

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche**  
**Scientifique**

**Université de Blida**  
**Faculté des sciences**  
**Département d'aéronautique**



**Mémoire de fin d'Etudes en vue de l'Obtention du diplôme**  
**D'Ingénieur d'Etat en Aéronautique**

Option : Structure

Présenté par :

**M<sup>r</sup> BOURGHADEN HICHEM**  
**M<sup>lle</sup> BELKHEIR DJAMILA**

Thème :

**Simulation Numérique d'un Ecoulement Laminaire de**  
**Fluide Visqueux et Incompressible dans des Conduites de**  
**Sections Complexes par la Méthode des Eléments Finis**

Soutenu le : Mardi 29 Octobre 2002

**DIRIGE PAR :**  
**AISSANI MOULOU**  
**ZEBBICHE TOUFIK**

**Promotion 2001 /2002**

Département d'aéronautique, Faculté des sciences, Université de Blida,  
B.P.123 ,Rue de Soumaa, Blida, Tél / Fax : 025 43 36 36

## RESUMEE

Le présent travail a pour but de simuler numériquement l'écoulement laminaire incompressible dans les conduites de sections complexes de forme mono-connexe par la méthode des éléments finis, afin de généraliser l'étude de l'écoulement de *Poiseuille*. Et d'autre part de déterminer l'effet de changement de la géométrie d'une section de conduite sur l'évaluation du coefficient de perte de charge et la répartition des vitesses à travers la section ainsi que la contrainte de cisaillement et d'autres paramètres aérodynamiques.

Pour cela, on a réalisé après l'étude théorique et mathématique convenable, un programme traitant plusieurs sections complexes avec deux types d'éléments finis dont le premier est le triangulaire à 3 nœuds et le second est le quadrilatère à 9 nœuds. La validation des résultats est faite avec quelques exemples typiques analytiques.

## **REMERCIEMENTS**

Nous remercions Dieu tout puissant de nous avoir donné la force de mener à bien ce travail.

Nous tenons à remercier particulièrement notre copromoteur M<sup>r</sup> **AISSANI MOULOUD**, enseignant à l'institut d'aéronautique pour son suivi continu et ses conseils précieux et surtout pour sa patience et M<sup>r</sup> **ZEBBICHE TOUFIK**, chargé de cours à l'institut d'aéronautique pour ses orientations.

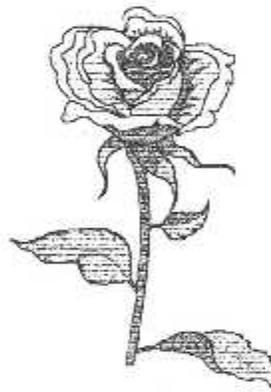
Nos remerciements s'adressent également à Monsieur le président de jury et ses membres, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Nous remercions finalement toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- La mémoire de ma chère grand mère Fatma.
- Mes parents.
- Mes frères, et mon petit frère.
- Mes amis.

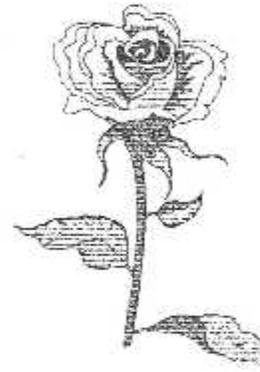


*Belkheir Djamila*

# DÉDICACES

Je dédie ce travail à :

- ◆ Ma chère mère, mon père.
- ◆ Mes frères.
- ◆ Ma famille et mes proches.
- ◆ Mes amis.



*Bourghaden Hichem*

NOMENCLATURE DES SYMBOLES

- $A, A^{(e)}$  : surface de la section d'une conduite, et la section d'un élément fini.  $m^2$   
 $A, B, C, \dots, H$  : Points spécifiés sur la frontière du domaine.  
 $a_0, b_0, a, b$  : Dimensions caractéristiques (cotes ou demi-cotes d'une géométrie).  $m$ .  
 $a$  : Gradient de pression pour une longueur  $dz$ .  
 $b$  : Largeur de la demi-bande de la matrice de rigidité.  
 $B$  : Coefficient qui dépend de la forme et les dimensions transversales d'une conduite.  
 $c_1, c_2, \dots, c_j$  : Constantes pour l'approximation de la fonction  $N(x, y)$ .  
 $C_f$  : Coefficient de frottement local.  
 $C_F$  : Coefficient de frottement global =  $\frac{1}{A} \int_A C_f dA$   
 $d_1, d_2$  : Dimensions caractéristiques.  $m$   
 $D$  : Diamètre, dimension linéaire caractéristique,  $m$ .  
 $D_H$  : Diamètre hydraulique.  
 $E$  : Energie interne massique. Energie mécanique total.  
 $E_c$  : Energie cinétique.  
 $F, F_i^{(e)}$  : Force de frottement. Élément du vecteur de sollicitation d'un élément fini ( $e$ ).  
 $\bar{f}, f$  : Force de frottement volumique. Second membre de l'équation diff. de Poisson.  
 $g$  : Accélération de la pesanteur,  $m/s^2$ . Vecteur des polynômes de la fonction  $N_j$   
 $H, h$  : Hauteur totale. Hauteur  $m$ . Type de maillage.  
 $H_f$  : Charge totale.  
 $\Delta H$  ou  $\Delta H_f$  : Perte de charge par frottement.  
 $\Delta H_s$  : Perte de charge singulière.  
 $I_{m,n}$  : Intégrales d'une fonction à deux variables où la puissance  $m$  pour la variable 'x' et de puissance  $n$  pour la variable 'y', dans un élément fini typique.  
 $I_{00}$  : Aire de la surface d'un élément triangulaire ou quadrilatère ( $m = n = 0$ ).  
 $K$  : Coefficient de perte de charge par frottement.  
 $k$  : Conductivité thermique du fluide considéré.  
 $K_{ij}, a_{ij}$  : Les éléments de la matrice de rigidité globale.  
 $L, l$  : Longueur du tronçon de la conduite. Position d'une case dans un vecteur.  
 $l_c$  : Distance mesurée depuis l'origine amont de la conduite d'un écoulement non établi.  
 $m, n$  : Degré du polynôme de la fonction d'interpolation.  
 $N_j, N$  : Fonction d'interpolation d'un élément fini. Le rang de la matrice  $[K]$ .  
 $N_x, N_y$  : Nombre de nœuds suivant les axes  $x$  et  $y$  respectivement.  
 $n, \bar{n}$  : Nombre de termes de la fonction d'interpolation, vecteur unité.  
 $n_x, n_y$  : Composantes du vecteur unité.  
 $p$  : Pression statique,  $N/m^2$ .  
 $P_g$  : Pression motrice =  $p + \rho g h$ .  
 $P_t$  : Pression totale  
 $P_m$  : Périmètre,  $m$ .  
 $P_\theta$  : Nombre de *Poiseuille*  
 $\Delta P$  : Perte de pression.  
 $Q_v, q_v$  : Débit volumique  $m^3/s$ . Débit massique.  
 $q_n$  : Flux de la variable secondaire.  
 $q$  : Source de chaleur (convection, réaction chimiques, ... etc.)  
 $a$  :  
 $Rr$  : Rayon de la conduite,  $m$ .

- $R_H$  : Rayon hydraulique, m.  
 $\mathfrak{R}_e, \mathfrak{R}_{ec}$  : Nombre de Reynolds, et Reynolds Critique.  
 $S$  : Section droite d'une conduite, Aire,  $m^2$ . Fonction de condensation (de Robert).  
 $T^\circ$  : Température,  $c^\circ$ .  
 $t$  : Temps, 's'.  
 $U, V, W$  : Composantes de la vitesse en coordonnées cartésiennes.  
 $\{V/k\}$  : Vecteur remplaçant la matrice de rigidité  $[K]$  après stockage..  
 $W$  : Vitesse axiale de l'écoulement m/s, (solution de l'équation différentielle).  
 $W_{moy}, U$  : Vitesse débitante ou vitesse moyenne d'un écoulement, m/s.  
 $W_{max}$  : Vitesse maximale.  
 $x, y, z$  : Coordonnées cartésiennes.  $r, \theta, z$  : Coordonnées cylindriques.  
 $Z$  : Variable adimensionnelle  $[-1, +1]$  de la fonction 'F' de l'intégral de Gauss Legendre.  
 $(x_j, y_j)$  : Coordonnées du nœud j.  
 $[K], [K^e]$  : Matrice de rigidité globale. Matrice de rigidité élémentaire.  
 $[F], [F^e]$  : Vecteur de sollicitation (ou force) globale. Vecteur de sollicitation élémentaire.  
 $[H], [L]$  : Matrices triangulaires déterminées par la décomposition de la matrice de rigidité.  
 Matrices de système créant les fonctions d'interpolation  $N_j$ , tel que L est l'inverse de H.  
 $[S^h]$  : Matrices de base constitutives de la matrice de rigidité  $[K]$ , ( $i, = 1$  ou  $2$ ).

**SYMBOLES GREC :**

- $\alpha, \beta, \gamma$  : Coefficients des fonctions d'interpolations d'un élément triangle à 3 nœuds.  
 $\theta$  : Coordonnée tangentielle. Angle d'un secteur, (en degré  $^\circ$  ou Rad).  
 $\delta_{ij}$  : Symbole de kronecker.  
 $\mu$  : Coefficient de viscosité dynamique (ou de cisaillement).  
 $\nu$  : Coefficient de viscosité cinématique.  
 $\lambda$  : Paramètre de rugosité.  
 $\rho$  : Masse volumique,  $Kg/m^3$ .  
 $\tau_p$  : Contrainte tangentielle à la paroi.  
 $\Psi$  : Fonction d'interpolation ou test.  
 $(\Gamma)$  : Frontière du domaine.  
 $\Omega, \Omega^e$  : Domaine global arbitraire d'étude. Domaine de l'élément fini.  
 $\xi$  : Coefficient de la rugosité relative.  
 $\eta^*$  : Variable normalisée.

**INDICES ET EXPOSANT**

- $i, j$  : Compteur sur les nœuds ou les cases d'un vecteur.  
 $T$  : Transposée d'un vecteur ou matrice.  
 $m, n$  : Puissances des polynômes de x et y respectivement pour le calcul de l'intégral.  
 $(e)$  : Indique l'élément fini 'e'.

## Table des Matières

Résumé .....	I
Remerciements .....	II
Dédicaces .....	III
Liste des symboles .....	V
Table des matières .....	VII
Introduction générale .....	1

### Chapitre I Généralités

I.1 Introduction .....	5
I.2 Ecoulement dans les conduites .....	5
I.2.1 Mouvement des fluides dans les conduites.....	6
I.2.2 Equilibre dynamique et thermique des fluides.....	7
I.3 Régime et forme d'écoulement .....	8
I.4 Ecoulement laminaire visqueux .....	9
I.4.1 Distribution des vitesses dans une section transversale .....	10
I.5 Perte de charge .....	11
I.5.1 Application à l'établissement de l'expression de la perte de charge Par frottement dans une conduite rectiligne de section constante.....	12
I.5.2 Influence de la forme de section sur le coefficient de perte de Charge .....	14
I.6 Application des conduites dans l'aéronautique .....	15

### Chapitre II Formulation mathématique

II.1 Introduction .....	16
II.2 Equations générales régissant l'écoulement interne .....	16
II.2.1 Formulation des équations des bilans.....	16
II.2.2 Conditions aux limites et initiales .....	17
II.3 Hypothèses principales .....	17
II.4 Formulation mathématique du problème .....	18
II.4.1 Equations finales régissant le problème .....	18
II.4.2 Conditions aux limites .....	20
II.5 Solutions analytiques pour quelques configurations simples.....	20

### Chapitre III Adaptation de la méthode des éléments finis

III.1 Introduction .....	26
III.2 Formulation variationnelle .....	26
III.3 Formulation à n éléments finis .....	28
III.4 Fonctions d'interpolation .....	31
III.4.1 Séries polynomiales .....	31
III.4.2 Fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire à 3 nœuds.....	33

III.4.3 Fonctions d'interpolation d'un élément quadrilatère à 9 nœuds.....	34
III.5 Calcul des matrices de rigidités .....	36
III.5.1 La matrice de rigidité pour un élément triangulaire linéaire.....	37
III.5.2 La matrice de rigidité pour un élément quadrilatère linéaire.....	38
III.6 L'assemblage des matrices de rigidité élémentaires.....	40

### Chapitre IV Génération de maillage

IV.1 Introduction.....	43
IV.2 Concept des différents types de domaines.....	43
IV.3 Configuration simplement connexe.....	44
IV.3.1 Génération des nœuds sur le contour du domaine.....	44
IV.3.2 Fonction de condensation unidimensionnelle.....	48
IV.3.3 Génération des nœuds internes pour maillage de type 'H'.....	49
IV.3.4 Connexion des éléments du maillage type 'H'.....	51
IV.3.5 Génération des nœuds pour un maillage type 'C'.....	53
IV.3.6 Connexion des éléments du maillage type 'C'.....	54
IV.4 Méthode de stockage sous forme de vecteurs.....	55
IV.4.1 Stockage en colonne.....	55
IV.4.2 Stockage en diagonale.....	57
IV.5 Algorithme de résolution directe du système d'équation.....	57
IV.5.1 Méthode de Khaletski.....	57
IV.5.2 Calcul des paramètres de l'écoulement.....	60
IV.6 Procédure de calcul.....	64

### Chapitre V Résultats et discussions

V.1 Introduction.....	67
V.2 Données du programme.....	68
V.3 Résultats des sorties graphiques.....	68
V.4 Exploitation des résultats numériques.....	82
V.4.1 Résultat du domaine circulaire.....	82
V.4.2 Résultat du domaine elliptique.....	86
V.4.3 Résultat du domaine secteur.....	87
V.4.4 Résultat du domaine d'un profil.....	91
V.4.5 Résultat des divers domaines.....	94
V.4.6 Domaines d'un arc et demi cercle courbés à la frontière.....	96
V.5 Tableaux récapitulatifs de quelques paramètres important.....	
Conclusion.....	101

Annexes.  
Références.

## INTRODUCTION GENERALE

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité de plus en plus sévères. Nous pensons aux projets spatiaux, aéronautiques et nucléaires dans les quels la sécurité est vital. Pour dominer ces projets et autres, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermiques ...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations différentielles aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très général qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique ; problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions.

La conception et la réalisation des appareils et des machines aéronautiques tel que les avions, les souffleries, etc., nécessitent un élément vital pour la liaison entre les différents modules et organes de celles ci, ce sont les conduites et les tuyauteries qui doivent être adapter au cas voulu. Tout ingénieur est concerné directement ou indirectement par les conduites et les problèmes qui y sont liés. Il doit auparavant connaître suffisamment la complexité des problèmes soulevés à des solution possibles.

Delà, notre but est l'étude de l'écoulement laminaire d'un fluide visqueux, et incompressible dans des conduites de sections complexe, par la méthode des éléments finis, afin de généraliser l'écoulement de Poiseuille étudié théoriquement par Stocks pour des sections circulaires et planes ; et afin de déterminer numériquement les champs des paramètres thermodynamiques et dynamiques à travers ces sections.

En effet, la complexité de ces domaines induit que la solution analytique (exacte) du problème n'existe pas, et évidemment notre intérêt s'oriente vers la recherche de solutions numériques approchées. La méthode des éléments finis sera introduit et appliquée avec succès puisqu'elle donne une bonne présentation de la frontière de la géométrie complexe, mais assez lourd en volume et en temps de calcul.

Elle est maintenant très répondue dans les industries, en particulier en construction aéronautique, aérospatiale, navale et nucléaire et en générale en mécanique des fluides. Elle nécessite l'écriture des programmes informatiques professionnels répondant à la résolution de ces problèmes. Pour que la méthode des éléments finis soit efficace dans les applications industrielles, il faut utiliser des programmes d'assistances à la préparation des donnés et à l'interprétation des résultats.

La maîtrise de la méthode exige en effet des connaissances dans des domaines variés :

- Compréhension du problème physique étudiés et connaissance intuitive de la nature de la solution cherchée.
- Approximation des inconnues par sous domaines et construction de fonctions d'interpolation
- Construction des équations du système étudié sous forme variationnelle, soit à partir de méthodes énergétiques, soit à partir d'équations aux dérivées partielles.
- Technique d'organisation matricielle des données.
- Méthodes numériques d'intégration, de résolution de systèmes d'équations algébriques et différentielles, linéaires et non linéaires.

La modélisation et la discrétisation des équations gérant le phénomène physique seront donc fondées sur l'utilisation des éléments finis bi dimensionnel (2D). Deux types d'éléments finis seront établis et appliqués pour le développement d'un code numérique, c'est les éléments triangulaire à trois nœuds et quadrilatère à 9 nœuds ; afin de voir la convergence vers la solution exacte, et la rapidité d'exécution et faire une comparaison entre les résultats de ces différents types d'éléments finis.

Cependant, deux difficultés principales se rencontrent, si la méthode des éléments finis est utilisée. La première difficulté majeure c'est la manière optimale de génération de maillage ainsi que l'adaptation des équations au modèle mathématique de la résolution, l'autre difficulté est le choix de la méthode numérique adéquate à la résolution du système d'équation algébriques vu le nombre important de degré de liberté alloués. Pour cela, il faut subdiviser le domaine en petit sous domaines de géométrie simple connue telle que la géométrie triangulaire par l'intermédiaire des fonctions d'interpolations.

Vu la dimension importante de la matrice du système. le stockage dans la mémoire de l'ordinateur sera réalisé en utilisant la technique des matrices bandes afin d'éviter le stockage des cases nulles. Le problème de la numérotation optimale se pose au niveau de choix de la numérotation des nœuds afin d'obtenir une matrice bande de largeur minimale (un nombre important de zéros) Pour bien voir la convergence du système, nous résolvons le système par la méthode de Khaletski (modifiée spécialement pour des matrices bandes et symétriques), une fois le code marche avec un type d'élément fini qui sera choisi au départ triangulaire à trois nœuds, on adapte l'élément de type quadrilatère à 9 nœuds, et pour chaque type d'éléments, on évalue le taux de convergence, la rapidité et l'efficacité.

La solution du système nous donne la distribution de la vitesse à travers la section choisie. Une fois cette vitesse est déterminée, on peut en déduire les paramètres thermodynamiques et dynamiques tels que la pression, la vitesse max., le débit volumique, le coefficient de perte de charge, la force de frottement exercée sur les parois.

Cependant, une fois ce travail est réalisé pour une section bien choisi telle que la section circulaire, on peut contribuer avec des sections réelles complexes, mais simplement connexe, et puisque la solution existe pour quelques géométrie tels que les sections rectangulaires et elliptiques. Une validation fera l'objet d'une comparaison entre ces solutions et les résultats obtenus.

La solution du problème traité représente la distribution du champ des vitesses axiales à travers la section des conduites de l'écoulement des fluides.

Le calcul des paramètres thermodynamiques et les caractéristiques dynamiques ( tels que la pression ,la vitesse maximale , le débit volumique , le coefficient de perte des charges , ..... ) est basé sur les résultats du champ de vitesse d'écoulement à travers ces sections des conduites.

Pour mener à bien cette étude ,un plan de travail articulé sur cinq chapitres a été adopté qui sont comme suit :

### **Chapitre I**

Expose l'influence des conduites sur le comportement de l'écoulement en fonction des fluides véhiculés et sur les différents paramètres de cet écoulement.

### **Chapitre II**

Montre l'analyse mathématique du phénomène d'écoulement d'un fluide newtonien à travers les conduites, afin d'établir les équations de base qui gèrent l'écoulement, ainsi que les solutions analytiques possibles pour quelques cas usuels.

### **Chapitre III**

Donne la description de la formulation en éléments finis de l'équation de poisson et la transformation en un système algébrique linéaire ainsi le calcul des matrices de rigidités élémentaires des éléments finis triangulaires et quadrilatères et la manière de procéder à l'assemblage pour l'obtention du système d'équation pour le domaine complet

### **Chapitre IV**

Le but de ce chapitre est de présenter la technique de génération de maillage opté pour notre étude et les algorithmes correspondants ainsi que la description des méthodes numériques pour résoudre le système d'équations et les techniques de stockage des matrices sous formes de vecteurs, et finalement les techniques de calcul de quelques paramètres physiques nécessaires pour l'interprétation de la solution.

## Chapitre V

Ce dernier chapitre présente les différents résultats numériques calculés pour différents domaines, commençant par le plus simple afin de justifier et comparer les résultats et de valider le programme réalisé, ensuite vers quelques autres complexes où le domaine présente un intérêt physique et la solution exacte est absente.

Ensuite une petite conclusion accompagnée avec quelque travaux de futurs et recommandations.

# Chapitre I

## Généralités

### I.1 Introduction

Le développement ultérieur de l'étude des écoulements des fluides (aéraulique, hydraulique...) repose essentiellement sur l'amélioration des outils mathématiques et sur des notions de mécanique qui prirent un très large essor au 17<sup>ème</sup> siècle.

Il n'y a pratiquement pas une seule branche de la technique qui ne soit plus ou moins intéressée par la nécessité du déplacement des liquides et des gaz dans les conduites.

La discipline mécanique des fluides ,par exemple , à l'intérêt sur le calcul de l'écoulement dans des conduites , tels que l'air pour pressuriser des cabines des avions, alimenter les réservoirs de carburant des engins, conduire de l'huile pour le graissage des roulements d'arbres (paliers) etc. Donc, on a besoin de connaître quelques résultats qui reflexent l'écoulement.

L'écoulement dans les conduites est un problème fondamentale en aéraulique et en hydraulique, dans certains cas, ce sont des conduites droites de très grandes longueurs (conduites de pétrole, de gaz, d'eau, de vapeur, d'air, dispositifs de ventilation de grandes dimensions, etc), dans d'autre cas, ce sont des conduites de dimension relativement faible mais ayant un grand nombre de partie façonnées de toutes formes, d'embranchement, d'obstacle, divers dispositifs de régulation, grilles, conduites d'air d'installation de ventilation ramifiées ;conduites d'essence et d'huile pour les avions , conduites de gaz des usines métallurgique, chimique, etc).

Souvent, toutes les conduites dans les quelles se déplace le fluide forme un seul groupe (chaudières, différents fours, échangeurs de chaleur, moteurs, appareils de purification de l'air ou du gaz, appareils chimiques, tunnels aérodynamiques et beaucoup d'autres).

Dans tous les cas, il est nécessaire d'étudier l'influence des conduites sur le comportement de l'écoulement en fonction des fluides véhiculés et sur les différents paramètres de cet écoulement.

### I.2 Ecoulement dans les conduites

En aérodynamique , on considère le mouvement relatif d'un fluide et d'un solide, et on admet d'une manière générale que le domaine d'écoulement du fluide peut s'étendre à l'infini, loin des parois solides (l'écoulement externe), or en aéraulique et en hydraulique

au contraire ce domaine reste toujours confiné en leur voisinage (écoulement interne). Sachant qu'un écoulement est dit interne lorsque le fluide coule à l'intérieur de surfaces solides, qui limitent dans toutes les directions et à une distance finie, l'espace occupé par le fluide en mouvement. [1]

### 1.2.1 Mouvement des fluides dans les conduites

L'écoulement des fluides dans les conduites avec ou sans échange de chaleur dépend à la fois des paramètres géométriques et dynamiques (dimensions et formes des conduites, pressions, etc.). Parmi ces paramètres, il y a ceux qui concernent l'écoulement (viscosité, masse volumique), d'autres qui interviennent dans les transferts de chaleur.

Les lois d'écoulement dans les conduites sont fonction des propriétés des fluides véhiculés. L'écoulement lui-même, engendre des pertes de charge qui ont une influence primordiale sur la conception des conduites.

- Mouvement permanent :

Le mouvement d'un fluide est *permanent*, quand en un point quelconque de la masse en mouvement, les molécules qui se succèdent en ce point sont à la fois animées de la même vitesse, soumises à la même pression et ont la même masse volumique. Si par contre, les paramètres  $V$ ,  $\rho$  et  $P$  varient en un point en fonction du temps, le régime est dit « variable ».

- Charge totale :

Toute fois, et dans tous domaines d'écoulement où la vitesse  $V$  et la pression motrice  $P_g = p + \rho gh$  restent constantes, on définit la notion de la charge totale du fluide qui à son tour peut se généraliser, au cas où la vitesse varie d'une manière quelconque (en grandeur et en direction) dans la section, par l'expression suivante : [1].

$$P_T = \rho g H \quad (1-1)$$

$H$  dans la section  $A$ , est le quotient du débit d'énergie mécanique totale  $E$  par le débit en poids, soit :

$$H = \frac{E}{\rho g Q_v} \quad (1-2)$$

- Débit et vitesse moyenne :

On appelle le débit d'un fluide, la quantité qui s'écoule à travers une section transversale donnée de la conduite par unité de temps. Sous une forme générale (pour une forme quelconque de la répartition des vitesses dans la section) le débit volumique s'exprime par la formule : [16]

$$Q_v = \int_A dQ_v = \int_A W dA \quad (1-3)$$

avec :  $W$  - Vitesse en un point donné de la section de la conduite,  
 $A$  - Surface de la section de la conduite .

Pour simplifier la résolution des problèmes pratiques, on introduit une vitesse moyenne fictive, car La répartition des vitesses dans une section de la conduite n'est presque jamais uniforme , elle est donnée par :

$$W_{\text{moy}} = \frac{1}{A} \int_A W dA = \frac{Q_v}{A} \quad (1-4)$$

d'où :

$$Q_v = W_{\text{moy}} A \quad (1-5)$$

- Viscosité de l'écoulement :

On utilise communément le qualificatif de visqueux pour décrire une chose qui n'est ni liquide ni solide. La viscosité est en fait une caractéristique de la matière , quel qu'en soit l'état physique : gazeux, liquide ou à la limite du solide , y compris, lorsqu'ils existent, les stades intermédiaires polyphasiques.

En effet, le fluide est caractérisé par ce fait que ses molécules sont très mobiles les unes par rapport les autres, elles se déplacent sous l'action de très faibles efforts. Il n'offre aucune résistance aux déformations. En particulier, il épouse sans résistance la forme du récipient qui le contient.

Pratiquement, les fluides naturels sont constitués par des molécules présentant quelque adhérence entre elles, ce qui tend à gêner leurs mouvements relatifs, c'est ce qui constitue la viscosité.

Donc la viscosité est propre à tous les fluides réels et se manifeste dans le mouvement sous forme de frottement interne .

La viscosité provoque une dissipation de l'énergie cinétique de la masse fluide en mouvement, cette énergie est transformée en chaleur, à température et à pression données, il y a proportionnalité de la tension visqueuse à la vitesse de déformation pure , suivant une même direction, le facteur de proportionnalité est appelé coefficient de viscosité .

## 1.2.2 Equilibre dynamique et thermique des fluides

L'écoulement est dit dynamiquement établi lorsqu'il est stationnaire et lorsque les vitesses d'une abscisse  $A$  sont comptées suivant une parallèle au génératrice aussi la masse

volumique et la viscosité du fluide ne doivent pas dépendre de  $z$  ( avec  $z$  axe parallèle au sens de l'écoulement).

L'écoulement est dit thermiquement établi lorsque la répartition dans une section  $A$  des différences de températures entre un point de référence de position géométrique définie dans la section et un point quelconque de la même section ne doit pas dépendre de  $z$ . [20]

En toute rigueur, un écoulement dynamiquement établi ne peut donc s'observer que pour un fluide de masse volumique constante.

### 1.3 Régime et forme d'écoulement

La nature (régime) du mouvement d'un fluide peut être laminaire ou turbulente. Le premier régime se caractérise par la stabilité de l'écoulement. Dans ce régime les filets de courant sont parallèles, ne se mélangent pas et contournant d'une manière continue tous les obstacles qu'ils rencontrent sur leur chemin. Le deuxième régime se caractérise par le déplacement désordonné de masses finies du fluide se mélangeant fortement entre elles.

Dans une conduite cylindrique de section quelconque, l'établissement d'un régime d'écoulement dépend de l'importance des forces de viscosité (frottement interne) par rapport aux forces d'inertie. Ce rapport de forces est caractérisé par un nombre sans dimension dit de *Reynolds* :

$$\mathcal{R}_e = \frac{UD}{\nu} \quad (I-6)$$

Avec :

- U : Vitesse caractéristique de l'écoulement,  
(souvent la vitesse moyenne dans la section),
- D : Dimension caractéristique de la section transversale,
- $\nu$  : Coefficient de viscosité cinématique.

En le comparant à une constante expérimentale, dite nombre de *Reynolds* critique  $\mathcal{R}_{ec}$  de l'organe pouvant servir à caractériser le régime d'écoulement. Certes, le point de passage d'un régime à un autre est assez imprécis et correspond à ce nombre voisin de 2300 pour les liquides dans le cas d'une conduite circulaire, et de  $10^5$  pour les gaz. La limite supérieure de  $\mathcal{R}_{ec}$  dépend des conditions d'entrée dans la conduite, de l'état superficiel des parois, et d'autres causes.

En admettant 2000 on aura les deux cas suivants :

- Si  $\mathcal{R}_e > \mathcal{R}_{ec}$  l'écoulement est turbulent,
- Si  $\mathcal{R}_e < \mathcal{R}_{ec}$  l'écoulement est laminaire.

Les solutions laminaires représentent bien certains écoulements réellement observés. Mais pour une configuration géométrique donnée des parois solides limitent l'espace occupé par le fluide en mouvement, cet écoulement n'est stable que si les vitesses d'écoulement ne sont pas trop grandes. Pour des vitesses trop élevées des perturbations apparaissent en s'amplifiant au cours du mouvement, et envahissent tout l'écoulement aval.

qui devient complètement turbulent. La turbulence n'affecte pas seulement les «éléments fluides eux-mêmes, mais les propriétés que ces éléments comportes, par exemple : chaque élément fluide est chargé de chaleur, la turbulence provoquera un transport latéral de chaleur.[1]

Puisque nous avons pour objectif l'étude de l'écoulement d'un fluide visqueux dans les conduites des cas usuels, le régime auquel nous aurons affaire sera le régime laminaire.

#### 1.4 Ecoulement laminaire visqueux

L'écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite rectiligne s'effectue de telle façon que les lignes de courant glissent les unes sur les autres tout en restant parallèles ; l'écoulement est alors appelé laminaire.

Dans un écoulement laminaire d'un fluide visqueux dans une conduite, les molécules fluides voisines progressent avec des vecteurs vitesse parallèles ; du fait de la viscosité du fluide, chaque filet tend à freiner ceux des filets voisins qui sont plus rapides.

Les lignes de courants « confondues avec les trajectoires » sont des courbes fixes dans l'espace et ne se mélangent pas au cours du mouvement. La non uniformité des vitesses introduit dans le fluide des contraintes d'origine visqueuses.

Les forces de frottement développées dans ce régime seront proportionnelles au coefficient de viscosité et au gradient de vitesse. Ce régime présente surtout un intérêt dans le domaine industriel, en particulier dans la lubrification.

La condition requise pour le régime laminaire pour les liquides peut s'écrire :

$$U \leq \frac{2000 \nu}{D} \quad (1-7)$$

Elle représente la vitesse critique inférieure.

Exemple :

Pour l'eau à 20° C ( $\nu=10^{-6}$ St), il faudrait pour avoir un régime laminaire stable que :

$$U \leq \frac{2000 \cdot 10^{-2}}{D}$$

Soit, dans une section circulaire de 10-2 cm de diamètre :

$U \leq 2 \cdot 10^{-2}$  m/s Cette vitesse est importante devant la dimension du diamètre de la conduite, pour cela il faut une différence de pression importante pour l'obtenir. Mais plus le diamètre est important, plus la turbulence est facile à obtenir.

Ce résultat est obtenu à une distance suffisamment grande de l'entrée de la conduite ; cette distance  $l$  mesurée depuis l'origine amont de la conduite à partir de laquelle l'écoulement

stationnaire est établie est donnée approximativement pour un écoulement laminaire par la formule suivante :

$$l = 0.02 \frac{D^2 U}{\nu} [16] \quad (I-8)$$

La distance  $l$  mesurée depuis l'origine amont de la conduite à partir de laquelle l'écoulement stationnaire turbulent est établi est donnée par la formule approximative :

$$l = 1.5D\sqrt{Re} [16] \quad (I-9)$$

En tout point de la conduite, l'écoulement est permanent mais le long de  $l$  on dit qu'il n'est pas établi.

#### I.4.1 Distribution des vitesses dans une section transversale

Dans le mouvement d'un fluide visqueux, la couche se trouvant immédiatement au voisinage de la paroi solide y adhère. Il en résulte que, dans la région à proximité de la surface solide, il s'établit une vitesse variable croissante depuis 0 sur cette surface jusqu'à la vitesse  $W$  de l'écoulement non perturbé Figure (I-1). Cette zone de vitesse dans la section est appelée couche limite.

Dans le mouvement d'un fluide dans les conduites, on distingue la portion initiale d'écoulement et la portion d'écoulement stabilisée Figure (I-2). Par portion initiale, on entend la partie de la conduite dans laquelle le profil des vitesses est uniforme, et se transforme graduellement en profil normal correspondant à l'écoulement stabilisé. En régime laminaire dans une conduite de section circulaire, le profil stabilisé des vitesses s'établit suivant une loi parabolique figure (I-1-a), et en régime turbulent à peu près suivant une loi logarithmique ou exponentielle figure (I-1-b). On trouvera des développements sur ce profil dans le chapitre traitement mathématique. [16]

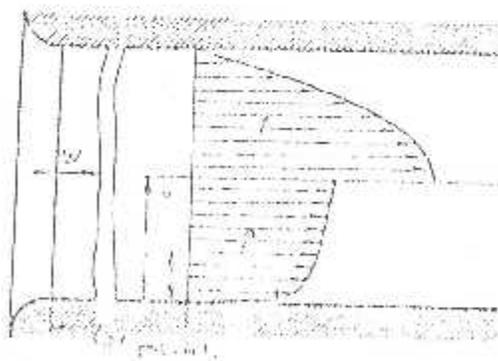


Figure (I-1) a) b) Répartition des vitesses dans une section droite d'une conduite

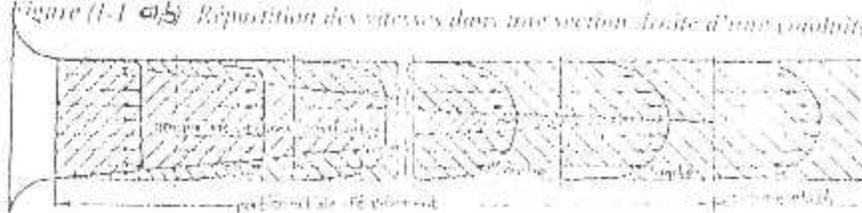


Figure (I-2) Etablissement du régime stabilisé dans une conduite

## I.5 Perte de charge

L'optimisation de la perte de charge linéaire est un problème fondamentale, en matière énergétique qui s'est posé depuis longtemps et qui se pose toujours dans les domaines industriels et aéronautiques.

Divers chercheurs, parmi lesquels on cite : Poiseuille, Prandtl, ... et beaucoup d'autres, ont contribué efficacement à l'étude des pertes de charge des fluides homogènes dans les conduites à petite ou grande échelle.

La perte de charge dans un mouvement d'un fluide dans les conduites rectilignes non singulière en régime laminaire est déterminée par les forces de frottement interne (viscosité), apparaissant quand une couche de fluide se déplace par rapport à une autre.

Les pertes de charge dépendent non seulement des paramètres de l'écoulement mais aussi de l'état de surface (plus ou moins rugueux) de la paroi. On qualifie cet état par une seule dimension géométrique  $\lambda$  qui est d'un ordre de grandeur comparable à la hauteur géométrique moyenne des aspérités de cette paroi. Les forces de viscosités sont directement proportionnelle à la vitesse de l'écoulement.

Grâce à la prépondérance en régime laminaire des forces de viscosité, même l'écoulement autour des aspérités d'une surface rugueuse se produit d'une façon continue, pour cette raison, si elle n'est pas très grandes, la rugosité des parois n'a aucun effet sur la grandeur de la perte de charge, et le coefficient de perte de charge par frottement dans ce régime dépend toujours de nombre de *Reynolds* seul.

En régime turbulent, la perte de charge due au mouvement conditionné par le transfert de quantité de mouvement des masses de fluide qui se déplacent de manière désordonnée, est de plusieurs fois plus grandes qu'en régime laminaire.

Dans un écoulement laminaire et permanent et d'un fluide newtonien, dans une conduite cylindrique, la perte par unité de longueur dépend des paramètres physiques suivants :

- Masse volumique du fluide .
- Vitesse moyenne de l'écoulement .
- Diamètre de la conduite .
- Viscosité du fluide .

On distingue deux aspects de perte de charge :

- a-Les pertes de charges singulières  $\Delta H_s$ ,
- b-Les pertes de charges par frottement  $\Delta H_f$

a-Les pertes de charge singulières :

Elles se produisent lorsqu'il y a perturbation de l'écoulement normal, décollement des parois et formation des tourbillons, la où il y a élargissement, rétrécissement, courbure

et branchement, écoulement à travers les ouvertures, les grilles, les dispositifs d'obturation ou d'étranglement, filtration à travers un corps poreux, entrée dans la conduite, etc. Dans les pertes singulières, figurent aussi les pertes de pression dues à la vitesse (pression dynamique) à la sortie de l'écoulement d'un réseau dans un grand espace (atmosphère). Etant donnée que les pertes de charge singulières sont déterminées conventionnellement comme étant la différence entre les pertes totales et les pertes par frottement dans le tronçon singulier de la conduite considérée.

