons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Delta_n > 0. \quad (3.21)$$

Enfin ; la question de l'existence de racines pour le polynôme  $y^2 - \frac{U_1}{U_0}y - \frac{E_n}{U_0}$  est réglée, exactement il existe deux racines qui correspondent aux deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  recherchés dans l'ordre où  $y_A < y_B$ .

### 3.5. LA CORRECTION QUANTIQUE

D'après (1.35), on se contente de calculer la correction quantique  $Q_c$  seulement par rapport à l'état fondamental. Ainsi (Voir Éq. (1.30)) ;

$$Q_c = \int_{x_A}^{x_B} \phi_0(x) \left[ \frac{dK_0(x)}{dx} \right] \left[ \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right]^{-1} dx.$$

Depuis (2.5) et (2.6), l'expression de cette correction quantique en termes de la variable  $y$  est :

$$Q_c = \int_{y_A}^{y_B} \frac{a}{\pi(1+y^2)} \phi_0(y) \left[ \frac{dK_0(y)}{dy} \right] \left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} dy, \quad (3.22)$$

cette expression est formellement identique à celle qui est mise en avant par l'équation (2.25) : Nous avons adopté le même changement de variable (2.5).

Depuis (2.5), (3.3) et (3.9), l'expression du vecteur d'onde  $K$  en termes de la variable  $y$  est :

$$K(y) = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}. \quad (3.23)$$

Pour l'état fondamental l'expression du vecteur d'onde (3.23) garde sa forme, cependant les deux points limites  $y_A$  et  $y_B$  qui y figurent sont relatifs à cet état en question de façon à ce que (Voir Éq. (3.9)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A + y_B = y_{0A} + y_{0B} = \frac{U_1}{U_0}, \\ \text{et} \\ y_A \cdot y_B = y_{0A} \cdot y_{0B} = -\frac{E_0}{U_0}. \end{array} \right. ,$$

dans cette cinquième partie du chapitre 3, l'indice «0» ne sera plus exprimé explicitement, cependant tous les paramètres sont relatifs à l'état fondamental. De plus ; depuis (3.10) et (3.23) nous avons :

$$\frac{dK_0(y)}{dy} = -\frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \frac{y - U_1/(2U_0)}{\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}},$$

et (3.24)

$$\left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} = -\frac{1}{C}.$$

Ainsi ; depuis (3.10), (3.22) et (3.24), la correction quantique  $Q_c$  est :

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{(y - B/C)[y - U_1/(2U_0)]}{(1 + y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy,$$

donc :

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{(1 + y^2) - [B/C + U_1/(2U_0)]y - [-BU_1/(2CU_0) + 1]}{(1 + y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy,$$

ainsi ;

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \left[ \int_{y_A}^{y_B} \frac{1}{\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy - I_1 \right].$$

Avec,

$$I_1 = \int_{y_A}^{y_B} \frac{[B/C + U_1/(2U_0)]y + [-BU_1/(2CU_0) + 1]}{(1 + y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy.$$

En faisant appel aux formules d'intégration (Voir Appendice D) nous obtenons :

$$\int_{y_A}^{y_B} \frac{1}{\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy = \pi. \quad (3.25)$$

L'intégrale  $I_1$  est :

$$I_1 = \frac{\pi\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar C} \operatorname{Re} \left[ \left[ 1 - iU_1/(2U_0) \right] \frac{i}{\sqrt{i^2}} \frac{\left( \frac{\hbar C}{\sqrt{2\mu}} - i \frac{U_1\sqrt{2\mu}}{2\hbar C} \right)}{\sqrt{\frac{\hbar^2 C^2}{2\mu} - \frac{\mu U_1^2}{2\hbar^2 C^2} - iU_1}} \right].$$

Dans l'expression de  $I_1$  nous avons :

$$\frac{i}{\sqrt{i^2}} \frac{\left( \frac{\hbar C}{\sqrt{2\mu}} - i \frac{U_1\sqrt{2\mu}}{2\hbar C} \right)}{\sqrt{\frac{\hbar^2 C^2}{2\mu} - \frac{\mu U_1^2}{2\hbar^2 C^2} - iU_1}} = \pm 1.$$

Car ; d'une part  $i$  est l'une des deux racines carré de  $i^2$ , et d'autre part  $\left( \frac{\hbar C}{\sqrt{2\mu}} - i \frac{U_1\sqrt{2\mu}}{2\hbar C} \right)$

est l'une des deux racines carré de  $\left( \frac{\hbar^2 C^2}{2\mu} - \frac{\mu U_1^2}{2\hbar^2 C^2} - iU_1 \right)$ . Par conséquent ;

$$I_1 = \pm \pi \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar C}. \quad (3.26)$$

La détermination de  $I_1$  n'est pas achevée, il nous reste de trancher en ce qui concerne son signe. Pour cela nous avons :

$$\left. \frac{[B/C + U_1/(2U_0)]y + [-BU_1/(2CU_0) + 1]}{(1+y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} \right|_{U_1=0} = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} > 0,$$

car  $B = \frac{\mu U_1}{C\hbar^2}$  (Voir Éq. (3.14)) ; par conséquent  $I_1 > 0$  pour  $U_1 = 0$ . Toutefois ; que ce soit positif ou bien négatif le résultat du calcul de l'intégrale  $I_1$  est indépendant de  $U_1$  (Voir Éq. (3.26)). De cette façon ;

$$I_1 = \pi \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar C}. \quad (3.27)$$

Par ailleurs ; en s'appuyant sur (3.13) nous obtenons une autre formulation de l'équation (3.27) :

$$I_1 = \pi \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar C} = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2\mu U_0}} (C - \pi/a). \quad (3.28)$$

Finalement ; depuis (3.25) et (3.28), nous concluons que la correction quantique est :

$$Q_c = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + (aC - \pi). \quad (3.29)$$

### 3.6. L'INTEGRALE DU VECTEUR D'ONDE

Depuis (1.30) et (3.3) l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = \frac{\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{\left[ \frac{E}{U_0} - \text{Cotg}^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \frac{U_1}{U_0} \text{Cotg}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]} dx.$$

En termes de la variable  $y$  (Voir Éq. (2.5)) l'expression de l'intégrale du vecteur d'onde devient (Voir Éq. (2.6) et (3.23)) :

$$\begin{aligned} \int_{x_A}^{x_B} K(x) dx &= \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}}{(1 + y^2)} dy \\ &= \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{(y_B - y)(y - y_A)}{(1 + y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy. \end{aligned}$$

Donc ;

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + I_2, \quad (3.30)$$

avec,

$$I_2 = \frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\pi\hbar} \int_{y_A}^{y_B} \frac{y(y_A + y_B) - y_A \cdot y_B + 1}{(1 + y^2)\sqrt{(y_B - y)(y - y_A)}} dy.$$

En se référant aux formules d'intégration (Voir Appendice D) nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \operatorname{Re} \left[ -i\sqrt{i^2} \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \\
&= \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \operatorname{Re} \left[ (\pm 1) \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \\
&= (\pm 1) \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right].
\end{aligned}$$

Or ;  $I_2$  doit être positive du moment que le vecteur d'onde  $K(x)$  est positif. En fait ; si  $I_2$  était négative alors ; l'intégrale du vecteur d'onde serait elle aussi négative (Voir Éq. (3.30)) ce qui serait tout à fait absurde depuis la réalité que l'intégrale du vecteur d'onde est positive du moment que  $K(x)$  est positif. Ainsi ;

$$I_2 = \left| (\pm 1) \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \right|,$$

et donc ;

$$I_2 = \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \left| \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \right|. \quad (3.31)$$

Finalement ; d'après (3.30) et (3.31), nous concluons que l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{x_A}^{x_B} K(x) dx = -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \left| \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \right|. \quad (3.32)$$

### 3.7. CONCLUSION

De par les résultats (3.29) et (3.32), la « R.Q.E » pour ce système quantique est :

$$-\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + \frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \left| \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \right| = N\pi + \left[ -\frac{a\sqrt{2\mu U_0}}{\hbar} + (aC - \pi) \right].$$

Donc ;

$$\frac{a\sqrt{2\mu}}{\hbar} \left| \operatorname{Re} \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] \right| = aC + n\pi.$$

Et,

$$\operatorname{Re}^2 \left[ \sqrt{E_n + U_0 - iU_1} \right] = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} (aC + n\pi)^2. \quad (3.33)$$

En posant  $\sqrt{E_n + U_0 - iU_1} = z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$  nous obtenons comme résultat l'expression suivante :

$$E_n = \operatorname{Re}^2(z) - \frac{U_1^2}{4 \operatorname{Re}^2(z)} - U_0. \quad (3.34)$$

Ainsi ; par la substitution de  $\operatorname{Re}^2(z)$  par son expression d'après l'équation (3.33) dans l'équation (3.34), nous obtenons enfin le spectre d'énergie du « P.R-M.T.AS » par l'usage de la « R.Q.E » :

$$E_n = \frac{\hbar^2 (aC + n\pi)^2}{2\mu a^2} - \frac{\mu a^2 U_1^2}{2\hbar^2 (aC + n\pi)^2} - U_0, \quad n=0,1,2,\dots \quad (3.35)$$



Pour terminer ; on note que ce résultat se réduit à celui du cas symétrique lorsque  $U_1 = 0$   
(Voir Éq. (2.32)).