Pratiquement pour l'écoulement des liquides, l'effet de  $\mathcal{R}_e$  sur les pertes de charge singulières se manifeste surtout aux faibles valeurs ( $\mathcal{R}_e < 10^5$  à  $5 \times 10^5$ ).

Par conséquent, pour  $\mathcal{R}_e < 10^5$ , on peut presque toujours considérer les coefficients de perte de charge singulière comme étant indépendants de *Reynolds*.

#### b- Les pertes de charge par frottement :

Elles sont provoquées par la viscosité, elles prennent naissance lorsqu'il y a mouvement, et résultent d'un échange de quantité de mouvement entre les molécules des couches voisines qui se déplacent avec des vitesses différentes. Ces pertes ont lieu sur toute la longueur de la conduite, et sont appelées aussi pertes continues.

### **1.5.1 L'établissement de l'expression de la perte de charge par frottement**

L'analyse dimensionnelle constitue une application remarquable dans la recherche de l'expression générale de la perte de charge. Elle permet précisément de déterminer la forme la plus simple que peut revêtir une loi reliant un certain nombre de grandeurs physiques.

Considérons un écoulement en régime permanent de débit  $Q_v$  dans une conduite rectiligne de section transversale constante, la dimension caractéristique de cette section est représentée par  $D$ .  $H$  correspondant à la perte de charge d'un écoulement sur la distance  $L$  représentant la longueur du tronçon rectiligne de la conduite considérée. Les grandeurs physiques qui interviennent dans l'expression sont :

$\Delta P$  : Perte de pression (cas d'une conduite en charge) dont l'équation aux dimensions est  $ML^{-1}T^{-2}$

$L$  : Longueur du tronçon d'écoulement considérée dont l'équation aux dimensions est  $L$ .

$D$  : Dimension caractérisant la section transversale de l'écoulement dont l'équation aux dimensions est  $L$ .

$U$  : Vitesse moyenne du fluide dont l'équation aux dimensions est  $LT^{-1}$ .

$\rho$  : Masse moyenne du fluide dont l'équation aux dimensions est  $ML^{-3}$

$\mu$  : Viscosité cinématique dont l'équation aux dimensions est  $L^2T^{-1}$ .

La relation peut donc s'écrire :

$$\Delta P = \frac{K L U^2 \rho}{D} \quad (1-10)$$

Si on mesure  $\Delta P$  en hauteur de fluide, c'est-à-dire :  $p = \rho g \Delta H$ , la perte de charge serait :

$$\Delta H = \frac{K L U^2}{D 2 g} \quad (I-11)$$

avec  $K$  coefficient de perte de charge par frottement qui est fonction de :

$$K = f\left(\Re_e, \frac{\lambda}{D}\right) \quad (I-12)$$

Le coefficient adimensionnel  $K$  est le même pour tous les systèmes géométriquement semblable, il ne change qu'avec la forme du système considéré.

L'expérience montre que l'allure générale de la variation de  $K$  en fonction de  $\Re_e$  est donnée par la courbe représentée par la figure (I-3), étant entendu que la forme exacte de cette courbe dépend de la forme du système considéré et de la grandeur de  $\lambda$  c'est à dire de la rugosité des parois du dispositif solide qui guide la masse fluide.

On peut distinguer trois zones particulières dans l'étendue de la variation totale de  $K$ .

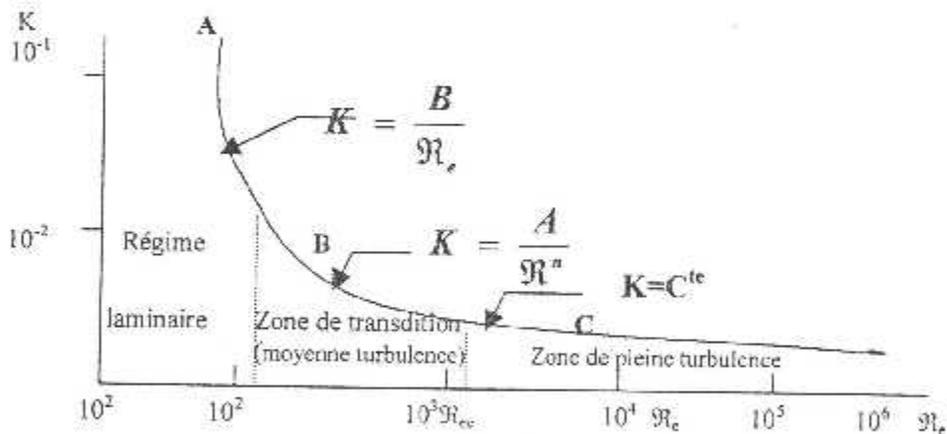


Figure (I-3) :Variation de la perte de charge d'un écoulement en fonction de  $\Re_e$  [16]

ZONE 1 :

Pour les faibles valeurs de  $\mathfrak{R}_e$ , c'est à dire en régime laminaire, la relation est de la forme représentée par une droite dans un système d'axes à graduations bilogarithmiques.

$$K = \frac{B}{\mathfrak{R}_e} \quad (I-13)$$

ZONE 2 :

Pour des valeurs de  $\mathfrak{R}_e$  supérieurs au nombre de *Reynolds* critique  $\mathfrak{R}_{e,c}$  mais toute fois suffisamment faibles pour que la turbulence du régime à l'intérieur du système n'atteigne pas un degré extrême, le coefficient  $K$  est de la forme :

$$K = \frac{A}{\mathfrak{R}_e^n} \quad \text{avec : } 0 < n < 0.3 \quad (I-14)$$

Autrement dit, dans cette zone intermédiaire BC qu'on pourrait appeler zone de transition ou zone de moyenne turbulence, la turbulence n'est pas suffisamment importante pour qu'on puisse négliger les forces de viscosité et ces deux causes interviennent pour provoquer la perte de charge qui varie donc comme une puissance de la vitesse comprise entre 1 (régime laminaire= $n=1$  où  $n$  est élevé) et 2 (régime complètement turbulent  $n=0$ ).

ZONE 3 :

En fin, pour des valeurs supérieures du nombre *Reynolds* la turbulence devient telle que les forces de viscosité sont négligeables par rapport aux effets de la turbulence ce qui est appelé saturation du régime turbulent.

Dans cette zone le coefficient  $K$  est constant ( $n=0$ ).

$$K = \text{cte.}$$

**I-5-2 Influence de la forme de la section sur le coefficient de perte de charge**

Le coefficient de perte de charge est fonction du régime de l'écoulement et de la rugosité  $\xi$  des parois. Pour les écoulements laminaires ( $\mathfrak{R}_e < 2000$  à 2500), le coefficient de perte de charge  $K$  pour une section circulaire dépend du seul nombre de *Reynolds* (formule de Hagen-Poiseuille) :

$$K = \frac{64}{\mathfrak{R}_e}$$

En écoulement laminaire dans des conduites de sections non circulaires le coefficient numérique de l'équation n'est plus égale à 64 ; sa valeur dépend de la forme de la section.

dans quelques cas simples on peut calculer la valeur de ce coefficient ,on donne des exemples où il peut varier de 47 à 96.

Delà, pour avoir un calcul précis sur le dimensionnement de ces conduites ainsi que sur la résistance hydraulique présentée par les pertes de charge, à fin de bien étudier l'influence des géométries de ces conduites ; il faut disposer des ouvrages spécialisés et des références dans ce domaine .

## I-6 Application des conduites dans l'aéronautique

Les systèmes de distribution des fluides dans les avions utilisent fréquemment des conduites de section circulaire ou rectangulaire ou bien des formes elliptiques ou encore plus spéciales (formes complexes) répondant aux normes exigées. Il existe plusieurs applications utiles des conduites :comme les conduites d'aération des compartiments ou des cabines dans un avion par l'air chaud ou froid, ou autres applications pour véhiculer une espèce de fluide de genre huile ou bien carburant, etc. Figure(1-4).

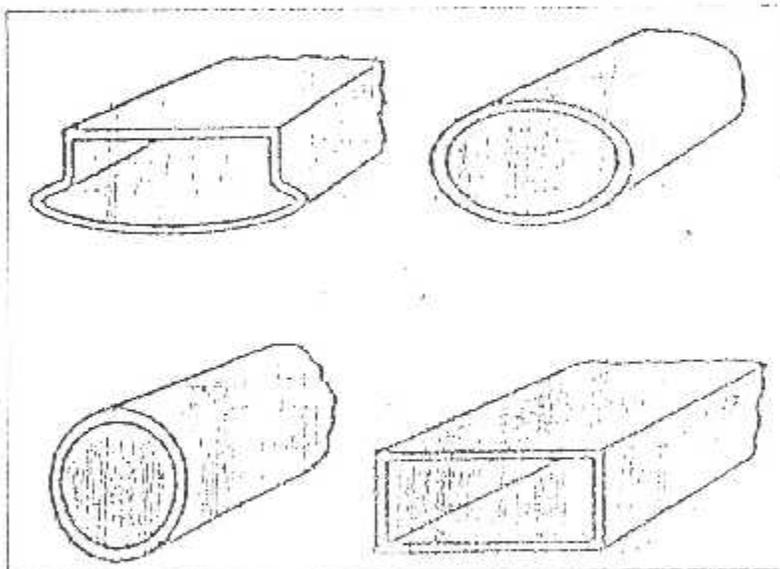


Fig. (1-4) : Application des sections circulaires et non circulaires

Les conduites circulaires sont utilisées tant que possible ,les conduites de section rectangulaire ou de forme complexe sont utilisées lorsque celles ci répondent mieux aux exigences des multiples installations(limitation d'espace, design d'intérieur,etc).

## Chapitre II

### Formulation mathématique

#### II.1 Introduction

L'analyse mathématique de l'écoulement d'un fluide Newtonien nous permet d'établir les équations de base qui gèrent cet écoulement, ainsi que les solutions analytiques possibles pour les différents cas simples. D'où l'objet de ce chapitre.

En effet, notre modèle mathématique est obtenu à partir du bilan massique et du quantité du mouvement effectué sur un volume de contrôle élémentaire du fluide considéré. Les équations exprimant les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont données par la suite, ainsi que les hypothèses de calcul qui permettront de simplifier et résoudre le problème posé.

#### II.2 Equations générales régissant l'écoulement interne traversant les conduites

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie, sont les lois mathématiques qui décrivent l'écoulement. Ces équations sont obtenues en faisant les bilans sur les paramètres de l'écoulement.

##### II.2.1 Formulation des équations des bilans

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse, tandis que l'équation de quantité de mouvement indique que le taux de variation de la quantité de mouvement égale à la résultante des forces extérieures appliquée à la particule fluide. C'est la deuxième loi de Newton.

L'équation de l'énergie traduit la conservation de l'énergie et elle est déduite d'après le premier principe de la thermodynamique. Ces équations sont écrites dans le cas général de la manière suivante [1], [12] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{II-1})$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f} \quad (\text{II-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [\rho E \vec{v} - k \nabla T + p \vec{v} - \vec{\tau} \vec{v}] = \rho \vec{f} \vec{v} + \mathbf{q}_h \quad (\text{II-3})$$

Avec  $\vec{f}$  : Forces de volume.

$\vec{\tau}$  : Tenseur des contraintes de viscosité.

$E$  : Energie interne massique.

$\rho \vec{f} \vec{v}$  : Travail par unité du temps (puissance).

$\mathbf{q}_h$  : Source de chaleur (réaction chimiques, ... etc).

$k$  : Conductivité thermique du fluide considéré.

Pour compléter ce système d'équations, on ajoute l'équation d'état spécifique de la thermodynamique, qui donne une relation entre les variables d'états du fluide considéré :

$$p = F_r(\rho, T) \quad (\text{II-4})$$

Avec  $r$  : indique un fluide réel visqueux.

## II.2.2 Conditions aux limites et initiales

La définition des conditions aux limites appropriées est essentielle pour la prise en charge de la nature physique de l'écoulement.

La détermination des conditions aux limites de l'écoulement entrant et sortant est l'une des tâches les plus importantes et dépend essentiellement du régime d'écoulement (subsonique ou supersonique) et de la nature des équations.

Pour les phases transitoires, il faut connaître ou imposer la répartition des vitesses et de la pression initiale sur le domaine du calcul ou bien les accélérations de l'écoulement au départ ( $t=0$ ) et ainsi que les températures initiales ou les flux thermiques aux frontières.

Ces équations, que nous avons récapitulées avec ces conditions aux limites appropriées, nous servent de base pour la modélisation mathématique, utilisée dans la suite de notre étude.

## II.3 Hypothèses

La complexité des équations citées auparavant, dans le cas général, nous impose de passer par une cascade d'hypothèses de bases simplificatrices, afin d'aboutir à une forme d'équations différentielles qu'on peut résoudre par des approches numériques, qui traduit un certain degré d'approximation.

Delà, on considère les hypothèses de base suivantes :

- Le fluide est considéré Newtonien et homogène .
- L'écoulement est isentropique et le fluide est calorifiquement parfait, justifiée par le fait qu'on néglige les pertes thermiques.

- L'écoulement laminaire et établi, car on s'intéresse à généraliser l'étude de Poiseuille.
- L'écoulement est stationnaire.
- L'écoulement est subsonique incompressible. Vu que la majorité des cas étudiés et rencontrés dans la pratique de ce domaine, sont des liquides ou des gaz à faible vitesse.
- Section supposée quelconque : simplement-connexe et constante le long de la conduite traversée (tronçon rectiligne).
- Gradient de pression constant dans la direction axiale. Ecoulement dominant dans la direction axiale de la conduite.
- On considère aussi que la conduite a des parois hydrauliquement lisses, et seul les pertes de charge par unité de longueur sont prises en considération.

## II.4 Formulation mathématique du problème

### II.4.1 Equations finales décrivant le problème :

Notant que, l'étude de l'écoulement se fait dans le plan transversale  $(x,y)$  de la conduite, tel que cette dernière est un cylindre de section quelconque, d'envergure fini dont les génératrices sont parallèle à  $(OZ)$ , voir la figure (II-1).

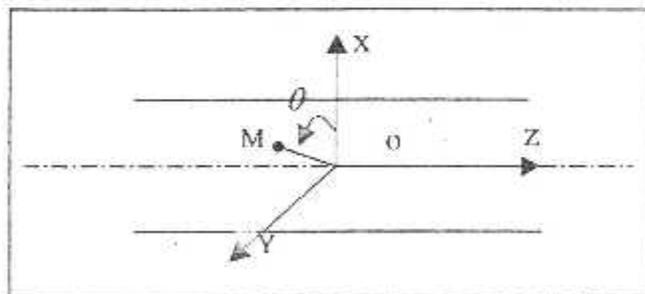


Figure (II-1) : Une conduite cylindrique

Compte tenant les hypothèses précédentes, on a : L'écoulement étant laminaire, axial et complètement développé (zone établit) c'est-à-dire : ' $Z > L_e$ ' (voir le paragraphe § 1-3). Les lignes de courants sont parallèles à  $OZ$ , donc les composantes  $U$  et  $V$  de la vitesse sont nulles.

$$U = V = 0 \quad (\text{II-5})$$

D'après la quatrième hypothèse, l'écoulement permanent obtenu après la période de mise en régime stationnaire, impose que les dérivées partielles par rapport au temps ' $\partial/\partial t$ ' sont identiquement nulles. Les variations des différentes grandeurs sont comptées le long des lignes de courants.

Quant à l'équation de continuité, l'hypothèse d'incompressibilité permet de la simplifier et elle prend la forme :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad \text{avec } \rho = \text{constante} \quad (\text{II-6})$$

En utilisant les équations (II-5), l'équation (II-6) se réduit à :

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-7})$$

L'équation (II-2) de NAVIER-STOCKS est réécrite de la manière suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta U + f_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V + f_y \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta W + f_z \end{cases}$$

Avec  $\nu = \mu/\rho$  : viscosité cinématique.

Compte tenu des hypothèses citées précédemment, ce système d'équations se réduit à la forme suivante, tel qu'on note :

$$p_s = p + \rho gh$$

Où  $p_s$  est la pression motrice, et  $h$  est une hauteur. Ainsi :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} + 0 \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial y} + 0 \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

Des deux premières équations du système, on tire :  $\frac{\partial p_s}{\partial x} = \frac{\partial p_s}{\partial y} = 0$

Soit donc,  $P_g$  dépend que de 'z'. 
$$p_g = p(z) \quad (II-8)$$

Alors, la pression motrice est constante dans une section droite de la conduite.

Finalement après les simplifications faites, il nous reste donc une seule équation du mouvement donnée par :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dz} + \nu \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)$$

Ou bien :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{dp_g}{dz} \quad (II-9)$$

Sous la forme compacte :

$$\Delta W = f \quad (II-10)$$

Avec :

$$f = \frac{1}{\mu} \frac{d(p + \rho gh)}{dz} = \frac{1}{\mu} \frac{dp_g}{dz}$$

Cette équation finale est une équation différentielle elliptique dite de Poisson avec second membre constant. Pour résoudre cette équation, on ajoute les conditions aux limites à satisfaire comme suit.

#### II.4.2 Conditions aux limites

La présence de la viscosité de l'écoulement et les forces de frottement aux parois induit que la condition de non glissement est imposée sur la vitesse aux parois. Cette condition donc de type DIRICHLET est donnée par l'équation générale suivante :

$$\vec{W}_{paroi} = \vec{0} \quad \text{sur la frontière } \Gamma'. \quad (II-11)$$

Dans la suite, on entame la résolution du problème pour les configurations simples du domaine (section cercle, carré...), par une méthode analytique, afin de permettre de valider les programmes du calcul et de procéder à la résolution des configurations complexes par suite, par la méthode des éléments finis. Et en fin, on procède aux calculs des champs des paramètres thermodynamiques et dynamiques à travers ces sections.

#### II.5 Solutions analytiques pour quelques configurations simples

Afin de déterminer les champs des paramètres thermodynamiques et dynamiques à travers les sections des conduites ou canalisations, la solution analytique de l'équation de poisson n'existe que pour quelques cas de sections simples. Nous présentons ces solutions comme suit :

## II.5.1 Cas de section circulaire

### II.5.1.A) Section cercle « Ecoulement de Poiseuille » réf.[6]

Nous présentons le cas d'un écoulement du fluide visqueux en régime laminaire dans une conduite cylindrique de section circulaire, et mettant en évidence le modèle d'écoulement de *Poiseuille* qui fournit les solutions exactes des équations de *NAVIER-STOCKS* simplifiées.

Par raison de symétrie, on est amené à passer en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . La vitesse  $W$  ainsi que  $\Delta W$  ne dépendront pas de  $\theta$ . On obtient alors :

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right)$$

Remplaçant  $\Delta W$  dans l'équation (II-10) on aura :

$$\frac{dp_g}{dz} = \frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) \quad (\text{II-12})$$

Or  $P_g$  ne dépend que de  $z$ , et  $W$  ne dépend que de  $r$ .

L'égalité précédente n'est vérifiée qu'à la condition que chaque membre soit égal à une constante.

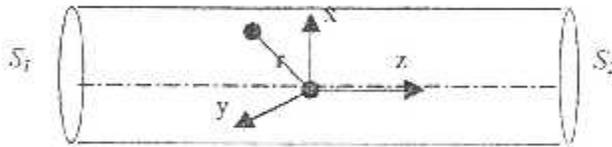


Figure (II-2): Conduite cylindrique de section circulaire

#### a - Répartition des vitesses

La répartition des vitesses peut s'obtenir de la manière suivante :

En posant :  $\frac{dp_g}{dz} = -a$  ,  $a > 0$  (II-13)

On aura l'équation à résoudre :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) = -a \frac{r}{\mu} \quad (\text{II-14})$$

Par intégration successive de l'équation (II-14) par rapport à  $r$ , on obtient :

$$W = -\frac{a}{4\mu} r^2 + b \cdot \log(r) + c \quad (\text{II-15})$$

Où  $b$  et  $c$  sont des constantes d'intégration définies par les conditions aux limites suivantes.

pour :

$r = 0$ , La vitesse doit être finie, alors il faut que :  $b = 0$ .

$r = R$ , La vitesse s'annule sur les parois,  $W(R) = 0$ , où il y a adhérence du fluide à la

paroi.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 = 0$$

Donc, on aura :  $c = \frac{a R^2}{4\mu}$

Par suite, la répartition des vitesses à l'intérieur de la conduite est donnée par l'expression suivante :

$$W(r) = \frac{a}{4\mu} R^2 \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (\text{II-16})$$

Avec :  $R$  le rayon de la conduite.

L'expression (II-16) représente un profil parabolicoïde de révolution, ayant son sommet sur l'axe de la conduite, donc la vitesse varie suivant une loi parabolique.

La répartition des vitesses est la même tout le long de la conduite pour un régime établi, voir figure (II-3).

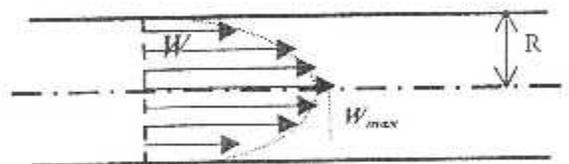


Figure ( II-3) : Champ de vitesse de l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire.

### b - Répartition des pressions

De même, on peut déterminer la répartition des pressions le long de la conduite en considérant entre deux sections transversales  $S_1$  et  $S_2$  distante d'une longueur  $L$ , et où les pressions respectives sur ces sections sont  $P_{z1}$  et  $P_{z2}$ . Pour faire couler le fluide dans la direction de l'écoulement positive, il faut que le gradient des pressions soit négatif c'est-à-dire  $dP_z/dz < 0$ .

Nous avons de l'équation (II-13) :

$$\frac{dp_z}{dz} = -a \quad \implies p_z(z) = -az + d \quad \text{avec } a > 0 \quad (\text{II-17})$$

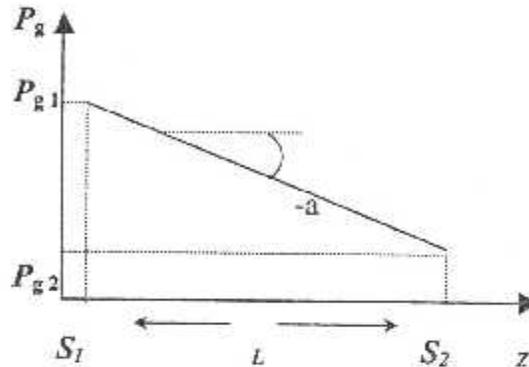
$d$  : étant une constante d'intégration.

Pour une longueur  $L$  sur laquelle la pression varie linéairement, on écrit :

$$P_{g1} - P_{g2} = a \cdot L = \Delta p_g \quad (\text{II-18})$$

Comme  $a > 0$ , la pression motrice  $P_g$  décroît linéairement dans la direction de l'écoulement suivant la loi (II-17) le long de la conduite tout en restant constante dans une section droite entre les deux sections  $S_1$  et  $S_2$  de la conduite, aux extrémités duquel s'exerce la différence de pression, voir la figure (II-4). La diminution de la pression est due au frottement à la paroi de la conduite.

**Figure (II-4) :** Evolution de la pression à travers une conduite (zone établit)



### c - Calcul du débit volumique

Le débit volumique  $Q_v$  traversant la section droite  $S$  est le flux du vecteur vitesse à travers  $S$ .

Il est donné par l'intégrale :

$$Q_v = \int_0^R 2\pi r W dr = \frac{2\pi a}{4\mu} \int_0^R r(R^2 - r^2) dr = \frac{\pi a R^4}{8\mu} = \frac{\pi a D^4}{128\mu}$$

Remplaçons 'a' par sa valeur  $\frac{\Delta P_g}{L}$ , il vient :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\mu L} \Delta P_g = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P_g \quad (\text{II-19})$$

Cette dernière formule s'appelle *formule de Poiseuille*, traduit l'expression du débit volumique, il est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités de la conduite et à la puissance 4 de son diamètre. Donc dans ces conditions, le débit est le même pour toutes les sections transversales de la conduite.

### d - Vitesse maximale et Vitesse moyenne de l'écoulement

La vitesse maximale est atteinte au centre de la conduite pour  $r = 0$ , elle a pour valeur :

$$W_{max} = \frac{a}{4\mu} R^2 \quad (\text{II-20})$$

La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite, c'est donc

$$W_{\text{moy}} = \frac{Q_v}{S} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{\pi a R^4}{8\mu}$$

Soit :

$$W_{\text{moy}} = \frac{aR^2}{8\mu} = \frac{W_{\text{max}}}{2} \quad (\text{II-21})$$

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans une conduite circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

### e - Force de frottement et son coefficient

Soit la contrainte  $\tau$  : la force de frottement par unité de surface entre deux couches voisines du fluide considéré. Elle est donnée par :

$$\tau = \mu \left| \frac{dW(r)}{dr} \right| = \mu \frac{2ar}{4\mu} = \frac{ar}{2} \quad (\text{II-22})$$

Elle varie donc linéairement avec  $r$ .

Contre la paroi elle atteint sa valeur maximale suivante :

$$\tau_p = \frac{aR}{2} = \frac{4\mu W_{\text{moy}}}{R} \quad (\text{II-23})$$

La force de frottement visqueuse exercée par le fluide sur toute la paroi intérieure de la portion 'L' de la conduite est donc :

$$F = \tau_p 2\pi RL = \frac{aR}{2} 2\pi RL = a\pi R^2 L = \frac{\Delta P_g}{L} \pi R^2 L \quad (\text{II-24})$$

d'où :

$$F = \pi R^2 \Delta P_g \quad (\text{II-25})$$

Cette force de frottement est égale au produit de la section S de la conduite par la différence de pression  $\Delta P_g$  exercée entre les deux extrémités.

On peut lui associer le coefficient de frottement local  $C_f$  :

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2} \rho W_{\text{moy}}^2} = \frac{8\mu}{\rho R W_{\text{moy}}} = \frac{6}{Re_D} \quad (\text{II-26})$$

### f - Calcul des pertes de charge par frottement et leur coefficient :

Pour un fluide réel, il y aura une perte d'énergie due au frottement visqueux. Cette perte d'énergie se traduira par une perte de charge que nous devons estimer entre deux sections.

Par les critères de l'analyse dimensionnelle, la perte de charge s'écrit :

$$\Delta H = K \frac{L}{D} \frac{W_{\text{moy}}^2}{2g} \quad (\text{II-27})$$

Où :

$$\Delta H = \frac{\Delta P_g}{\rho g} \quad (\text{II-28})$$

donc :

$$\Delta P_g = K \frac{L}{D} \rho \frac{W_{\text{moy}}^2}{2} \quad (\text{II-29})$$

La perte de charge par frottement est donc une perte de pression motrice.

En tirant  $\Delta P_g$  de l'équation du débit volumique, et en remplaçant  $Q_v$  par

On trouve le coefficient de perte de charge par frottement  $K$  :

$$K = \frac{64}{\mathfrak{R}_e}, \quad \text{on a aussi [16], [6] :} \\ K = 4.C_f \quad (\text{II-30})$$

Et :

$$\mathfrak{R}_e = \rho \frac{W_{\text{moy}} D}{\mu} = \frac{W_{\text{moy}} D}{\nu} \quad (\text{II-31})$$

Tel que  $\mathfrak{R}_e$  : Nombre de *Reynolds* qui caractérise le régime d'écoulement.

#### Remarque:

Les solutions analytiques des sections rectangulaires et elliptiques existent dans l'annexe D.

## CHAPITRE III

## Adaptation de la méthode des éléments finis

## III.1 Introduction

En rendant la complexité des calculs une chose de passé l'évolution technologique et surtout l'outil informatique est la cause première qu'a révolutionné les sciences de l'ingénieur, des problèmes autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant accessibles avec les méthodes numériques.

Les techniques de calcul ont connus un développement considérable ainsi la méthode des éléments finis (M.E.F), tout cela pour les besoins de l'industrie : Aérospatial, nucléaire, mécanique, etc....

Dans la suite, on entame la formulation et le concept de cette technique (la méthode) en traitant deux types d'éléments finis.

## III.2 FORMULATION VARIATIONNELLE (INTEGRALE)

Le problème que nous allons considérer, dans cette formulation après l'étude mathématique effectuée, c'est la résolution d'une équation différentielle partielle de second ordre de type elliptique connue sous le nom de l'équation de POISSON, associé avec des conditions aux limites du 1<sup>er</sup> type dites de DIRICHLET dans un domaine arbitraire plan  $\Omega(x, y)$  de frontière quelconque ( $\Gamma$ ).

Alors, le problème est comme suit :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = f \quad (\text{III-1})$$

Ou sous la forme compacte :

$$\Delta W = f$$

Avec

$$W = 0 \quad \text{sur } (\Gamma) \quad (\text{III-2})$$

Tel que «  $f$  » dont le second membre de l'équation différentielle caractérise le type de fluide et d'écoulement étudié.

Pour les problèmes à deux dimensions, il y a plusieurs formes géométriques qui peuvent être utilisées comme élément fini (voir Fig.2).

On développe la forme variationnelle de l'équation (III-1) pour un élément typique en multipliant cette équation par une fonction test  $\Psi(x, y)$  dont on suppose dérivable une fois par rapport à  $x$  et  $y$ , et puis on intègre dans le domaine d'élément ( $\Omega^e$ ) :

$$\iint_{\Omega'} \Psi \left[ \frac{\partial(F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2)}{\partial y} - f \right] dx \cdot dy = 0 \quad (III-3)$$

$$F_1 = \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_2 = \frac{\partial W}{\partial y}$$

Dans l'ordre de distribuer la différentiation pour  $\Psi$  et  $W$ , nous intégrons les deux premiers termes de l'équation (III-3) par partie. Premièrement on note les identités suivantes:

$$\begin{aligned} \Psi \frac{\partial(F_1)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot F_1 \\ \Psi \frac{\partial(F_2)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \cdot F_2 \end{aligned} \quad (III-4)$$

Puis nous rappelons la forme des composantes de l'opérateur gradient (ou divergence) pour un contour fermé avec la théorème de « GREEN » :

$$\iint_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi F_1) dx \cdot dy = \oint_{\Gamma'} \Psi F_1 \cdot n_x ds \quad (III-5a)$$

$$\iint_{\Omega'} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi F_2) dx \cdot dy = \oint_{\Gamma'} \Psi F_2 \cdot n_y ds \quad (III-5b)$$

Tel que : «  $ds$  » est la longueur d'arc infinitésimale de l'élément le long de son contour  $\Gamma'$ , et  $n_x, n_y$  sont les composantes du vecteur unité normale  $\vec{n}$  sur la frontière  $\Gamma'$  (voir Fig. 1b).

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = \cos(\alpha) \vec{i} + \sin(\alpha) \vec{j} \quad (III-6)$$

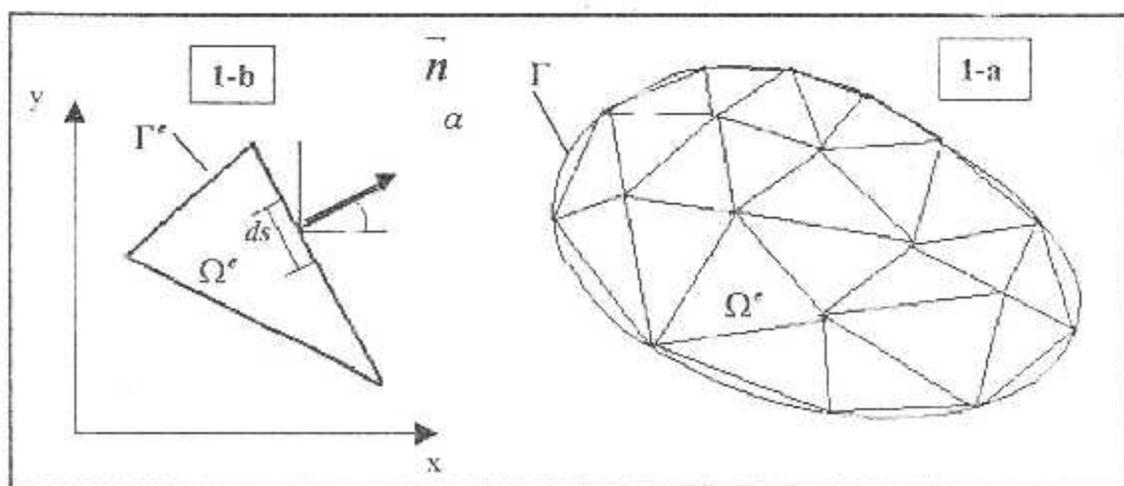


Figure (III-1.a, b) : Discretisation d'un domaine irrégulier en élément fini typique.

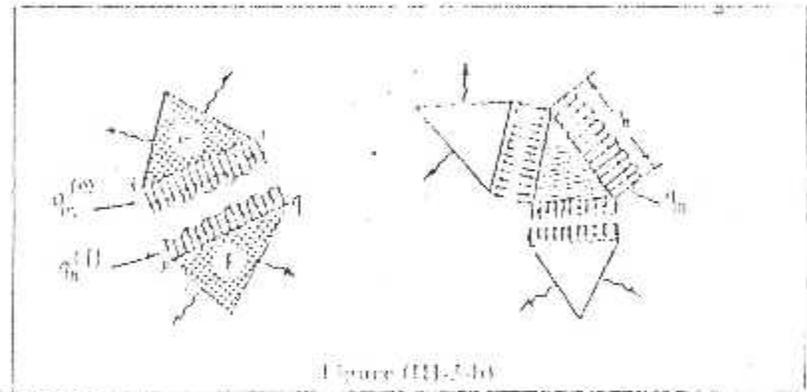
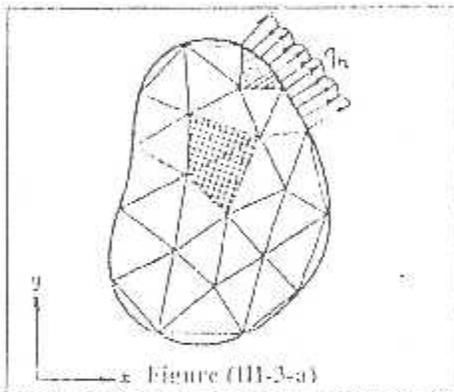
Tel que  $\partial/\partial n$  représente la différentiation dans la direction sortante normale à la frontière  $\Gamma^{(e)}$ . De la, si une portion de  $\Gamma^{(e)}$  se trouve à l'intérieur du domaine global  $\Omega$  (voir figure (III-2a, 2b)), alors la quantité  $q_n^{(e)}$  de l'élément (e) s'annule avec  $q_n^{(f)}$  de l'élément (f) qui se coïncide sur la même portion  $\Gamma^{(e)}$  de cet élément (e). Ceci peut être vu comme étant un équilibre interne entre les différents éléments du domaine (forces internes).

Si une autre portion de  $\Gamma^{(e)}$  se coïncide avec la frontière globale  $\Gamma$  du domaine, alors l'évaluation de l'intégrale de frontière est basée sur le calcul de  $q_n$  et de la valeur de la fonction d'interpolation  $\Psi_i$  sur cette frontière.

Cependant, dans notre formulation nous choisissons des fonctions d'interpolation qui vérifient la propriété suivante :

$$\Psi_i(x, y) = 0 \quad \text{si } (x, y) \in (\Gamma)$$

Implicitement, vérifie donc la condition aux limites  $W = 0$  sur  $(\Gamma)$ .



Ainsi, le 2<sup>ème</sup> membre de l'équation (III-12) devient :

$$\begin{cases} K_{ij}^{(e)} = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \\ F_i^{(e)} = - \iint_{\Omega} \Psi_i f \cdot dx \cdot dy \end{cases} \quad \text{(III-13)}$$

Delà, en substituant cette équation dans celle de (III-11), on obtient la forme dite : « *Weak form* » dans l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) \right] dx \cdot dy \right\} W_j = - \iint_{\Omega} \Psi_i f dx \cdot dy \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{(III-14)}$$

Finalement l'équation (III-14) représente le modèle de l'élément fini de l'équation (III-1) dont, qu'on va créer un programma pour la résoudre avec des différents éléments finis dans des domaines complexes.

Dans la suite, nous traitons la dérivation des fonctions d'interpolations.

### III.4 FONCTIONS D'INTERPOLATION

#### III.4.1 SERIES POLINOMIALES

Le comportement du variable dépendant ( $W$ ) dans un élément est décrit par l'approche la plus simple, cela consiste à approximer son champ de variation par des séries de polynôme dont les coefficients  $C_j$  sont les coordonnées généralisées de l'approximation[6].

Dans le cas bi-dimensionnel, pour chaque variable dépendant on a :

$$W_i(x, y) = \sum_{j=1}^n C_j x_i^j y_i^j \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \tag{III-15}$$

Ceci permet d'écrire l'approximation sous la forme matricielle suivante :

$$W_i(x, y) = [H_m(x, y)] \cdot \{C\}$$

Avec ' $m$ ' degré de liberté.

Pour cela, il est utile d'utilisé le triangle de PASCAL pour mettre en évidence le nombre de termes présents dans ce type d'approximation. Soit :

			1		constant $m=0, n=1$	
		x		y	linéaire $m=1, n=3$	
	x <sup>2</sup>	xy		y <sup>2</sup>	quadratique $m=2, n=6$	
x <sup>3</sup>	x <sup>2</sup> y	xy <sup>2</sup>		y <sup>3</sup>	cubique $m=3, n=10$ ..	

Le nombre total de coordonnées de l'approximation doit être égal au nombre total de variables nodaux de l'élément.

Si on choisit une approximation d'ordre élevé on est donc amené à adopter des nœuds supplémentaires, qui correspond aux termes supplémentaires d'approximation.

Ainsi, on définit des nœuds additionnels soit aux interfaces, soit à l'intérieur de l'élément.

Dans notre problème, l'examination de l'équation formant le modèle de l'élément fini (III-14) et les matrices d'éléments finis (III-13), montre que  $\Psi_j$  doit être au moins une fonction bilinéaire en x et y.

Comme cité auparavant, il y a une correspondance entre le nombre, la position des nœuds et les nombres des termes utilisés dans l'approximation polynomiale d'une variable dépendante dans l'élément.

Dans le problème de deux dimensions, la correspondance entre le nombre de nœuds (qui est égale au nombre de termes d'approximations polynomiales) et le degré de polynôme n'est pas unique. Par exemple, le polynôme :

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y \quad (\text{III-16})$$

contient trois termes (linéairement indépendants) et il est linéaire dans  $x$  et  $y$ , d'un autre côté le polynôme :

$$W(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \quad (\text{III-17})$$

contient quatre termes (linéairement indépendants) et également linéaire dans  $x$  et  $y$ .

La première forme nécessite un élément avec trois nœuds (avec un inconnu primaire par nœud). Or, la deuxième nécessite un élément avec quatre nœuds. Quand le nombre de nœuds égale à quatre, on peut choisir un triangle avec quatre nœuds et on met le quatrième nœud au centre de ce dernier, où on choisit un rectangle (quadrilatérale) avec les nœuds à ses sommets.

Le polynôme avec neuf constantes (III-18) est un polynôme quadratique (incomplet) :

$$\begin{aligned} \rightarrow W(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7(x^2y + xy^2) + c_8x^3 + c_9y^3 \\ & \quad (\text{III-18}) \end{aligned}$$

L'équation (le polynôme) que l'on doit utiliser pour construire un élément avec neuf nœuds (rectangle avec un nœud à chaque sommet et au milieu de chaque arête et l'autre est situé au centre du rectangle) et on fait la même chose avec six nœuds et sept constantes, ...etc.

La discrétisation du domaine d'étude se fait par des éléments finis d'un seul type ou bien mixte. Dans l'analyse numérique abordée, on a opté à faire le calcul de maillage par les éléments suivants :

- Triangle à 3 nœuds (voir la figure III-3 a).
- Quadrilatère à 9 nœuds (voir la figure III-3 b).

Afin de mener à bien le calcul et pouvoir comparer les résultats avec une bonne discussion, on a choisi ces éléments dans le calcul du programme.

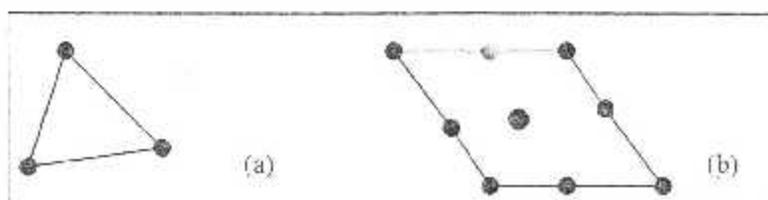


Figure (III. 3- (a, b)) : Eléments finis en bidimensionnelle de 3 et 9 nœuds.

### III.4.2 Fonction d'interpolations d'un élément triangulaire à trois nœuds

Considérons l'approximation linéaire (III-16), l'ensemble  $(1, x, y)$  est linéairement indépendant et complet. Nous devons réécrire l'approximation (III-16) telle ce qu'elle satisfait les conditions suivantes :

$$W(x_i, y_i) = W_i \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{III-19})$$

Où  $(x_i, y_i)$  avec  $(i=1, 2, 3)$  sont les coordonnées des trois sommets du triangle telle que :

$$\begin{aligned} W_1 = W(x_1, y_1) &= C_1 + C_2 x_1 + C_3 y_1 \\ W_2 = W(x_2, y_2) &= C_1 + C_2 x_2 + C_3 y_2 \\ W_3 = W(x_3, y_3) &= C_1 + C_2 x_3 + C_3 y_3 \end{aligned} \quad (\text{III-20})$$

Sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-21})$$

Nous pouvons résoudre le système (III-21) pour les constantes  $C_1, C_2, C_3$  qui sont les paramètres généraux de l'approximation si la matrice du système n'est pas singulière, nous avons :

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-22})$$

Maintenant, nous pouvons réécrire l'équation (III-16) sous la forme suivante :

$$W(x, y) = (1, x, y) \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-23})$$

Qui est de la forme :

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \Psi_1(x, y) W_1 + \Psi_2(x, y) W_2 + \Psi_3(x, y) W_3 \\ &= \sum_{i=1}^{i=3} W_i \Psi_i^{(e)} \end{aligned} \quad (\text{III-24})$$

Où  $\Psi_i^{(e)}$  sont les fonctions d'interpolation linéaire pour l'élément triangulaire.

Avec :

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{III-25a})$$

Et  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  sont des constantes données par :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned} \right\} i \neq j \neq k \quad (\text{III-25b})$$

Avec  $i, j, k$  permutent dans l'ordre naturelle et  $A_e$  est l'aire du triangle. Elle est donnée par :

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III-26})$$

Notons que la fonction d'interpolation  $\Psi_i$  possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_i(x_j, y_j) &= \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^3 \Psi_i &= 1 \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

### III.4.3 Fonctions d'interpolations d'un élément quadrilatère à 9 nœuds

Dans le cas de cet élément on a la possibilité 4 approximations qui sont données par :

- $W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 x^2 y + C_8 xy^2 + C_9 x^3$
- $W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 (x^2 y + xy^2) + C_8 x^3 + C_9 y^3$
- $W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 x^2 y + C_8 xy^2 + C_9 y^3$  (III-28)
- $W(x, y) = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 xy + C_5 x^2 + C_6 y^2 + C_7 x^2 y + C_8 xy^2 + C_9 (x^3 + y^3)$

On va opter pour une pour l'illustration, nous prenons la deuxième (III-28b).

Pour déterminer les fonctions d'interpolation on a :

$$W_1 = C_1 + C_2x_1 + C_3y_1 + C_4x_1y_1 + C_5x_1^2 + C_6y_1^2 + C_7(x_1^2y_1 + x_1y_1^2) + C_8x_1^3 + C_9y_1^3 = W(x_1, y_1)$$

$$W_2 = C_1 + C_2x_2 + C_3y_2 + C_4x_2y_2 + C_5x_2^2 + C_6y_2^2 + C_7(x_2^2y_2 + x_2y_2^2) + C_8x_2^3 + C_9y_2^3 = W(x_2, y_2)$$

$$W_3 = C_1 + C_2x_3 + C_3y_3 + C_4x_3y_3 + C_5x_3^2 + C_6y_3^2 + C_7(x_3^2y_3 + x_3y_3^2) + C_8x_3^3 + C_9y_3^3 = W(x_3, y_3)$$

⋮

⋮

$$W_9 = C_1 + C_2x_9 + C_3y_9 + C_4x_9y_9 + C_5x_9^2 + C_6y_9^2 + C_7(x_9^2y_9 + x_9y_9^2) + C_8x_9^3 + C_9y_9^3$$

III-29)

On pose :

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_9 \end{Bmatrix}, \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_9 \end{Bmatrix} \tag{III-30}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1^2 + x_1^2y_1 & x_1^3 & y_1^3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2^2 + x_2^2y_2 & x_2^3 & y_2^3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_9 & y_9 & x_9y_9 & x_9^2 & y_9^2 & x_9y_9^2 + x_9^2y_9 & x_9^3 & y_9^3 \end{bmatrix} e$$

Le vecteur {C} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{C\} = [H]^{-1} \{Q\}$$

On note :

$$[L] = [H]^{-1}, \text{ telque } [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{16} & \dots & L_{19} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{26} & \dots & L_{29} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{91} & L_{92} & \dots & L_{96} & \dots & L_{99} \end{bmatrix} \tag{III-31}$$

On aura :

$$\{C\} = [L]\{Q\}$$

Alors, l'équation (III-28b) dans la forme générale sera :

$$W(x, y) = [g][L]\{Q\}$$

Avec :

$$[g] = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad (x^2y + xy^2) \quad x^3 \quad y^3]$$

En utilisant l'équation (III-10) et (III-29), on obtient donc :

$$[\Psi] = [g][L]$$

Les fonctions d'interpolation peuvent s'écrire donc sous la forme suivante :

$$[\Psi(x, y)] = [1 \quad x \quad y \quad xy \quad x^2 \quad y^2 \quad (x^2y + xy^2) \quad x^3 \quad y^3] \begin{bmatrix} L_{11} \dots L_{12} \dots L_{19} \\ L_{21} \dots L_{22} \dots L_{29} \\ \vdots \\ L_{91} \dots L_{92} \dots L_{99} \end{bmatrix} \quad (III-32)$$

Ou bien :

$$\begin{bmatrix} \Psi_1(x, y) \\ \Psi_2(x, y) \\ \vdots \\ \Psi_9(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} + L_{21}x + L_{31}y + L_{41}xy + L_{51}x^2 + L_{61}y^2 + L_{71}(x^2y + xy^2) \\ + L_{81}x^3 + L_{91}y^3 \\ L_{12} + L_{22}x + L_{32}y + L_{42}xy + L_{52}x^2 + L_{62}y^2 + L_{72}(x^2y + xy^2) \\ + L_{82}x^3 + L_{92}y^3 \\ \vdots \\ L_{19} + L_{29}x + L_{39}y + L_{49}xy + L_{59}x^2 + L_{69}y^2 + L_{79}(x^2y + xy^2) \\ + L_{89}x^3 + L_{99}y^3 \end{bmatrix} \quad (III-33)$$

### III.5 Calcul des matrices de rigidités

Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément  $[K^{(e)}]$  et le vecteur force  $\{r^{(e)}\}$  dans l'équation (III-13) par la méthode conventionnelle (par intégration exacte) en générale n'est pas facile. L'intégrale de la surface dans l'expression  $\{r^{(e)}\}$  de l'équation (III-13) peut être évaluée lorsque  $q_n$  est connue pour un élément intérieur (dont aucun de ces cotes ne définit la frontière du domaine).

Pour une raison de simplicité, nous réécrivons  $[K^{(e)}]$  dans l'équation (III-13) comme étant la somme de deux matrices de base  $[S^{11}]$  et  $[S^{12}]$ .

$$[K^{(e)}] = [S^{11}] + [S^{12}] \quad (III-34a)$$

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} dx dy \quad (\text{III-34b})$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} dx dy$$

Et on a :

$$f_i^{(e)} = - \int_{\Omega} f \Psi_i dx dy \quad (\text{III-35})$$

On procède au calcul des matrices dans les équations (III-35) et (III-34), en utilisant l'interpolation linéaire développée dans la section précédente.

### III.5.1 La matrice de rigidité pour un élément triangulaire linéaire

Pour un élément triangulaire, la formule de l'intégrale exacte est disponible, pour l'évolution des intégrales, cette formule nous permet d'écrire :

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy$$

Alors nous avons :

$$I_{00} = A_e \quad \text{l'aire du triangle}$$

$$I_{01} = \int_{\Delta} y dx dy = A_e \bar{y}$$

Avec :

$$\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

$$I_{11} = \int_{\Delta} x y dx dy = \frac{A_e}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \bar{x} \bar{y} \right)$$

$$I_{20} = \int_{\Delta} x^2 dx dy = \frac{A_e}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \bar{x}^2 \right)$$

$$I_{02} = \int_{\Delta} y^2 dx dy = \frac{A_e}{12} \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \bar{y}^2 \right)$$

En utilisant les fonctions d'interpolation (III-25) dans les équations (III-34b) et (III-30b) :

Rappelant que:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = \frac{\beta_i}{2A_e}, \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} = \frac{\gamma_i}{2A_e} \quad (\text{III-36})$$

Nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} S_{ij}^{11} &= \frac{1}{4A_e} \beta_i \beta_j \\ S_{ij}^{22} &= \frac{1}{4A_e} \gamma_i \gamma_j \end{aligned} \right\} \quad (III-37)$$

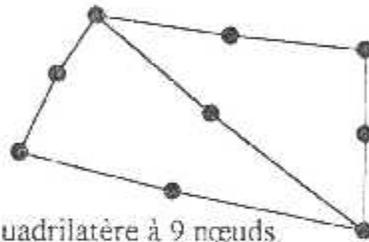
$$K_{ij} = \frac{1}{4A_e} (\beta_i \beta_j + \gamma_i \gamma_j) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (III-38)$$

$$F_i^{(e)} = - \iint_{A_e} f \cdot \Psi_i \cdot dx dy = -f \frac{Ae}{3} \quad (III-39)$$

Une fois les coordonnées des nœuds de l'élément sont connues on peut calculer  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  par l'équation (III-25 b) et substituer dans l'équation (III-38), pour obtenir les matrices d'éléments.

### III.5.2 La matrice de rigidité pour un élément quadrilatère linéaire

L'élément quadrilatère à 9 nœuds est divisé en deux éléments triangulaires comme l'indique la figure suivante :



Figure(III-4) :EF quadrilatère à 9 nœuds.

Avec  $x_5, x_6, x_7, x_8$  sont au milieu des arrêtes (1,2,2,3,3,4,4,1 respectivement) et  $x_9$  représente le centre de gravite de cet élément

$$x_9 = x_1 + x_2 + \dots + x_8 / 8, \quad y_9 = y_1 + y_2 + \dots + y_8 / 8$$

A l'aide des formules (III-37) on peut calculer les intégrales concernant l'élément quadrilatère à 9 nœuds

$$I_{00} = \int_{\Omega} dx dy = A_{123} + A_{134}$$

$$I_{10} = \int_{\Omega} x dx dy = A_{123} \bar{x}_{123} + A_{134} \bar{x}_{134}$$

$$I_{01} = \int_{\Omega} y dx dy = A_{123} \bar{y}_{123} + A_{134} \bar{y}_{134}$$

$$I_{11} = \int_{\Omega} x y dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 9 \bar{x}_{123} \bar{y}_{123}) + \frac{A_{134}}{12} (x_1 y_1 + x_3 y_3 + x_4 y_4 + 9 \bar{x}_{134} \bar{y}_{134})$$

$$I_{20} = \int_{\Omega} x^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 9 \bar{x}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 + 9 \bar{x}_{134}^2)$$

$$I_{02} = \int_{\Omega} y^2 dx dy = \frac{A_{123}}{12} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 9 \bar{y}_{123}^2) + \frac{A_{134}}{12} (\bar{y}_1^2 + \bar{y}_3^2 + \bar{y}_4^2 + 9 \bar{y}_{134}^2)$$

Les autres intégrales peuvent être calculés numériquement tel que : I<sub>21</sub>, I<sub>12</sub>, I<sub>03</sub>, I<sub>30</sub>, I<sub>40</sub>, I<sub>04</sub>.

En appliquant les équations (III-36) et (III-37), et les fonctions d'interpolations (III-33) on obtient :

$$S_{ij}^{11} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} dx dy$$

$$S_{ij}^{22} = \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} dx dy$$

Finalement la matrice de rigidité s'écrit comme suit :

$$K_y^{(e)} = (L_{2i} L_{2j} + L_{3i} L_{3j}) I_{00} + (L_{2i} L_{5j} + L_{5i} L_{2j} + 2L_{3i} L_{6j} + 2L_{6i} L_{3j}) I_{01} + (2L_{2i} L_{8j} + 2L_{4i} L_{2j} + L_{3i} L_{5j} + L_{5i} L_{3j}) I_{10} + (L_{2i} L_{9j} + L_{5i} L_{9j} + L_{9i} L_{2j} + 3L_{6i} L_{3j} + 3L_{3i} L_{6j} + 4L_{6i} L_{6j}) I_{02} + (3L_{2i} L_{7j} + 4L_{4i} L_{4j} + 3L_{7i} L_{2j} + L_{3i} L_{9j} + L_{5i} L_{5j} + L_{9i} L_{3j}) I_{20} + (L_{2i} L_{9j} + 2L_{4i} L_{5j} + 2L_{5i} L_{4j} + 2L_{9i} L_{2j} + 2L_{3i} L_{9j} + 2L_{5i} L_{6j} + 2L_{6i} L_{5j} + L_{9i} L_{9j}) I_{11} + (L_{5i} L_{9j} + L_{9i} L_{5j} + 6L_{6i} L_{8j} + 6L_{8i} L_{6j}) I_{05} + (6L_{4i} L_{7j} + 6L_{7i} L_{4j} + L_{5i} L_{9j} + L_{9i} L_{5j}) I_{30} + (4L_{4i} L_{9j} + 3L_{7i} L_{5j} + 3L_{5i} L_{7j} + 4L_{9i} L_{4j} + 2L_{5i} L_{9j} + 2L_{9i} L_{6j} + 2L_{5i} L_{9j} + 2L_{9i} L_{5j}) I_{21} + (2L_{4i} L_{9j} + L_{5i} L_{9j} + 2L_{9i} L_{4j} + 3L_{5i} L_{8j} + 2L_{6i} L_{9j} + 3L_{8i} L_{5j} + 2L_{9i} L_{6j} + 2L_{9i} L_{5j}) I_{12} + (6L_{7i} L_{9j} + 6L_{9i} L_{7j} + 4L_{9i} L_{9j}) I_{31} + (6L_{8i} L_{9j} + 6L_{9i} L_{8j} + 4L_{9i} L_{9j}) I_{13} + (3L_{7i} L_{9j} + 3L_{8i} L_{9j} + L_{9i} L_{7j} + 3L_{9i} L_{8j} + 4L_{9i} L_{9j}) I_{22} + (9L_{6i} L_{8j} + L_{9i} L_{9j}) I_{04} + (9L_{7i} L_{7j} + L_{9i} L_{9j}) I_{40}$$

Avec  $i = 1, 2, \dots, 9$

$j = 1, 2, \dots, 9$

et :

$$F_i^{(e)} = - \iint_{Ae} f \cdot \Psi_i \cdot dx dy$$

$$F_i^{(e)} = f \cdot (L_{1i} I_{00} + L_{2i} I_{10} + L_{3i} I_{01} + L_{4i} I_{11} + L_{5i} I_{20} + L_{6i} I_{02} + L_{7i} (I_{21} + I_{12}) + L_{8i} I_{30} + L_{9i} I_{30} + L_{9i} I_{03})$$

### III. 6 L'assemblage des matrices de rigidité élémentaires

L'assemblage consiste à construire la matrice [K] globale et le vecteur global {F}, à partir des matrices élémentaires [K<sup>(e)</sup>] et les vecteurs élémentaires {f<sup>(e)</sup>}. La matrice globale [K] est la somme des matrices élémentaires [K<sup>(e)</sup>], et le vecteur global {F} est la somme des vecteurs élémentaires {f<sup>(e)</sup>}.

Pour représenter l'assemblage des matrices d'éléments finis nous montrons la procédure considérant que le maillage construit par des éléments quadrilatères à 9 nœuds, soient K<sub>ij</sub><sup>(1)</sup>, K<sub>ij</sub><sup>(2)</sup> (i,j=1,2,3) les coefficients des matrices de rigidité.

A partir du maillage en élément finis représenté dans la figure au dessous on note la correspondance suivante entre les valeurs des éléments globaux.

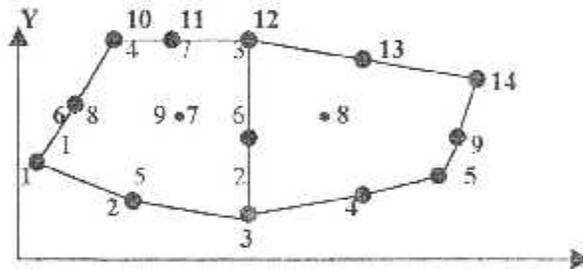


Figure (III-5) :Assemblage de deux éléments quadrilatères à 9 nœuds

$$W_1 = w_1^{(1)}, W_2 = w_2^{(1)}, W_3 = w_3^{(1)} = w_4^{(2)}, W_4 = w_2^{(2)}, W_5 = w_2^{(2)}, W_6 = w_4^{(1)}$$

$$W_7 = w_5^{(1)} = w_8^{(2)}, W_8 = w_9^{(2)}, W_9 = w_5^{(2)}, W_{10} = w_7^{(1)}, W_{11} = w_9^{(1)}, W_{12} = w_3^{(1)}$$

$$W_{13} = w_5^{(2)}, W_{14} = w_7^{(2)}, W_{15} = w_2^{(1)} = w_1^{(2)}$$

Pour l'élément(1)et(2):

$$[K^{(1)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & \dots & k_{19}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{91}^{(1)} & \dots & \dots & k_{99}^{(1)} \end{bmatrix} \quad [K^{(2)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & \dots & k_{19}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{91}^{(2)} & \dots & \dots & k_{99}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot$$

Leur assemblage nous donne donc :

La matrice assemblée

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{18}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{55}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{52}^{(1)} \\ & & k_{33}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{36}^{(1)} + k_{48}^{(2)} & 0 & 0 & k_{37}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & k_{47}^{(2)} & 0 \\ & & & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{26}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{25}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & & k_{33}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{36}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{37}^{(2)} & 0 \\ & & & & & k_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & k_{47}^{(1)} & 0 & k_{48}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_{66}^{(1)} + k_{88}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{62}^{(1)} + k_{81}^{(2)} \\ & & & & & & & k_{99}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k_{66}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & k_{77}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & k_{99}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & k_{88}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & k_{55}^{(2)} & 0 & k_{54}^{(1)} \\ & & & & & & & & & & & & & k_{77}^{(2)} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \\ F_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_5^{(1)} \\ F_3^{(1)} + F_4^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(1)} \\ F_6^{(1)} + F_8^{(2)} \\ F_9^{(2)} \\ F_6^{(2)} \\ F_7^{(1)} \\ F_9^{(1)} \\ F_8^{(1)} \\ F_5^{(1)} \\ F_7^{(2)} \\ F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

En suite nous utilisons les conditions de continuité d'inter élément , et collectant les coefficients de  $W_i(i=1,2,3,\dots,9)$ , nous aurons le système sous la forme matricielle :

$$\begin{matrix}
 k_{11}^{(1)} & k_{15}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{18}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 & k_{45}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{52}^{(1)} \\
 & & k_{33}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{36}^{(1)} + k_{48}^{(2)} & 0 & 0 & k_{37}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & k_{47}^{(2)} & 0 \\
 & & & k_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{26}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{25}^{(2)} & 0 & 0 \\
 & & & & k_{33}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & k_{36}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{37}^{(2)} & 0 \\
 & & & & & k_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & k_{47}^{(1)} & 0 & k_{48}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & k_{66}^{(1)} + k_{88}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{62}^{(1)} + k_{81}^{(2)} & 0 \\
 & & & & & & & k_{99}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & k_{66}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & k_{77}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & k_{99}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & k_{88}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & k_{55}^{(2)} & 0 & k_{51}^{(1)} \\
 & & & & & & & & & & & & & k_{77}^{(2)} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 W_1 \\
 W_2 \\
 W_3 \\
 W_4 \\
 W_5 \\
 W_6 \\
 W_7 \\
 W_8 \\
 W_9 \\
 W_{10} \\
 W_{11} \\
 W_{12} \\
 W_{13} \\
 W_{14} \\
 W_{15}
 \end{matrix}
 =
 \begin{matrix}
 F_1^{(1)} \\
 F_2^{(1)} \\
 F_3^{(1)} - F_4^{(2)} \\
 F_2^{(2)} \\
 F_3^{(2)} \\
 F_4^{(1)} \\
 F_6^{(1)} + F_8^{(2)} \\
 F_9^{(2)} \\
 F_6^{(2)} \\
 F_7^{(1)} \\
 F_9^{(1)} \\
 F_8^{(1)} \\
 F_5^{(1)} \\
 F_7^{(2)} \\
 F_2^{(1)} + F_1^{(2)}
 \end{matrix}$$

Cette correspondance nous donne un chemin facile d'assemblage de la matrice de l'élément pour obtenir les coefficients de la matrice globale avec des entiers convenables aux matrices des éléments finis

La matrice obtenue est symétrique et bande ,ses propriétés nous conduit à stocker une partie de cette matrice dans un vecteur unicolonne.

**Conclusion**

Dans ce chapitre , on a développé les démarches de formulation de la méthode des éléments finis qui constitue une partie intégrante et essentielle de cette méthode, ce qui permet la compréhension des algorithmes la programmation inclus dans les chapitres qui suivent , il s'agit de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis , ou le passage de la formulation à la programmation.

## Chapitre IV

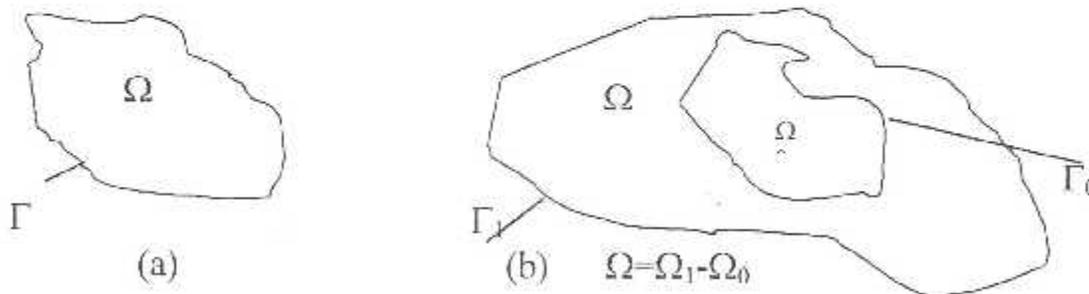
### Résolution numérique et mise en œuvre de la méthode des EF

#### IV.1 Introduction

La mise en œuvre de la méthode des éléments finis qui consiste à remplacer un problème continu par un problème discret, nécessite l'utilisation des méthodes numériques puissantes pour résoudre le système algébrique qui en résulte. Ce chapitre donne une description des procédures adoptées à la génération de maillage sur les domaines simplement et doublement connexes bidimensionnels.

#### IV.2 Concept des différents types des domaines

Le domaine est une collection de points dans une région de l'espace. La propriété implique que le domaine se constitue uniquement des points intérieurs de sa frontière. Si n'importe quels deux points du domaine puissent être reliés par une ligne continue à l'intérieur du domaine, alors le domaine est convexe et simplement connexe. On doit utiliser le symbole ( $\Omega$ ) pour dénoter un domaine arbitraire et ( $\Gamma$ ) pour dénoter sa frontière



- (a) domaine simplement connexe  
(b) domaine doublement connexe-

Pour les régions doublement connexe, il n'existe alors qu'un seul contour fermé irréductible. La génération de maillage est une partie importante de la modélisation des problèmes d'écoulement par la méthode des éléments finis. Pour générer un maillage, il existe plusieurs types selon la forme de la frontière du domaine choisi, et plusieurs méthodes selon le degré de complexité du même domaine, mais le maillage doit toujours vérifier les conditions suivantes :

- Une adaptation aux frontières, et aux conditions aux limites
- Une adaptation aux propriétés des différentes régions du domaine physique
- Une bonne régularité.
- L'orthogonalité.

### IV.3 Configuration simplement connexe

Pour faire la génération de maillage d'un domaine simplement connexe dont la forme générale est donnée par la fig(IV-2), il est très intéressant d'appliquer l'idée de génération de maillage dans les régions rectangulaires.

La figure ci dessous montre l'aspect de génération du maillage dans la première étape :

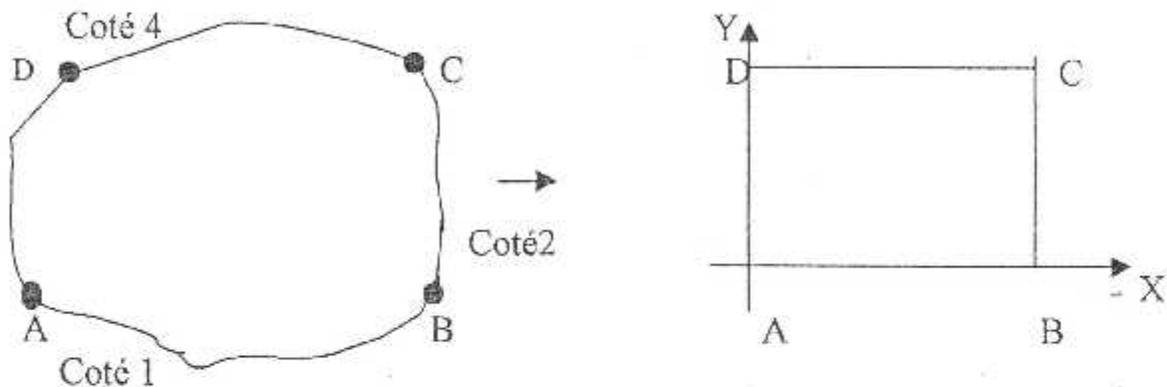


Figure (IV-2) : Transformation d'un domaine simplement connexe à un rectangle

On obtient par conséquent quatre cotés qui sont respectivement AD, AB, BC, et CD. Si on fait des transformations continues à chaque côté on peut les rendre des lignes droites comme le montre la figure adjacente. Alors le côté AB du domaine joue le rôle de la partie basse du rectangle. Le côté CD est celui de la partie haute du rectangle. Les côtés AD et BC sont ceux de la partie gauche et droite du rectangle.

Pour le rectangle, considérons la subdivision par  $N_x$  et  $N_y$  nœuds sur l'axe horizontale des  $x$  et verticale des  $y$  respectivement. Par analogie, les côtés AB et CD du domaine seront subdivisés en  $N_x$  nœuds et les côtés AD et BC seront subdivisés en  $N_y$  nœuds.

Pour cela, on procède à la génération suivant deux étapes principales, la première étape c'est la génération des nœuds de frontières de chaque côté, puis l'étape de génération des nœuds internes.

#### IV.3.1 Génération des nœuds sur le contour du domaine

Plusieurs procédures peuvent être considérées et cela suivant la disposition de la courbure de chaque côtés. Dans le cas général, il n'est pas facile de procéder à une méthode universelle qui sera applicable pour n'importe quelle courbe, mais on essaye d'adapter pour chaque forme complexe une procédure convenable, sans oublier de dire que le choix des points A, B, C et D influe sur la forme des quatre cotés du domaine. Parmi les critères de choix des positions des points A, B, C et D est que les fonctions sur les côtés AB, BC, CD et DA doivent être univoques en  $x$  ou  $y$ , c'est-à-dire, pour chaque valeur de  $x$  il  $y$  a une image sur les côtés AB et CD. En ce qui concerne les fonctions qui passent par les points AD et BC est qu'elles doivent être aussi univoques mais en  $y$ .

Dans ce qui suit ,on suppose que les fonctions des cotés choisis du domaine sont univoques. Considérons les cotés AB et CD. Les positions des points A, B,C et D sont données. On regarde ensuite est ce qu'on divise le segment  $(x_A, x_B)$  en  $N_x$  nœuds ensuite déterminer les  $y_i$  ( $i=1,2,\dots,N_x$ ) correspondantes ou, de diviser le segment  $(y_A, y_B)$  en  $N_y$  nœuds ensuite déterminer les  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,N_x$ ). Pour prendre décision, essaye de calculer les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} x_{dis} &= |x_B - x_A| \\ y_{dis} &= |y_B - y_A| \end{aligned} \tag{IV-1}$$

On calcule la valeur maximal entre  $x_{dis}$  et  $y_{dis}$  par :

$$d_{max} = \text{MAX}(x_{dis}, y_{dis}) \tag{IV-2}$$

Si  $d_{max} = x_{dis}$  on propose les valeurs des  $x_i$  ( $i=1,2,3,\dots,N_x$ ) ensuite on détermine les  $y_i$  en utilisant la fonction qui passe par les points A et B du côté AB.

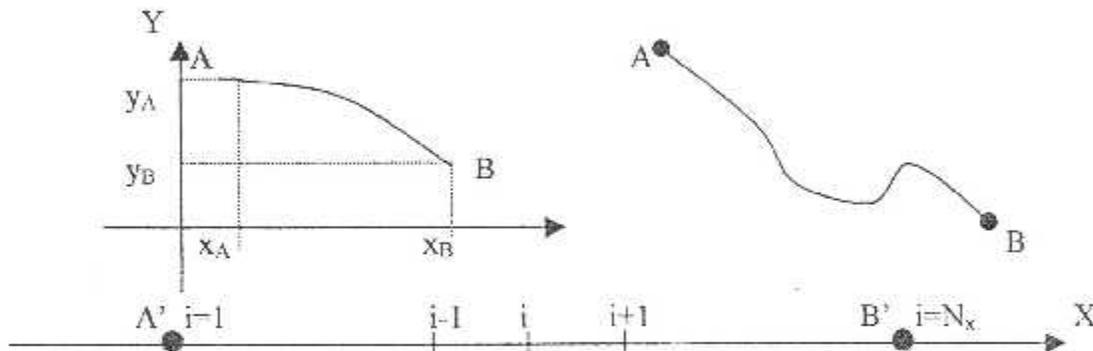


Figure (IV-3) : discrétisation sur le côté AB

Avec : A' et B' projections des points A et B respectivement sur l'axe horizontale des x.

Pour simplifier on choisit un pas constant de subdivision et si le côté est courbé au voisinage du point A ,ou B, ou à n'importe quelle région ,il est recommandé d'utiliser une procédure de condensation des nœuds, dont on propose sa procédure dans le prochain paragraphe. On obtient par conséquent  $(N_x-1)$  sous intervalles dont la longueur est donnée par :

$$\Delta x_{AB} = \frac{|x_B - x_A|}{(N_x - 1)} \tag{IV-3}$$

Les abscisses des points de ce côté sont données par :

$$x_{AB}(i) = x_A + (i-1) \Delta x_{AB} \quad i=1,2,3,\dots,N_x \tag{IV-4}$$

avec :

$$\begin{aligned} i=1 & ; & x_{AB}(i=1) &= x_A \\ i=N_x & ; & x_{AB}(i=N_x) &= x_B \end{aligned}$$

Les ordonnées des points sont données par :

$$y_{AB}(i) = f_{AB}(x_{AB}(i)) \quad i=1,2,3,\dots,N_x \tag{IV-5}$$

Où :  $f_{AB}(x)$  est la fonction du côté AB supposée donnée en coordonnées cartésiennes. Concernant maintenant le côté CD et par analogie avec le côté AB ,on aura le suivant en changeant A par D et B par C et  $f_{AB}(x)$  par  $f_{CD}(x)$ .

$$\Delta x_{CD} = \frac{x_C - x_D}{(N_x - 1)} \tag{IV-6}$$

$$x_{CD}(i) = x_D + (i-1) \Delta x_{CD} \quad i=1,2,3,\dots,N_x \tag{IV-7}$$

avec :

$$\begin{aligned} i=1 & \quad ; \quad x_{CD}(1) = x_C \\ i=N_x & \quad ; \quad x_{CD}(N_x) = x_D \end{aligned}$$

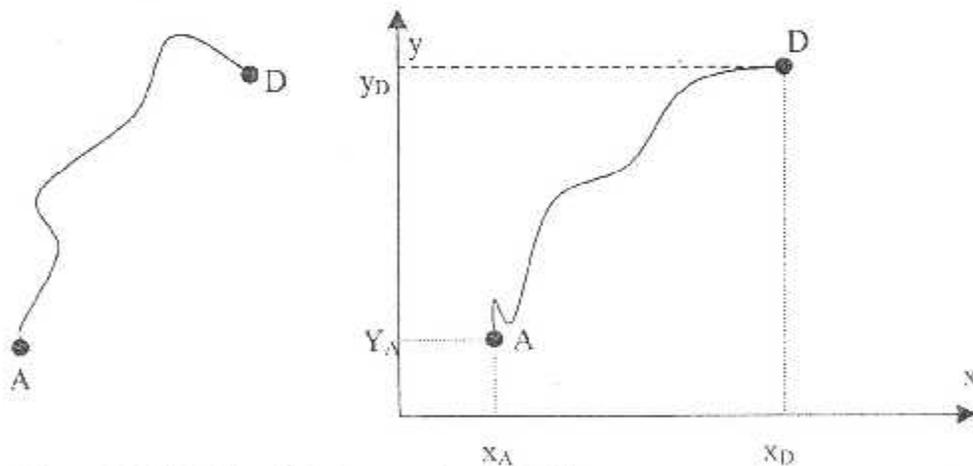
et

$$y_{CD}(i) = f_{CD}(x_{CD}(i)) \quad i=1,2,3,\dots,N_x \tag{IV-8}$$

La génération des nœuds sur les contours AD et BC se fait de la même démarche que celle des cotés AB et DC. Si  $x_A \neq x_D$  et  $x_B \neq x_C$  en plus les deux fonctions sont univoques on peut suivre exactement la démarche précédente pour les cotés AB et CD, on aura donc :

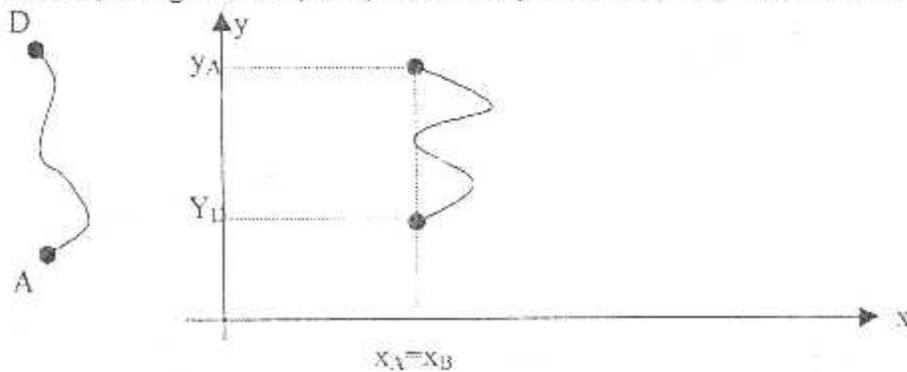
$$\Delta x_{AD} = \frac{|x_D - x_A|}{(N_y - 1)} \tag{IV-9}$$

$$\begin{aligned} x_{AD}(j) &= x_A + (j-1) \Delta x_{AD} \\ y_{AD}(j) &= f_{AD}(x_{AD}(j)) \quad j=1,2,3,\dots,N_y \end{aligned} \tag{IV-10}$$

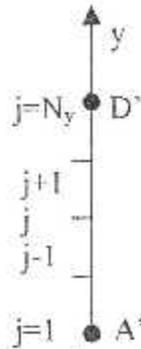


Figure(IV-4) : Discretisation sur le coté AD

Mais si  $x_A = x_D$ , l'algorithme (IV-9) ne marche plus et la configuration devient la suivante :



On divise le segment  $[y_A, y_D]$  en  $N_y$  nœuds dont les points A et D sont inclus, on aura :



Avec : A' et D' sont les projections des points A et D sur l'axe des ordonnées ,alors :

$$\Delta y_{AD} = \frac{|y_D - y_A|}{(N_y - 1)} \tag{IV-11}$$

Les coordonnées des points de ce coté sont données par :

$$\begin{aligned} y_{AD}(j) &= y_A + (j-1) \Delta y_{AD} \\ x_{AD}(j) &= f_{AD}^{-1}(y_{AD}(j)) \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N_y \tag{IV-12}$$

avec :

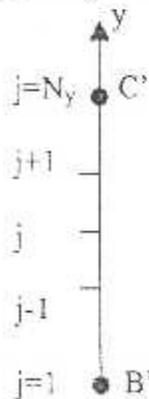
$$\begin{aligned} j=1 & ; & x_{AD}(1) &= x_A & ; & y_{AD}(1) &= y_A \\ j=N_y & ; & x_{AD}(N_y) &= x_D & ; & y_{AD}(N_y) &= y_D \end{aligned}$$

Où :  $f_{AD}^{-1}(Y)$  : la fonction inverse du coté AD.