## CHAPITRE 4

### LE SPECTRE D'ÉNERGIE DU POTENTIEL DE MANNING- ROSEN

Jusqu'à présent nous avons démontré la règle de quantification exacte et vérifié sa validité dans les chapitres 2 et 3 par l'étude de deux systèmes, à une seule dimension, qui admettent une résolution exacte. Ainsi ; au niveau de ce chapitre 4 nous allons franchir le cap de la « R.Q.E » (1.30) par l'étude des états liés de l'équation radiale de Schrödinger (1.32) avec la fonction potentielle à symétrie sphérique  $V(r)$  dénommée Potentiel de Manning-Rosen « P.M.R » [28] :

$$V(r) = \frac{1}{kb^2} \left[ \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} \right], \quad k = \frac{2\mu}{\hbar^2}, \quad r \in [0, +\infty[, \quad (4.1)$$

où  $A > 0$  et  $\alpha > 1$  sont deux paramètres sans dimension, tandis que la dimension du paramètre  $b$  est celle d'une longueur, par l'usage de la « R.Q.E.G » (1.34). La fonction potentielle (4.1) admet un seul minimum  $V(r_0) = -\frac{A^2}{4kb^2\alpha(\alpha-1)}$  pour la valeur  $r_0$  de l'argument  $r$ , ainsi :

$$r_0 = b \ln \left[ 1 + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{A} \right], \quad (4.2)$$

$$V(r_0) = -\frac{A^2}{4kb^2\alpha(\alpha-1)} = \text{Min}[V(r)].$$

D'après (1.32), le potentiel effectif  $U(r)$  avec le « P.M.R » (4.1) est :

$$U(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{kb^2} \left[ \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} \right]. \quad (4.3)$$

D'une part ; on introduit une nouvelle variable  $y = y(r)$  telle que :

$$y = y(r) = \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}}, \quad r \in [0, +\infty[. \quad (4.4)$$

Ainsi ; la variable introduite  $y = y(r)$  est une fonction de l'argument  $r$ , définie, continue, dérivable et monotone (Décroissante) sur l'intervalle ouvert  $]0, +\infty[$  de façon à ce que :

$$\begin{aligned} \forall r \in ]0, +\infty[ : \frac{dy}{dr} &= -\frac{1}{b} y(1+y), \\ \forall r \in ]0, +\infty[ : \frac{dy}{dr} &< 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Lorsque  $r \in ]0, +\infty[$ ,  $y \in ]0, +\infty[$ .

D'autre part ; puisque l'équation radiale de Schrödinger (1.32) avec le potentiel effectif (4.3) n'a pas de solutions analytiques pour  $l \neq 0$  alors ; une certaine approximation avec une méthode adéquate doit être faite. La méthode largement utilisée et qui convient à cette situation est l'approximation de Pekeris [17]. Avec ce moyen, le potentiel centrifuge

$$\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \text{ va être approximé.}$$

Notre objectif est donc l'approximation de la partie centrifuge  $V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2}$

du potentiel effectif (4.3) en termes de la nouvelle variable  $y = \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}}$  (Voir Éq. (4.4)).

D'une part ; on pose :

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} = \frac{\gamma}{kb^2} \frac{b^2}{r^2}, \quad \gamma = l(l+1), \quad (4.6)$$

car  $b \neq 0$ . D'autre part ; depuis (4.4), la nouvelle variable  $y$  est telle que :

$$y = \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} = \frac{1}{e^{r/b} - 1}.$$

De cette façon ;

$$\ln(1 + 1/y) = \frac{r}{b}.$$

Donc ;

$$\frac{b}{r} = \frac{1}{\ln(1 + 1/y)}.$$

Finalement ;

$$\frac{b^2}{r^2} = \frac{1}{\ln^2(1 + 1/y)}. \quad (4.7)$$

On pose  $f(y) = \frac{1}{\ln^2(1 + 1/y)}$ . Par conséquent ; le développement en série de Taylor

ou bien la formule locale de Taylor [19-22] pour cette fonction  $f(y)$  est :

$$f(y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y_0)}{k!} (y - y_0)^k + o[(y - y_0)^n].$$

Cette formule est valable pour tout  $y_0$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  (Voir Éq. (4.5)) notamment

pour  $y_0 = \frac{A}{2\alpha(\alpha - 1)}$  qui correspond à la valeur  $r_0$  de l'argument initial  $r$ , c'est-à-dire

$y(r) = y_0$  pour  $r = r_0 = b \ln \left[ 1 + \frac{2\alpha(\alpha - 1)}{A} \right]$  (Voir Éq. (4.2)). Ainsi ; dans le cadre de notre

choix, la formule locale de Taylor pour la fonction  $f(y)$  est :

$$f(y) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(A/2\alpha(\alpha-1))}{k!} (y - A/2\alpha(\alpha-1))^k + o\left[(y - A/2\alpha(\alpha-1))^n\right].$$

De plus ; l'intérêt de notre étude porte sur les états liés, donc stationnaires, par conséquent stables. Pour cette raison, la formule locale de Taylor pour la fonction  $f(y)$ , par rapport au point  $y_0 = \frac{A}{2\alpha(\alpha-1)}$ , n'englobera que les trois premiers termes de la série comme étant, du point de vue de la physique, significatifs. Ainsi ;

$$f(y) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(A/2\alpha(\alpha-1))}{k!} (y - A/2\alpha(\alpha-1))^k + o\left[(y - A/2\alpha(\alpha-1))^2\right],$$

et l'approximation de la fonction  $f(y)$  est :

$$\tilde{f}(y) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(A/2\alpha(\alpha-1))}{k!} (y - A/2\alpha(\alpha-1))^k.$$

Par le calcul de la série  $\tilde{f}(y)$  sachant que  $f(y) = \frac{1}{\ln^2(1+1/y)}$ , et par l'introduction des trois paramètres  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  tels que :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{b^2}{r_0^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)[8A+12\alpha(\alpha-1)]}{[A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} + \frac{12\alpha^2(\alpha-1)^2}{[A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4}, \\ a_1 &= \frac{8\alpha^2(\alpha-1)^2 [3A+4\alpha(\alpha-1)]}{A[A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} - \frac{48\alpha^3(\alpha-1)^3}{A[A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4}, \\ a_2 &= -\frac{16\alpha^3(\alpha-1)^3 [A+\alpha(\alpha-1)]}{A^2 [A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} + \frac{48\alpha^4(\alpha-1)^4}{A^2 [A+2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

nous obtenons le résultat suivant :

$$\tilde{f}(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2. \quad (4.9)$$

Finalement ; puisque  $f(y) = \frac{1}{\ln^2(1+1/y)} = \frac{b^2}{r^2}$  (Voir Éq. (4.7)) et  $y = \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}$  (Voir Éq. (4.4)) alors ; depuis (4.6) et (4.9), l'approximation de la partie centrifuge  $V_l(r)$  du potentiel effectif  $U(r)$  (4.3) en termes de la fonction  $\frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}$  est :

$$\tilde{V}_l(r) = \frac{\gamma}{kb^2} \left[ a_0 + \frac{a_1 e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + \frac{a_2 e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} \right]. \quad (4.10)$$

Enfin ; l'approximation du potentiel effectif  $U(r)$  (4.3) par la méthode de Pekeris est :

$$\tilde{U}(r) = \frac{1}{kb^2} \left[ \gamma a_0 - (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + (\alpha(\alpha-1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} \right]. \quad (4.11)$$

En termes de la nouvelle variable  $y$  (Voir Éq. (4.4)) l'expression (4.11) devient :

$$\tilde{U}(y) = \frac{1}{kb^2} \left[ \gamma a_0 - (A - \gamma a_1) y + (\alpha(\alpha-1) + \gamma a_2) y^2 \right]. \quad (4.12)$$

#### 4.1. DESCRIPTION DU SYSTEME EN TERMES DE LA « R.Q.E.G »

Le système quantique objet de notre étude est régi par l'équation radiale de Schrödinger (1.32) avec le potentiel effectif approximé (4.11) :

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) = \frac{1}{b^2} \left[ -kb^2 E + \gamma a_0 - (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + (\alpha(\alpha-1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} \right] R(r). \quad (4.13)$$

Par la définition de l'angle de phase  $\phi(r)$  comme étant la dérivée logarithmique (Voir Éq. (1.33)) de la fonction d'onde radiale  $R(r)$ , l'équation de Schrödinger (4.13) est équivalente à l'équation de Riccati suivante (Voir Éq. (1.5), (1.7)) :

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = -K(r)^2 - \phi(r)^2.$$

Cette équivalence est dans la région où  $E \geq \tilde{U}(r)$ . Avec,  $K(r)$  est le vecteur d'onde entre deux points de rebroussement tel que :

$$K(r) = \frac{1}{b} \sqrt{kb^2 E - \gamma a_0 + (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} - (\alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2}}, \quad E \geq \tilde{U}(r). \quad (4.14)$$

En conséquence ; l'équation de Riccati devient :

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{b^2} \left[ -kb^2 E + \gamma a_0 - (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} + (\alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \right] - \phi(r)^2. \quad (4.15)$$

Enfin ; pour ce système, la « R.Q.E.G » est à l'image de l'équation (1.34) dans le cadre des équations (4.11), (4.13), (4.14) et (4.15).