Pour le coté BC on aura :

$$\begin{aligned} \Delta x_{BC} &= \frac{x_B - x_C}{(N_y - 1)} \\ x_{BC}(j) &= x_C + (j - 1) \Delta x_{BC} \\ y_{BC}(j) &= f_{BC}(x_{BC}(j)) \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \tag{IV-13}$$

On divise le segment  $y_B, y_C$  en  $N_y$  nœuds dont les nœuds B et C sont inclus. On obtient :



Avec : B' et C' les projections des points B et C sur l'axe des ordonnées ,alors :

$$\begin{aligned} \Delta y_{BC} &= \frac{y_C - y_B}{(N_y - 1)} \\ y_{BC}(j) &= y_B + (j - 1) \Delta y_{BC} \\ x_{BC}(j) &= f_{BC}^{-1}(y_{BC}(j)) \end{aligned} \quad j=1, 2, 3, \dots, N_y \tag{IV-14}$$

Où  $f_{bc}^{-1}(y)$  :représente la fonction inverse du coté BC.

Finalement après qu'on génère les nœuds sur la frontières, on obtient le schéma de la figure (IV-5) ,on a  $N_x=6$  ,  $N_y=5$

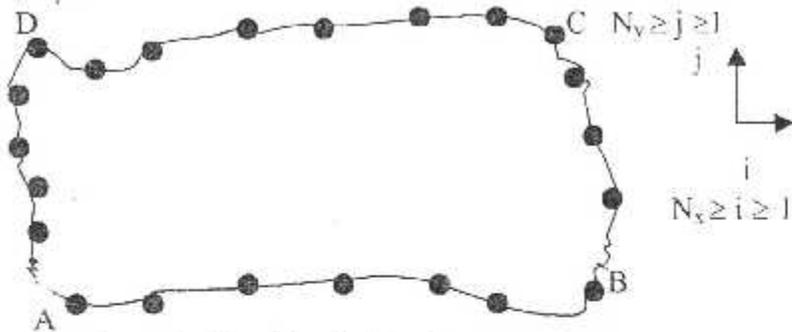


Figure (IV-7):Génération des nœuds sur la frontière du domaine .

### IV.3.2 Fonction de condensation unidimensionnelle

La fonction de condensation unidimensionnelle est généralement utilisée pour distribuer les points le long d'une frontière .Mathématiquement ,il est intéressant d'introduire une variable indépendante dans la fonction pour la normalisation .

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \tag{IV-15}$$

avec :  $0 \leq \eta^* \leq 1$  et  $\eta_A \leq \eta \leq \eta_E$   
 Où :  $\eta$  peut représenter x ou y.

On peut même donner la distribution sur l'intervalle [0,1] par  $\eta^*$  avec des sous intervalles égaux.

La fonction de condensation développée par Robert en 1971 ensuite modifiée par Eisemann en 1979 est donnée par :

$$s = P\eta^* + (1 - P) \left[ 1 - \frac{\tanh[Q(1 - \eta^*)]}{\tanh[Q]} \right] \tag{IV-16}$$

Où : P et Q sont deux paramètres de contrôle de points de maillage.

Si la valeur de P est proche de l'unité ,le deuxième membre de la formule se disparu. Une fois S est obtenu , il est demandé de spécifier la distribution de x et y .

Par exemple ,définissons :

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_E} = f(s) \quad ; \quad \frac{y - y_A}{y_A - y_E} = g(s) \quad (IV-17)$$

Ces formules génèrent  $f(s)$  et  $g(s)$  directement. Si on prend  $f(s)=g(s)=s$ , tels que les relations (IV-17) donnent :

$$\begin{aligned} x &= x_A + s(x_A - x_E) \\ y &= y_A + s(y_A - y_E) \end{aligned} \quad (IV-18)$$

Des distributions typiques sur le segment EA en utilisant la relation (IV-16) pour différentes valeurs  $P$  et  $Q$ , sont présentées sur la figure (IV-8)

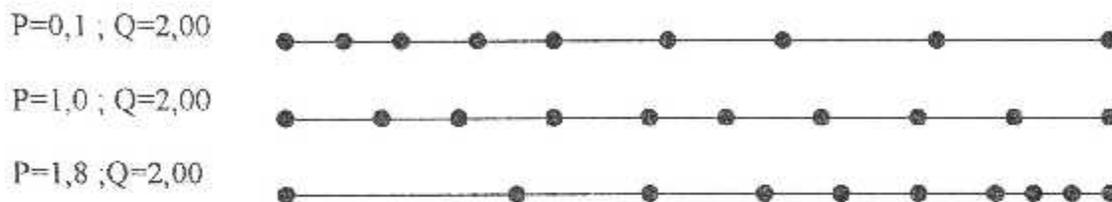


Figure (IV-6) : Distribution des nœuds par condensation selon la relation (IV-16)

Pour des valeurs de  $P > 1.0$ , il est possible de condenser les nœuds vers le point A. De même, pour condenser les nœuds vers le point E, il suffit de prendre des valeurs de  $P$  proche de zéro.

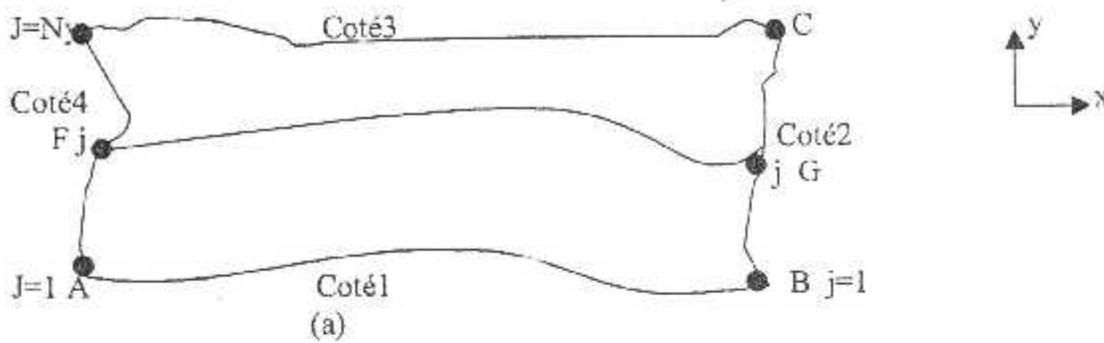
On peut remarquer que si on choisi la fonction  $f(s)=1-s$ , on trouve la configuration inverse, c'est à dire, pour des valeurs de  $P > 1.0$  les points se condensent vers l'extrémité E au lieu de l'extrémité A.

### IV.3.3 Génération des nœuds internes pour maillage de type 'II'

Après qu'on a déterminé les positions des nœuds de la frontière du domaine, on procède maintenant à la présentation de la méthode développée pour la génération des nœuds internes.

Le maillage obtenu pour cette partie est de type II, on obtient des petites cellules ou domaines de forme quadrilatère. Chaque nœuds est caractérisé par deux valeurs  $(x,y)$  qui permettent de déterminer la position exacte de ce point. La procédure qu'on présente est divisée en deux partie. Elle consiste en premier lieu, à déterminer les abscisses  $x_i$  de tous les points et cela par une interpolation entre les cotés gauche et droite. Une fois les abscisses sont obtenues, on procède immédiatement à la détermination des ordonnées  $y_i$  de ces nœuds par une interpolation entre les cotés bas et haut du domaine.

En effet, comme le nombre de nœuds sur les cotés gauche et droite égales à  $N_c$ , lors à chaque nœud d'un côté sera relié avec un nœud de l'autre côté par une courbe qui contient  $N_c$  nœuds dont les extrémités sont incluses, voir figure (IV-7).



Pour déterminer les abscisses des nœuds sur la courbe FG on s'intéresse uniquement aux abscisses des nœuds des extrémités gauche et droite qui sont connues. La projection de la courbe reliant les points F et G sur l'axe horizontal donne un segment de droite comme illustre la figure suivante :

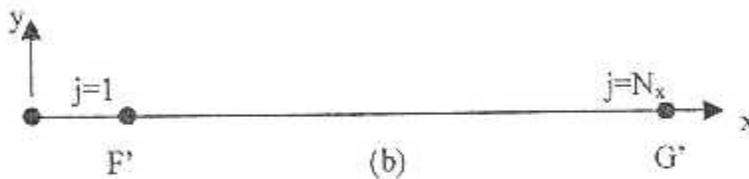


Figure (IV-7 a,b) : Illustration de la procédure de détermination des abscisses .

Où : F' et G' sont les projections respectivement des points F et G.

On divise le segment F'G' en  $N_x$  points dont ceux des extrémités sont inclus. On obtient par conséquent  $(N_x - 1)$  intervalles égaux. L'abscisse de chaque point sur cet intervalle et par suite sur la courbe FG est obtenue par :

$$x_i = x_F + (i-1) \Delta x \quad i=1,2,3,\dots,N_x \tag{IV-19}$$

Avec 
$$\Delta x = \frac{x_G - x_F}{(N_x - 1)}$$

En faisant varier le point F sur le coté gauche ,on passe du point A jusqu'au point D et de même le point G du coté droite ,on passe du point B jusqu'au point C on obtient les abscisses des nœuds des autres courbes et cela en faisant l'extension de la relation (IV-19) par :

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(j) &= \frac{x_{\text{coté2}}(j) - x_{\text{coté4}}(j)}{(N_x - 1)} \\ x(i, j) &= x_{\text{coté4}}(j) + (i - 1)\Delta x(j) \quad i = 1,2,3,\dots, N_x \end{aligned} \right\} j = 1,2,\dots, N_y \tag{IV-20}$$

La deuxième étape consiste à déterminer les ordonnées des nœuds internes en utilisant par conséquent l'interpolation linéaire entre le coté 3 du haut et le coté 1 du bas. (voir figure (IV-6b) ).

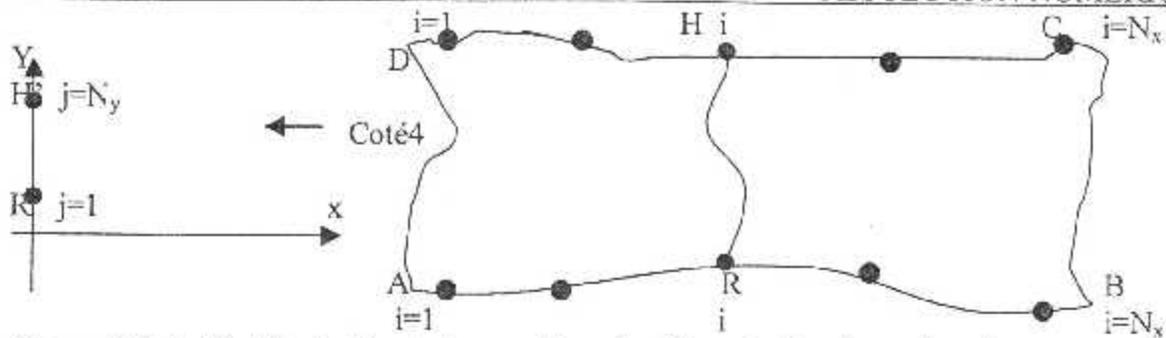


Figure (IV-8a,b) : Illustration de la procédure de détermination des ordonnées.

La projection de la courbe reliant les points H et R sur l'axe vertical des y donne un segment de droite .

Avec :H' et R' sont les projections des points R et H sur l'axe des ordonnées.

Comme chaque courbe contient N<sub>y</sub> nœuds ,alors chaque segment contient N<sub>y</sub> nœuds.En divisant ce dernier en (N<sub>y</sub> -1) intervalles égaux, l'ordonnée de chaque nœud est donnée par :

$$y_j = y_R + (j - 1)\Delta y \quad j = 1,2,3,\dots, N_y$$

$$\text{Avec : } \Delta y = \frac{y_H - y_R}{(N_y - 1)} \quad \text{(IV-21)}$$

En faisant varier maintenant le point R sur le coté 1 du bas et le point H sur le coté 3 du haut , on obtient une autre courbe dont les ordonnées de ces nœuds sont données par le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y(i) &= \frac{y_{\text{coté3}}(i) - y_{\text{coté1}}(i)}{(N_y - 1)} \\ y(L) &= y_{\text{coté1}}(i) + (j - 1)\Delta y(i) \quad j = 1,2,3,\dots, N_y \end{aligned} \right\} i = 1,2,3,\dots, N_x \quad \text{(IV-22)}$$

Finalement , les relations (IV-20) et (IV-22)déterminent rapidement les positions des nœuds internes du maillage. Une fois , on s'intéresse à un raffinement du maillage dans une région qui contient un fort gradient, on peut utiliser la procédure de condensation des nœuds, ou bien utiliser l'option de filtrage.

### IV . 3.4 Connexion des éléments du maillage type H

Après avoir fait la discrétisation type H du domaine en petits éléments quadrilatères, pour avoir les éléments triangulaires on divise chaque élément en deux sous élément triangulaires.

Chaque éléments a sa propre matrice de rigidité[ K ]et son vecteur force {f<sup>(e)}</sup>}.Le problème consiste à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires pour obtenir celle du domaine complet, pour arriver à faire l'assemblage de ces matrices élémentaires il faut connaître les numéros globaux des nœuds locaux de chaque élément pour cela on déclare une matrice de connexion d'ordre (NEL , NNPE)si l<sup>ers</sup> éléments obtenues sont triangulaires ou quadrilatères, on désigne cette matrice par NNE.

Dans la suite ,on donne un exemple de numérotation d'un maillage rectangulaire de dimension N<sub>x</sub>×N<sub>y</sub>=4 × 5 .

	1	2	3
1	1	6	5
2	1	2	6
3	2	7	6
4	2	3	7

Tableau (IV-1) Remplissage de la matrice NNE(NEL,3).

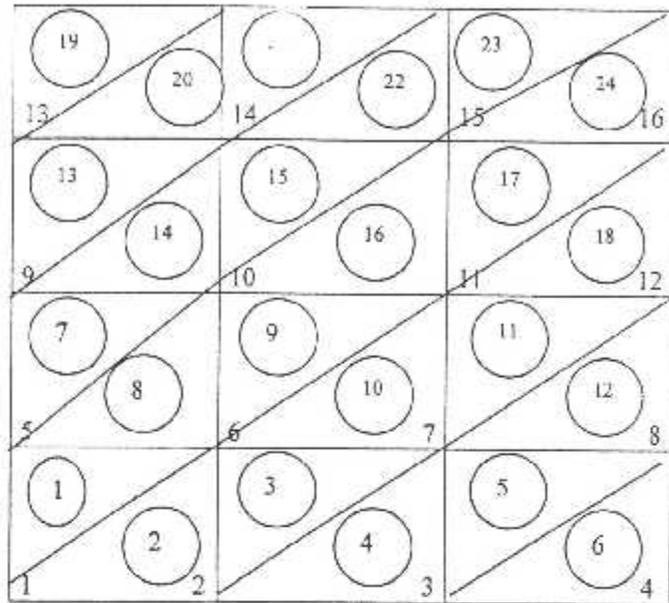


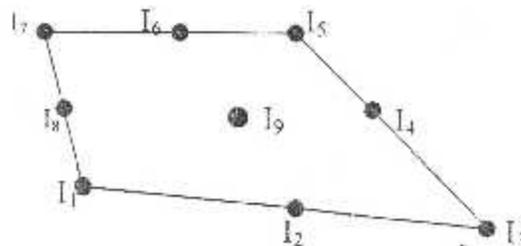
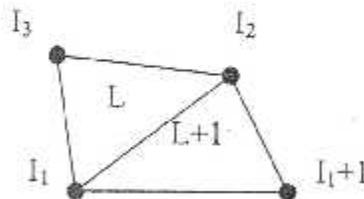
Figure (IV-9) : Discretisation en éléments triangulaires Et numérotation des nœuds et des éléments.

Les trois valeurs de chaque ligne du vecteur NNE (NEL,3), représentent les numéros des lignes et des colonnes de la matrice de rigidité globale du domaine complet avant l'introduction des conditions aux limites .

Par la suite on donne le programme permettant le remplissage du vecteur NNE(NEL,NNPE).

```

L=1
N1=nnx-1
N2=nnx+1
Goto (5,15)NTEF
.....NTEF.....=(T3N)
5 Do 10 j=1,NNY-1
  I1=(J-1)*N1+J
  I2=I1+N2
  I3=I2-1
  NNE(L,1)=I1   NNE(L,2)=I2   NNE(L,3)=I3
  NNE(L+1,1)=I1 NNE(L,2)=I1+1 NNE(L,3)=I2
  .....NTEF=2.....Q9N.....
15 N3=(4*NNX-1)
  N4=3*N2+1
  DO 20 J=1,NNY-1
  I1=(J-1)*(4*NNX-2)+1 ;I2=I1+1
  DO 20 I=1,N1
  I3=I1+2 ,I4=I2+(2*NNX)
  I5=I1+N4 ,I6=I5+1
  I7=I6+1 ,I8=I2+(N2+2)
  
```



```

I9=I1+(2*NNX)
NNE(L,1)=I1 ,NNE(L,5)=I2
NNE(L,2)=I3 ,NNE(L,6)=I4
NNE(L,3)=I5 ,NNE(L,7)=I6
NNE(L,4)=I7 ,NNE(L,8)=I8
NNE(L,9)=I9
L=L+1
I1=I1+2
I2=I1+1
20 Continue

```

### IV.3.5 Génération des nœuds pour un maillage type C

L'intérêt de faire appel à des méthodes de génération automatique est indispensable, puisque le domaine de notre étude est simplement et doublement connexe. Pour cela nous avons adapté la méthode suivante pour la génération du maillage type C de quelque domaines simplement connexe.

Nous allons illustrer la procédure sur une demi partie de la géométrie d'un demi cercle pour raison de symétrie, on donne le rayon  $R$  et les nombres des subdivisions ( $N_x, N_y$ )

Prenant l'exemple suivant pour  $N_x=N_y=3$  Fig (IV-2a)

On détermine ensuite  $dV$  et  $dS$

$$\left. \begin{aligned} dV &= \frac{R}{N_x} \\ d\zeta &= \text{teta}(2 * N_y - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-23})$$

Puis on procède à la détermination des valeurs des angles ( $i$ ) situés entre les nœuds

$$\text{Gama}(i) = (i-1)ds \quad i=1,2,3,\dots,2N_y$$

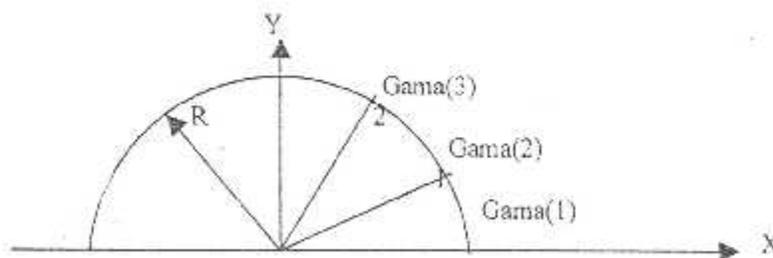


Figure (IV-10) : discrétisation d'un maillage type C.

Puis ,on divise le rayon de façon à obtenir à chaque fois un demi cercle du point de centre de l'intersection des axes des coordonnées ,nous obtenons ainsi la discrétisation de notre géométrie.

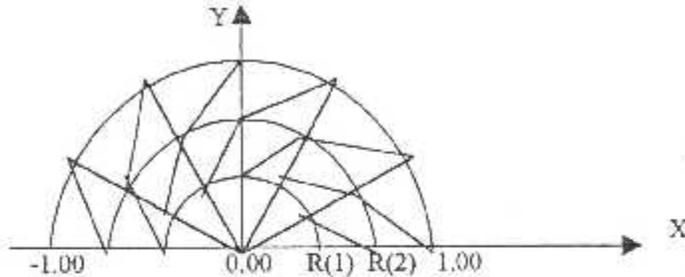


Figure (IV-11) :Illustration d'un maillage de type C.

Finalement ,pour obtenir des éléments triangulaires on découpe chaque cellule rectangulaire en deux éléments.

### IV.3.6 Connexion des éléments du maillage type C

L'assemblage des matrices de rigidité dans ce cas est similaire au cas du maillage type 'H' Dans ce cas considérons le cas d'un domaine secteur ,fig (IV-12) ,tel que on subdivise la région en deux partie A et B, dont la partie A constitue tous les éléments lies au noeud 1 tandis que la partie B englobe les éléments restant du maillage formant ainsi une partie similaire au maillage H

Dans la suite on donne quelques parties de subroutine connect qui permet de charger la matrice NNE pour le cas d'un quadrilatère à 9 nœuds.

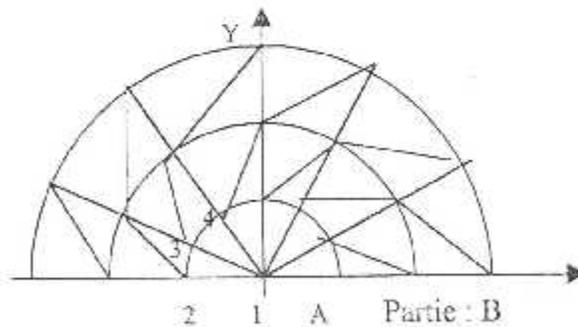


Figure (IV-13) :Maillage typique C dans un secteur

```

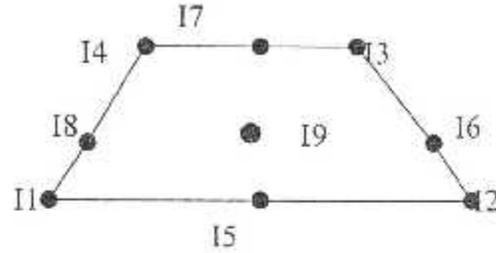
Pour le cas d'un quadrilatère à 9 nœuds :
.....NTEF=3.....(Q9N).....
.....Partie A.....
130      N1=NNY-2
          DO 135 L=1,NNY-1
          I1=2L
    
```

```

I2=4*L+N1
NNE(L,1)=1      NNE(L,2)=I2+4      NNE(L,3)=I2+2
NNE(L,4)=I2     NNE(L,5)=I1+2     NNE(L,6)=I2+3
NNE(L,7)=I2+1  NNE(L,8)=I1
NNE(L,9)=I1+1
    
```

```

.....Partie B.....
L=nny
N1=4*Nx-2      N2=2*NNY+1  N3=2*NX
DO 137  j=1,NY-1
      I1=(j-1)*N1+N2
DO 137  i=1,NX-1
      I3=I1+N1      I2=I1+N3-1
NNE(L,1)=I1      NNE(L,2)=I1+2
NNE(L,3)=I3+2   NNE(L,4)=I3
NNE(L,5)=I1+1   NNE(L,6)=I2+2
NNE(L,7)=I3+1   NNE(L,8)=I2
NNE(L,9)=I2+1
137      I1=I1+2
GOTO 700
    
```



**Remarques :**

Le travail a été limité pour des matrices [K] symétriques et bandes .Ces deux propriétés nous conduisent à stocker la partie supérieure (ou inférieure ) de la matrice en éliminant les zéros qui se trouvent à l'extérieur de la bande ,dans un vecteur unicolonne ,qui donne l'équivalence des cases pour la matrice [K] dans le vecteur {V<sub>k</sub>} qui représente la matrice de rigidité fictive.

La méthode de calcul est simple et consiste à donner à chaque fois qu'on tombe dans une case d'une matrice K(i,j) ,sa position dans le vecteur {V<sub>k</sub>} à partir d'une certaine formule qui varie avec la façon de stockage.

**IV.4 Méthode de stockage sous forme de vecteurs**

Considérons une matrice [K] d'ordre (N×N) symétrique et bande avec la largeur de la demi bande est B.Le problème est de savoir stocker les cases de cette matrice dans un vecteur {V<sub>k</sub>}.Il est parfois plus difficile de faire une équivalence entre une case de la matrice [K] et la case de vecteur {V<sub>k</sub>},ce qui a suppose plusieurs formes de stockages sous la forme d'un vecteur .Ces formes de stockage sont différentes suivant la manière de stockage et la formule de récurrence .On va proposer une forme de stockage en prenant une matrice [K] d'ordre (7×7) symétrique et sa bande B est égale à 4.

**IV.4.1 Stockage en colonne**

La méthode de stockage choisie est représentée par la direction des flèches ,c-à-d colonne par colonne, comme le montre la figure (IV-14).

[K] est de la forme suivante :

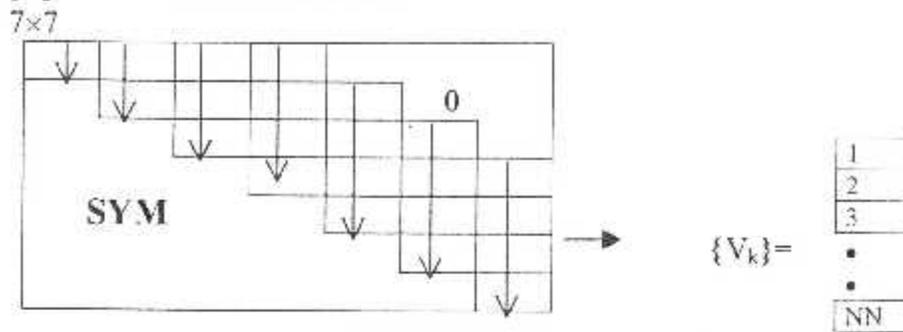


Figure (IV-14) : Stockage en colonne

$$\begin{array}{lllll}
 V_k(1)=K(1,1) & V_k(2)=K(1,2) & V_k(3)=K(2,2) & V_k(4)=K(1,3) & V_k(5)=K(2,3) \\
 V_k(6)=K(3,3) & V_k(7)=K(1,4) & V_k(8)=K(2,4) & V_k(9)=K(3,4) & V_k(10)=K(4,4) \\
 V_k(11)=K(2,5) & V_k(12)=K(3,5) & V_k(13)=K(4,5) & V_k(14)=K(5,5) & V_k(15)=K(3,6) \\
 V_k(16)=K(4,6) & V_k(17)=K(5,6) & V_k(18)=K(6,6) & V_k(19)=K(4,7) & V_k(20)=K(5,7) \\
 V_k(21)=K(6,7) & V_k(22)=K(7,7) & & & 
 \end{array}$$

On peut remarquer pour cet exemple, que la dimension nécessaire du vecteur {V<sub>k</sub>} est de 22, c'est-à-dire NN=22.

Maintenant si on veut généraliser à une matrice [K] d'ordre (N×N) symétrique avec largeur de la demi bande égale à B, la dimension du vecteur {V<sub>k</sub>} doit être égale à :

$$\begin{aligned}
 NN &= 1+2+3+\dots+B+(N-B).B \\
 &= \sum_{i=1}^{i=B} i + B(N - B)
 \end{aligned}$$

comme  $\sum_{i=1}^{i=B} i = \frac{B(B + 1)}{2}$  : suite arithmétique de raison unité alors :

$$NN = \frac{B(B + 1)}{2} + (N - B).B.$$

donc : 
$$NN = \frac{B(2N - B + 1)}{2} \tag{IV-24}$$

On peut vérifier la validité de cette formule pour l'exemple précédent

$$\begin{cases} N = 7 \\ B = 4 \end{cases} \Rightarrow NN = \frac{4(2.7 - 4 + 1)}{2} = 22$$

On procède maintenant à la détermination de la formule de stockage des éléments de la matrice [K] (les éléments de la bande supérieure uniquement) dans le vecteur {V<sub>k</sub>}, c'est-à-dire l'équivalence d'une case de la matrice [K] dans le vecteur {V<sub>k</sub>}.

Pour trouver la formule de récurrence, on divise la matrice [K] en deux blocs.

- Pour une case  $K(i,j)$ , telle que  $j \leq B$ , son équivalence (position) dans le vecteur  $\{V_k\}$  est  $V_k(L)$  avec :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + (j - 1) + i = \frac{(j - 1)j}{2} + i$$

$$\text{alors : } L = \frac{(j - 1)j}{2} + i \quad \text{Si } j < B \quad (\text{IV-25})$$

- Pour une case  $K(i,j)$ , telle que  $j > B$ , son équivalence (position) dans le vecteur  $\{V_k\}$  est  $V_k(L)$  est donnée par :

$$L = 1 + 2 + 3 + \dots + B + (j - B - 1)B + i - (j - B) = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2}$$

$$\text{alors : } L = i - j + \frac{B(1 - B + 2j)}{2} \quad \text{Si } j > B \quad (\text{IV-26})$$

#### Remarque :

- Pour la formule (IV-25) : le compteur « i » varie de  $1 \leq i \leq j$ .
- Pour la formule (IV-26) : le compteur « i » varie de  $j - (B - 1) \leq i \leq j$ .
- La fonction  $L(i,j)$  est continue au point  $j=B$ , c'est-à-dire, pour  $j=B$  on peut appliquer n'importe quelle formules (IV-25) ou (IV-26).

### IV.5 Algorithme de résolution directe du système d'équations

On est amené à résoudre le problème après avoir rempli la matrice de rigidité [K] globale et le vecteur {F} globale afin de déterminer le vecteur {W} de la solution à un système d'équation suivant :

$$[K] \{W\} = \{F\} \quad (\text{IV-28})$$

On a choisi la méthode de Khaletski comme méthode de résolution de ce système d'équation.

#### IV.5.1 Méthode de Khaletski :

Supposons dans la première étape que la matrice [K] est carrée mais pleine et quelconque. Après avoir présenté l'algorithme de résolution, on essaye de faire l'extension vers une matrice pleine mais symétrique, et dans la dernière étape on déduit l'algorithme de résolution pour une matrice symétrique et bande.

➤ [K] matrice carrée pleine quelconque :

Mettons la matrice [K] sous forme d'un produit de deux matrices triangulaires inférieure [L] = [L<sub>ij</sub>] et supérieure [H] = [H<sub>ij</sub>] à diagonale unité :

$$[K] = [L] [H] \tag{IV-29}$$

Où :

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & & & & \\ L_{21} & L_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ L_{n1} & & & & L_{nn} \end{bmatrix}, [H] = \begin{bmatrix} 1 & H_{12} & \dots & \dots & H_{1n} \\ & 1 & & & H_{2n} \\ & & 1 & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments L<sub>ij</sub> et H<sub>ij</sub> se calculent d'après les formules suivantes :

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= K_{11}, \quad H_{1j} = \frac{K_{1j}}{L_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, N \\ L_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} L_{im} H_{mj} \quad j = 1, 2, \dots, i \\ H_{ij} &= \frac{1}{L_{ii}} \left( K_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im} H_{mj} \right) \quad j = i+1, i+2, i+3, \dots, N \end{aligned} \right\} i = 2, 3, \dots, N \tag{IV-30}$$

Par la suite, on aura deux systèmes d'équation à matrice triangulaire :

$$[K] \{W\} = \{F\} \quad [L] [H] \{W\} = \{F\}$$

On pose :  $[H] \{W\} = \{Y\} \tag{IV-31}$

Alors :  $[L] \{Y\} = \{F\} \tag{IV-32}$

La résolution des systèmes (IV-31) et (IV-32) se fait par les procédures suivantes :

$$\begin{cases} Y_i = \frac{1}{L_{ii}} (F_i - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im} Y_m) & i = 2, 3, \dots, N \\ Y_1 = \frac{F_1}{L_{11}} \end{cases} \tag{IV-33}$$

et  $\begin{cases} W_i = Y_i - \sum_{m=i+1}^{m=N} H_{im} W_m & i = N-1, N-2, \dots, 3, 2, 1 \\ W_N = Y_N \end{cases} \tag{IV-34}$



$$\text{et } \begin{cases} W_i = Y_i - \frac{1}{L_H} \sum_{r=i+1}^{r=N} L_n W_r & i = N-1, N-2, \dots, N-B+1. \\ W_i = Y_i - \frac{1}{L_H} \sum_{r=i+1}^{r=N-B+1} L_n W_r & i = N-B, N-B-1, \dots, 3, 2, 1. \\ W_N = y_N \end{cases} \quad (\text{IV-37})$$

Pour avoir exactement la forme interne de la matrice [K] considérons l'exemple ci dessous avec N=6 ,B=4.

$K_{11}$					
$K_{21}$	$K_{22}$			SYM	
$K_{31}$	$K_{32}$	$K_{33}$			
$K_{41}$	$K_{42}$	$K_{43}$	$K_{44}$		
0	$K_{52}$	$K_{53}$	$K_{54}$	$K_{55}$	
0	0	$K_{63}$	$K_{64}$	$K_{65}$	$K_{66}$

Figure (IV-15) :Exemple d'une matrice symétrique.

**IV.5.2 Calcul des paramètres de l'écoulement :**

Après la détermination de la solution du vecteur {W} qui est la distribution de la vitesse dans chaque nœud du maillage , puisque notre étude à l'intérêt de simuler numériquement par éléments finis l'écoulement à travers des conduites notre intérêt s'oriente vers le calcul des différents paramètres de cet écoulement dans la maille d'élément finis tels que ,le coefficient de perte de charge, vitesse maximale, débit du fluide traversant la conduite et vitesse moyenne....etc en utilisant les formules vues au chapitre traitement mathématique.

Le calcul de la valeur moyenne d'une certaine variable continue, et en particulier, vitesse moyenne de l'écoulement traversant une conduite a besoin de la valeur de l'aire de la surface de la conduite. Donc notre intérêt s'oriente encore vers le calcul de l'aire de section des conduites.

Les positions des nœuds de maillage doivent être par rapport a un repère passant par le centre de gravité de la section, ce qui veut dire, l'intérêt de calcul de la position du centre de gravité de cette section.

- Le débit est donnée par :

$$Q = \iint_A W(x, y) dx dy \quad (\text{IV-38})$$

- La vitesse moyenne d'un fluide à travers une section droite est donnée par :

$$W_{moy} = \frac{1}{A} \int_A W(x, y) dx dy \quad (IV-39)$$

Par conséquent, l'intégrale suivante à un grand intérêt. Pour cela, on va déterminer mathématiquement l'approximation de résultats de cette intégrale en utilisant le principe de la discrétisation et les fonctions d'interpolations. Soit :

$$H = \iint_A W(x, y) dx dy \quad (IV-40)$$

On peut considérer l'intégrale comme la somme des intégrales dans les petits éléments finis du maillage, on aura donc :

$$H = \sum_{i=1}^{I=NE} \left[ \int_{A_i} W(x, y) dx dy \right] \quad (IV-41)$$

La fonction  $W(x,y)$  dans l'élément fini est donné par la formule suivante :

$$W(x, y) = \sum_{j=1}^{j=NNPE} W_j \Psi_j(x, y) \quad (IV-42)$$

avec : NNPE : Nombre de nœuds par élément.