#### 4.2. DETERMINATION DES POINTS DE REBROUSSEMENT

Pour un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , les deux points de rebroussement  $r_A$  et  $r_B$ , tels que  $r_A < r_B$ , vérifient l'équation  $\tilde{U}(r_A) = \tilde{U}(r_B) = E$  et sont déterminés par la résolution de l'équation  $\tilde{U}(r) = E$ . Ainsi ; depuis l'équation (4.11), leurs détermination se ramène à la résolution de l'équation suivante :

$$-kb^2E + \gamma a_0 - (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} + (\alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} = 0.$$

En introduisant les trois paramètres  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  et  $\varepsilon$  tels que par définition nous avons :

$$\beta_1^2 = A - \gamma a_1,$$

$$\beta_2^2 = \alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon = -kb^2E + \gamma a_0,$$

l'équation que nous devons résoudre est :

$$\beta_2^2 \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} - \beta_1^2 \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} + \varepsilon = 0. \quad (4.17)$$

En termes de la nouvelle variable introduite  $y = y(r)$  (Voir Éq. (4.4)) et depuis (4.17), l'équation que nous devons résoudre pour déterminer les deux points de rebroussement en question devient :

$$\beta_2^2 y^2 - \beta_1^2 y + \varepsilon = 0. \quad (4.18)$$

D'autre part ; si on dénote par  $y_A$  et  $y_B$  les deux points de rebroussement en termes de la nouvelle variable  $y$  tels que  $y_A = y(r_A)$  et  $y_B = y(r_B)$  alors ;

$$y_A > y_B, \quad (4.19)$$

en raison du fait que la variable introduite  $y$  est une fonction monotone (Décroissante) par rapport à l'argument initial  $r$  (Voir Éq. (4.5)). Finalement ; depuis (4.18) et (4.19), les deux points de rebroussement en termes de la variable  $y$ ,  $y_A$  et  $y_B$ , sont racines du polynôme du second degré  $\beta_2^2 y^2 - \beta_1^2 y + \varepsilon = 0$ . Ainsi ; le discriminant  $\Delta$ , relatifs à la



détermination des deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui correspondent à un état lié d'énergie bien déterminée  $E$ , est :

$$\Delta = \beta_1^4 - 4\varepsilon\beta_2^2. \quad (4.20)$$

En considérant le discriminant  $\Delta$  comme étant une entité strictement positive nous avons alors ;

$$y_A = \frac{\beta_1^2 + \sqrt{\beta_1^4 - 4\varepsilon\beta_2^2}}{2\beta_2^2},$$

et (4.21)

$$y_B = \frac{\beta_1^2 - \sqrt{\beta_1^4 - 4\varepsilon\beta_2^2}}{2\beta_2^2}.$$

Finalement ; on obtient en conséquence le résultat suivant :

$$y_A + y_B = \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2},$$

et (4.22)

$$y_A \cdot y_B = \frac{\varepsilon}{\beta_2^2}.$$

#### 4.3. ANGLE DE PHASE ET ENERGIE PROPRE RELATIFS À L'ETAT FONDAMENTAL

D'une part ; d'après les prédictions de la « R.Q.E.G », ceci est valable pour tous les états liés de ce système,  $\phi(r_A) > 0$  et  $\phi(r_B) < 0$  notamment, pour l'état fondamental nous

avons  $\phi_0(r_A) > 0$  et  $\phi_0(r_B) < 0$ . Ainsi ; puisque la fonction d'onde radiale  $R(r)$  de l'état fondamental n'a pas de nœuds et sa dérivée logarithmique  $\phi(r)$  n'a pas de pôles et décroît de façon monotone (Voir Éq. (1.5)) dans la région où  $E \geq \tilde{U}(r)$  alors ; la seule solution possible en termes de la nouvelle variable introduite  $y$  pour l'équation de Riccati (4.15), lorsqu'il s'agit de l'état fondamental, est :

$$\phi_0(y) = Cy + B, \quad (4.23)$$

où  $C > 0$  et  $B \in \mathfrak{R}$  car,  $\frac{d\phi(y)}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dr}\right)} \frac{d\phi(r)}{dr}$  et  $\frac{dy}{dr} < 0$  (Voir Éq. (4.5)).

D'autre part ; d'après (4.5) et (4.16), l'expression de l'équation de Riccati (4.15) en termes de la nouvelle variable introduite  $y$  (Voir Éq. (4.4)) est :

$$by(1+y)\frac{d\phi(y)}{dy} = -\beta_2^2 y^2 + \beta_1^2 y - \varepsilon + b^2 \phi(y)^2. \quad (4.24)$$

Or ; l'équation (4.24) est valable pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  et pour n'importe quel point  $y$  compris entre les deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  qui sont assujetties à cet état lié. Donc, l'écriture exacte de l'équation (4.24) est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in [y_B, y_A]_{(n)} :$$

$$by(1+y)\frac{d\phi_n(y)}{dy} = -\beta_2^2 y^2 + \beta_1^2 y - \varepsilon_n + b^2 \phi_n(y)^2,$$

sachant que tous les paramètres qui y figurent sont relatifs à l'état lié d'énergie  $E_n$ . Ainsi ; concernant l'état fondamental nous avons  $n = 0$  et, l'équation (4.24) devient :

$$\forall y \in [y_B, y_A]_{(0)} : \quad (4.25)$$

$$by(1+y)\frac{d\phi_0(y)}{dy} = -\beta_2^2 y^2 + \beta_1^2 y - \varepsilon_0 + b^2 \phi_0(y)^2 .$$

Finalement ; par la substitution de la solution (4.23) dans l'équation (4.25) et puisque le résultat de cette opération n'est rien d'autre qu'un polynôme du second degré qui doit être identiquement égal à zéro, nous obtenons le système de relations d'égalités suivant :

$$bC + \beta_2^2 - b^2 C^2 = 0,$$

$$bC - \beta_1^2 - 2b^2 CB = 0, \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_0 - b^2 B^2 = 0.$$

Sachant que  $C > 0$ , on trouve intéressant de confronter les uns et les autres des paramètres qui figurent au niveau du système (4.26) avant de s'intéresser à sa solution. Ainsi ; depuis la première relation de l'équation (4.26) nous avons  $bC + \beta_2^2 > 0$ , et depuis la troisième  $\varepsilon_0 > 0$ , et en ce qui concerne la deuxième relation on en tire le fait que  $\beta_1^2 > 0$  car  $B < 0$ .

En effet ; depuis (1.5), (4.5) et (4.23) la représentation graphique de la dérivée logarithmique  $\phi_0(y)$  serait une des trois cas de figures suivants (Voir Figures 1) :

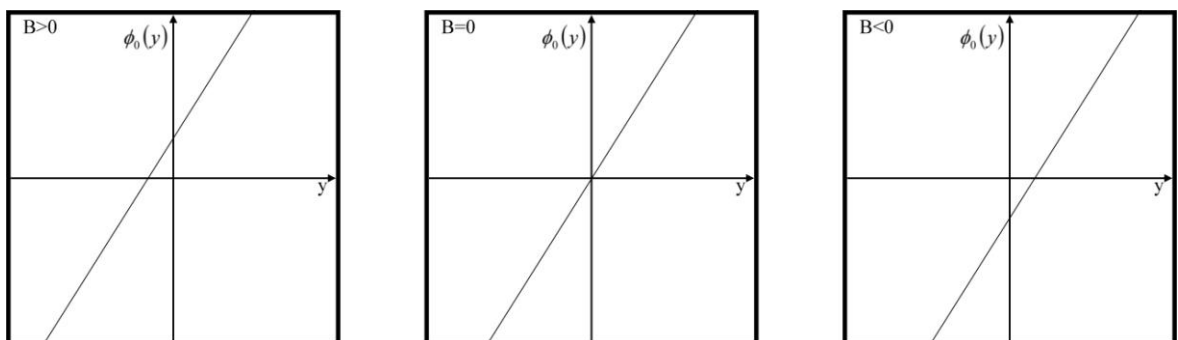


Figure 1 : Intersection de la représentation graphique de l'angle de phase  $\phi_0(y)$  avec l'axe des ordonnées.

Or ; les deux premiers cas de la figure 1, qui correspondent respectivement à  $B > 0$  et  $B = 0$ , sont écartés par l'absurdité de leurs conséquences, et de ce fait le troisième cas de la figure 1 est le seul cas possible et admissible pour lequel  $B < 0$ .

De cette façon ; nous avons :

$$\begin{aligned}
 \beta_1^2 &> 0, \\
 bC + \beta_2^2 &> 0, \\
 \varepsilon_0 &> 0, \\
 B &< 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

De plus ; d'après (4.20) l'expression du discriminant  $\Delta_0$  relatif à la détermination des deux points de rebroussement  $y_{0A}$  et  $y_{0B}$  qui sont assujetties à l'état fondamental est :

$$\Delta_0 = \beta_1^4 - 4\varepsilon_0\beta_2^2.$$

En fait ;  $\varepsilon = \varepsilon_n$  car  $E = E_n$ . Ainsi ; depuis (4.26) nous avons :

$$\Delta_0 = \beta_1^4 - 4\varepsilon_0\beta_2^2 = -2b^3C^2B + bC \left[ \beta_1^2 + \frac{(bC - \beta_1^2)^2}{(bC + \beta_2^2)} \right].$$

De par les faits que  $b > 0$  et  $C > 0$ , et d'après (4.27), le discriminant  $\Delta_0$  est une entité strictement positive ; donc :

$$\Delta_0 = \beta_1^4 - 4\varepsilon_0\beta_2^2 > 0, \tag{4.28}$$

et par conséquent les deux points de rebroussement  $y_{0A}$  et  $y_{0B}$  existent effectivement tels que d'après (4.22) nous avons :

$$y_{0A} + y_{0B} = \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}. \quad (4.29)$$

Ainsi ; depuis (4.29) et d'après (4.5) et (4.27) nous avons :

$$\beta_2^2 > 0. \quad (4.30)$$

Finalement ; d'après (4.27) et (4.30) nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \beta_1^2 &> 0, \\ \beta_2^2 &> 0, \\ \varepsilon_0 &> 0, \\ B &< 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

et par suite le choix de paramètres (4.16) que nous avons eu à faire précédemment est justifié.

Enfin ; la solution du système de relations (4.26) est :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta_2^2}}{2b}, \\ B &= -\frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{b} = \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)}{4b\beta_2^2} - \frac{\beta_1^2 \sqrt{1 + 4\beta_2^2}}{4b\beta_2^2}, \\ E_0 &= \frac{1}{kb^2} \left[ \gamma a_0 - \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)^2 + \beta_1^4(1 + 4\beta_2^2)}{16\beta_2^4} + \frac{\beta_1^2(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)\sqrt{1 + 4\beta_2^2}}{8\beta_2^4} \right], \\ \varepsilon_0 &= \left[ \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)}{4\beta_2^2} - \frac{\beta_1^2 \sqrt{1 + 4\beta_2^2}}{4\beta_2^2} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.4. POINTS DE REBROUSSEMENT ET PREUVE D'EXISTANCE

Dans un premier temps nous avons pris le discriminant  $\Delta_n$  (Voir Éq. (4.20)) en considération comme étant une entité strictement positive ; maintenant nous allons prouver que c'est une entité strictement positive pour n'importe quel état lié d'énergie  $E_n$  (Pour n'importe quel  $n$  dans l'ensemble des entiers  $\mathbb{N}$ ).

Ainsi ; d'après (4.28), le discriminant  $\Delta_0$  relatif à la détermination des deux points de rebroussement qui sont assujetties à l'état fondamental est strictement positif :

$$\Delta_0 = \beta_1^4 - 4\varepsilon_0\beta_2^2 > 0.$$

De plus ; l'énergie  $E_0$  de l'état fondamental de ce système correspond à la plus petite valeur des valeurs propres de l'équation de Schrödinger (4.13) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : E_n > E_0. \quad (4.33)$$

Depuis (4.33) et (4.16) nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \varepsilon_n < \varepsilon_0. \quad (4.34)$$

Depuis (4.34) et puisque  $\beta_2^2 > 0$  (Voir Éq. (4.31)) nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > \Delta_0. \quad (4.35)$$

De cette façon ; depuis (4.28), (4.35) et d'après la propriété de la relation « > » d'être transitive, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \Delta_n > 0. \quad (4.36)$$

Finalement ; d'après (4.28) et (4.36) nous concluons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \Delta_n > 0. \quad (4.37)$$

Enfin ; la question de l'existence de racines pour le polynôme  $\beta_2^2 y^2 - \beta_1^2 y + \varepsilon_n$  est réglée, exactement il existe deux racines qui correspondent aux deux points de rebroussement  $y_A$  et  $y_B$  recherchés dans l'ordre où  $y_A > y_B$ .

#### 4.5. LA CORRECTION QUANTIQUE

D'après (1.35), on se contente de calculer la correction quantique  $Q_c$  seulement par rapport à l'état fondamental. Ainsi (Voir Éq. (1.34)) ;

$$Q_c = \int_{r_A}^{r_B} \phi_0(r) \left[ \frac{dK_0(r)}{dr} \right] \left[ \frac{d\phi_0(r)}{dr} \right]^{-1} dr.$$

De par (4.4) et (4.5), l'expression de cette correction quantique en termes de la nouvelle variable introduite  $y$  est :

$$Q_c = b \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y(1+y)} \phi_0(y) \left[ \frac{dK_0(y)}{dy} \right] \left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} dy. \quad (4.38)$$

Depuis (4.4), (4.5), (4.14), (4.16), (4.22) et (4.31), l'expression du vecteur d'onde  $K$  en termes de la nouvelle variable introduite  $y$  est :

$$K(y) = \frac{\sqrt{\beta_2^2}}{b} \sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}. \quad (4.39)$$

Pour l'état fondamental l'expression du vecteur d'onde (4.39) garde sa forme, cependant les deux points limites  $y_A$  et  $y_B$  qui y figurent sont relatifs à cet état en question de façon à ce que (Voir Éq. (4.22)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A + y_B = y_{0A} + y_{0B} = \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}, \\ \text{et} \\ y_A \cdot y_B = y_{0A} \cdot y_{0B} = \frac{\varepsilon_0}{\beta_2^2}. \end{array} \right. ,$$

dans cette cinquième partie du chapitre 4, l'indice «0» ne sera plus exprimé explicitement, cependant tous les paramètres sont relatifs à l'état fondamental. De plus ; depuis (4.23) et (4.39) nous avons :

$$\frac{dK_0(y)}{dy} = \frac{1}{2b\sqrt{\beta_2^2}} \frac{(-2\beta_2^2 y + \beta_1^2)}{\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}},$$

$$\text{et} \quad (4.40)$$

$$\left[ \frac{d\phi_0(y)}{dy} \right]^{-1} = \frac{1}{C}.$$

Ainsi ; depuis (4.23), (4.38) et (4.40), la correction quantique  $Q_c$  est :

$$Q_c = \frac{1}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{(Cy + B)(-2\beta_2^2 y + \beta_1^2)}{y(1+y)\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy = \frac{1}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{-2\beta_2^2 Cy^2 + (\beta_1^2 C - 2B\beta_2^2)y + B\beta_1^2}{y(1+y)\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy.$$

De cette façon ;



$$\begin{aligned}
Q_c = & -\sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{y}{(1+y)\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy + \frac{(\beta_1^2 C - 2B\beta_2^2)}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{(1+y)\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy \\
& + \frac{B\beta_1^2}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y(1+y)\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy.
\end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned}
Q_c = & -\sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy + \frac{B\beta_1^2}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy \\
& + \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)(C-B)}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{(1+y)\sqrt{(y_A-y)(y-y_B)}} dy.
\end{aligned}$$

En faisant appel aux formules d'intégration (Voir Appendice D) nous obtenons :

$$Q_c = -\sqrt{\beta_2^2} \pi + \frac{B\beta_1^2}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{y_A y_B}} \right] + \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)(C-B)}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{(1+y_A)(1+y_B)}} \right].$$

Alors ;

$$Q_c = -\sqrt{\beta_2^2} \pi + \frac{B\beta_1^2}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \frac{\pi}{\sqrt{y_A y_B}} + \frac{(\beta_1^2 + 2\beta_2^2)(C-B)}{2C\sqrt{\beta_2^2}} \frac{\pi}{\sqrt{1+y_A+y_B+y_A y_B}}. \quad (4.41)$$

Finalement ; depuis (4.22), (4.26), (4.31) et (4.41), nous concluons que la correction quantique est :

$$Q_c = - \left[ \sqrt{\beta_2^2} + \frac{1 - \sqrt{1 + 4\beta_2^2}}{2} \right] \pi. \quad (4.42)$$

#### 4.6. L'INTEGRALE DU VECTEUR D'ONDE

Depuis (1.34) et (4.14) l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = \frac{1}{b} \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{kb^2 E - \gamma a_0 + (A - \gamma a_1) \frac{e^{-r/b}}{1 - e^{-r/b}} - (\alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2) \frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2}} dr.$$

En termes de la variable  $y$  l'expression de l'intégrale du vecteur d'onde devient (Voir Éq. (4.5) Et (4.39)) :

$$\begin{aligned} \int_{r_A}^{r_B} K(r) dr &= \int_{y_A}^{y_B} K(y) \left[ -\frac{b}{y(1+y)} \right] dy \\ &= \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y(1+y)} \sqrt{(y_A - y)(y - y_B)} dy \\ &= \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{(y_A - y)(y - y_B)}{y(1+y)\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy \\ &= \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{-y^2 + (y_A + y_B)y - y_A y_B}{y(1+y)\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy. \end{aligned}$$

Donc ;

$$\begin{aligned} \int_{r_A}^{r_B} K(r) dr &= -\sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy - y_A y_B \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy \\ &\quad + (1 + y_A + y_B + y_A y_B) \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{(1+y)\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy. \end{aligned}$$

Ainsi ;

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = -\sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{\sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy - y_A y_B \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{y \sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy$$

$$+ (1 + y_A)(1 + y_B) \sqrt{\beta_2^2} \int_{y_B}^{y_A} \frac{1}{(1 + y) \sqrt{(y_A - y)(y - y_B)}} dy.$$

En se référant aux formules d'intégration (Voir Appendice D) nous obtenons :