Substituons l'équation (IV-42) dans la relation (IV-41) on obtient :

$$H = \sum_{i=1}^{I=NE} \left[ \int_{A_i} \sum_{j=1}^{j=NNPE} W_j \Psi_j(x, y) dx dy \right] \quad (IV-43)$$

Sous une autre forme on a :

$$H = \sum_{i=1}^{I=NE} \sum_{j=1}^{j=NNPE} W_j \left[ \int_{A_i} \Psi_j(x, y) dx dy \right] \quad (IV-44)$$

Donc, la vitesse moyenne est donnée par :

$$W_{moy} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{I=NE} \sum_{j=1}^{j=NNPE} W_j \left[ \int_{A_i} \Psi_j(x, y) dx dy \right] \quad (IV-45)$$

Et le débit volumique traversant la section de la conduite est obtenu par l'expression générale suivante :

$$Q_v = W_{moy} A_{totale} \quad (IV-46)$$

Comme le régime d'écoulement est considéré laminaire, le nombre de Reynolds est défini dans un intervalle, il doit être calculer en fonction du diamètre hydraulique et de la vitesse moyenne de l'écoulement par la formule suivante :

$$Re = \frac{\rho W_{moy} D_H}{\mu} \quad (IV-47)$$

$\rho$  et  $\mu$  sont des données du fluide considéré.

- Les pertes de charge sont données par :

$$\Delta H = K \frac{L}{D_H} \frac{W_{\text{moy}}^2}{2g} \quad (\text{IV-48})$$

Où la gravité  $g$  et la longueur de la conduite sont connus comme des données d'entrée.

Le calcul du coefficient de perte de charge par frottement  $K$  se trouve compliqué, vu que la formule générale de celui-ci varie pour les différentes géométries et régimes ainsi que pour des différents paramètres variants avec celles-ci comme  $\mu$ ,  $\rho$ ,  $w$ , et l'état de surface de la conduite  $\lambda$ .

Nous avons adapté la formule suivante pour le calcul du coefficient de perte de charge : [1]

$$K = 4 C_f \quad (\text{IV-49})$$

Où  $C_f$ , le coefficient de frottement local est donné par la formule suivante :

$$C_f = \frac{\overline{\tau}_p}{\frac{1}{2} \rho W_{\text{moy}}^2} \quad (\text{IV-50})$$

Où  $\tau_p$  est la contrainte de cisaillement sur la paroi calculée comme suit :

$$\overline{\tau}_p = \frac{A_{\text{totale}}}{P_m} \left( - \frac{dP_z}{dz} \right) \quad (\text{IV-51})$$

avec  $-dP_g / dz = \Delta P_g / l = a$ .

Où  $\Delta P_g$  est la différence de pression entre deux sections considérée comme donnée d'entrée.

- Puisque la solution du problème représente la distribution de la vitesse de l'écoulement, il est utile de déterminer la position ainsi que la valeur maximale de cette vitesse afin de déterminer la vitesse débitante.

Donc nous sommes en présence d'un vecteur qui contient un nombre important de valeurs et le problème consiste à déterminer la valeur maximale et la position dans le domaine physique.

On propose l'algorithme suivant pour déterminer la valeur maximale entre les éléments d'un vecteur et déduire la position dans le domaine physique.

```

WMAX = 0.0
POUR I=1 JUSQU'A NN
  FAIRE
    SI | W(I) | ≥ WMAX ALORS
      WMAX = W(I)
      IPOS (I) = I
    FIN SI
  FIN FAIRE
XWMAX = X ( IPOS )
YWMAX = Y ( IPOS )
Ecrire XWMAX, YWMAX, WMAX

```

Avec :

**NN** : Nombre de nœuds dans le maillage .

**WMAX** : La valeur maximale en valeur absolue de la solution { W }.

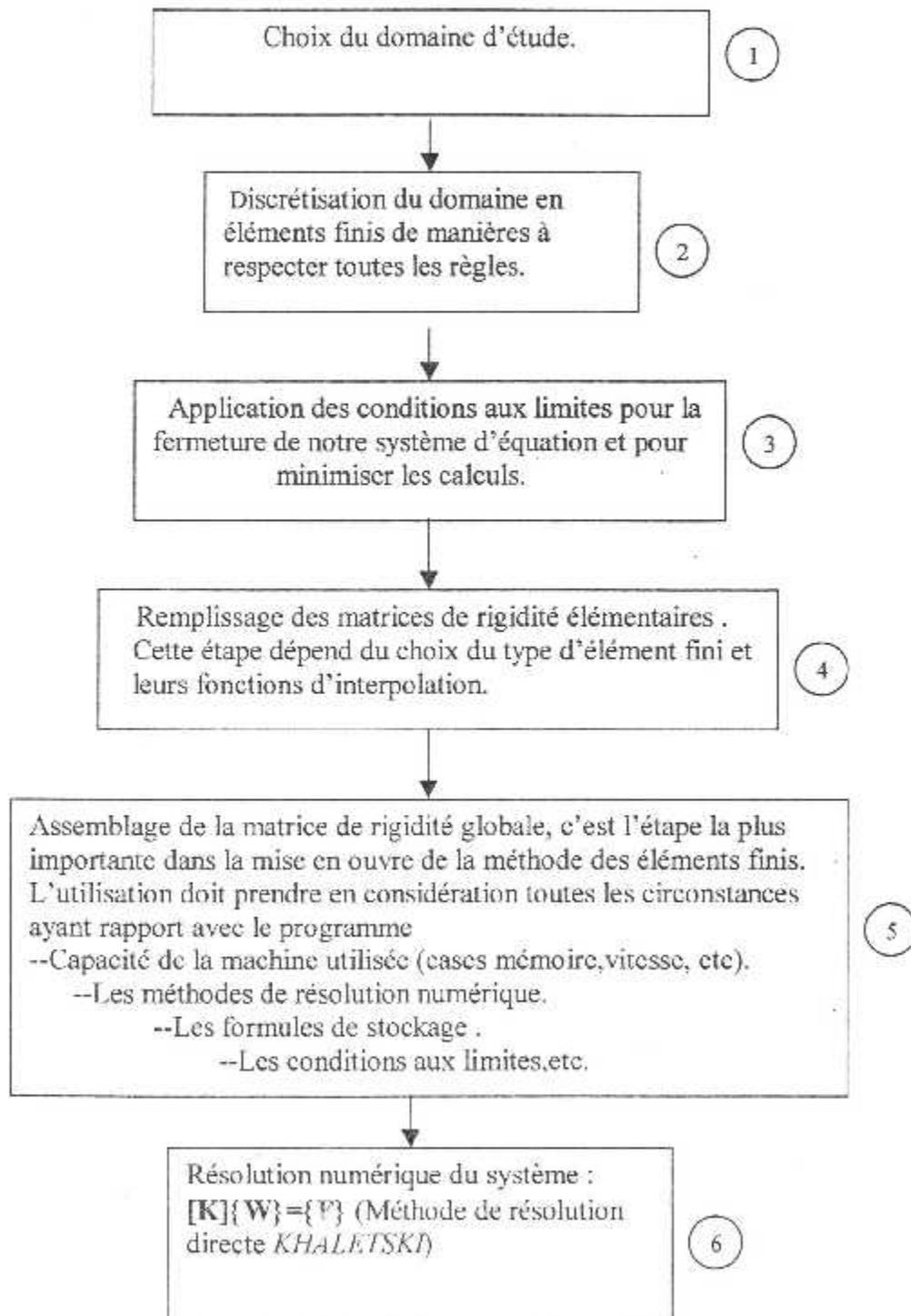
**XWMAX, YWMAX** : La position du point possédant la valeur maximale de la solution.

**Remarque :**

Il est possible de voir plusieurs points dans le maillage possédant la même valeur maximale WMAX de la solution { W }.

### IV.6 Procédure de calcul

On donne la récapitulation des étapes de la méthode des éléments finis comme suit :



Dans cette partie ,on donne une description grossière du programme .

Après la déclaration des différentes variables et constantes à utiliser dans le programme (partie déclaration) ,l'appelle au sous-programme **INPUT** , permet de choisir la géométrie du domaine d'étude et le type d'élément fini utilisé pour la discrétisation de ce domaine à partir des menus d'input .

L'introduction des paramètres caractérisant l'écoulement étudié, tel que :La viscosité  $\mu$  ,la masse volumique  $\rho$  , la différence de pression  $\Delta P_g$  ,....etc nous permet de calculer le deuxième membre **F** de l'équation de *Poisson*.

..Les subdivisions  $N_x$  et  $N_y$  sont entrées aussi à la fin de cette subroutine.

Puis l'appelle aux sous-programme des différentes géométries selon la valeur de la variable **NF**, permet de générer e maillage et de discrétiser ces domaines afin d'obtenir les coordonnées géométriques nodales .Les caractéristiques de la discrétisation **NNT**, **NEL**, **NNPE** ....seront calculées par la suite.

La subroutine **CONNECT** permet de faire la connexion entre les éléments finis en fonction de leurs numérotation et leur type de maillage et le type d'élément fini afin de remplir la matrice connexion.

Le réarrangement des nœuds du domaine dans un ordre d'affichage convenable permet le traçage et la présentation graphique des maillages , cela est grâce à la subroutine **MESH**.

Les conditions aux limites qui ferment notre système d'équations , permet de minimiser les calculs donc , on appelle le sous- programme **CONDLIMIT** ,réduisant ainsi la taille de la matrice globale et les vecteurs correspondants et de remplir le vecteur indiquant les nœuds de la frontière **ICL**.

La méthode de résolution choisie est celle de *KHILETSKI* dont son algorithme est adapté au stockage bande type colonne, l'appel à la subroutine est fait pour le calcul des paramètres nécessaire .

Arrivant à ce stade, nous passons à une étape importante dans le programme, c'est le remplissage des matrices et des vecteurs élémentaires , ainsi que leur assemblage dans la matrice globale et du vecteur globale .Pour cela, nous appelons les subroutines :**ELMTRIANG** ou **ELMQUADRI** selon le type d'élément fini choisi.

En premier lieu le remplissage des matrices élémentaires est fait par les formules des fonctions d'interpolation selon le nombre de nœuds par élément ,on utilise les subroutines :**REMPCOFFH** pour le calcul des coefficients de la matrice **[H]** puis le calcul de son inverse **[L]** par **INVMAT**, ainsi que le calcul de  $I_{mn}$  et les surfaces élémentaires afin d'avoir les coefficients finaux, en utilisant autant de fois les sous-programme **CALCAFF**, **SOMAK**, et **INTGRAL**.....

Puis l'appelle du subroutine **ASSEMBAND** permet de remplir les vecteurs (qui jouent le rôle de la matrice globale ) servant à la résolution du système d'équation du problème suivant le stockage bande.

Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur force sont obtenus, nous passons à une phase très importante c'est la résolution du système  $[K] \{W\} = \{F\}$  .La méthode utilisée pour la résolution est la méthode directe de *KHILETSKI* par la subroutine **RSOLKALT**.

Nous obtenons donc les vitesses dans tous les points du maillage considéré. Les autres paramètres tel que les vitesses maximale et moyenne  $W_{max}$  et  $W_{moy}$ , la surface totale  $A_{totale}$ , le débit volumique  $Q_v$ , le nombre de *Reynolds*  $Re$ , la perte de charge  $\Delta H$  et son coefficient  $K$ , la contrainte tangentielle  $\tau_p$ , le diamètre hydraulique, le coefficient de frottement  $C_f$ ... sont calculés par le sous programme **PARAMETRS** qui appelle aussi d'autres subroutine complémentaires.

Si notre géométrie possède une solution analytique tel que (cercle, ou rectangle...), l'appelle au sous programme **ANALYTIQUE** donne les solutions analytiques de toutes les géométries qui les possèdent. Ceci permettra de faire une comparaison et validation par la suite des résultats obtenus par la méthode des éléments finis.

Finalement, nous affichons tous les résultats obtenus par la subroutine **AFFICHAGE** permettant le traçage graphique et la comparaison des résultats. (Voir programme principale dans les annexes).

## CHAPITRE V RESULTATS ET DISCUSSIONS

### V.1 Introduction

Après la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en programmant deux types d'éléments finis, et les procédés de génération des maillage pour les différentes géométries optées, ainsi que la technique numérique employée pour la résolution du problème ; nous avons procédé à l'exécution du programme de calcul, afin d'obtenir les résultats correspondants.

Les géométries traitées sont :

- ◆ Géométrie d'un cercle.
- ◆ Géométrie d'une ellipse.
- ◆ Géométrie d'un rectangle.
- ◆ Géométrie d'un secteur.
- ◆ Géométrie d'un profil
- ◆ Géométrie d'un triangle.
- ◆ Géométrie d'un trapèze creux par un demi cercle à la frontière bas.
- ◆ Géométrie d'un demi cercle creux par un demi cercle à la frontière bas.
- ◆ Géométrie complexe ( combinée (ellipse+rectangle))

Le programme prend en charge l'écoulement incompressible approprié dans des conduites de dimensions données , véhiculant un fluide ayant des caractéristiques données (masse volumique, viscosité, pression, température).

L'application de la méthode des éléments finis a permis d'obtenir les résultats numériques tel que la répartition des vitesses dans la section des conduites étudiées et les différents paramètres dynamiques de l'écoulement à travers celles-ci. Les plus importants pour la caractérisation de l'écoulement sont :La vitesse moyenne, la vitesse maximale, le débit volumique, le nombre de *Reynolds*, et les pertes des charges par frottement et le coefficient géométrique 'B'.

Afin de valider et interpréter ces résultats, nous avons entamé la résolution analytique du modèle mathématique pour les géométries simples connexes. La comparaison entre les résultats obtenues par le programme en éléments finis et les résultats analytiques obtenus du phénomène étudié, est faite. Notre comparaison est basée aussi sur les résultats des différents types d'éléments finis programmés pour la même géométrie, et sur la variation du nombre d'éléments de la maille discrétisée.

Les différents paramètres calculés de l'écoulement ,après le calcul de la vitesse , seront représentés et récapitulés dans des tableaux pour quelque géométries à la fin du chapitre.

Dans la suite, nous présentons après les données du programme, les résultats de génération de maillage , puis celle des vitesses et les caractéristiques de l'écoulement avec les interprétations et les discussions nécessaires.

## V.2 Données du programme

Dans le cadre d'exécution du programme de calcul, nous avons opté pour les données suivantes : le fluide véhiculé est l'air à une température constante de  $T=20^{\circ}\text{C}$ , ayant une masse volumique  $\rho = 1.205 \text{ Kg/m}^3$ , et une viscosité dynamique  $\mu = 18.2 \cdot 10^{-6} \text{ Poiseuille (Kg/m.s)}$ , le gradient de pression imposé est constant avec  $\Delta P_g = 1.103 \text{ pas}$ , pour une conduite de longueur  $L=10\text{m}$ .

Les données géométriques des différentes sections sont données dans les paragraphes suivants, où nous avons cité leurs figures.

## V.3 Résultats des sorties graphiques des maillages

Les résultats suivants sont des maillages pour des configurations mono-connexe à frontières simples.

### Remarque :

Pour obtenir les maillages des sections voulues il faut donner les informations suivantes :

- ◆ Numéro de fichier de la géométrie désirée (NF) à partir d'un menu.
- ◆ Numéro de type d'élément fini (NTEF) : Triangulaire à 3 nœuds ou quadrilatère à 9 nœuds.
- ◆ Dimensions géométriques (largeurs, longueur, rayon, ...).
- ◆ Choix des positions des quatre points A, B, C et D des limites des cotés d'une géométrie de maillage type 'H'.
- ◆ Nombre de discrétisation NNX et NNY.

Rappelant que , les sorties graphiques sont obtenues à partir des fichiers résultats de la subroutine **Mesh** et l'utilisation systématique de logiciel conçu pour le traçage des maillage d'une façon séquentielle.

Les figures (V-1 a,b) présentent des maillages de type 'H' triangulaire gros pour l'élément fini T3N et Q9N dans un domaine circulaire (NF=1) .On a pris un rayon  $R=0.1$  et différents subdivisions (NNX,NNY) voir tableau TV-1 . Les position A,B,C et D sont choisies au milieu de chaque quadrant. On obtient dans ce cas NNT nœuds (nombre de nœuds totaux),NEL éléments et NNPE nœuds(nombre de nœuds par élément),voir le tableau TV-1 pour ces nombres de chaque cas de maillage.

Le but est de voir exactement la division et la forme ainsi que la disposition des nœuds et des cellules.

La figure (V-2) présente un type de maillage fin dont, le but est de voir la forme des cellules dans le maillage lorsqu'on augmente le nombre des subdivisions. L'exemple choisi ici est pour NNX=50 et NNY=40 .

**Tableaux TV-1 : Caractéristique des maillages d'un domaine circulaire**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-1 a	1	11	11	3	121	200
V-1 b	3	10	10	9	361	324
V-2	1	50	40	3	2000	3822
V-3 a,b	1	35	30	3	1050	1975

Les figures (V-3 a,b) présentent un exemple typique sur l'effet de changement des positions des points A,B,C et D de frontières sur la forme du maillage. A titre d'information cette forme de maillage n'est pas recommandées pour faire le calcul de l'écoulement visqueux, puisque ce type de problème nécessite un raffinement au voisinage de la paroi.

Le deuxième domaine présenté dans ce travail est celui d'ellipse (NF=3). Tel qu'on s'attendait de présenter un exemple de maillage gros type H triangulaire T3N (figure V-5 a) et un autre maillage type quadrilatère de 9 nœuds par élément (Figure V-5 b).

Les caractéristiques des maillages sont récapitulées dans le tableau TV-2 suivant :

La figure (V-6) montre un maillage triangulaire fin d'un domaine elliptique avec un grand rayon  $A=0.5$  m, et un autre  $B=0.1$  m, où on voit l'effet de changement des points aux limites des cotés de frontières, tel que les angles des points sont les mêmes que celles de la figure (V-4 a).

**Tableau TV-2 : Caractéristiques des maillages d'un domaine elliptique**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-5 a	1	12	13	3	156	132
V-5 b	3	10	10	9	360	324
V-6	1	30	25	3	750	696

La figure (V-7 a) présente un maillage de type H triangulaire gros pour les éléments fini T3N dans un domaine rectangulaire (NF=2). La figure (V-7 b) illustrent aussi des maillages de même domaine mais de type quadrilatère gros pour l'élément fini Q9N.

**Tableau TV-3 : Caractéristiques des maillages d'un domaine rectangulaire**

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-7 a	1	11	11	3	121	100
V-7 b	3	10	11	9	399	360

Les figures (V-8 a,b) présentent des maillages de type C triangulaire, tel que la première figure illustre le domaine d'un demi cercle (NF=4) avec un exemple d'élément fini T3N. La deuxième montre un secteur de  $65^\circ$ , avec l'élément fini T3N.

Les figures (V-8 c,d) illustrent aussi des maillages d'un domaine secteur (NF=4) pour différents angles, où les angles sont limités entre  $10^\circ$  et  $350^\circ$  dont le but est de montrer tous les cas de traçage et les deux types d'éléments fini utilisés par le programme, et par suite

l'efficacité des sous-routines de génération des maillages. Les caractéristiques de ces maillages sont données dans le tableau TV-4 suivant avec les différents angles utilisés.

**Tableau TV-4 :**Caractéristiques d'un maillage de domaine secteur

N° Figure	ANGLE	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-8 a	180°	7	8	3	106	182
V-8 b	65°	8	9	3	137	240
V-8 c	270°	7	10	9	1825	450
V-8 d	300°	7	10	9	1825	450

La figure (V-9 a) présente un maillage mono-connexe gros de type II d'une section de forme profil d'aile (NF=5) avec un élément fini T3N. L'exemple choisi ici est le profil NACA0012 symétrique, tel que la corde est  $Cr_d=1.0$ (unité) et l'épaisseur  $t=12\%$ . Tandis que l'autre (V-9 b) c'est l'élément Q9N. Les caractéristiques de ces maillages sont donnés dans le tableau TV- 5 suivant.

**Tableau TV- 5 :**Caractéristiques des maillages d'un domaine de forme profil d'aile.

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-9 a	3	10	11	9	399	360
V-9 b	1	30	35	3	1050	1972

La figure (V-10 a) représente un maillage de type H d'une section qui représente un trapèze moins un demi-cercle à la frontière bas, avec des éléments finis triangulaires type T3N. Où les cotés du rectangle sont  $A=3.5$  et  $B=2.5$ , or le rayon du cercle est  $R=0.7$  unité.

La figure (V-10 b) montre dans le même domaine un maillages de type 'H' avec l'élément Q9N.

Les caractéristiques de ces maillages sont présentées dans le tableau suivant :

**Tableau TV- 6 :**Caractéristiques des maillages du domaine trapèze moins un demi cercle

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-10 a	1	30	20	3	600	1102
V-10 b	3	13	15	9	725	672

Les figures (V-11 a,b) schématisent des maillages modérés de type 'H' d'un domaine formé par un demi cercle creux (NF=7), avec des éléments finis type T3N et Q9N.

**Tableau TV- 7:**Caractéristiques des maillages du domaine de demi cercle creux par un demi cercle petit au bas.

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-11 a	1	30	25	3	770	1392
V-11 b	3	10	8	9	285	232

Les figure (V-12 a,b) montrent un maillage de type H d'un domaine triangle (NF=6) avec une cote  $A=1$  en utilisant l'élément fini T3N, et Q9N.

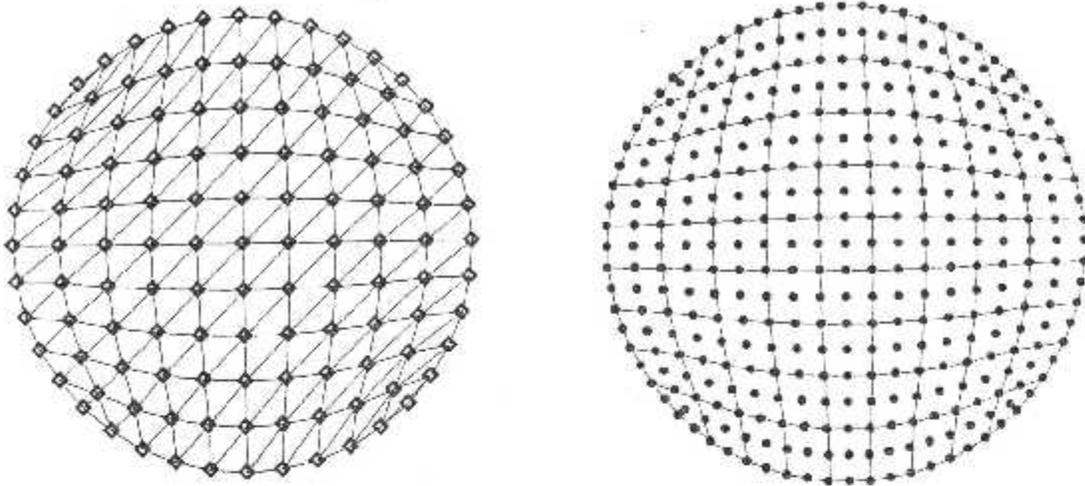
**Tableau TV- 8:**Caractéristiques des maillages du domaine triangle (NF=6)

N° Figure	NTEF	NNX	NNY	NNPE	NNT	NEL
V-12 a	1	30	25	3	750	1392
V-12 b	3	10	8	9	285	232

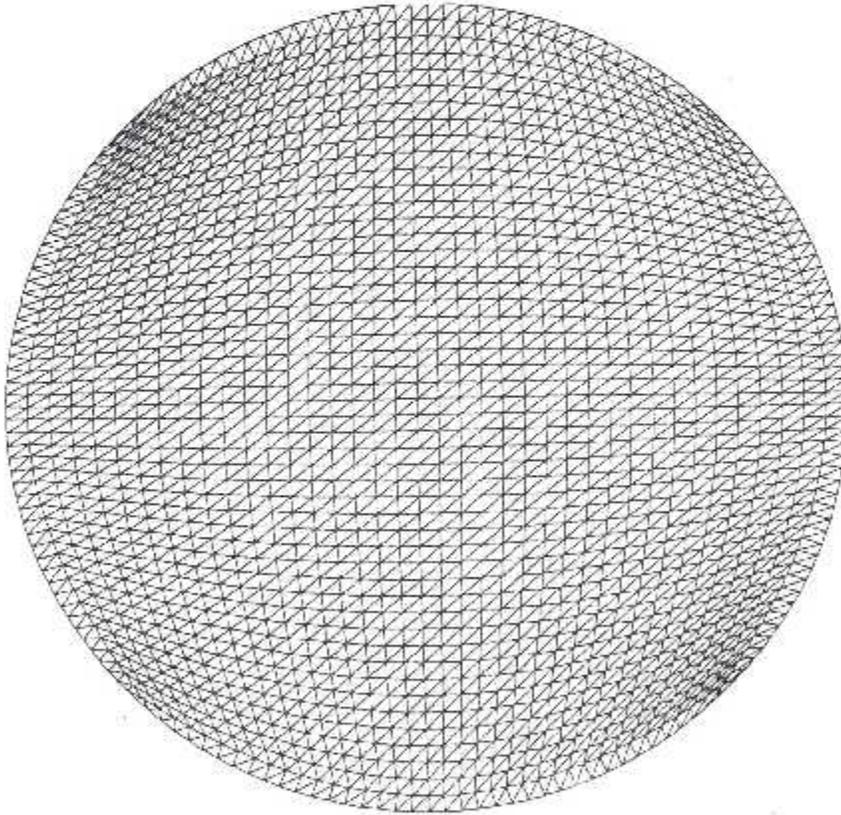
Pour un dernier exemple, on a les figures (V-13 a,b) montrent un maillage de type 'H' d'un domaine complexe (géométrie combinée ellipse+rectangle) en utilisant l'élément fini T3N et Q9N.

La figure (V-13 a) présente un maillage de type 'H' triangulaire pour l'élément fini T3N dans un domaine de forme complexe (ellipse+rectangle NF=9), en utilisant une discrétisation de NNX=11 et NNY=10 ce qui donne donc un NNT=110. La figure (V-13 b) illustre aussi un maillage du même domaine mais de type quadrilatère gros pour l'élément fini Q9N, En utilisant une discrétisation de NNX=30 et NNY=25 et donc un NNT=2891 .

Dans la suite, on présente les figures des maillages traités précédemment.

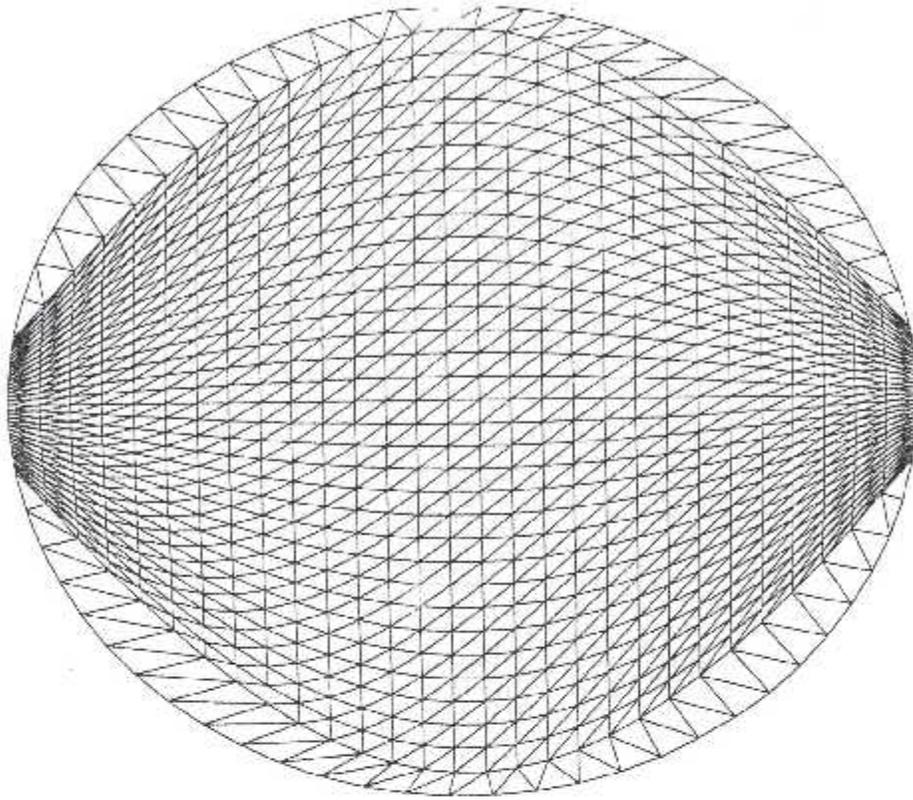


**Fig.V-1 a,b** :Maillage triangulaire et quadrilatère gros dans un domaine circulaire pour les éléments type :T3N, et Q9N.

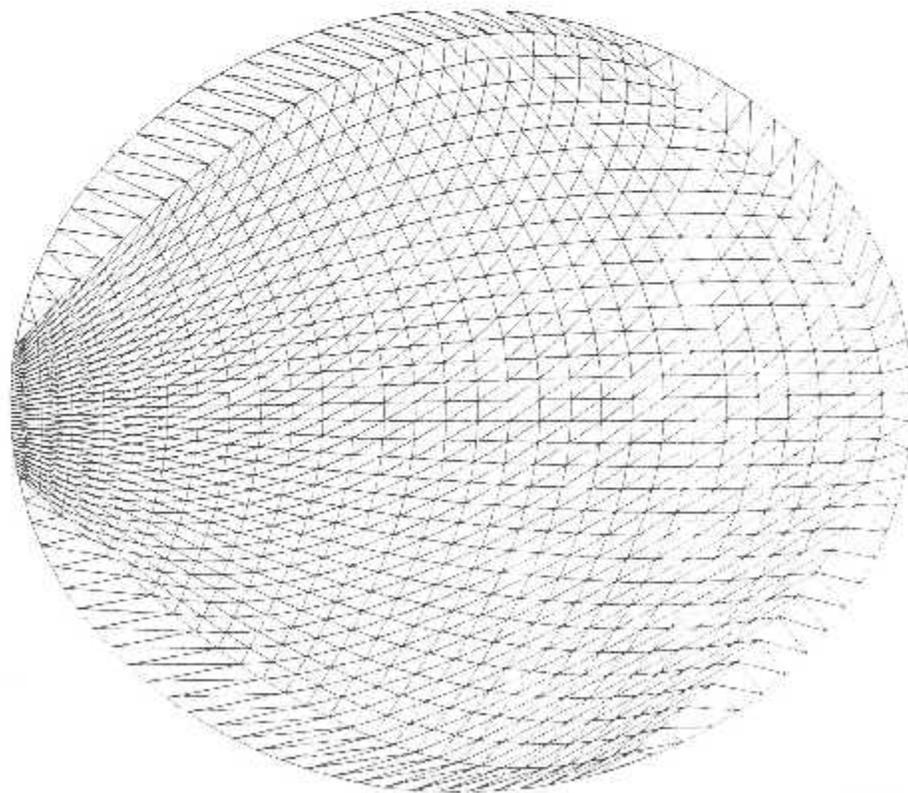


**Fig V-2** :Maillage triangulaire fin dans un domaine circulaire  
Pour l'éléments type T3N.

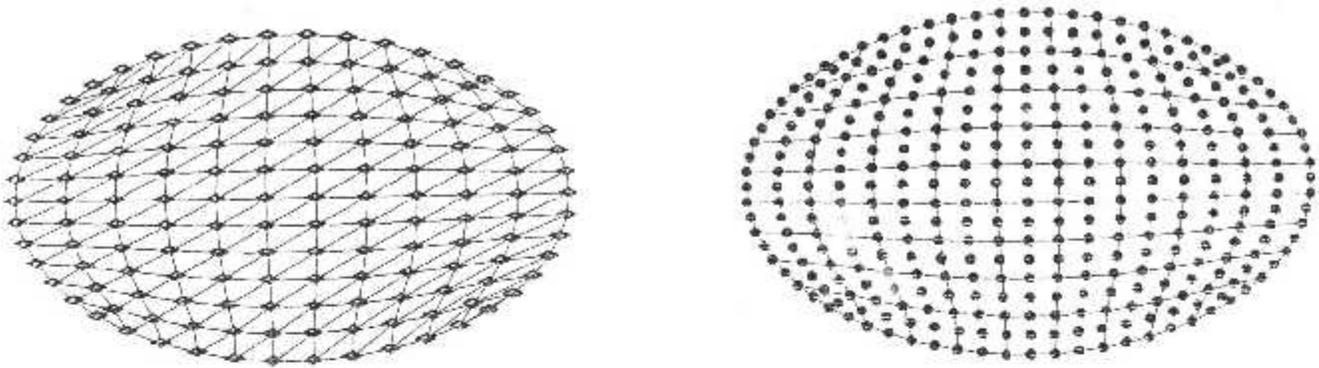
a/



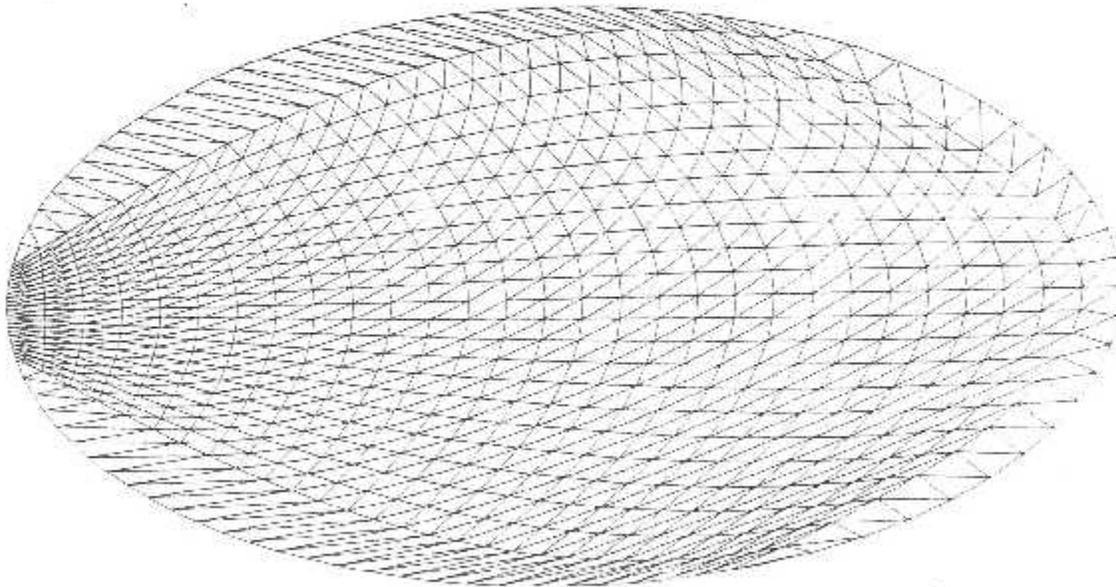
b/



**Fig. V-3 a,b** :Effet de changement des positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour un domaine circulaire

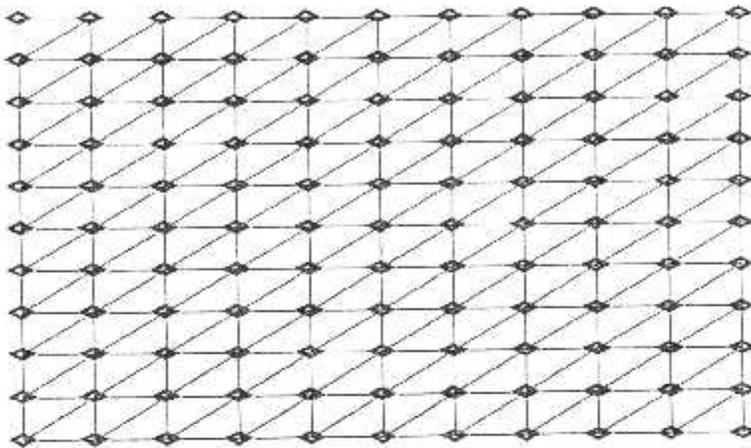


**Fig. V-5 a,b** : Maillage triangulaire et quadrilatère gros dans un domaine elliptique pour les éléments finis type  $P_1$  et  $Q_1$ .

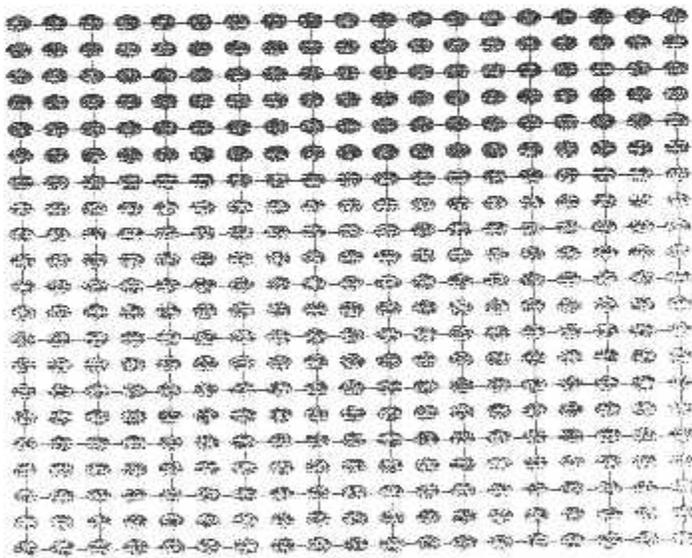


**Fig V-6** : Effet du changement des positions des points de la frontière sur la forme du maillage pour un domaine elliptique.