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = -\sqrt{\beta_2^2} \pi - y_A y_B \sqrt{\beta_2^2} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{y_A y_B}} \right] + (1 + y_A)(1 + y_B) \sqrt{\beta_2^2} \left[ \frac{\pi}{\sqrt{(1 + y_A)(1 + y_B)}} \right],$$

car la variable  $y$  est à valeurs positives (Voir Éq. (4.5)). Donc ;

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = \left[ -\sqrt{\beta_2^2} - \sqrt{\beta_2^2} \sqrt{y_A y_B} + \sqrt{\beta_2^2} \sqrt{1 + y_A + y_B + y_A y_B} \right] \pi. \quad (4.43)$$

Finalement ; depuis (4.22) et (4.43), et puisque la variable  $y$  est à valeurs positives et  $\beta_2^2 > 0$  (Voir Éq. (4.31)), nous concluons que l'intégrale du vecteur d'onde est :

$$\int_{r_A}^{r_B} K(r) dr = -\left[ \sqrt{\beta_2^2} + \sqrt{\varepsilon_n} - \sqrt{\varepsilon_n + \beta_1^2 + \beta_2^2} \right] \pi, \quad (4.44)$$

et,

$$\varepsilon_n > 0. \quad (4.45)$$

#### 4.7. CONCLUSION

De par les résultats (4.42) et (4.44), la « R.Q.E.G » pour ce système quantique est :

$$\sqrt{\varepsilon_{n_r} + \beta_1^2 + \beta_2^2} = (n_r + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\beta_2^2} + \sqrt{\varepsilon_{n_r}}.$$

Donc ; d'après (4.32) nous avons :

$$\varepsilon_{n_r} = \frac{1}{4(n_r + bC)^2} [\beta_1^2 + \beta_2^2 - (n_r + bC)^2]^2.$$

Ainsi ; depuis l'expression (4.16) et par la substitution de  $C$  par sa valeur d'après l'expression (4.32) dans cette toute dernière équation à laquelle nous sommes parvenus, nous obtenons enfin le spectre d'énergie du « P.M.R » par l'usage de la « R.Q.E.G » :

$$E_{n_r} = E_{n_r} = -\frac{1}{16kb^2} \left[ 2n_r + 1 + \sqrt{1 + 4\beta_2^2} - \frac{4(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2n_r + 1 + \sqrt{1 + 4\beta_2^2}} \right]^2 + \frac{\gamma a_0}{kb^2}, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.46)$$

avec,

$$k = \frac{2\mu}{\hbar^2},$$

$$\gamma = l(l+1),$$

$$r_0 = b \ln \left[ 1 + \frac{2\alpha(\alpha-1)}{A} \right],$$

$$a_0 = \frac{b^2}{r_0^2} - \frac{\alpha(\alpha-1)[8A + 12\alpha(\alpha-1)]}{[A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} + \frac{12\alpha^2(\alpha-1)^2}{[A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4},$$

$$a_1 = \frac{8\alpha^2(\alpha-1)^2 [3A + 4\alpha(\alpha-1)]}{A [A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} - \frac{48\alpha^3(\alpha-1)^3}{A [A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4},$$

$$a_2 = -\frac{16\alpha^3(\alpha-1)^3 [A + \alpha(\alpha-1)]}{A^2 [A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^3}{r_0^3} + \frac{48\alpha^4(\alpha-1)^4}{A^2 [A + 2\alpha(\alpha-1)]^2} \cdot \frac{b^4}{r_0^4},$$

$$\beta_1^2 = A - \gamma a_1,$$

$$\beta_2^2 = \alpha(\alpha - 1) + \gamma a_2, \text{ (Voir Éq.(4.1),(4.6),(4.8) et (4.16)).}$$

**Tableau 1 : Valeurs propres du potentiel de Manning-Rosen.**

Valeurs propres (4.46) comme fonction de  $b$  pour les états 2p, 3p, 3d, 4p, 4d, 4f, 5p, 5d, 5f, 5g, 6p, 6d, 6f et 6g dans le cadre des unités atomiques ( $\hbar=\mu=1$ ) et pour  $\alpha=1.5$ ,  $A=4b$ .

Etats	1/b	$\alpha=1.50$		
		Present	Schöberl [28] $A = 2b$	HE* [28] $A = 2b$
2p	0.025	-0.08894755	-0.0899708	-0,0900229
	0.050	-0.06869093	-0.0800400	-0.0802472
	0.075	-0.05089954	-0.0705701	-0.0710332
3p	0.025	-0.05071738	-0.0369134	-0,0369651
	0.050	-0.03231438	-0.0272696	-0,0274719
	0.075	-0.01785372	-0.0189474	-0,0193850
3d	0.025	-0.03112786	-0.0394789	-0,0396345
	0.050	-0.01465736	-0.0294496	-0.0300629
	0.075	-0.00354527	-0.0204663	-0,0218121
4p	0.025	-0.02984463	-0.0171740	-0,0172249
	0.050	-0.01392491	-0.0089134	-0,0091019
	0.075	-0.00373787	-0.0031884	-0,0035478
4d	0.025	-0.01825329	-0.0182115	-0,0183649
	0.050	-0.00476782	-0.0095167	-0,0100947
	0.075	-	-0.0031399	-0.0042808
4f	0.025	-0.01043304	-0.0186137	-0,0189223
	0.050	-	-0.0094015	-0.0105852
	0.075	-	-0.0022307	-0.0046527
5p	0.025	-0.01751565	-0.0080816	-0,0081308
5d	0.025	-0.01033657	-0.0085415	-0,0086902
5f	0.025	-0.00539910	-0.0086619	-0,0089622
5g	0.025	-0.00216677	-0.0086150	-0,009121
6p	0.025	-0.00991577	-0.0034876	-0,0035334
6d	0.025	-0.00539786	-0.0036813	-0,0038209
6f	0.025	-0.00231949	-0.0036774	-0,0039606
6g	0.025	-0.00039824	-0.0035623	-0,0040422

\*HE : Hypergeometric Equation.

➤ RESULTATS NUMERIQUES ET DISCUSSIONS

Comme supports à comparaisons, nous avons pris en considération les références [28-30]. Selon trois méthodes distinctes, toutes différentes de la « R.Q.E.G », elles expriment le spectre d'énergie des états liés, lequel est conforme à  $\alpha > 1$ , du « P.M.R » pour les états- $l$  arbitraires ( $l \neq 0$ ).

On dénote les résultats numériques de la référence [28] par « Les résultats HE ». En ce qui concerne les résultats numériques de la référence [29], on les dénote par « Les résultats ICF ». Quant aux résultats numériques de la référence [30], on les dénote par « Les résultats de Schöberl ».

Pour ce qui est de notre travail, nous avons eu dans un premier temps à ajuster le paramètre  $A$  en termes du paramètre  $b$  pour pouvoir se positionner sur les deux premières valeurs du tableau 1 de la référence [28], qui correspondent à l'état lié  $2p$  ( $\alpha > 1$ ). Cet ajustement donne  $A = 4b$  alors que, pour les résultats HE et de Schöberl  $A = 2b$  ; cela est attendu et tout à fait justifié vu les différences de procédures d'une méthode à l'autre. Ainsi; il n'y avait pas d'accords entre nos résultats pour  $A = 4b$  et les résultats HE et de Schöberl tels qu'ils sont présentés dans la référence [28] : l'écart relatif absolu moyen entre nos résultats et ceux de HE est de 47,68 %, et l'écart relatif absolu moyen entre nos résultats et ceux de Schöberl est de 48,13 %. Ce qui nous laisse perplexe et nous pousse à investiguer plus sur cette question.

Dans un deuxième temps nous avons repris l'équation (15) de la référence [28], on s'est aligné sur les états liés ( $\alpha > 1$ ) pour  $A = 4b$  et nous avons calculé les valeurs propres pour les différents états liés. La comparaison de ces résultats avec ceux de notre approche « R.Q.E », pour  $A = 4b$ , nous a confirmée cette fois ci que nos résultats sont en bon accord avec ceux de l'approche HE [28] : l'écart relatif absolu moyen est de 7,12 %. Les deux approches, HE et la notre « R.Q.E », sont en excellent accord pour les faibles valeurs de  $n$  et de  $b$  ; pour les grandes valeurs de  $n$ , ou bien les petites valeurs de  $n$  et les grandes

valeurs de  $b$ , les différences apparaissent : l'approximation adoptée par l'approche HE n'est plus bonne pour ces cas là.

Cependant ; les divergences entre nos résultats et les résultats ICF demeurent. Essentiellement, cela est du à la façon d'approximer le terme centrifuge dans le potentiel effectif. En fait ; bien qu'en bon accord avec nos résultats, les résultats HE [28] divergent aussi pour certaines valeurs de  $n$  et de  $b$ . Dans les chapitres 2 et 3, pour corroborer nos résultats nous avons fait appel à la référence [27], dans laquelle ces mêmes résultats sont obtenus par une démarche qui consiste en un aboutissement vers une équation hypergéométrique ; cela renvoi directement à la façon d'approximer le terme centrifuge dans [28].