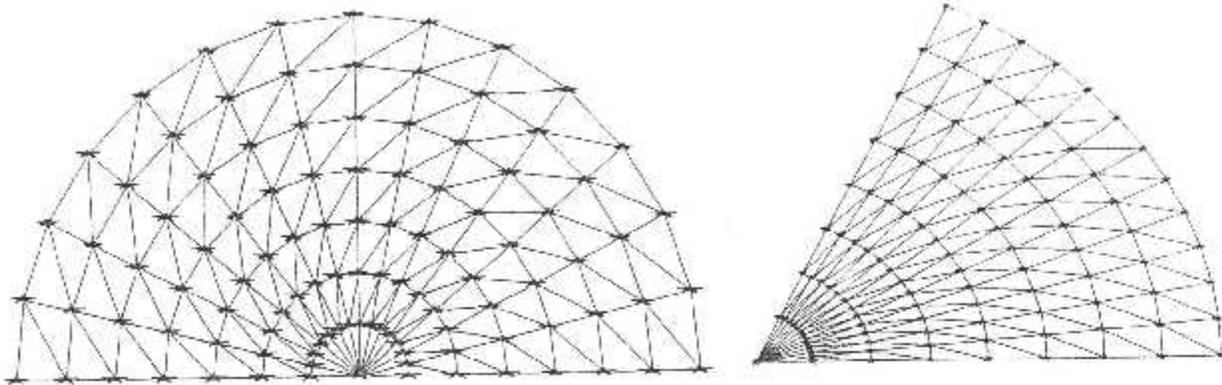
a/



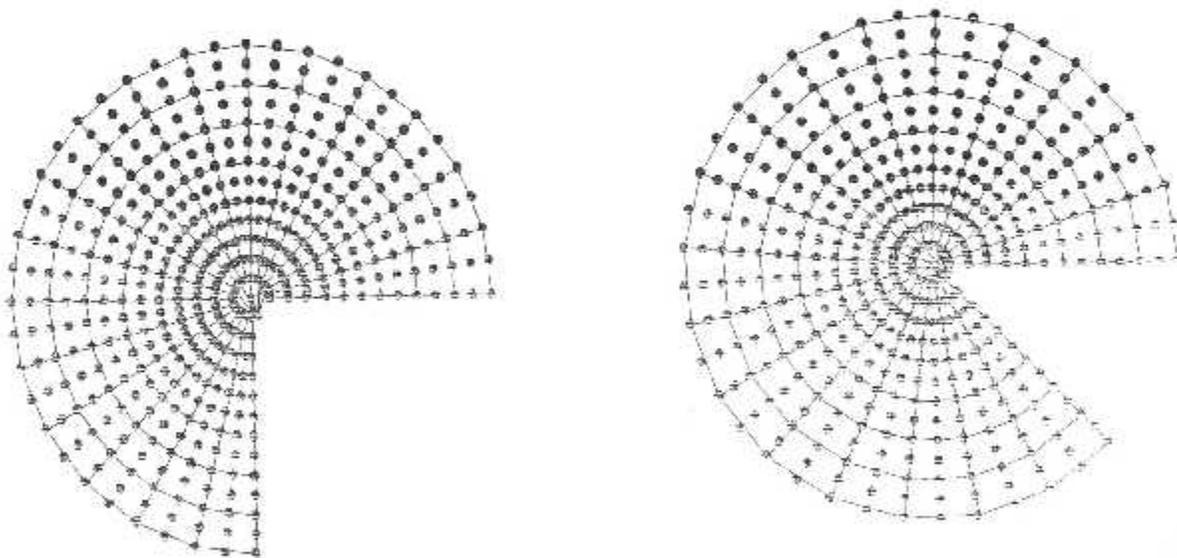
b/



**Fig.V-7 a,b** Maillage triangulaire et quadrilatère gros dans un domaine rectangulaire pour les éléments type T3N et Q9N.

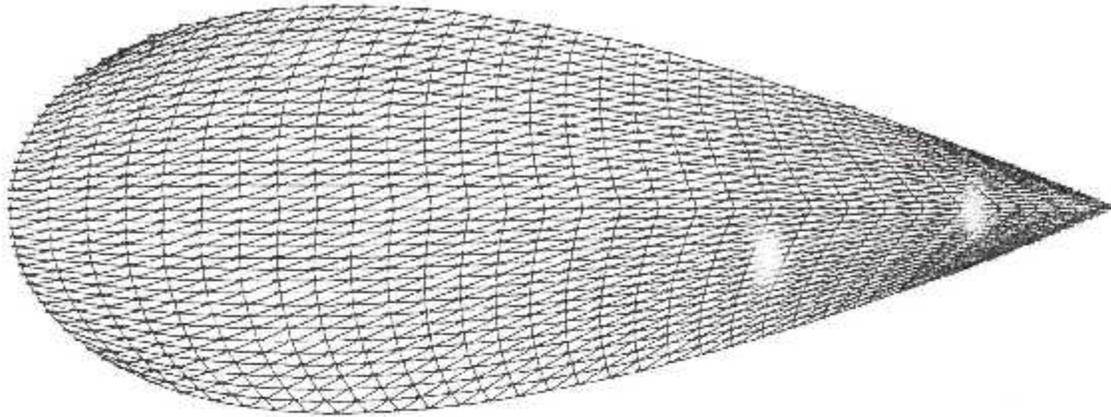


**Fig.V-8 a,b** : Maillage de type 'C' triangulaire d'un domaine :Demi-cercle et un secteur de  $65^\circ$ .

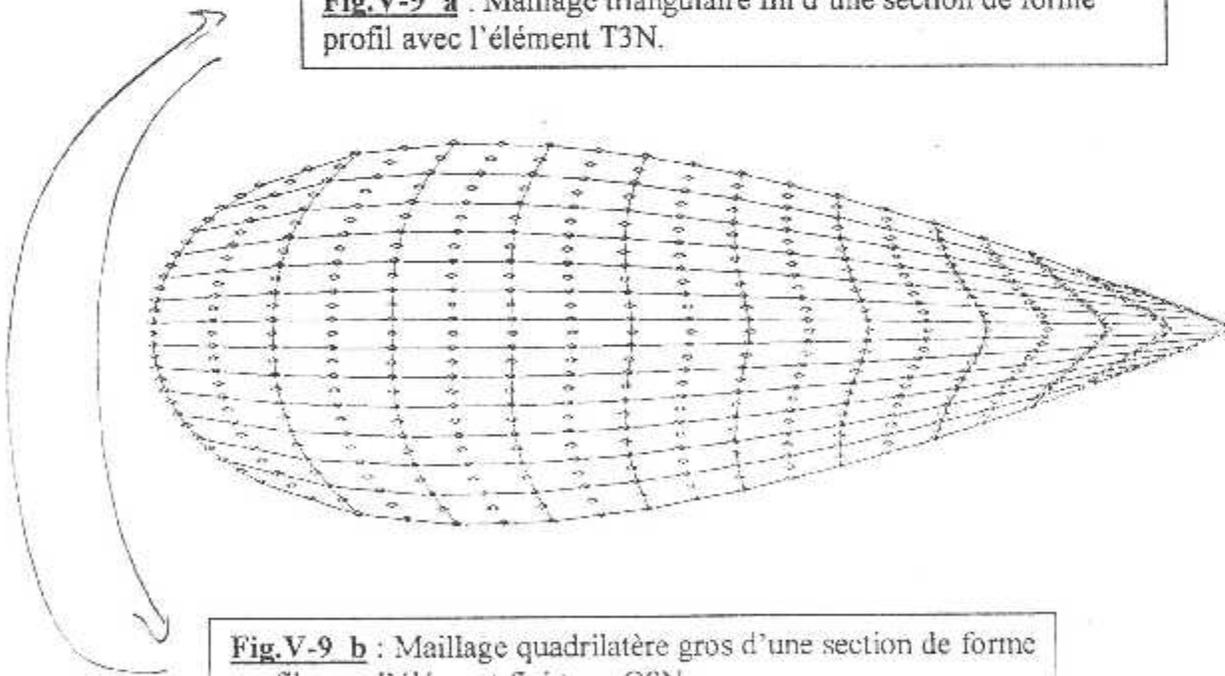


**Fig.V-8 c,d** : Maillage d'un domaine secteur pour différents angles avec l'élément fini type Q9N.

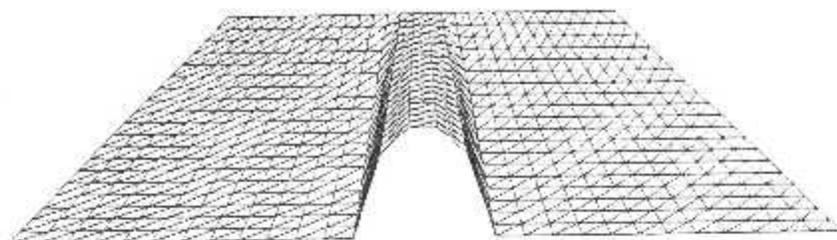
a/



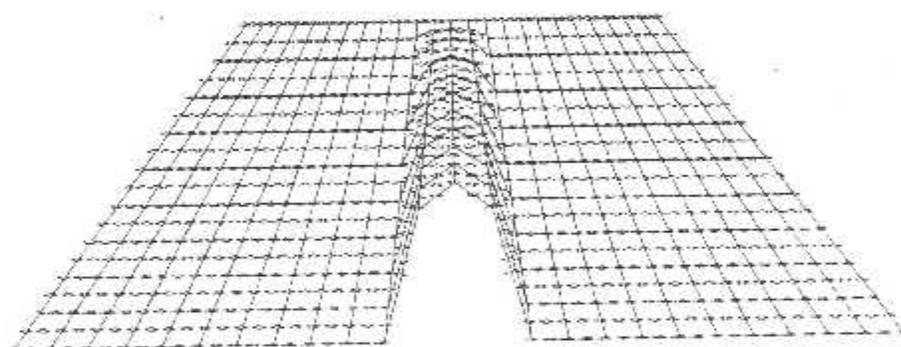
**Fig.V-9 a** : Maillage triangulaire fin d'une section de forme profil avec l'élément T3N.



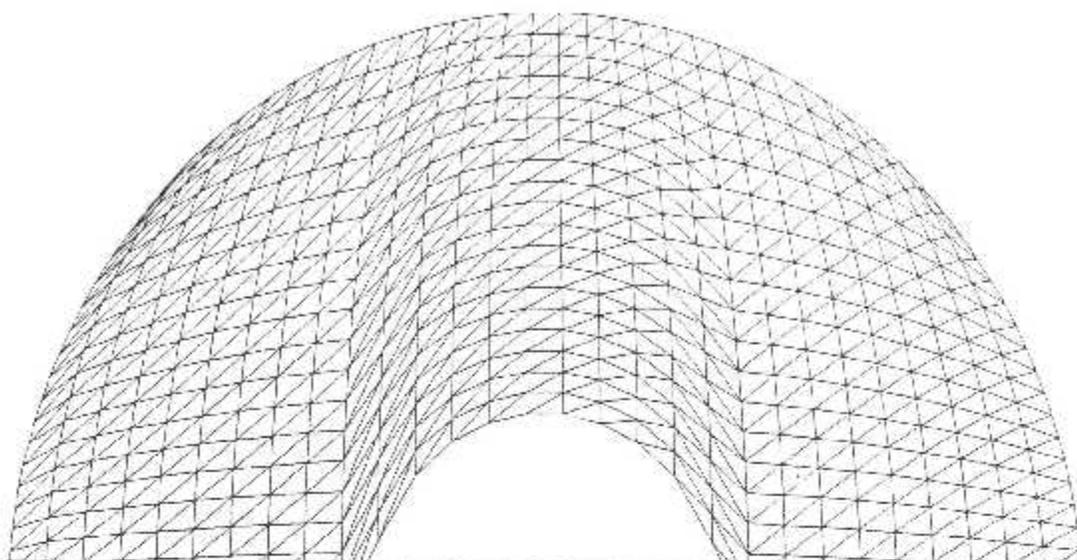
**Fig.V-9 b** : Maillage quadrilatère gros d'une section de forme profil avec l'élément fini type Q9N.



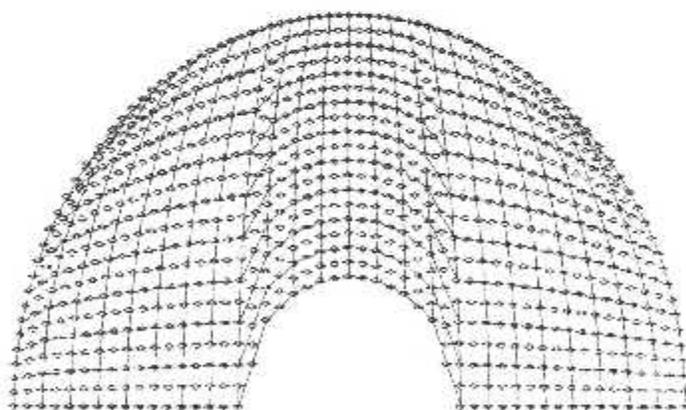
**Fig.V-10 a** : Maillage triangulaire d'une section trapèze moins un demi cercle à la frontière bas avec l'élément fini type T3N.



**Fig.V-10 b** : Maillage quadrilatère d'un domaine trapèze moins un demi cercle à la frontière bas avec l'élément fini Q9N.

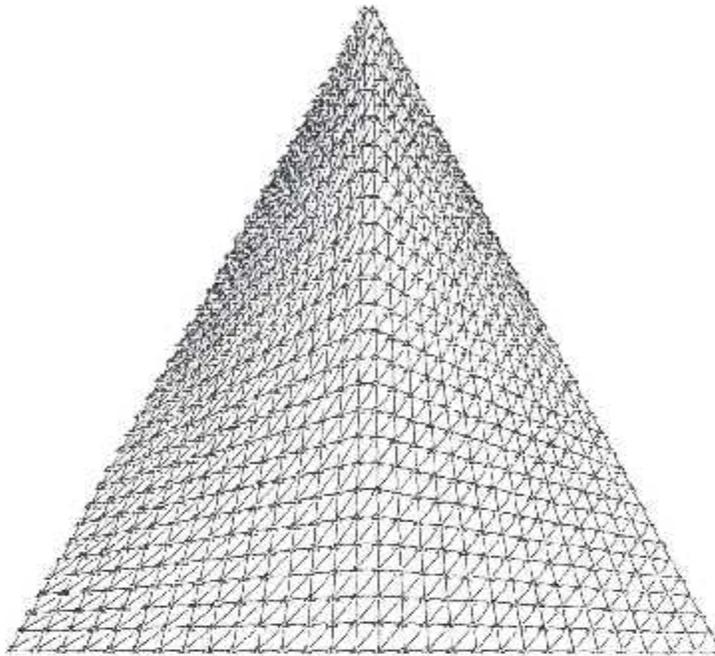


**Fig.V-11 a** : Maillage triangulaire d'un domaine demi cercle grand creux par un demi cercle petit à la frontière bas avec l'élément type T3N.



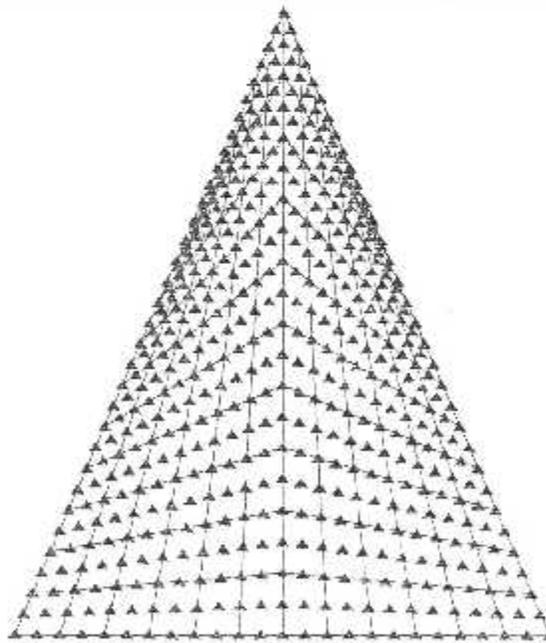
**Fig.V-11 b** : Maillage quadrilatère d'un domaine demi cercle grand – demi cercle petit à la frontière bas avec l'élément type Q9N.

a/

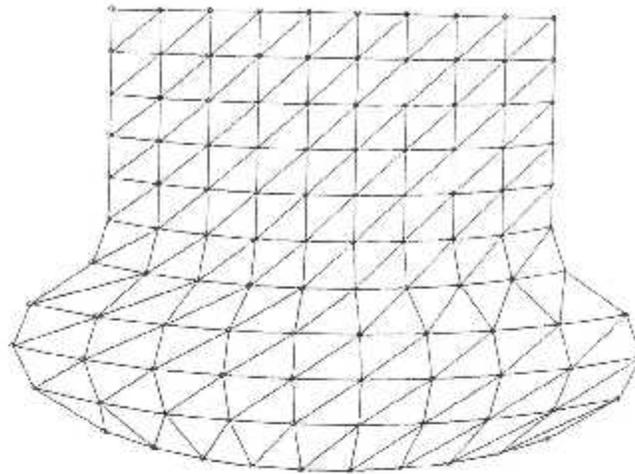


**Fig.V-12 a** : Maillage triangulaire d'un domaine triangle équilatéral avec l'élément fini type T3N.

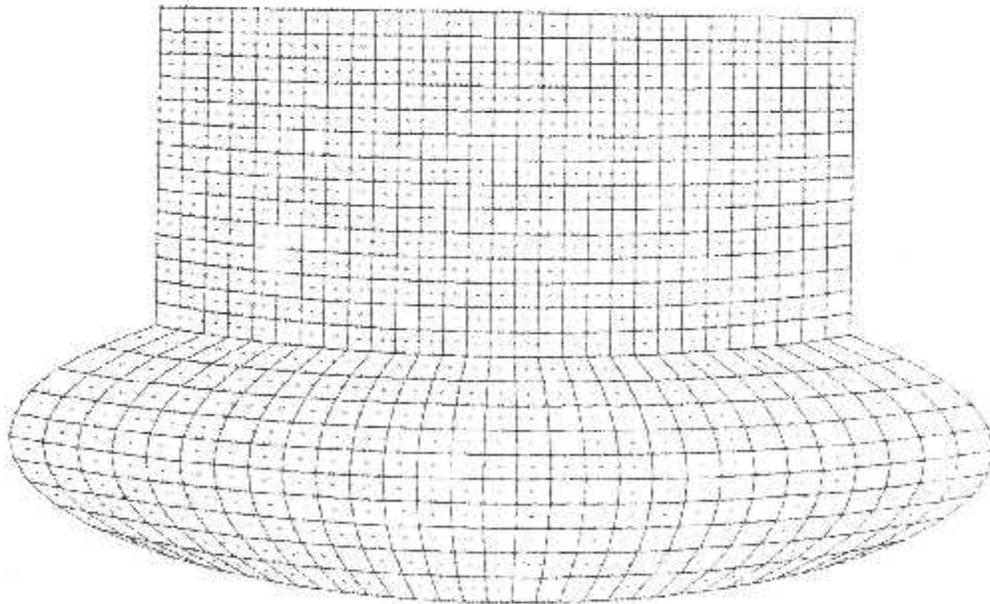
b/



**Fig.V-12 b** : Maillage quadrilatère d'un domaine triangle équilatéral avec l'élément fini type Q9N.



**Fig.(V13- a) :**Maillage triangulaire gros d'une géométrie complexe (ellipse +rectangle) avec l'élément fini type T3N.



**Fig.(V-13 b) :**Maillage type 'H' fin du même domaine avec l'élément fini Q9N.

## V.4 Exploitation des résultats numériques des solutions

Dans cette partie , on va présenter quelque résultats numériques et graphiques obtenus par la résolution de l'équation de *Poisson* qui gère l'écoulement ,avec les conditions aux limites appropriées pour toutes les géométries traitées ,ainsi d'enrichir avec quelques remarques et interprétations.

### Remarques :

On rappelle que les polynômes d'interpolations  $W(x,y)$  sont présentés selon plusieurs choix et en fonction du nombre de nœuds par élément fini. Ces fonctions sont données comme suit où on montre celles qui ne converge pas.

-Elément fini à 3 nœuds (T3N) :

$$W(x,y)=C_1+C_2x+C_3y \quad (\text{Polynôme complet linéaire})$$

-Elément fini à 9 nœuds (Q9N) :

$$\text{Polynôme 1 : } C_1+C_2x+C_3y+C_4xy+C_5x^2+C_6y^2+C_7x^2y+C_8xy^2+C_9x^3$$

$$\text{Polynôme 2 : } C_1+C_2x+C_3y+C_4xy+C_5x^2+C_6y^2+C_7(x^2y+xy^2)+C_8x^3+C_9y^3.$$

$$\text{Polynôme 3 : } C_1+C_2x+C_3y+C_4xy+C_5x^2+C_6y^2+C_7x^2y+C_8xy^2+C_9y^3$$

$$\text{Polynôme 4 : } C_1+C_2x+C_3y+C_4xy+C_5x^2+C_6y^2+C_7x^2y+C_8xy^2+C_9(x^3+y^3).$$

On peut remarquer que pour les polynômes '4' et '2' les solutions numériques trouvées convergent vers la solution exacte (polynômes complets) avec plus de précision pour le polynôme '4' grâce à la symétrie et même grâce à la présence des deux termes cubiques (en 'x' et 'y' ) ,ce qui facilite la convergence. Tandis que pour le polynôme '3' ils ont induit (le terme cubique) des résultats erronés (non admissible) ,et de non convergence pour le polynôme '1'.

### V.4.1 Résultat du domaine circulaire

Le premier domaine à étudier est celui d'un cercle de rayon  $R$ , avec les conditions aux limites  $W=0$  sur la frontière ' '. Rappelant que la solution analytique est donnée au chapitre II.

#### V.4.1.1 Répartition des vitesses

La figure (V-14) montre l'évolution de la vitesse le long d'un diamètre d'un cercle de rayon  $R=0.1$ , placé à l'origine du repère , avec une discrétisation d'ordre  $21 \times 21$ . Les courbes représentent les solutions d'éléments finis triangulaire (T3N) et quadrilatère (Q9N) ainsi que la solution analytique ,pour une exécution de même nombre de nœuds.

Ces courbes décrivent une variation parabolique de la vitesse avec une augmentation tout en s'éloignant de la paroi et atteignent le maximum au centre du cercle .On observe que ces vitesses sont nulles aux parois, ça est du à l'effet du frottement et de la viscosité qui

diminue en s'approchant du centre de la section de la conduite. On remarque aussi que les différentes solutions sont très proches l'une de l'autre, ce qui dégage qu'il y a une bonne concordance avec les résultats analytiques, ce qui implique l'efficacité de la méthode des éléments finis.

La figure (V-15) visualise la répartition des lignes iso-vitesses en multi couleur dans le champ d'une conduite circulaire, qui montre les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes.

On remarque bien la graduation de ces lignes iso-vitesses de la paroi vers le centre de la section et leur accumulation près de la paroi, qui montre la variation rapide de la vitesse dans cette zone qui justifie l'effet prépondérant de la viscosité dans cette couche visqueuse, ainsi qu'on remarque la zone centrale qui représente les vitesses maximales dans cette conduite cylindrique circulaire pour un régime d'écoulement établi.

La figure (V-16) montre l'évolution de la vitesse maximale et moyenne pour différents rayons des sections circulaires d'une conduite ( $R=0.01$  à  $0.19$  m) calculées avec différentes méthodes. L'allure de ces courbes indique qu'il y a une augmentation de ces vitesses maximales et qui est plus accentuée que les vitesses moyennes. La figure montre aussi qu'il y a une très bonne concordance avec les résultats analytiques.

#### V.4.1.2 Evolution de quelques paramètres importants

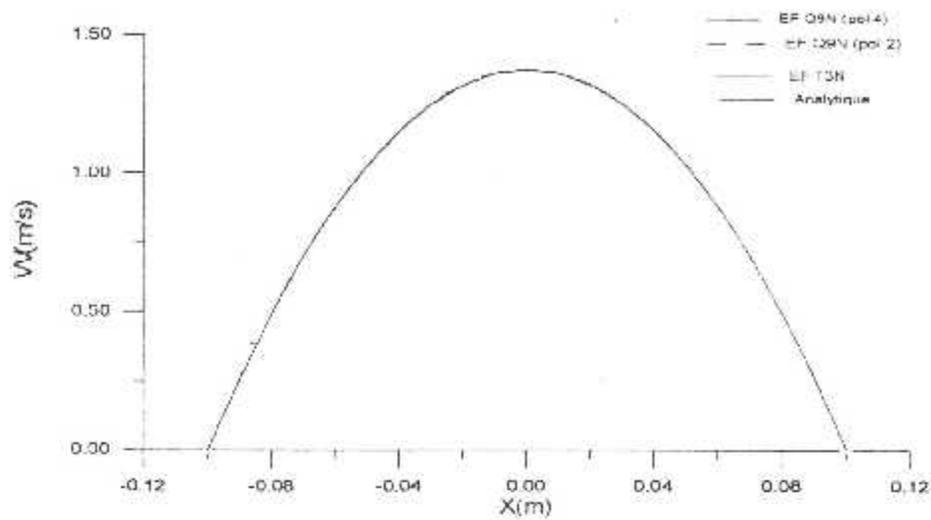
Pour voir l'évolution du débit en fonction des différents rayons, nous avons la figure (V-17) montre l'évolution du débit par unité de surface, on constate une augmentation parabolique, mais très lente pour les rayons faibles.

On remarque aussi qu'il y a une bonne concordance entre ces résultats.

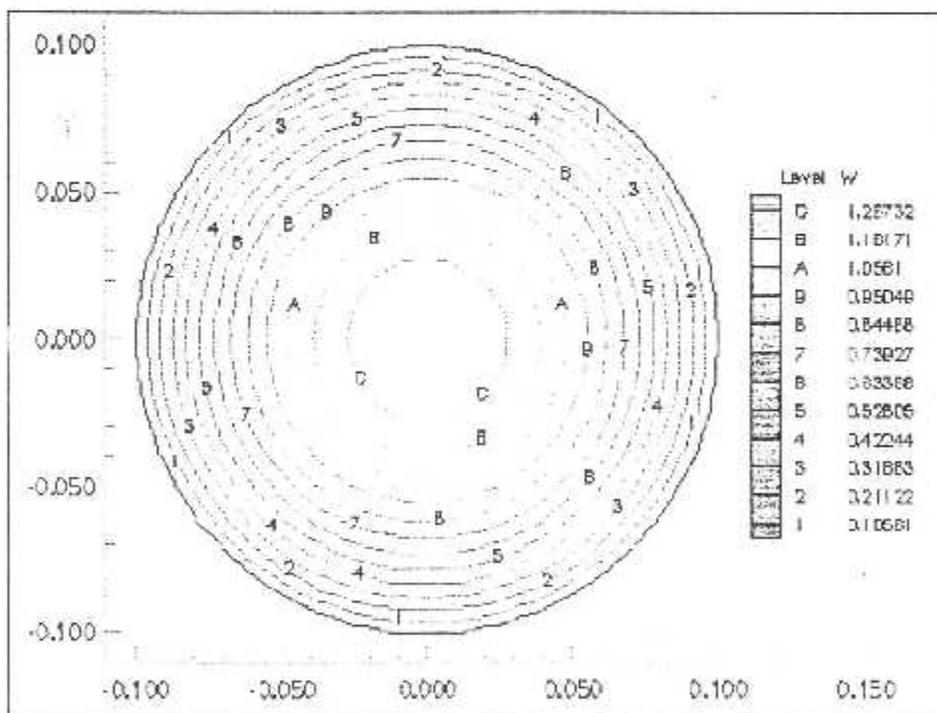
La figure (V-18) illustre l'évolution du coefficient géométrique 'B' en fonction des différents rayons d'une section circulaire. On remarque que ce paramètre est indépendant de la valeur du rayon de la section utilisée et il est constant, tel qu'il est égale à '64'. Donc il ne dépend que de la forme de la géométrie, d'où son nom.

La figure (V-19) montre l'évolution du coefficient de perte de charge 'K' en fonction des différents rayons. On remarque que ce paramètre décroît très rapidement pour un rayon compris entre  $0.05$  et  $0.1$  puis pour le reste des rayons. Il se diminue lentement au voisinage du zéro. Ceci est dû au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge, et par suite la diminution de 'K'.

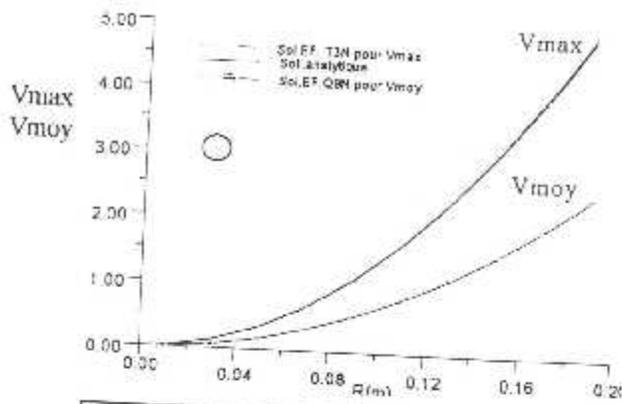
Ces deux figures montrent aussi qu'il y a une bonne concordance entre les résultats analytiques et numériques d'éléments finis T3N ou Q9N.



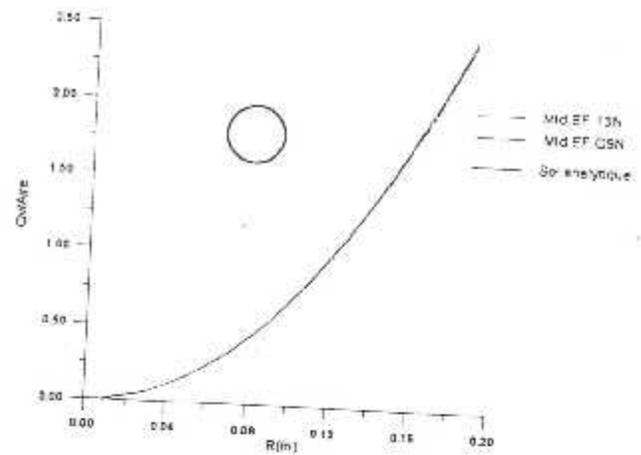
**Fig.(V-14)** Evolution de la vitesse le long d'un diamètre d'un cercle



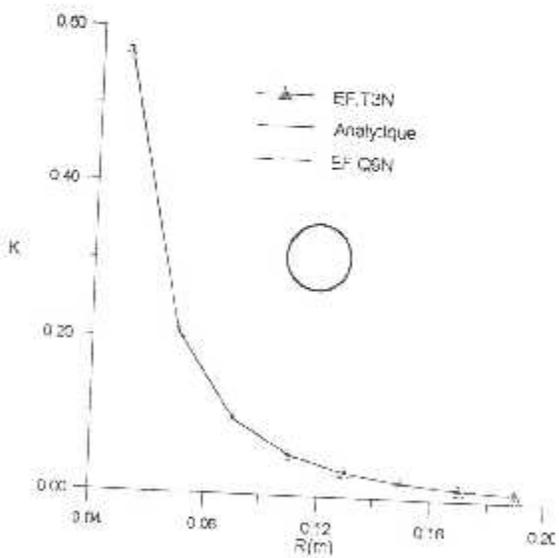
**Fig.(V-15)** Les contours des isovitesse d'un cercle de rayon R=0.1 m



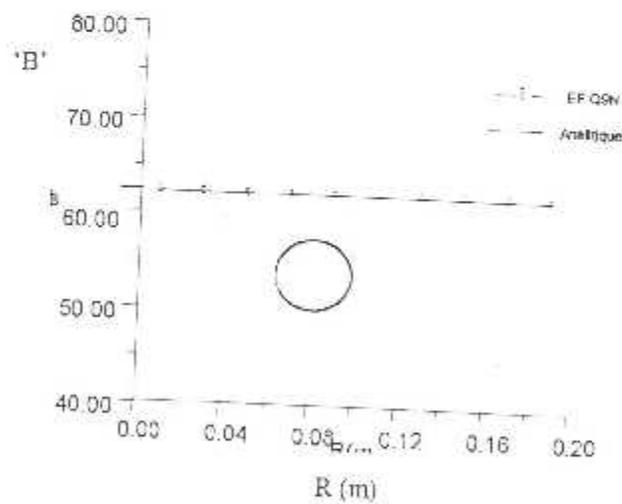
**Fig.(V-16)** :Evolution de la vitesse maximale et moyenne pour différents rayons des sections circulaires d'une conduite



**Fig.(V-17)** :Evolution du débit volumique pour différents rayons



**Fig.(V-19)** :Evolution du coefficient de pertes de charge 'K' pour différents rayons



**Fig.(V-18)** :Valeur du coefficient géométrique 'B' pour différents rayons.

**Remarque :**

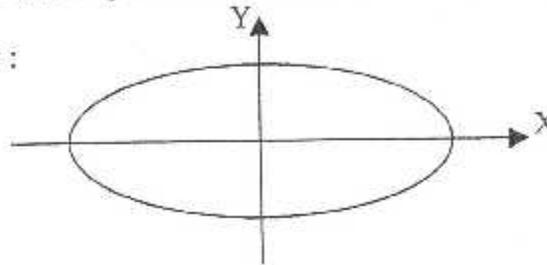
La section optimale à choisir pour la conception des conduites est celle qui permet un minimum des pertes de charge et un débit considérable et donc le minimum d'énergie mise en jeu.

**V.4.2 Résultats d'un domaine elliptique**

Le troisième domaine à étudier est celui d'une ellipse avec les cotés 'a' et 'b' comme indiqués à la figure ci contre.

L'équation de cette ellipse est donnée par :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

**V.4.2.1 Répartition des vitesses**

La figure (V-20 a) montre le comportement de la vitesse le long du diamètre horizontal d'une section elliptique, calculée avec les deux méthodes d'éléments finis.

La précision des deux méthodes est très satisfaisante en comparant ces solutions avec la solution analytique de cette géométrie.

Pour l'effet de gradient de pression sur la répartition des vitesses, on a la figure (V-20 b) qui illustre cette répartition le long du diamètre. On observe toujours une évolution parabolique mais plus accentuée lorsqu'on augmente ce gradient, qui s'impose entre les extrémités de la conduite considérée.

Les courbes de la figure montrent une bonne concordance avec l'analytique pour tous les gradients.

Pour visualiser la répartition des contours isovitesses dans la section elliptique de côté  $a=0.15$  m et  $b=0.03$  m, on a la figure (V-21) qui les montre en multi couleurs avec les différents niveaux des valeurs de la vitesse et leurs couleurs correspondantes. On constate d'après cette figure la graduation de ces lignes à partir de la paroi vers le centre de la section, avec leur concentration près de la paroi, qui indique la variation rapide de la vitesse dans cette zone.

**V.4.2.2 Evolution de quelques paramètres importants**

Pour voir l'évolution de quelques paramètres d'écoulement en fonction des différentes sections elliptiques, on a varié la valeur du rapport des cotés d'ellipse de 0.1 jusqu'à la valeur 1.0 avec un pas de 0.1

Dans la figure (V-22) on voit l'évolution du débit volumique et celui par unité de surface en fonction des différents rapports  $a/b$  d'ellipse. On constate d'après ces allures qu'en augmentant l'aire de la section par l'une de ces cotés, on a un croisement du débit, vu que ce dernier est lié à la section à travers laquelle il y a l'écoulement. Tel que pour les petits

rappports ,on a une évolution moins vite que celle du rapport supérieur à 0.5 où il s'approche du cas du cercle .On remarque aussi la bonne concordance avec les résultats analytiques.

La figure (V-23) illustre l'évolution du coefficient géométrique 'B' en fonction des différents rapports b/a de la section. On remarque que ce paramètre est égale à 76 lorsque b/a= 0.1, où on a la section d'une ellipse très platée, puis il se décroît dans une première phase rapidement ,en suite en deuxième phase lorsque b/a est supérieur à 0.5 ,il est moins rapide où on s'approche du cas cercle. Puis il atteint la valeur 64 qui correspond à un cercle pour b/a=1.

Dans la même figure on constate le décroissement du coefficient de perte de charge 'K' en fonction des différents rapports a /b de la section .Tel qu'il décroît très rapidement pour avec les sections ayant le rapport a/b inférieur ou égale à 0.3 vu que le débit relatif ( $Q_v/A_{ire}$ ) croît pour ces valeurs. Puis pour le reste des rapports ,il se diminue lentement ,ceci est du au fait que la section lorsqu'elle augmente, elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge ,et par suite une diminution du coefficient linéaire 'K'..

Ces allures indiquent qu'il y a une bonne concordance entre les résultats numériques et analytiques pour les deux types d'éléments finis.

### V.4.3 Résultats du domaine secteur

Le domaine à étudier dans ce cas est celui d'un secteur à différents angles du sommet ,avec un rayon R

#### V.4.3.1 Répartition des vitesses

La figure (V-24) montre l'évolution de la vitesse le long du rayon qui passe sur l'axe de symétrie d'un domaine secteur, où on a choisi le cas d'un demi cercle de rayon R=0.15 m. On constate que les courbes décrivent toujours une variation parabolique de la vitesse avec une augmentation tout en s'éloignant de la paroi, et atteignent le maximum au milieu de la section .On observe aussi que les vitesses sont nulles aux parois ce qui est du aux effet de frottement et de la viscosité .

La figure (V-25) illustre les contours des iso-vitesse tel qu'on constate la section du secteur d'un angle de  $270^\circ$  , et la graduation des vitesses du maximum jusqu'au zéro sur les frontières ,et leurs accumulations près des parois.