Par ailleurs ; dans notre façon d'approximer le terme centrifuge, on prend  $\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ a_0 + a_1 \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + a_2 \frac{e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} \right]$  (Voir Éq. (4.7), (4.8) et (4.9)) alors que, pour les résultats ICF [29]  $\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2} \left[ d_0 + \frac{e^{-r/b}}{1-e^{-r/b}} + \frac{e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} \right]$  avec  $d_0 = 0,0793264057\ 923$ . Ce fut exhaustive notre méthode d'approximer, elle considère l'ensemble des paramètres mis en jeu pour la définition du potentiel étudié ; de laquelle sont issus  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  lesquels sont liés l'un aux autres : le choix arbitraire d'un d'entre eux implique les autres, cela met un point d'interrogation sur l'éventualité  $(a_0, a_1, a_2) = (d_0, 1, 1)$  et donc sur l'approximation adoptée au niveau de [29].

Enfin ; pour les états- $l$  arbitraires ( $l \neq 0$ ), les systèmes étudiés n'admettent pas de résolution exacte sans approximation préalable du terme centrifuge. De ce fait ; toute approche se voit précéder d'une opération d'approximation du terme centrifuge. D'un point de vue heuristique, en partant de l'hypothèse qu'il y'a une corrélation entre l'énergie centripète et l'énergie centrifuge, et en tenant compte de la stabilité du système dans le temps, le terme centrifuge dans le potentiel effectif devrait être exprimé en termes du potentiel étudié ; puisque les deux termes sont d'une même nature dimensionnelle, ils sont alors linéairement dépendants avec un facteur de proportionnalité égale à 1, c'est ce que nous avons littéralement signifié et effectué en parlant de l'approximation de Pekeris [17] qui est en fait une accommodation, toute autre approximation vient ensuite. La règle de



quantification améliorée est en amont exacte, le procédé de son obtention est fondamentalement et radicalement différent de celui qui a conduit à l'approximation WKB qui est une règle approximative malgré les ressemblances qu'elle affiche avec la « R.Q.A ».

## CONCLUSION

Dans ce mémoire on s'est intéressé de plus près à une nouvelle règle de quantification intitulée, règle de quantification améliorée « R.Q.A ».

La règle de quantification améliorée concerne le problème des états liés de l'équation d'onde de Schrödinger avec un potentiel qui admet une résolution exacte. Au niveau du premier chapitre et sans aucune approximation, nous avons obtenu la « R.Q.A » par les conditions correspondantes des dérivées logarithmiques et le concept fondamental de l'analyse mathématique, pour l'équation d'onde de Schrödinger à une seule dimension. Nous l'avons ensuite généralisée aux états liés de l'équation d'onde de Schrödinger à trois dimensions avec un potentiel sphérique [18].

Dans le deuxième et le troisième chapitre nous avons confirmé les expressions des spectres d'énergie du potentiel de Rosen-Morse trigonométrique respectivement pour ses formes symétrique et antisymétrique. Cette réussite remarquable est dans le cadre d'une certaine façon de procéder qui consiste à considérer seulement l'état fondamental dans le calcul de la correction quantique. En plus d'affirmer des résultats déjà connus, ces deux études révèlent la subtilité de l'idée qui consiste à considérer seulement l'état fondamental dans le calcul de  $Q_c$ . Cette idée nous évite beaucoup de complications dans les calculs, elle met en avant le caractère de la « R.Q.A » d'être générale et la rend encore plus simple.

À hauteur du quatrième chapitre nous avons franchi le cap de la « R.Q.A » vers la règle de quantification améliorée et généralisée « R.Q.A.G ». Où ; nous nous sommes intéressés à l'étude des états liés de l'équation de Schrödinger radiale avec le potentiel de Manning-Rosen « P.M.R ». Indépendamment de toute approche, le système n'admet pas de résolutions exactes pour les états- $l$  arbitraires ( $l \neq 0$ ). Il est impératif d'approximer la partie centrifuge dans le potentiel effectif qui lui correspond, en termes du « P.M.R ». en ce qui nous concerne, nous avons procédé à cette approximation par la méthode de Pekeris [17] laquelle est une méthode exhaustive. Finalement ; par la « R.Q.A.G » nous avons obtenu l'expression du spectre d'énergie du « P.M.R ». Pour les systèmes qui admettent

une résolution exacte, la « R.Q.A » est en parfait accord avec les autres approches. Pour les états- $l$  arbitraires ( $l \neq 0$ ), nous observons tantôt des convergences, tantôt des divergences. Ce contraste est essentiellement dû à la façon d'approximer le terme centrifuge en amont de toute approche, et aux différences substantielles d'une approche à une autre.

Pour toute étude, il est question de proposer l'angle de phase relatif à l'état fondamental de par ses propriétés, et non pas de le déterminer par une résolution de l'équation de Riccati. La substitution de cet angle de phase proposé, dans l'équation de Riccati régissant le système, aura entre autres deux effets particulièrement importants : le premier est la détermination directe de l'énergie de l'état fondamental. Et par conjugaison du fait que l'énergie de l'état fondamental représente la plus petite valeur des valeurs propres du système étudié, le second est la confirmation de l'existence de points de rebroussement pour tous les états liés.

Enfin ; la règle de quantification améliorée telle que nous l'avons avancée ici, représente un outil puissant en matière de calcul des niveaux d'énergie des systèmes physiques quantiques qui admettent une résolution exacte. Elle se distingue par son exactitude, simplicité et son caractère d'être générale pour n'importe quelle équation d'onde de Schrödinger avec un potentiel soluble, dans le cadre du problème de ses états liés.

**APPENDICE A**  
**PROPRIÉTÉS DE  $\phi(x_A)$**

Depuis la relation réursive (1.14) et le fait que  $\phi(x_I) > 0$ , nous avons prouvé que  $\phi(x_A)$  est à la fois finie et n'est pas négative. À présent ; nous allons prouver que  $\phi(x_A) \neq 0$  en s'appuyant sur le principe du raisonnement par l'absurde. Pour cela ; on s'intéresse au dernier film de la séquence que nous avons produit dans la région  $x_I \leq x \leq x_A$ .

Comme ça ; l'extrémité gauche  $x_{n-1}$  de ce dernier film appartient au voisinage très proche (Immédiat), à gauche, du point  $x_A$  lorsque le nombre  $n$  de films tend vers l'infini (Est suffisamment grand). D'autre part ; la valeur de la dérivée logarithmique  $\phi(x_{n-1})$  en ce point est calculée via la relation réursive (1.14) depuis  $\phi_0 = \phi(x_I)$  lorsque  $J$  croît de 1 jusqu'à  $n-1$  de façon à ce que  $\phi(x_{n-1}) = \phi_{n-1}$  (Voir Éq. (1.14)) donc,  $\phi(x_{n-1})$  est à la fois finie et strictement positive :

$$\phi(x_{n-1}) > 0. \quad (\text{A.1})$$

Cependant ; puisque  $n \rightarrow +\infty$  alors ;  $x_I + nd_n - d_n/2 \rightarrow x_A$  et donc  $k_n \rightarrow 0$  (Voir Éq. (1.7)), ce qui laisse croire que, toujours selon la relation réursive (1.14),  $\phi(x_A) = \phi(x_n) = \phi_n = 0$ .

Ainsi ; si  $\phi(x_A) = 0$  alors ; au voisinage très proche du point  $x_A$  l'équation de Riccati (1.6) aurait la forme suivante :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \cong k(x)^2, \quad k(x) = \sqrt{2\mu[V(x) - E]}/\hbar, \quad V(x) \geq E, \quad (\text{A.2})$$

car ;

$$\phi(x) \cong \phi(x_A) = 0. \quad (\text{A.3})$$

De plus ;

$$k(x)^2 = 2\mu[V(x) - E]/\hbar^2, \quad (\text{A.4})$$

et la formule locale de Taylor [19-22] pour cette fonction  $k(x)^2$  au voisinage très proche du point  $x_A$  est :

$$\begin{aligned} k(x)^2 &= \sum_{h=0}^1 \frac{k^{(h)}(x_A)^2}{h!} (x - x_A)^h + o[(x - x_A)] \\ &\cong k(x_A)^2 + \left. \frac{d}{dx} [k(x)^2] \right|_{x=x_A} (x - x_A) \\ &\cong 0 + \left. \frac{d}{dx} \left[ \frac{2\mu[V(x) - E]}{\hbar^2} \right] \right|_{x=x_A} (x - x_A) \\ k(x)^2 &\cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_A} (x - x_A). \end{aligned}$$

Donc ;

$$k(x)^2 \cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_A} (x - x_A). \quad (\text{A.5})$$

Par la substitution du résultat (A.5) dans l'équation (A.2) nous avons :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_A} (x - x_A).$$

Donc ;

$$d\phi(x) \cong \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} (x-x_A) dx. \quad (\text{A.6})$$

En intégrant l'équation (A.6) depuis le point  $x_{n-1}$  jusqu'au point  $x_A$  nous obtenons le résultat suivant :

$$\phi(x_A) - \phi(x_{n-1}) \cong \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} \left[ \frac{1}{2} (x-x_A)^2 \right]_{x=x_{n-1}}^{x=x_A}.$$

Ainsi ;

$$\phi(x_{n-1}) \cong \frac{\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} (x_{n-1} - x_A)^2. \quad (\text{A.7})$$

Toutefois ; dans la région  $x_l \leq x \leq x_A$  la fonction potentielle  $V(x)$ , telle que nous l'avons considéré, est une fonction de la variable  $x$ , réelle, continue par morceaux et strictement décroissante, donc :

$$\frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_A} < 0. \quad (\text{A.8})$$

Finalement ; depuis (A.7) et (A.8), si  $\phi(x_A) = 0$  alors ; la valeur de la dérivée logarithmique en le point  $x_{n-1}$  est telle que  $\phi(x_{n-1}) < 0$ .