La figure (V-26) montre l'évolution des vitesses maximales et moyennes en fonction des différents angles du sommet d'un secteur ,qui varient de  $10^\circ$  à  $310^\circ$  de raison de  $10^\circ$  . On constate les mêmes remarques que les géométries précédentes , tel que lorsqu'on augmente 'téta ' du sommet de secteur , les vitesses augmente de zéro vers un maximum pour un angle de  $310^\circ$  .

#### V.4.3.2 Evolution de quelques paramètres importants

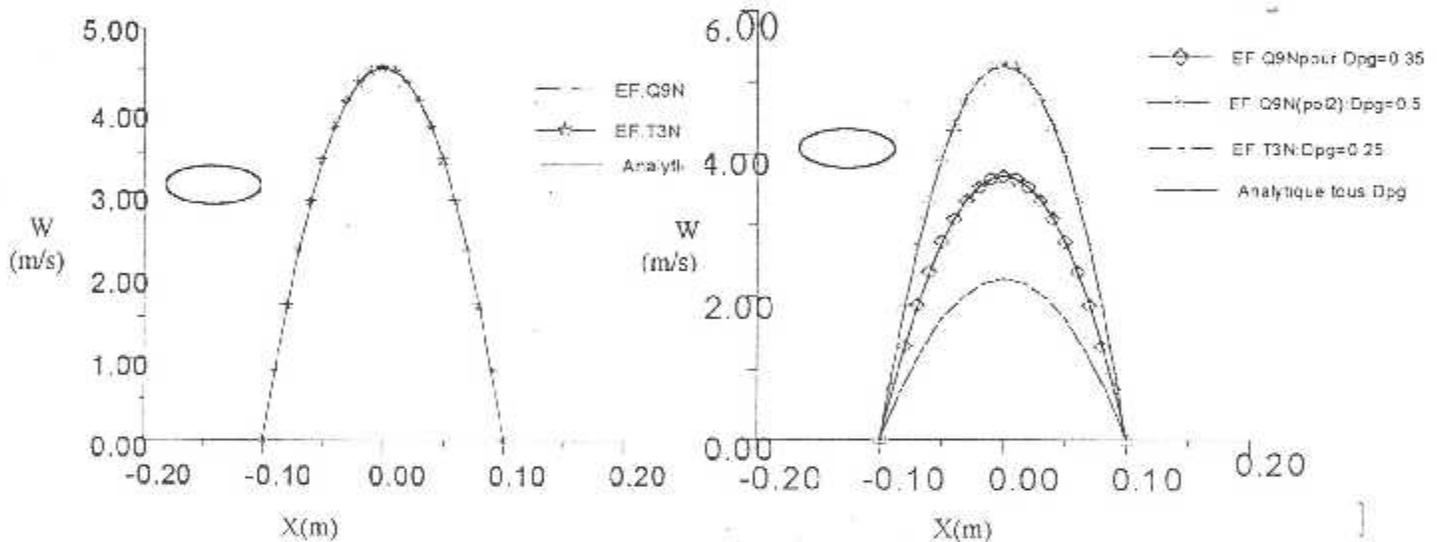
La figure (V-27) montre l'évolution du coefficient de perte de charge 'K' et celle du coefficient géométrique 'B' , pour les différents valeurs de téta .Tel que pour la courbe du coefficient 'K' son allure indique qu'il y a un décroissement très rapide pour l'angle téta de  $0^\circ$

à 65° ; puis pour le reste des angles il décroît très lentement ,vu que la section obtenue est de plus en plus grande et le débit croit paraboliquement.

Pour la courbe du coefficient 'B' on remarque une évolution quasi logarithmique à partir de sa valeur d'environ 54 jusqu'à la valeur 67 pour les différents angles téta. Les résultats obtenues par les deux méthodes indique un bon accord entre eux.

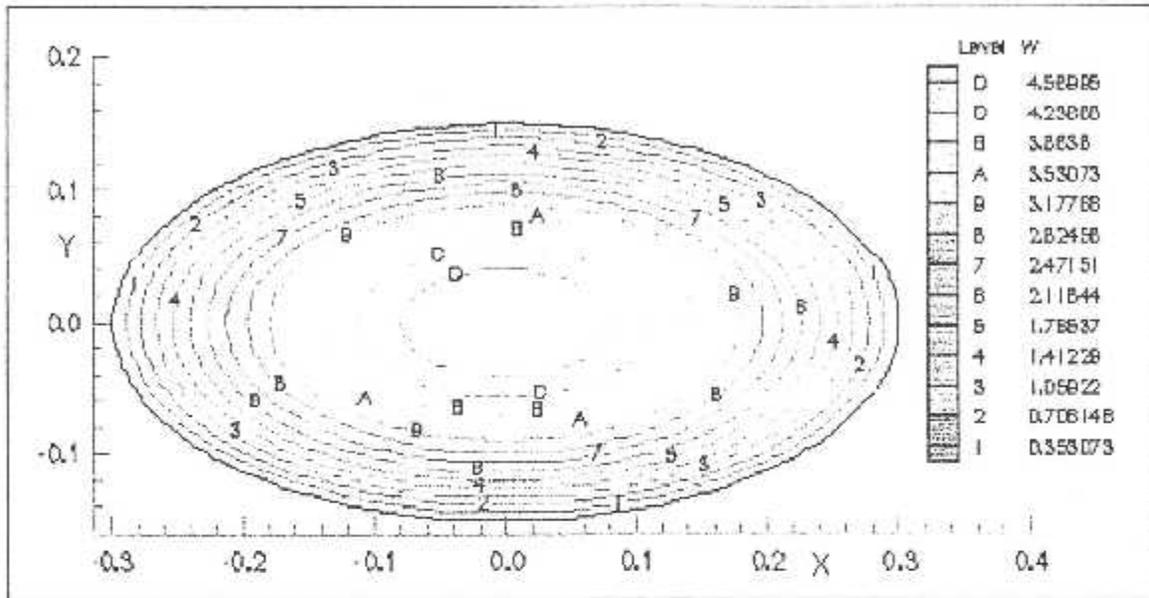
La figure (V-28) montre l'évolution du débit volumique ainsi que celui-ci par unité de l'aire en fonction de l'angle téta .Les allures de cette figure montrent une augmentation à partir de 0.0 vers leur maximums dont l'angle téta proche de 310°.Cet accroissement est du à l'augmentation de l'aire du secteur de fait qu'on augmente son angle de sommet.

Cette figure montre aussi qu'il y a une bonne concordance entre les deux résultats. Ce qui implique l'efficacité de la méthode des éléments finis.

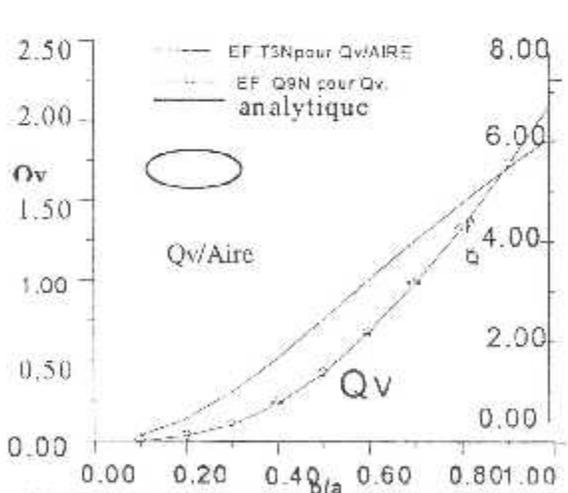


**Fig.(V-20 a)** :Evolution de la vitesse pour les deux types d'éléments finis le long d'un diamètre horizontale d'une ellipse.

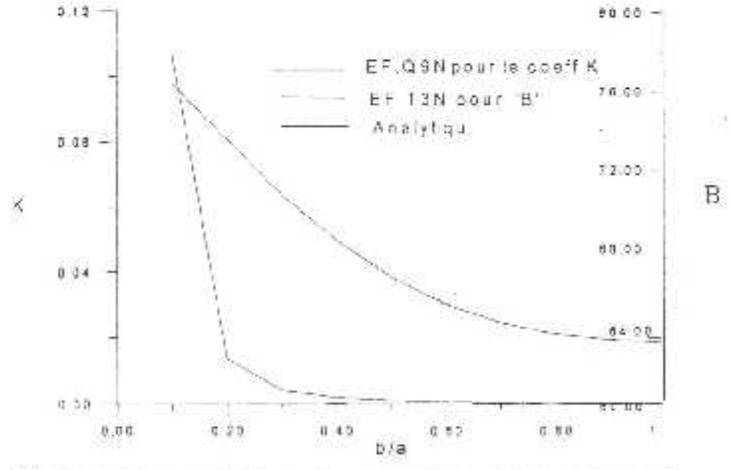
**Fig.(V-20 b)** :Evolution de la vitesse pour différents valeurs de gradient de pression .



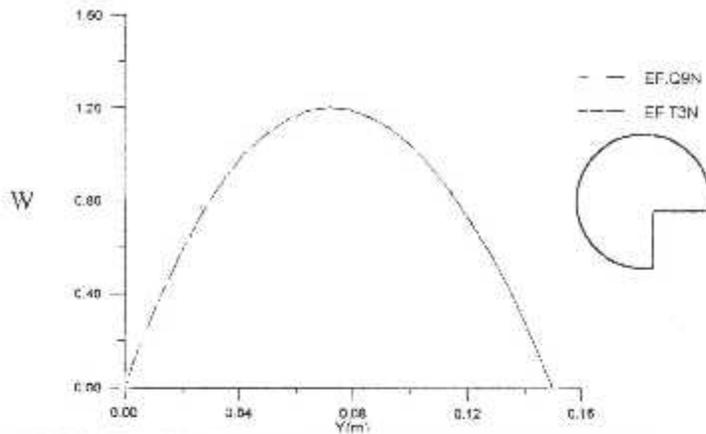
**Fig.(V-21)** :Les contours des iso-vitesses pour une section elliptique



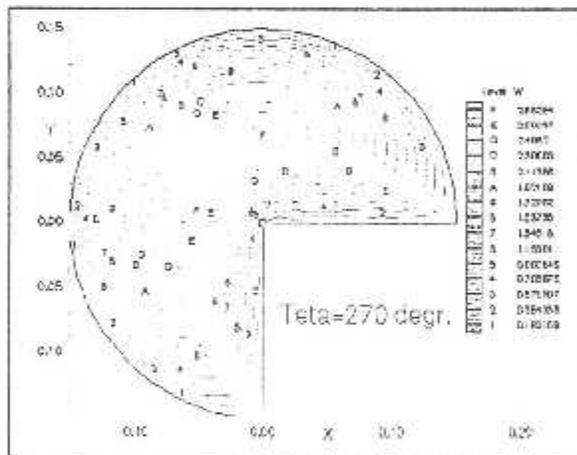
**Fig.(V-22)** :Evolution du débit volumique pour différents rapports b/a.



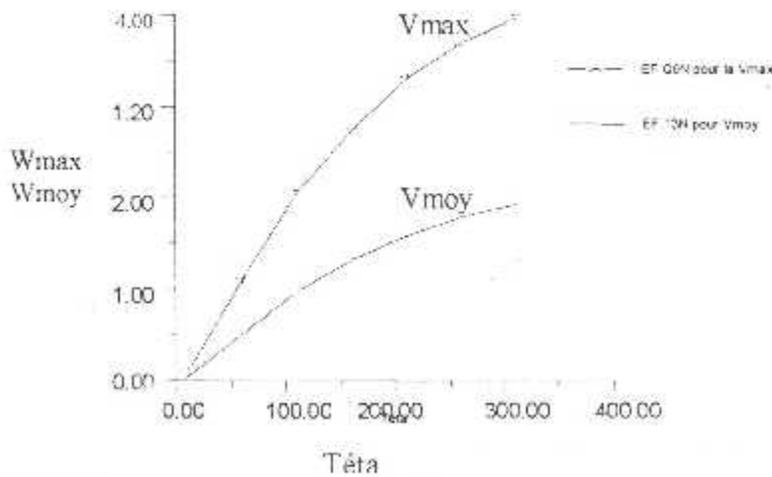
**Fig.(V-23)** :Evolution du coefficient de perte de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' pour différents rapports.



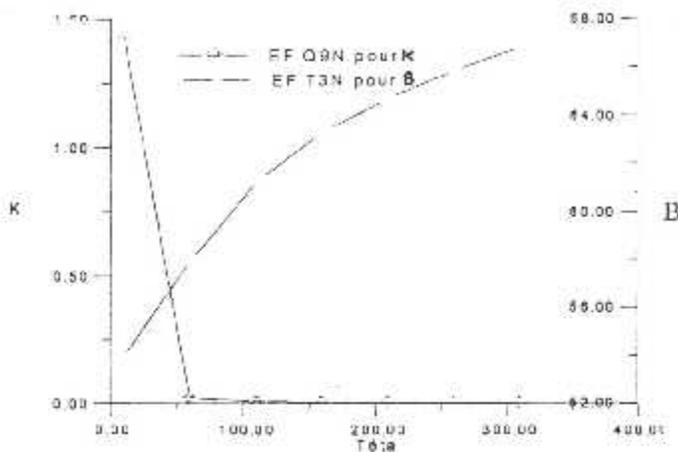
**Fig.(V-24)** Evolution de la vitesse le long d'un rayon qui passe sur l'axe de la symétrie d'un secteur ,pour les 2 types d'EF.



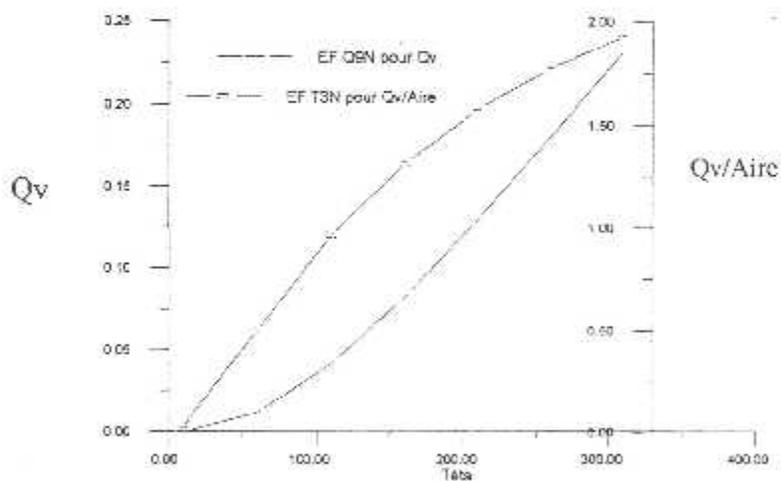
**Fig .(V-25)** :Les contours des iso-vitesses pour une section d'un secteur d'angle 270°



**Fig.(V-26)** :Evolution de la vitesse maximale et moyenne pour différents angles du sommet d'un secteur.



**Fig.(V-27)** :Evolution du coefficient de perte de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' pour différents angles Téta.



**Fig.(V-28)** :Evolution du débit volumique pour différents angles du sommet d'un secteur.

**V.4.4 Résultats du domaine d'un profil**

Le résultat présent concerne le cas d'une section de géométric type profil d'aile. L'exemple pris ici est de la série NACA 00't'.

C'est un profil symétrique par rapport au repère 'XOY' par l'équation suivante [31] :

$$y(x)=t(a_1x+a_2x+a_3x^2+a_4x^4) \quad 0 < x < 1$$

Avec :

$A1=1.4779155$

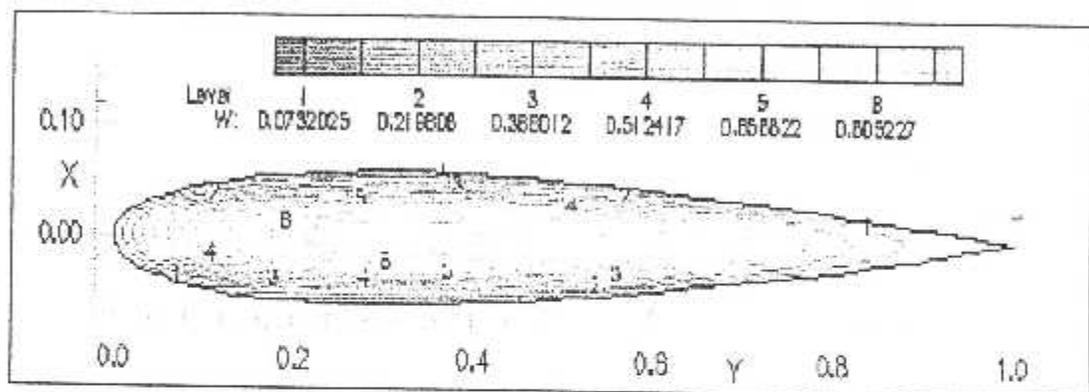
$A2=-0.624424$

$A3=-1.7478095$   $A4=1.384087$

$A5=-0.489769$

#### V.4.4.1 Répartition des vitesses et quelques paramètres importants

Pour cette partie de résultats on prend le cas du profil NACA0012. Le champ des vitesses à travers cette section est montré par les lignes isovitesses, qui sont illustrés dans la figure (V-29) suivante.



**Fig.(V-29)** :Les contours des iso-vitesses pour une section de forme profil.

On constate que le repère de la section est orthogonale, et la forme du profil correspond à celle de la référence [31] fidèlement. Les vitesses sont montrées en graduation par les couleurs de 'zéro' à la paroi vers leurs valeurs maximales à 29.36% de la corde

Pour voir l'évolution de la vitesse du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite, on a tracé le graphe de la figure (V-30) pour les deux types d'éléments finis.

On remarque que les vitesses évoluent faiblement du bord de fuite vers leur maximum (à environs 30% de la corde) que celles de bord d'attaque vers ce maximum. Les résultats des deux types d'éléments finis montrent une bonne concordance entre eux.

Dans la suite, on va déterminer, pour ce profil les valeurs des paramètres par des graphes en fonction de l'épaisseur 't', ce dernier varie de la valeur 0.10 à 0.50 avec un pas de 0.05.

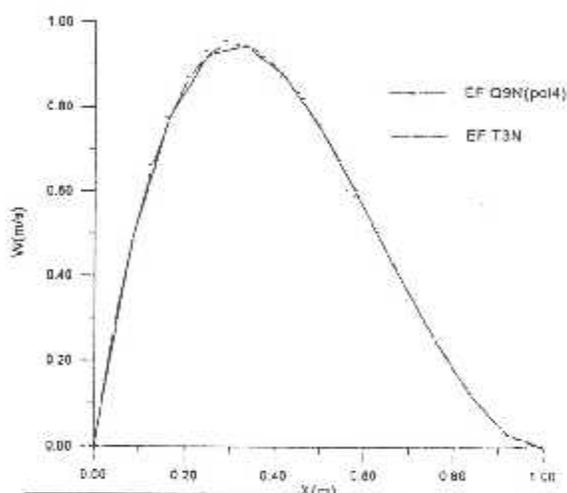
La figure (V-31) montre l'évolution de la vitesse maximale et moyenne pour différentes épaisseurs du profil. L'allure de ces courbes indique qu'il y a une augmentation quasi linéaire de ces vitesses, au fur et à mesure qu'on augmente l'épaisseur 't'. Cela du fait de l'augmentation systématique de la section et du débit, pour un même gradient de la pression appliqué. Cette figure montre qu'il y a concordance entre les deux méthodes utilisés.

La figure (V-32) montre l'évolution du coefficient de perte de charge 'K' et du coefficient géométrique 'B' en fonction des différentes valeurs de l'épaisseur 't'.

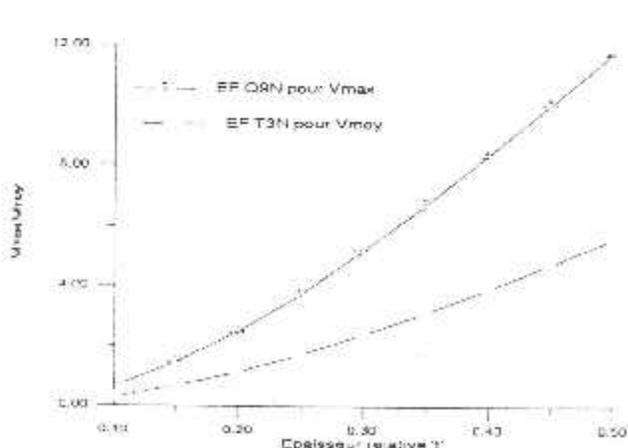
On remarque que le paramètre 'K' décroît rapidement avec les sections ayant l'épaisseur 't' inférieur à 0.20 ,vu que le débit croît paraboliquement ,puis pour le reste des valeurs d'épaisseur ce il se diminue lentement .Ceci est du au fait que la section lorsqu'elle augmente ,elle permet un passage d'un grand débit et une diminution de la perte de charge ,et par suite la diminution de 'K'.

Pour la courbe du coefficient 'B', on remarque une diminution non linéaire dans une marge de valeurs d'environ de 60 à 62 pour les différentes valeurs d'épaisseurs 't' .Ce qui montre l'effet de ce coefficient sur le coefficient des perte de charge ,on remarque aussi que sa valeur est toujours inférieur à celles du cercle .

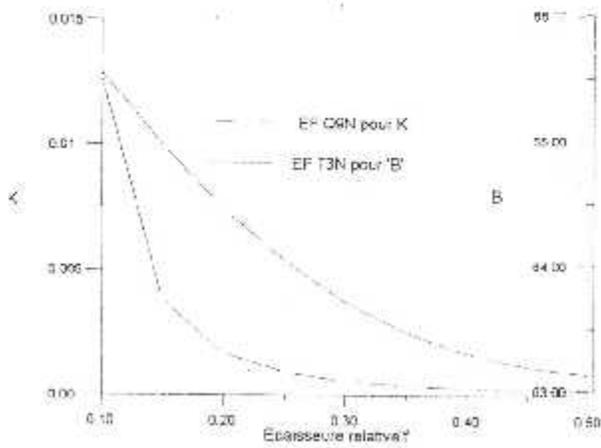
La figure montre qu'il y a une bonne concordance entre les deux types d'éléments finis.



**Fig.(V-30)** :Evolution de la vitesse pour les deux types d'EF.



**Fig.(V-31)** :Evolution de la vitesse maximale et moyenne pour différentes épaisseur relative.



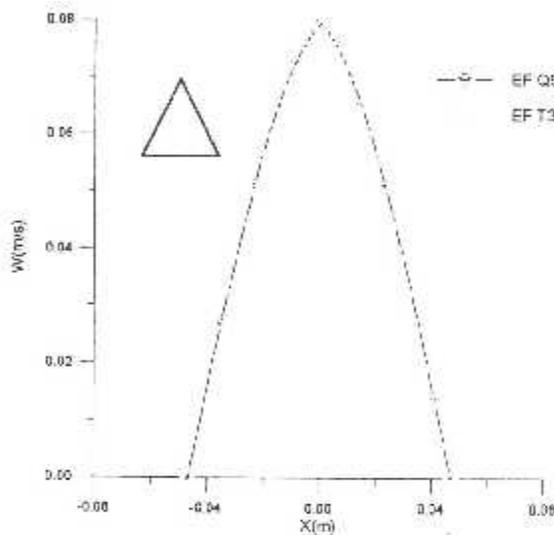
**Fig.(V-32)** :Evolution des coefficients 'K' et 'B' pour différentes valeurs d'épaisseur relative.

V.4.5 Résultats des divers domaines

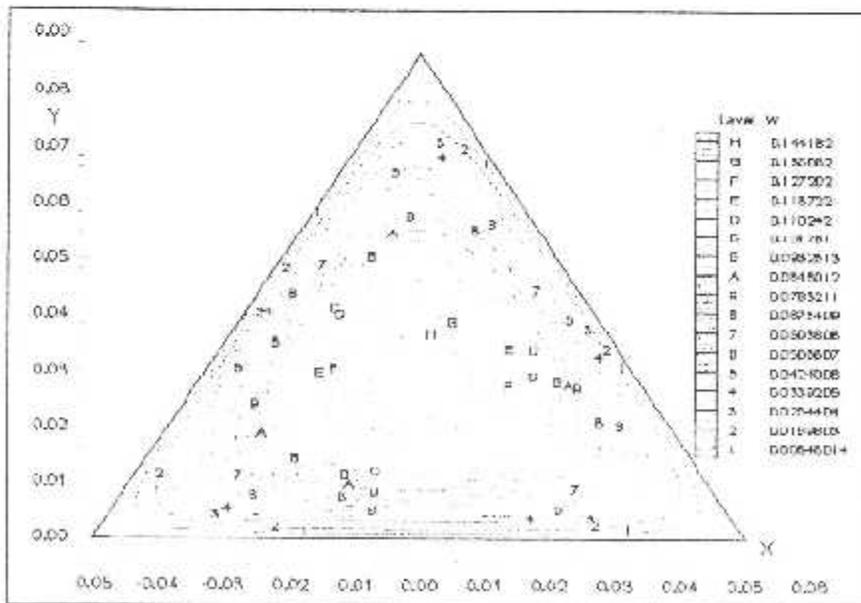
V.4.5.1 Domaine d'un triangle équilatérale

Dans cet exemple on a prit la section d'un triangle équilatérale avec un coté  $a=0.1$  m .On a présenté dans la suite l'évolution de la vitesse le long d'une diagonale pour les deux solutions d'éléments finis dans la figure (V-33). On constate que les vitesses sont toujours paraboliques et les courbes des solutions sont superposées entre elles, ce qui permet une validation des résultats.

Pour voir les contours des iso-vitesses , on a la figure (V-34) qui montre leur répartitions et graduation dans la section ,où on remarque les faibles vitesses dans les coins de la frontière du triangle ,ce qui concorde avec la réalité .



**Fig.(V-33)** :Evolution de la vitesse pour les deux types d'EF.

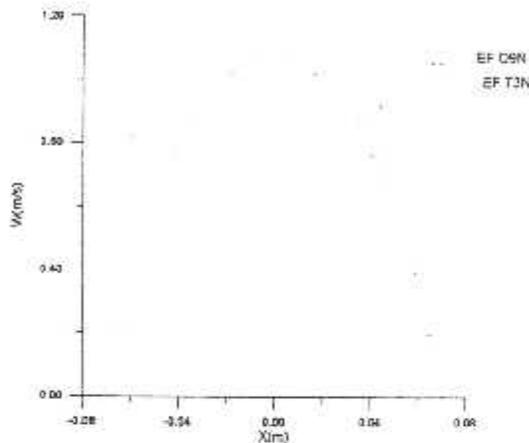


**Fig.(V-34)** :Les contours des iso-vitesses pour une section de forme d'un triangle équilatérale.

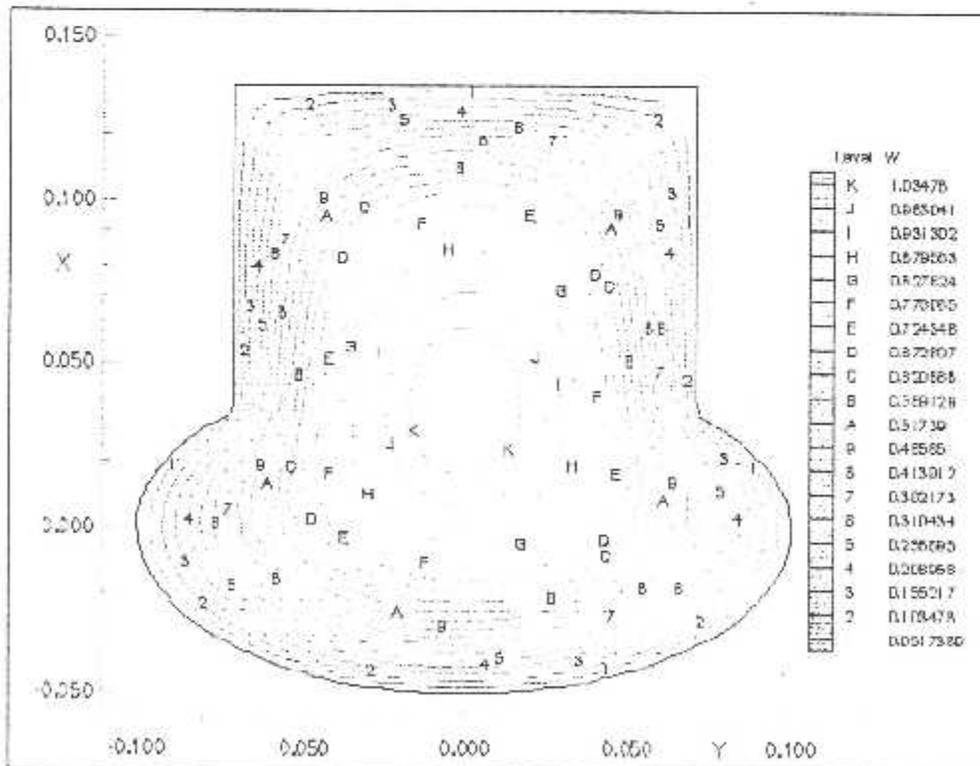
V.4.5.2 Domaine d'une géométrie combinée

Dans cet exemple ,on a pris la section d'une ellipse combinée d'un rectangle en haut .On a présenté dans la suite l'évolution de la vitesse le long du rayon qui passe par l'axe de symétrie de la géométrie pour les deux types d'éléments finis dans la figure (V-35). On constate que les vitesses sont toujours paraboliques et les courbes des solutions sont superposées entre elles , ce qui permet la validation des résultats.

LA figure (V-36) illustre les contours des isovitesses , avec leur répartition et graduation dans la section avec différentes couleurs .



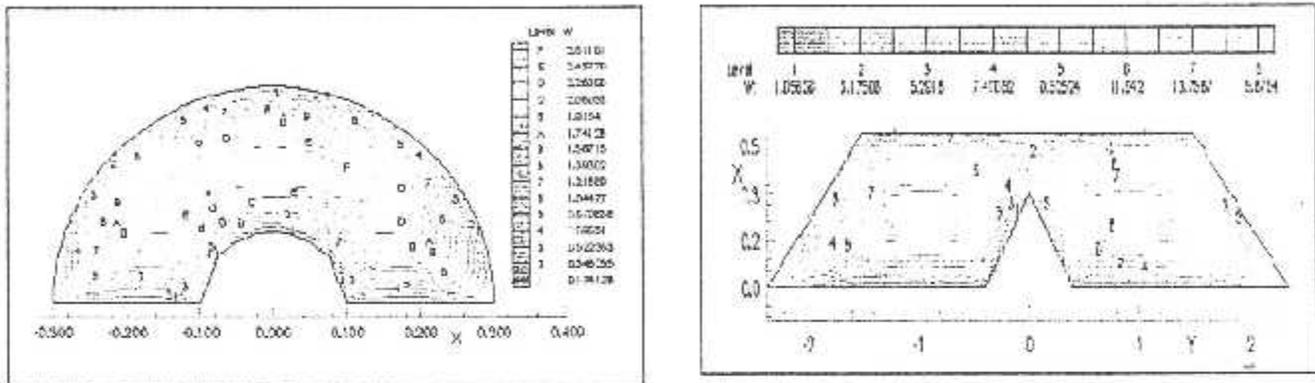
**Fig.(V-35)** :Répartition des vitesse pour les deux types d'éléments finis T3N et Q9N



**Fig.(V-36)** :Les contours des iso-vitesses pour une section combinée (ellipse+rectangle)

**V.4.6 Domaines d'un trapèze et demi cercle courbés par une partie dans leur coté bas**

Pour ces domaines ,on se satisfait d'illustrer la répartition des iso-vitesses dans les sections, en montrant leurs concentrations et les régions des vitesses maximales .



**Fig.(V-37 a,b) :**Les contours des iso-vitesses des sections de coté bas courbé.

**V.5 Tableaux récapitulatifs de quelques paramètres importants**

Les paramètres dynamiques calculés ont fait l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques disponibles pour quelques géométries . Ces résultats sont représentés dans les prochains tableaux. L'utilité de cette comparaison est de voir les meilleures résultats en comparant avec les résultats analytiques.

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX	31	23
		NNY	31	25
		NNT	961	2205
		NEL	1800	528
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	0.03141593	0.3140157	0.03140137	
W Max	1.373626	1.372869	1.373431	
W Moy	0.6868132	0.6851329	0.6866283	
POS X VIT MAX	0.00000	0.00000	0.00000	
POS Y VIT MAX	0.00000	0.00000	0.00000	
DEBIT Qv	0.02157687	0.02151425	0.02156563	
PERTE ΔH	0.0085949	0.00845949	0.00845949	
COFF K	0.00703713	0.00706846	0.0702495	
COFF 'B'	64.00000	64.22321	63.92415	
CONTRAINTE PARTIELLE	0.000500	0.000500	0.000500	
PERIMETRE Pm	0.62831853	0.62831853	0.62831853	

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX	25	15
		NNY	21	15
		NNT	525	841
		NEL	960	196
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	/	0.08117082	0.08104287	
W Max	/	0.952305	0.951632	
W Moy	/	0.4385457	0.4399106	
POS X VIT MAX	/	0.29167	0.31974	
POS Y VIT MAX	/	0.00000	0.00000	
DEBIT Qv	/	0.03559711	0.03565162	
PERTE ΔH	/	0.00845949	0.00845949	
COFF K	/	0.01374036	0.00340842	
COFF 'B'	/	63.52039	63.12383	
CONTRAINTE PARTIELLE	/	0.000398	0.000397	
PERIMETRE Pm	/	2.03927228	2.03927228	

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX	45	25
		NNY	41	26
		NNT	1845	2499
		NEL	3520	600
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	/	0.12551155	0.12632876	
W Max	/	2.762491	2.786041	
W Moy	/	1.4691648	1.4852914	
POS X VIT MAX	/	-0.00096	-0.01286	
POS Y VIT MAX	/	0.19000	0.19102	
DEBIT Q <sub>v</sub>	/	0.18439715	0.18763501	
PERTE ΔH	/	0.00845949	0.00845949	
COFF K	/	0.00233033	0.00057371	
COFF 'B'	/	68.69430	68.83616	
CONTRAINTE PARTIELLE	/	0.000758	0.000763	
PERIMETRE P <sub>m</sub>	/	1.65663706	1.65663706	

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX	35	13
		NNY	33	13
		NNT	1155	625
		NEL	2176	144
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	/	1.78613935	1.81471143	
W Max	/	6.883005	2.933811	
W Moy	/	4.3748969	0.37198960	
POS X VIT MAX	/	1.02336	0.96651	
POS Y VIT MAX	/	0.25000	0.25000	
DEBIT Q <sub>v</sub>	/	0.95873296	0.82409499	
PERTE ΔH	/	0.00845949	0.00845949	
COFF K	/	0.00016782	0.00039332	
COFF 'B'	/	65.99033	65.42338	
CONTRAINTE PARTIELLE	/	0.001773	0.001801	
PERIMETRE P <sub>m</sub>	/	10.07452860	2.07452860	

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX	26	17
		NNY	26	17
		NNT	728	1089
		NEL	1350	256
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	/	0.00432936	0.00433013	
W Max	/	0.152182	0.152431	
W Moy	/	0.0684129	0.686865	
POS X VIT MAX	/	0.00156	0.00000	
POS Y VIT MAX	/	0.02848	0.02977	
DEBIT Q <sub>v</sub>	/	0.00029618	0.029742	
PERTE ΔH	/	0.00845949	0.00845994	
COFF K	/	0.20470513	0.05077840	
COFF 'B'	/	53.52353	53.32927	
CONTRAINTE PARTIELLE	/	0.000144	0.000144	
PERIMETRE P <sub>m</sub>	/	0.3000000	0.3000000	

METHODES	ANALYTIQUE	TYPE /	T3N / 01	Q9N / 03
		NTEF		
PARAMETRES		NNX		19
		NNY		18
		NNT		1295
		NEL		306
		EF TRIANGULAIRE		QUADRILATAIRE
AIRE A	/	0.02839280	0.02835996	
W Max	/	1.079877	1.087580	
W Moy	/	0.5117997	0.5169458	
POS X VIT MAX	/	0.00244	0.00000	
POS Y VIT MAX	/	0.03496	0.03723	
DEBIT Q <sub>v</sub>	/	0.01453143	0.01466056	
PERTE ΔH	/	0.00245949	0.00845949	
COFF K	/	0.00911596	0.00892503	
COFF 'B'	/	44.44031	43.89620	
CONTRAINTE PARTIELLE	/	0.00360	0.000359	
PERIMETRE P <sub>m</sub>	/	0.7892156	0.78942156	

**Conclusion :**

Les résultats obtenus après le calcul effectué avec les deux type d'éléments finis sont très concordants , dont ceux calculés avec l'élément Q9N sont les plus précis, et cela est du à l'avantage d'appliquer le concept de la méthode des éléments finis , connu comme une méthode d'une très bonne précision

**Remarque :**

Les géométries rectangle et ellipse existent dans la référence [20].

## Conclusion générale

L'objectif de ce travail est de procéder à la simulation numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux traversant des conduites ayant des sections complexes simplement connexe, pour des régime laminaire, par la méthode des éléments finis, tout en déterminant le champ des vitesses et les pertes des charges subit par le fluide, ainsi que les paramètres dynamiques essentiels de l'écoulement. Permettant ainsi au constructeur aéronautique ou industriel un choix judicieux selon les critères et les exigences de l'encombrement dans l'avion par exemple ou autre.

On a adopté la simulation de l'écoulement basée sur l'extension de l'analyse mathématique de l'écoulement interne de Poiseuille, qui a abouti à un problème de l'équation de *Poisson*.