Or ; d'après l'équation (A.1)  $\phi(x_{n-1}) > 0$ . Donc ; depuis le principe du raisonnement par l'absurde  $\phi(x_A)$  ne peut disparaître, c'est-à-dire  $\phi(x_A) \neq 0$ . Ainsi ; en s'appuyant de nouveau sur l'expression de la relation récursive (1.14) nous pouvons enfin affirmer que la valeur de la dérivée logarithmique en le point  $x_A$  est telle que  $\phi(x_A) > 0$ .

**APPENDICE B**  
**PROPRIETES DE  $\phi(x_B)$**

Depuis la relation réursive (1.15) et le fait que  $\phi(x_F) < 0$ , nous avons prouvé que  $\phi(x_B)$  est à la fois finie et n'est pas positive. À présent ; nous allons prouver que  $\phi(x_B) \neq 0$  en s'appuyant sur le principe du raisonnement par l'absurde. Pour cela ; on s'intéresse au premier film de la séquence que nous avons produit dans la région  $x_B \leq x \leq x_F$ .

Comme ça ; l'extrémité droite  $x_1$  de ce premier film appartient au voisinage très proche (Immédiat), à droite, du point  $x_B$  lorsque le nombre  $n$  de films tend vers l'infini (Est suffisamment grand). D'autre part ; la valeur de la dérivée logarithmique  $\phi(x_1)$  en ce point est calculée via la relation réursive (1.15) depuis  $\phi_n = \phi(x_F)$  lorsque  $J$  décroît de  $n$  jusqu'à 2 de façon à ce que  $\phi(x_1) = \phi_1$  (Voir Éq. (1.15)) donc,  $\phi(x_1)$  est à la fois finie et strictement négative :

$$\phi(x_1) < 0. \tag{B.1}$$

Cependant ; puisque  $n \rightarrow +\infty$  alors ;  $x_F - (n-1)d_n - d_n/2 \rightarrow x_B$  et donc  $k_1 \rightarrow 0$  (Voir Éq. (1.7)), ce qui laisse croire que, toujours selon la relation réursive (1.15),  $\phi(x_B) = \phi(x_0) = \phi_0 = 0$ .

Ainsi ; si  $\phi(x_B) = 0$  alors ; au voisinage très proche du point  $x_B$  l'équation de Riccati (1.6) aurait la forme suivante :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \cong k(x)^2, \quad k(x) = \sqrt{2\mu[V(x) - E]}/\hbar, \quad V(x) \geq E, \tag{B.2}$$

car ;

$$\phi(x) \cong \phi(x_B) = 0. \quad (\text{B.3})$$

De plus ;

$$k(x)^2 = 2\mu[V(x) - E]/\hbar^2, \quad (\text{B.4})$$

et la formule locale de Taylor [19-22] pour cette fonction  $k(x)^2$  au voisinage très proche du point  $x_B$  est :

$$\begin{aligned} k(x)^2 &= \sum_{h=0}^1 \frac{k^{(h)}(x_B)^2}{h!} (x - x_B)^h + o[(x - x_B)] \\ &\cong k(x_B)^2 + \left. \frac{d}{dx} [k(x)^2] \right|_{x=x_B} (x - x_B) \\ &\cong 0 + \left. \frac{d}{dx} \left[ \frac{2\mu[V(x) - E]}{\hbar^2} \right] \right|_{x=x_B} (x - x_B) \\ k(x)^2 &\cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_B} (x - x_B). \end{aligned}$$

Donc ;

$$k(x)^2 \cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_B} (x - x_B). \quad (\text{B.5})$$

Par la substitution du résultat (B.5) dans l'équation (B.2) nous avons :

$$\frac{d\phi(x)}{dx} \cong \left. \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_B} (x - x_B).$$

Donc ;



$$d\phi(x) \cong \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_B} (x - x_B) dx. \quad (\text{B.6})$$

En intégrant l'équation (B.6) depuis le point  $x_B$  jusqu'au point  $x_1$  nous obtenons le résultat suivant :

$$\phi(x_1) - \phi(x_B) \cong \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_B} \left[ \frac{1}{2} (x - x_B)^2 \right]_{x=x_B}^{x=x_1}.$$

Ainsi ;

$$\phi(x_1) \cong \frac{\mu}{\hbar^2} \frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_B} (x_1 - x_B)^2. \quad (\text{B.7})$$

Toutefois ; dans la région  $x_B \leq x \leq x_F$  la fonction potentielle  $V(x)$ , telle que nous l'avons considéré, est une fonction de la variable  $x$ , réelle, continue par morceaux et strictement croissante, donc :

$$\frac{dV(x)}{dx} \Big|_{x=x_B} > 0. \quad (\text{B.8})$$

Finalement ; depuis (B.7) et (B.8), si  $\phi(x_B) = 0$  alors ; la valeur de la dérivée logarithmique en le point  $x_1$  est telle que  $\phi(x_1) > 0$ .

Or ; d'après l'équation (B.1)  $\phi(x_1) < 0$ . Donc ; depuis le principe du raisonnement par l'absurde  $\phi(x_B)$  ne peut disparaître, c'est-à-dire  $\phi(x_B) \neq 0$ . Ainsi ; en s'appuyant de nouveau sur l'expression de la relation récursive (1.15) nous pouvons enfin affirmer que la valeur de la dérivée logarithmique en le point  $x_B$  est telle que  $\phi(x_B) < 0$ .

**APPENDICE C**  
**LE THEORÈME DE STURM-LIOUVILLE**

On dénote par  $\psi(E, x)$  la solution de l'équation de Schrödinger (1.3) avec l'énergie  $E$ , et par  $\phi(E, x)$  la dérivée logarithmique de cette solution (Voir Éq. (1.4)). En multipliant l'équation (1.3) par la fonction  $\psi(E_1, x)$  nous avons :

$$\psi(E_1, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(E, x) = -\frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(E, x) \psi(E_1, x). \quad (\text{C.1})$$

Maintenant ; en échangeant les rôles entre  $E$  et  $E_1$  dans l'équation (C.1), et en soustrayant cette dernière depuis le résultat du changement effectué nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi(E, x) \frac{\partial \psi(E_1, x)}{\partial x} - \psi(E_1, x) \frac{\partial \psi(E, x)}{\partial x} \right] = -\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_1 - E) \psi(E, x) \psi(E_1, x). \quad (\text{C.2})$$

Depuis les conditions aux limites nous pouvons affirmer les faits que lorsque  $E < V(-\infty)$  et  $E_1 < V(-\infty)$  les solutions  $\psi(E, x)$  et  $\psi(E_1, x)$  de l'équation de Schrödinger respectivement avec les énergies  $E$  et  $E_1$  disparaissent à l'infinité négative. De là ; en intégrant l'équation (C.2) depuis  $-\infty$  jusqu'à n'importe quel point  $x$  dans la région  $-\infty < x \leq x_B$  nous obtenons :

$$\frac{1}{(E_1 - E)} \left[ \psi(E, x) \frac{\partial \psi(E_1, x)}{\partial x} - \psi(E_1, x) \frac{\partial \psi(E, x)}{\partial x} \right] = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \int_{-\infty}^x \psi(E, t) \psi(E_1, t) dt.$$

Ainsi ; quand  $E_1$  tend vers  $E$  nous avons :

$$\frac{\partial \phi(E, x)}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} \left[ \frac{1}{\psi(E, x)} \frac{\partial \psi(E, x)}{\partial x} \right] = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\psi(E, x)^2} \int_{-\infty}^x \psi(E, t)^2 dt. \quad (\text{C.3})$$

Ainsi ; D'après l'équation (C.3) la dérivée partielle  $\frac{\partial \phi(E, x)}{\partial E}$  de la dérivée logarithmique  $\phi(E, x)$  par rapport à l'énergie  $E$  n'est pas positive. En conséquences ; la dérivée logarithmique  $\phi(E, x)$  de la fonction d'onde  $\psi(E, x)$  est décroissante par rapport à l'énergie  $E$  et ce pour n'importe quel point  $x$  de la région  $-\infty < x \leq x_B$  tel que  $\psi(E, x) \neq 0$ . De cette façon ; la dérivée logarithmique  $\phi(E, x)$  est donc monotone [19-22] par rapport à l'énergie  $E$  et pour n'importe quel point  $x$  de la région  $-\infty < x \leq x_B$ . Notamment ; depuis l'équation (C.3), pour le point  $x_B^-$  nous avons :

$$\left. \frac{\partial \phi(E, x)}{\partial E} \right|_{x=x_B^-} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\psi(E, x_B)^2} \int_{-\infty}^{x_B} \psi(E, x)^2 dx < 0. \quad (\text{C.4})$$

De façon similaire ; depuis les conditions aux limites nous pouvons affirmer les faits que lorsque  $E < V(+\infty)$  et  $E_1 < V(+\infty)$  les solutions  $\psi(E, x)$  et  $\psi(E_1, x)$  de l'équation de Schrödinger respectivement avec les énergies  $E$  et  $E_1$  disparaissent à l'infinité positive. De là ; en intégrant l'équation (C.2) depuis n'importe quel point  $x$  de la région  $x_B \leq x < +\infty$  jusqu'à  $+\infty$  nous obtenons :

$$\frac{1}{(E_1 - E)} \left[ \psi(E, x) \frac{\partial \psi(E_1, x)}{\partial x} - \psi(E_1, x) \frac{\partial \psi(E, x)}{\partial x} \right] = \frac{2\mu}{\hbar^2} \int_x^{+\infty} \psi(E, t) \psi(E_1, t) dt.$$

Ainsi ; quand  $E_1$  tend vers  $E$  nous avons :

$$\frac{\partial \phi(E, x)}{\partial E} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\psi(E, x)^2} \int_x^{+\infty} \psi(E, t)^2 dt. \quad (\text{C.5})$$

Ainsi ; d'après l'équation (C.5) la dérivée partielle  $\frac{\partial\phi(E,x)}{\partial E}$  de la dérivée logarithmique  $\phi(E,x)$  par rapport à l'énergie  $E$  n'est pas négative. En conséquences ; la dérivée logarithmique  $\phi(E,x)$  de la fonction d'onde  $\psi(E,x)$  est croissante par rapport à l'énergie  $E$  et ce pour n'importe quel point  $x$  de la région  $x_B \leq x < +\infty$  tel que  $\psi(E,x) \neq 0$ . De cette façon ; la dérivée logarithmique  $\phi(E,x)$  est donc monotone [19-22] par rapport à l'énergie  $E$  et pour n'importe quel point  $x$  de la région  $x_B \leq x < +\infty$ . Notamment ; depuis l'équation (C.5), pour le point  $x_B^+$  nous avons :

$$\left. \frac{\partial\phi(E,x)}{\partial E} \right|_{x=x_B^+} = \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{\psi(E,x_B)^2} \int_{x_B}^{+\infty} \psi(E,x)^2 dx > 0. \quad (C.6)$$

Ainsi ; de par les résultats auxquels nous sommes parvenus, nous avons démontré que, pour l'équation de Schrödinger, le fait de choisir l'angle de phase comme étant la dérivée logarithmique  $\phi(E,x)$  conduit à la réalité que cet angle en question est une fonction monotone [19-22] par rapport à l'énergie  $E$ .

**APPENDICE D**  
**FORMULES D'INTEGRATION**

$$1. \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{\sqrt{(x_B - x)(x - x_A)}} = \pi.$$

$$2. \int_{x_A}^{x_B} \frac{dx}{(ax + b)\sqrt{(x_B - x)(x - x_A)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(ax_A + b)(ax_B + b)}}.$$

$$3. \int_{x_A}^{x_B} \frac{ax + b}{(1 + x^2)\sqrt{(x_B - x)(x - x_A)}} dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_{x_A}^{x_B} \frac{a + ib}{(i + x)\sqrt{(x_B - x)(x - x_A)}} dx \right\}$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\pi(a + ib)}{\sqrt{(i + x_A)(i + x_B)}} \right\}.$$

$$4. \int_a^b \frac{y}{\sqrt{(y - a)(b - y)}} dy = \frac{\pi}{2}(a + b).$$

$$5. \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(y - a)(b - y)}} dy = \pi.$$

$$6. \int_a^b \frac{1}{y\sqrt{(y - a)(b - y)}} dy = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

$$7. \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} \sqrt{(r_B - r)(r - r_A)} dr = \frac{\pi}{2}(r_A + r_B) - \pi\sqrt{r_A r_B}.$$

**APPENDICE E**  
**LISTE DES SYMBOLES**

« R.Q.A »	:	La règle de quantification améliorée
« R.Q.A.G »	:	La règle de quantification améliorée et généralisée
« R.Q.E »	:	La règle de quantification exacte
« R.Q.E.G »	:	La règle de quantification exacte et généralisée
« P.R-M.T.S »	:	Potentiel de Rosen-Morse trigonométrique symétrique
« P.R-M.T.AS »	:	Potentiel de Rosen-Morse trigonométrique antisymétrique
« P.M.R »	:	Potentiel de Manning-Rosen
$x_A, x_B, y_A, y_B, r_A, r_B$	:	Points de rebroussement
$r_0$	:	Point d'équilibre du système
$Q_c$	:	Correction quantique
$K$	:	Vecteur d'onde
$E, E_n$	:	Énergies
$V, U$	:	Potentiels
$\psi, R$	:	Fonctions d'onde
$\phi, \varphi$	:	Dérivées logarithmiques
$\mu$	:	Masse
$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	:	Constante de Planck réduite
$\Delta, \Delta_0, \Delta_n$	:	Discriminants d'un polynôme du second degré
$N$	:	Nombre de nœuds de la dérivée logarithmique
$N', n$	:	Nombre de nœuds de la fonction d'onde

**REFERENCES**

1. L.V. De Broglie, « Ondes et quanta », Comptes rendus T.177 (1923) 507-510.
2. L.V. De Broglie, « Quanta de lumière, diffraction et interférences », Comptes rendus T.177 (1923) 548-560.
3. L.V. De Broglie, « Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat », Comptes rendus T.177 (1923) 630-632.
4. L.V. De Broglie, « Sur les véritables idées de base de la mécanique ondulatoire », Comptes rendus T.277, série B, (1973) 71-73.
5. L.V. De Broglie, « Recherches Sur La Théorie Des Quanta », Thèse de Doctorat, Annales De Physique, (Paris), 3,22 (1925).
6. V. E. Schrödinger, Erste Mitteilung: Ann. Phys. 79, 361 (1926).
7. V. E. Schrödinger, Zweite Mitteilung: Ann. Phys. 79, 489 (1926).
8. V. E. Schrödinger, Dritte Mitteilung: Ann. Phys. 80, 437 (1926).
9. V. E. Schrödinger, Vierte Mitteilung: Ann. Phys. 81, 109 (1926).
10. G. Wentzel, Z. Physik. 38, 518 (1926).
11. H. A. Kramers, Z. Physik. 39, 828 (1926).
12. L. Brillouin, Compt. Rend. 183, 24 (1926).
13. J.L. Dunham, Phys. Rev. 41 (1932) 713.

14. J.B. Krieger, C. Rosenzweig, *Phys. Rev.* 164 (1967) 171.
15. B. Chakrabarti, T.K. Das, *Phys. Rev. A* 60 (1999) 104.
16. Z. Q. Ma, A. Gonzalez-Cisneros B. W. Xu, S. H., *Phys Lett. A* 371 (2007) 180-184.
17. C. L. Pekeris, *Phys. Rev.* 45 (1934) 98.
18. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mécanique Quantique, Théorie Non relativiste, Troisième Édition, Éditions MIR. Moscou, 1980.*
19. V. Koudriavtsev, B. Démidovitch, *Cours Élémentaire de Mathématiques Supérieures, deuxième édition, Éditions MIR. Moscou, 1986.*
20. N. Piskounov, *Calcul Différentiel Et Intégral, Tome 2, 11<sup>e</sup> édition, Éditions MIR. Moscou, 1987.*
21. J. Bass, *Exercices De Mathématique, Masson Et C<sup>IE</sup> Editeurs, 1968.*
22. V. S. Shipachev, *Higer Mathematics, MIR Publishers Moscow, 1988.*
23. W-C. Qiang, S-H Dong, *Physics Letters A* 363 (2007) 169–176.
24. X-Y. Gu, S-H. Dong, *Physics Letters A* 372 (2008) 1972–1977.
25. Z.Q. Ma, B.W. Xu, *Europhys. Lett.* 69 (2005) 685.
26. C.N. Yang, in: N.S. Craigie, P. Goddard, W. Nahm (Eds.), *Monopoles in Quantum Field Theory, Proceedings of the Monopole Meeting, Trieste, Italy, World Scientific, Singapore, 1982, P. 237.*
27. D. Ter Haar, *Problems in Quantum Mechanics, third ed., Pion Ltd, London, 1975.*
28. Wen-Chao Qiang, Shi-Hai Dong, *Physics Letters A* 368 (2007) 13–17.



29. A. Diaf, A. Chouchaoui, R.J. Lombard, *Ann. Phys.* 317 (2005) 354.
30. W. Lucha, F.F. Schöberl, *Int. J. Mod. Phys. C* 10 (1999) 607.
31. S. M. Ikhdair, R. Sever. arXiv: 0802.0589v1 [quant-ph] 5 Feb 2008.
32. J. Carinena, J. D. Lucas, A. Ramos. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2007 (2007), No. 122, PP. 1–14.
33. J. Yu, S-H Dong, G- Sun, *Physics Letters A* 322 (2004) 290–297.
34. P. M. Morse, *Phys. Rev.* 34 (1929) 57.
35. R. E. Langer, *Phys. Rev.* 51 (1937) 669.
36. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep.* 251 (1995) 267.
37. S.H. Dong, *Factorization Method in Quantum Mechanics*, Springer/Kluwer Academic, 2007.
38. O.L. De Lange, R.E. Raab, *Operator Methods in Quantum Mechanics*, Clarendon Press, Oxford, 1991.