Les méthodes de génération de maillage présentées dans ce travail traitent les configurations mono-connexes, tel qu'on a élaboré deux procédés l'un pour la génération de maillage type 'H' et un second pour les géométries qui se comportent mieux avec le maillage type 'C'.

Pour stocker les éléments de la matrice de rigidité à rang élevé obtenue après discrétisation en éléments finis, on a programmé l'algorithme de stockage bande de type colonne par colonne dans un vecteur, vu la simplicité de ses formules de récurrences, où on a adapté une méthode de résolution directe du système d'équations algébriques, cette méthode est celle de *Khaletski*.

De ce fait, un programme de calcul donc a été mis au point, permettant de calculer les vitesses axiales de l'écoulement d'un fluide visqueux. Il prend aussi en charge le calcul nécessaire pour l'évaluation des pertes des charges, le débit et les paramètres de l'écoulement à travers les conduites ayant des sections simplement connexes, avec une bonne adaptation aux frontières tout en ajustant la précision d'interpolation par l'utilisation de deux types d'éléments finis soit triangulaire à 3 nœuds ou quadrilatère à 9 nœuds.

Cependant, les solutions numériques obtenues ont fait l'objet d'une comparaison avec les résultats analytiques obtenues par d'autres sous programmes élaborés (Annexe D) où ils sont consacrés pour les sections circulaires, rectangulaires, elliptiques, dont on a pu avoir les solutions analytiques. D'où la validation a été très satisfaisante lors de la comparaison.

Nous avons montré que les vitesses obtenues numériquement sont en général très proches des vitesses analytiques. Ces vitesses varient en augmentation à partir des frontières des conduites jusqu'à la zone où elle atteignent leurs maximum, d'une manière parabolique ou bien proche, pour toutes les géométries traitées. Cette variation est due à la présence de la viscosité du fluide véhiculé.

Nous avons remarqué en premier lieu qu'en augmentant la discrétisation, on obtient une meilleure précision et une convergence vers la solution exacte. On peut remarquer aussi que les solutions obtenues avec l'élément fini de type quadrilatère sont plus précises et meilleures avec un temps d'exécution élevé, que celles avec l'élément de type triangulaire, pour un même nombre total de nœuds. Il est justifié de fait que l'interpolation avec cet élément est faite avec des polynômes d'ordre supérieur et avec plusieurs termes utilisés dans ses fonctions d'interpolations. Tandis que, pour avoir une précision élevée avec des éléments triangulaires à nombre de nœuds par élément faible, il faut augmenter le nombre d'élément dans le maillage, mais cela nécessite un temps de calcul assez élevé.

Néanmoins, on a constaté d'après les résultats que pour l'élément fini Q9N, il y a quelques polynômes testés pour l'interpolation numérique, ne donnent pas de solution (divergent) et d'autres avec des solutions mais moins précises.

Les résultats obtenus ont montré que la discrétisation qui nous satisfait est celle qui donne un nombre de nœuds NNT supérieur à 1000 nœuds, et qu'il est recommandé de faire une discrétisation qui donne des cellules non trop plates, en d'autres termes des angles internes non très aigus et non très obtus. D'où il vaut mieux d'avoir les discrétisations le long des axes 'X' et 'Y' proches entre elles.

L'étude présentée nous a amené à constater aussi que le coefficient  $K$  des pertes de charge est fonction du nombre de *Reynolds* et de la forme de la conduite (désigné par le coefficient  $B$ ) et sa surface interne, présentée par la rugosité des parois, où cette dernière a une influence négligeable pour les régimes laminaires.

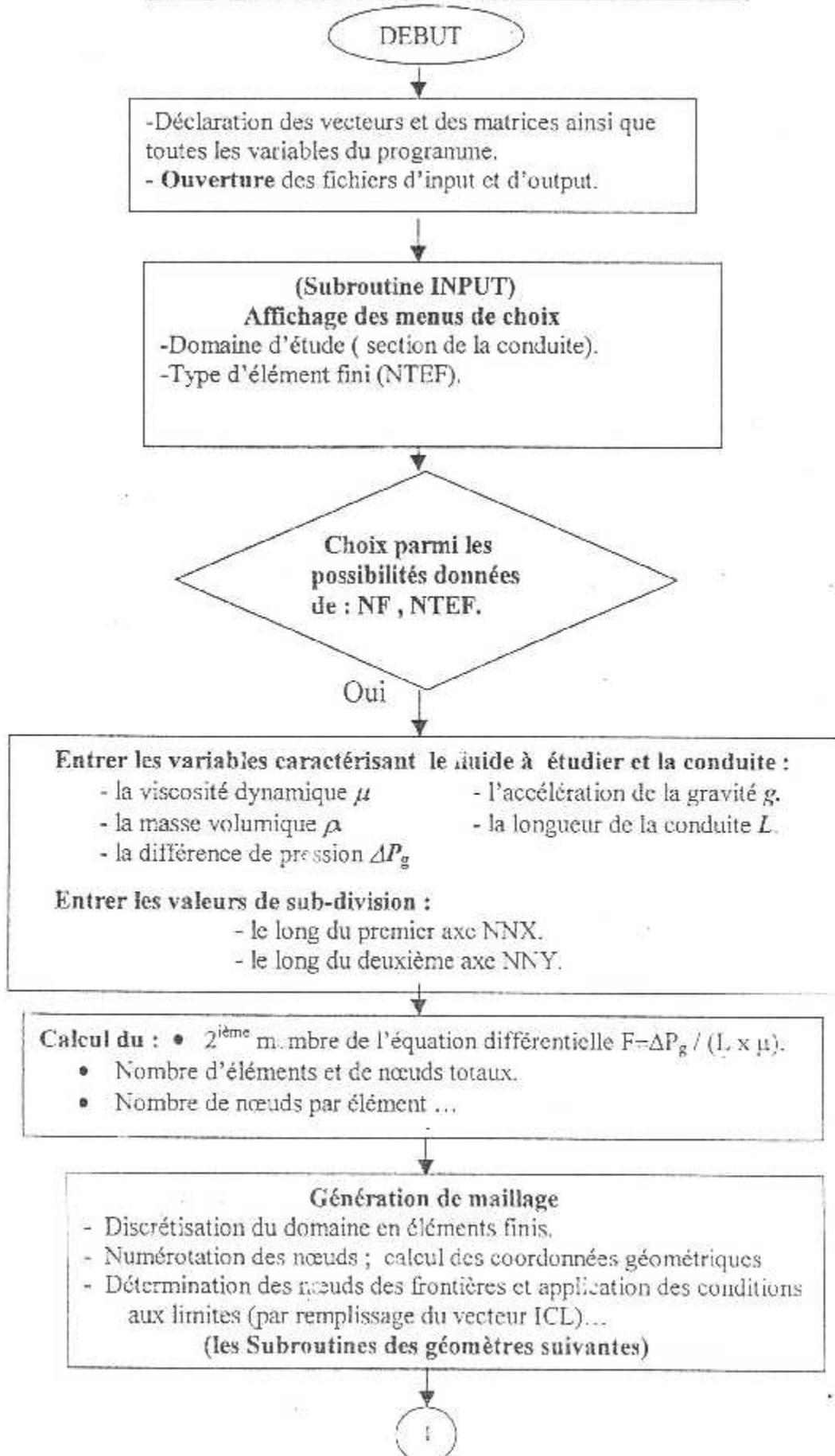
Constatant aussi qu'il faut choisir la forme de la section des conduites et les paramètres optimaux pour les quelles, on obtient les coefficients de perte de charge les plus faibles.

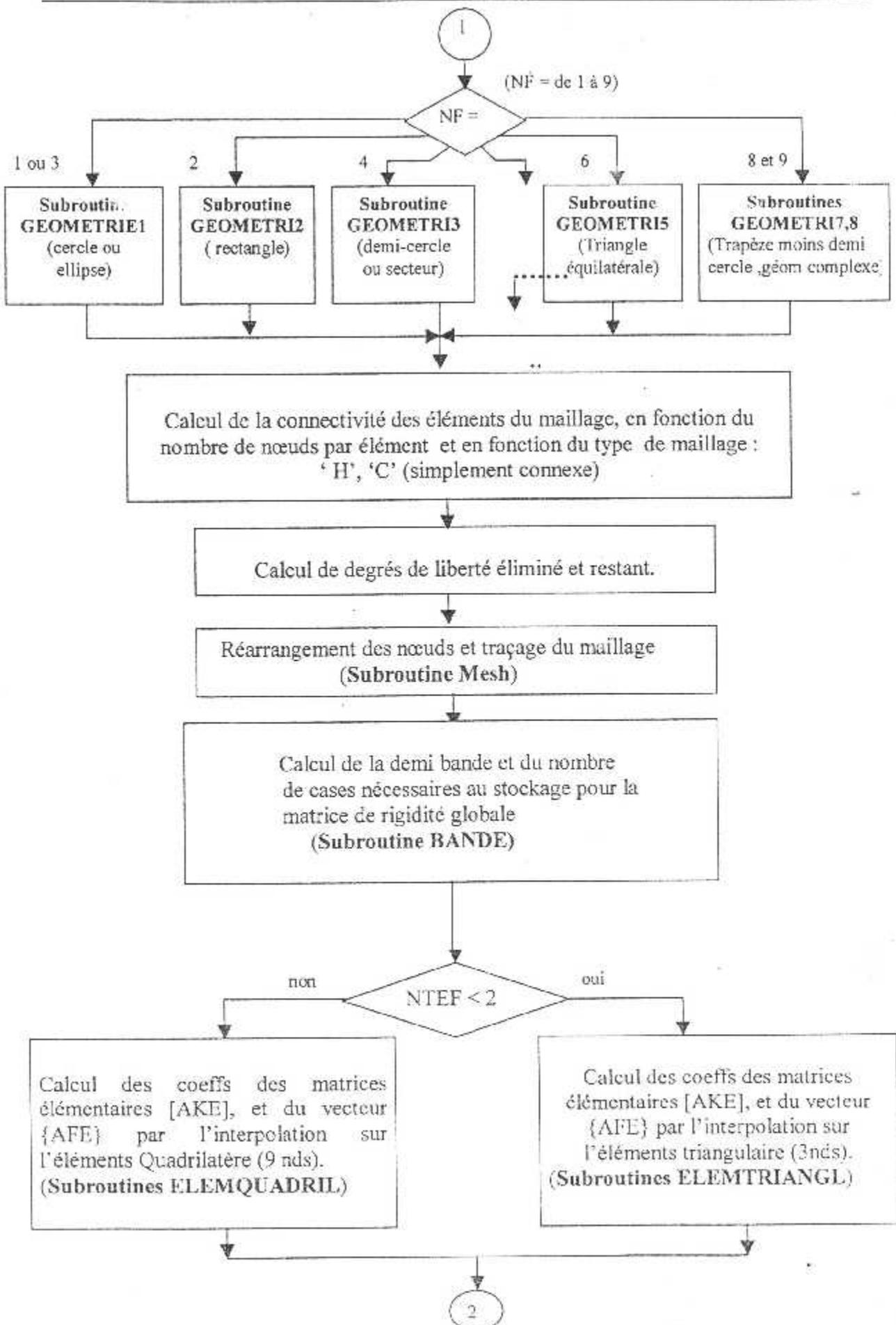
Alors, des compromis à faire entre le coefficient de la forme géométrique  $B$  et les cotés de la section (géométrie) choisie, de telle sorte à avoir un coefficient  $B$  le plus faible possible, et des cotés qui donnent une section de grande surface et donc un débit volumique et une vitesse moyenne plus important possible, tout en diminuant ainsi les énergies et les pressions mises en jeu en pratique.

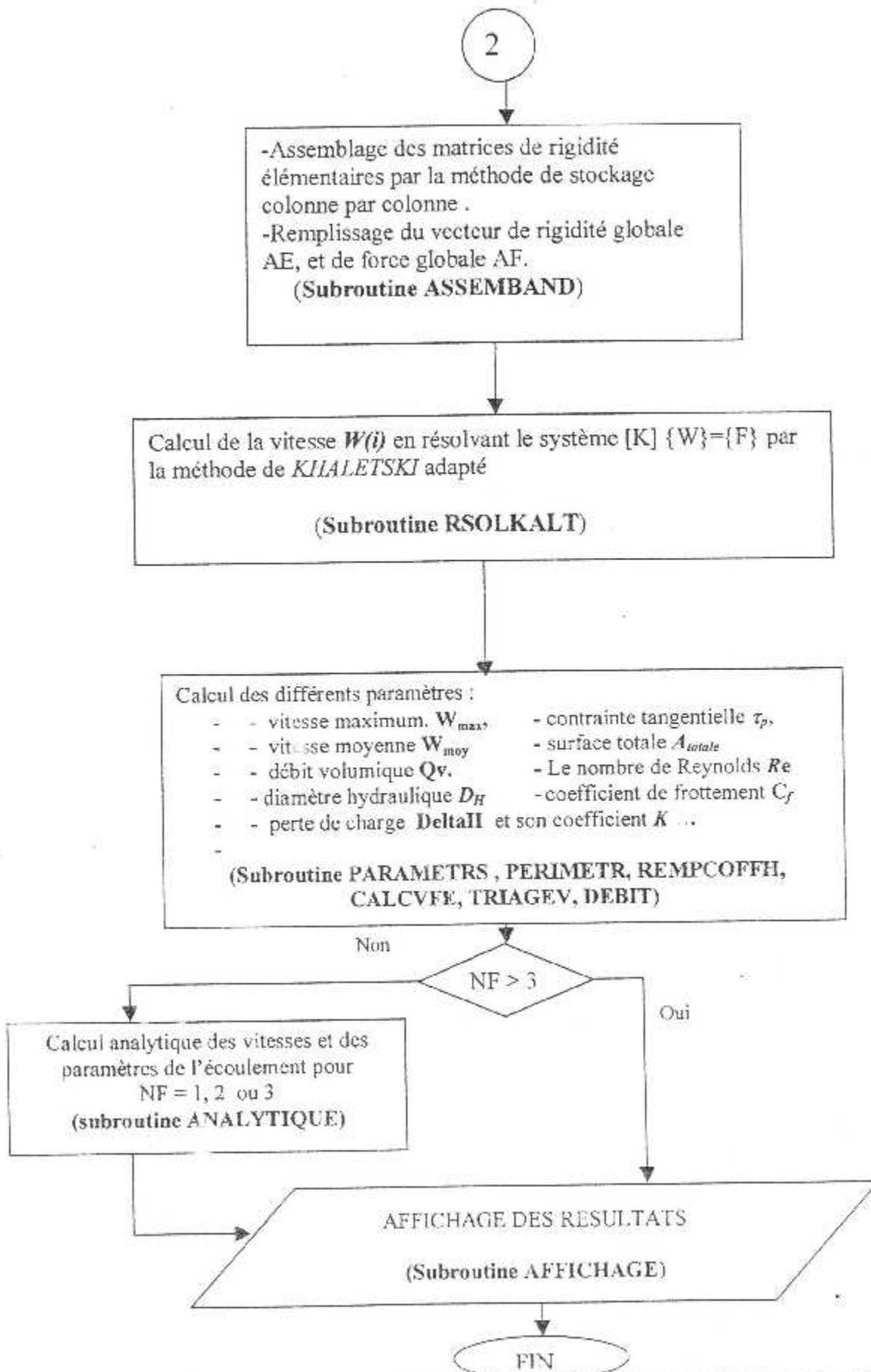
Toute fois, ce projet nous a permis d'exploiter nos connaissances théoriques et d'éclaircir un peu sur la procédure de résoudre un tel problème par la méthode des éléments finis, et de s'améliorer dans la programmation de cette méthode ainsi que de confronter à ses difficultés et ses disciplines, où elle est considérée comme une méthode révolutionnaire dans presque tous les domaines techniques rencontrés dans la pratique mais très délicate vu l'utilisation intensive du numérique et de l'ordinateur.

Finalement, nous espérons que ce travail pourrait servir de base pour un développement progressif dans les techniques appliquées aux éléments finis et dans le domaine des écoulements internes dans les conduites.

## ANNEXE A

ORGANIGRAMME DU PROGRAMME PRINCIPAL





ANNEXE B**DIMENSIONNEMENT DES CONDUITES ET  
NOTION DE PERTES DE CHARGE****B.1- DIMENSIONNEMENT DES CONDUITES [22]****a- Notion d'optimum économique**

Le choix du diamètre d'une conduite doit être adapté aux conditions de l'écoulement destiné à la parcourir. Dans certain cas, des limites à la vitesse du fluide sont imposées par des conditions physiques. En respectant ces limites, nous pouvons conserver la configuration d'écoulement imposée. Donc le choix de la vitesse moyenne de l'écoulement, et par suite du diamètre de la conduite, résulte d'un optimum économique dont les abaques. Choisir un diamètre plus grand se traduit par une dépense initiale (investissement) plus élevée, et par une perte de charge plus faible, donc par des dépenses d'énergie (fonctionnement) moins élevées, et vice versa.

**b- Evolution des différents coûts.**

La puissance dépensée par mètre de conduite pour vaincre les pertes de charge est égale à :

$$P(W/m) = \frac{8K\rho \cdot q_v^3}{\pi^2 D^5} \quad (B-1)$$

D'autre part, le prix unitaire d'une conduite augmente avec son diamètre ; on peut souvent représenter cette variation par une loi simple, proportionnelle à  $D^\alpha$ , où l'exposant  $\alpha$ , qui dépend des matériaux et du mode de fabrication, est compris entre 1 et 2 mais le plus souvent entre 1,2 et 1,4. Dans ces conditions, on minimise la somme des dépenses actualisées de fonctionnement et des investissements lorsque les premières sont égales à  $\alpha/5$  fois les seconds ; cela signifie que, suivant la valeur de l'exposant  $\alpha$ , les dépenses de fonctionnement actualisées représentent en général à l'optimum entre 24 et 28 % des investissements.

Remarque : Pour le cas industriel, on a dans le cas de transport de gaz à grande distance, ces dépenses doivent tenir compte également du coût des stations de recompression.

**B-2/ NOTION DE CHARGE ET PERTE DE CHARGE**

Examinons un écoulement permanent dans une conduite cylindrique de section  $S$ . L'équation de Bernoulli pour deux sections d'une veine de fluide réel s'écrit :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \Delta H \quad (B-2)$$

La vitesse  $W$  étant la même dans les deux sections. Sur la surface de la conduite existent des contraintes tangentielles, dont la valeur moyenne le long du contour de  $S$  et  $\tau_0$ , l'équation des forces projetées sur l'axe de la conduite donne :

$$\left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) \rho g S = \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right) \rho g S + \tau_0 P_m L \quad (B-3)$$

$P_m$  étant le périmètre mouillé de la section  $S$ , on a donc :

$$\Delta H = \frac{\tau_0 P_m L}{\rho g S} \quad (B-4)$$

$\tau_0$  dépend que : (analyse dimensionnelle)

- Du type de fluide (les paramètres  $\mu$ ,  $\rho$ ) et vitesse  $W$ .
- De la conduite (matériau), la forme de sa section et la dimension caractéristique  $d$
- De l'état de surface (rugosité relative  $\xi$ ).

$$\tau_0 = f(U^*, \rho, \mu, d, \xi) \quad (B-5)$$

Pour une forme de section définie il y a 6 variables et 3 dimensions, donc la formule se simplifie en une relation de trois variables dimensionnelles.

Choisissons :

$$\frac{\tau_0}{\rho W^2} : \text{Nombre de Newton}, \quad \frac{\rho W d}{\mu} : \text{Nombre de Reynolds}$$

$$\frac{\lambda}{d} = \xi : \text{Rugosité relative (avec } \lambda : \text{rugosité de la paroi).}$$

La relation est de la forme : 
$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = f(\mathfrak{R}_e, \xi) \quad (B-6)$$

Les pertes de charge sont donc :

$$\Delta H = \rho W^2 f(\mathfrak{R}_e, \xi) \cdot \frac{P_m \cdot L}{\rho g S} = f(\mathfrak{R}_e, \xi) \cdot \frac{L P_m}{S} \cdot \frac{W^2}{g} \quad (B-7)$$

Le rapport  $R_h = S/P_m$ , appelé le rayon hydraulique il caractérise les dimensions de la section. Pour une conduite circulaire le plus fréquent,  $R_h = d/4$ .

Introduisons la notion de coefficient de perte de charge continues (par frottement)  $K$ .

$$K = 8 f(\mathfrak{R}_e, \xi) \quad (B-8)$$

C'est ce qui permet d'écrire la formule de *DARCY-WEISBACH*, qui permet le calcul des pertes de charge.

$$\Delta H = \frac{K L}{D_H} \cdot \frac{W^2}{2g} \quad (B-9)$$

Avec :  $D_H = 4R_h$  et  $D_H$  : Diamètre hydraulique de la conduite.

Nous aurons finalement :

$$\Delta H = \frac{K L}{4 R_H} \cdot \frac{W^2}{2g} \quad (B-10)$$

C'est la formule de la perte de charge qui sera toujours de la même forme.

Nous proposons, dans ce qui suit, de déterminer le coefficient  $K$ , pour une conduite donnée, et un débit donné, il sera alors facile de calculer tous les éléments qui peuvent nous intéresser : perte de charge, puissance perdue, force appliquée sur les parois, etc.

### Calcul du coefficient de pertes de charge par frottement $K$

Dans les calculs actuels, on se sert du coefficient de perte de charge, il est d'usage commode du fait que, dans les écoulements dynamiquement semblables (similitude), il a la même valeur quelle que soit la nature du fluide, la vitesse de l'écoulement et les dimensions des tronçons considérés.  $K$  qui est la fonction sans dimensions, elle suffit à elle seul à caractériser la perte de charge des conduites géométriquement semblables.

Le problème qui se pose est donc de déterminer la loi de variation  $K=f(Re, \xi)$ . Cette détermination pourra être effectuée théoriquement dans certains cas (écoulement laminaire dans des conduites de sections circulaires), mais en générale il faudrait faire appel à l'expérience.

## ANNEXE C

## INTEGRATION NUMERIQUE PAR LA METHODE DE « GAUSS-LEGENDRE »

### 1/ INTEGRATION NUMERIQUE

Dans la mise en œuvre de la méthode des éléments finis, et vu que l'intégration numérique fait une partie intégrante de cette méthode, on a opté la méthode de *GAUSS-LEGENDRE* puisqu'elle est la plus utilisée et efficace que d'autres méthodes comme celle de *NEWTON-COTE* ou *SIMPSON*...

Dans la méthode de *GAUSS-LEGENDRE*, les « r » poids «  $Wp_i$  » et les « r » abscisses  $\xi_i$  sont déterminés de manière à intégrer exactement des polynômes d'ordre ' $m \leq 2r-1$ ', [23].

#### 1-a/ Détermination des poids « $Wp_i$ » et des abscisses $\xi_i$ :

Si 'F' est une fonction polynomiale de degré ' $m \leq 2r-1$ ', nous pouvons l'intégrer exactement par la méthode de *GAUSS-L* sur l'intervalle  $[-1, +1]$ :

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r Wp_i F(\xi_i) \quad (C-1)$$

l'équation (C-1) est donc vérifiée pour le polynôme suivant :

$$F(\xi) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \xi^2 + \dots - a_{2r} \xi^{2r-1} \quad (C-2)$$

Pour déterminer les poids  $Wp_i$  et les abscisses  $\xi_i$  qui sont aussi des inconnus, nous portons l'expression (C-2) dans (C-1), nous aurons alors :

$$a_1 \int_{-1}^{+1} 1 d\xi + a_2 \int_{-1}^{+1} \xi d\xi + a_3 \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi + \dots + a_{2r} \int_{-1}^{+1} \xi^{2r-1} d\xi = a_1 (W_1 + W_2 + \dots + W_r) + a_2 (W_1 \xi_1 + W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r) + \dots + a_{2r} (W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1}) \quad (C-3)$$

Pour que (C-3) soit identiquement vérifiée pour tout  $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ , il faut que :

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{\alpha+1} = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=0, 2, 4, \dots, 2r$$

$$\int_{-1}^{+1} \xi^\alpha d\xi = 0 = \sum_{i=1}^r W_i \xi_i^\alpha \quad \alpha=1, 3, 5, \dots, 2r-1$$

Soit :

$$\begin{aligned} 2 &= W_1 + W_2 + \dots + W_r \\ 0 &= W_1 \xi_1 - W_2 \xi_2 + \dots + W_r \xi_r \\ 2/3 &= W_1 \xi_1^2 + W_2 \xi_2^2 + \dots + W_r \xi_r^2 \\ &\vdots \\ 0 &= W_1 \xi_1^{2r-1} + W_2 \xi_2^{2r-1} + \dots + W_r \xi_r^{2r-1} \end{aligned} \quad (C-4)$$

Le système (C-4) est linéaire en  $W_i$  et non linéaire en  $\xi_i$ , il détermine les 2r paramètres de (C-1) sous les conditions :

$$\left. \begin{aligned} W_i &> 0 \\ 0 &< \xi_i < 1 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

Les abscisses  $\xi_i$ , solution de (C-4) sont aussi les racines du polynôme de *LEGENDRE* d'ordre 'r'

$P_r(\xi) = 0$ , défini par la formule de récurrence :

$$\left. \begin{aligned} P_0(\xi) &= 0 \\ P_1(\xi) &= \xi \\ &\vdots \\ P_k(\xi) &= \frac{2k-1}{k} \xi \cdot P_{k-1}(\xi) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(\xi) \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, r \quad (C-5)$$

Les poids  $W_i$  sont donnés par [23] :

$$W_i = \frac{2(1-\xi_i^2)}{(r \cdot P_{r-1}'(\xi_i))^2} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (C-6)$$

L'erreur d'intégration est donnée par :

$$e = \frac{2^{2r+1}(r!)^4}{(2r+1)(2r)!^3} \frac{d^{2r}F}{d\xi^{2r}} \quad (C-7)$$

Le tableau suivant donne les valeurs des abscisses  $\xi_i$  et des poids  $W_i$  pour :  $r=1$  jusqu'à '7'. Les abscisses  $\xi_i$  sont symétrique par rapport à  $\xi_i = 0$ . Les poids  $W_i$  correspondant à deux points symétriques sont égaux : (la précision est de l'ordre  $10^{-19}$ )

$r$	$\xi_i$	$W_i$
1	0.000000 000000 000000	2.000000 000000 000000
2	± 0.577350 269189 625764	1.000000 000000 000000
3	± 0.774596 669241 483377 0.000000 000000 000000	0.555555 555555 555555 0.888888 888888 888888
4	± 0.861136 371594 052575 ± 0.339981 043584 856264	0.347854 845137 453857 0.652145 154862 546142
5	± 0.906179 845938 663992 ± 0.538469 310105 683091 0.000000 000000 000000	0.236926 885056 189087 0.478628 670499 366468 0.568888 888888 888888
6	± 0.932469 514207 152027 ± 0.661209 366466 264513 ± 0.238619 185083 196908	0.171324 492379 170345 0.360761 573048 138607 0.467913 934572 691047
7	± 0.949107 912342 758524 ± 0.741531 185599 394439 ± 0.405845 151377 397166 0.000000 000000 000000	0.129484 966168 869693 0.279705 391489 276667 0.381830 050505 118944 0.417959 183673 469387

Tableau 1 : Les abscisses  $\xi_i$  et les poids  $W_i$  de l'intégration numérique par la méthode de GAUSS-LEGENDRE, pour :  $r = 1$  jusqu'à '7'

#### 1-b/ Généralisation à un intervalle d'intégration quelconque

Jusqu'à présent nous avons présenté la méthode de GAUSS-L dans l'intervalle  $[-1, +1]$  sans se soucier de sa généralisation à un intervalle quelconque  $[a, b]$  sur lequel "F" est définis. Avec un changement de variable approprié, une intégrale du type suivante, peut facilement se ramener à une intégrale sur l'intervalle  $[-1, +1]$ .

$$\int_a^b F(x) dx \quad (C-8)$$

Le changement de variable qu'il faudrait opérer est le suivant :  $x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2}$

Après remplacement de x par sa valeur, l'intégrale (C-8) s'écrit :

$$\int_a^b F(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)) d\xi$$

Que nous pouvons l'évaluer par la méthode de *GAUSS-LEGENDRE*.  
D'après ce qui précède, nous pouvons évaluer l'intégrale double suivante :

$$I = \int_c^d \int_a^b F(x,y) dx dy \quad (C-9)$$

Avec cette méthode, nous on utilisant dans chaque direction (x et y) une intégration numérique à une dimension. Pour cela, nous devons opérer un changement de variables :

$$\begin{aligned} x &= x(\xi) \\ y &= y(\eta) \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -1 \leq \xi \leq +1 \\ -1 \leq \eta \leq +1 \end{cases}$$

$$\text{Alors :} \quad \begin{aligned} x &= \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\ y &= \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2} \end{aligned}$$

Après remplacement de x et y par leurs nouvelles expressions dans (C-9) l'intégrale I s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \end{aligned} \quad (C-10)$$

Avec  $r_1$  points dans le sens de 'x' et  $r_2$  points dans le sens de 'y', la méthode de *GAUSS-L* permet d'intégrer exactement le produit d'un polynôme en x d'ordre  $2r_1-1$  et d'un polynôme en y d'ordre  $2r_2-1$ .

Remarque :

$$\text{Les termes :} \quad \left. \begin{aligned} &\frac{b-a}{2} \\ &\frac{(b-a)(d-c)}{4} \end{aligned} \right\} \text{intégration à une dimension ou intégration double}$$

Sont constants, parce que les limites d'intégration sont constantes. En effet, ce sont les déterminants des matrices *Jacobiniennes* des transformations :

$$\begin{aligned} (x) &\xrightarrow{T_1} (\xi) \\ (x, y) &\xrightarrow{T_2} (\xi, \eta) \end{aligned}$$

$$\text{Exemple :} \quad [J_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix}$$

Les déterminants de ces matrices peuvent ne pas être constants. Dans ce cas nous n'avons pas le droit de les faire sortir des signes «  $\int$  » somme, et ils doivent être évalués aux points d'intégration de *GAUSS-L*. La forme d'intégration devient :

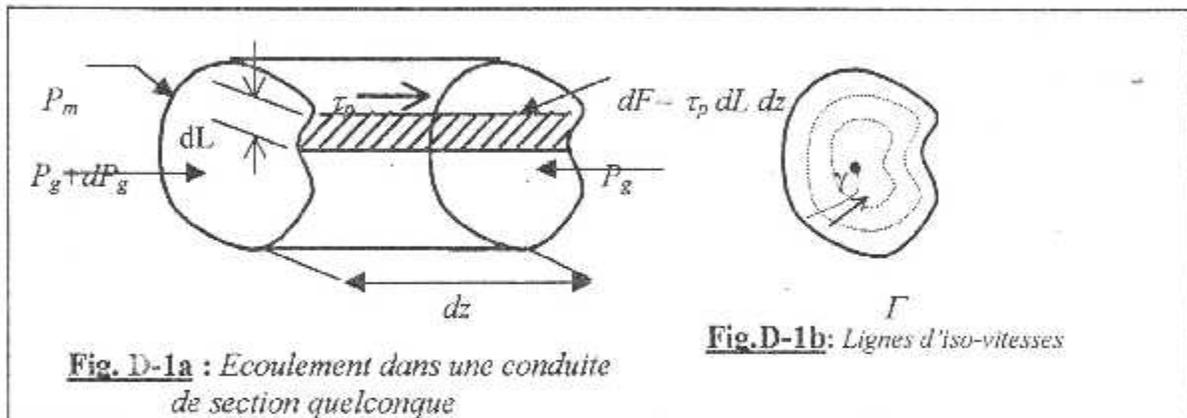
$$\begin{aligned} I &= \int_c^d \int_a^b F(x,y) dx dy \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(x(\xi), y(\eta)) \text{Det}[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} W_i W_j F(x(\xi_i), y(\eta_j)) \text{Det}[J(\xi_i, \eta_j)] \end{aligned} \quad (C-11)$$

## ANNEXE D

## SOLUTIONS ANALYTIQUES POUR QUELQUES CONFIGURATIONS

## D.1 CAS DES SECTIONS NON - CIRCULAIRES

Pour une conduite cylindrique quelconque, en régime laminaire ou turbulent, les vitesses moyennes sont à peu près parallèles aux génératrices de la conduite. Les courants secondaires, s'ils existent, n'introduisent que de faibles inclinaisons sur les vitesses moyennes, et par conséquent leur influence est sûrement négligeable [16] et [6]. Dans une section droite la pression  $P_g$  est donc pratiquement constante, est le gradient longitudinal  $dP_g/dz$  est constant entre deux sections.



**Fig. D-1a :** *Écoulement dans une conduite de section quelconque*

**Fig.D-1b:** *Lignes d'iso-vitesses*

Dans une section droite, on peut tracer les courbes d'iso-vitesses figure (D-3b) si l'on compte la distance à partir de la périphérie  $\Gamma$  en suivant les courbes  $\gamma$  qui leur sont orthogonales. Nous obtenons la répartition des vitesses (champ) d'une conduite non-circulaire.

La dimension transversale utilisée est le diamètre hydraulique  $D_H$  qui égale à quatre fois le rayon hydraulique  $R_H$ , lui-même quotient de l'aire  $S$  de la section par son périmètre  $P_m$

$$D_H = 4R_H = 4 \frac{S}{P_m} \quad (D-1)$$

Le nombre de *Reynolds* de l'écoulement doit être défini à partir du diamètre hydraulique  $D_H$ .

$$\mathfrak{R}_e = \frac{\rho W_{\text{moy}} D_H}{\mu} \quad (D-2)$$

La force de frottement  $F$  sera de la forme :

$$F = \tau_p P_m L \quad (D-3)$$

avec :

$$\tau_p = \frac{S}{P_m} \left( - \frac{dP}{dz} \right) \quad (D-4)$$

La formule de la perte de charge sera toujours de la forme : [6]

$$\Delta H = K \frac{L}{D_H} \frac{W_{moy}^2}{2g} \quad (D-5)$$

Le coefficient sans dimension  $K$  est communément appelé coefficient de perte de charge linéaire, il suffit à lui seul à caractériser la perte de charge des conduites.

Le problème qui se pose est donc de déterminer la loi de variation de  $K$  avec  $\mathcal{R}_e$ . Cette détermination pourra être effectuée théoriquement dans certains cas (pour écoulement laminaire), mais en général, il faudrait faire appel à l'expérience.

En écoulement laminaire, on a toujours une relation du coefficient de perte de charge sous la forme :

$$K = \frac{B}{\mathcal{R}_e} \quad (D-6)$$

$B$  : coefficient qui dépend de la forme et des dimensions transversales de la conduite. Dans quelques cas simples, on peut calculer sa valeur.

## D.2 Section rectangulaire [16]

Appelant  $a_0$  et  $b_0$  les cotés du rectangle, on peut supposer que l'écoulement est du type plan, loin des extrémités amont et aval du conduit.

On considère les conditions suivantes du rectangle :  $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b$  (voir la figure ci dessous)

Le domaine d'existence du régime laminaire se limite aux valeurs de  $R_e$  inférieures à la valeur critique  $R_{ec}$  qui dépend de la forme de la section droite et certains facteurs. La figure (D-2) donne des résultats de  $R_{ec}$  qui correspond à une section rectangulaire à différentes dimensions.

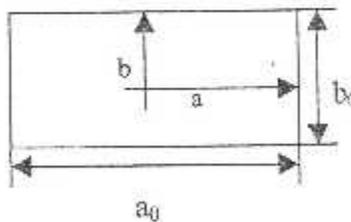


Figure (D-2) : Conduite cylindrique de Section rectangulaire.

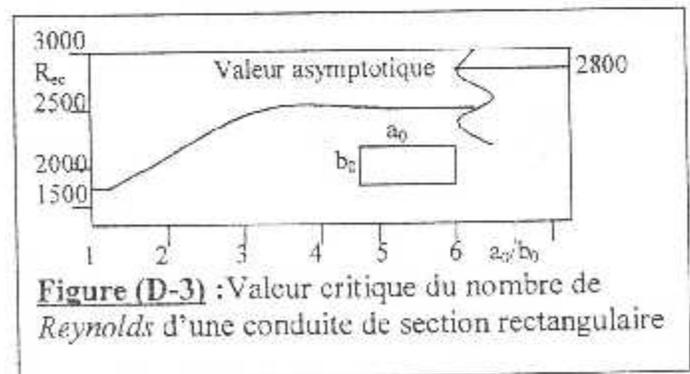


Figure (D-3) : Valeur critique du nombre de Reynolds d'une conduite de section rectangulaire

Le diamètre hydraulique a pour expression :  $D_H = 2 \frac{a_0 b_0}{a_0 + b_0}$  (D-7)

### a- Expression de la vitesse et de la vitesse maximale

La démonstration de la résolution de l'équation différentielle de Poisson (voir chapitre II) avec les conditions aux limites, pour cette section est donnée dans le document [24].

$$W(x, y) = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dp_\varepsilon}{dz} \right) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(j-1)/2} \left[ 1 - \frac{\cosh(i\pi y / 2a)}{\cosh(i\pi b / 2a)} \right] \frac{\cos(i\pi x / 2a)}{i^3}$$

(D-8)

$$W_{\max} = \frac{16a^2}{\mu\pi^3} \left( -\frac{dp_\varepsilon}{dz} \right) \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(j-1)/2} \left[ 1 - \frac{1}{\cosh(i\pi b / 2a)} \right] \frac{1}{i^3}$$

(D-9)

### b-Expression du débit volumique

L'expression est donnée par :

$$Q_v = \frac{4ba^3}{3\mu} \left( -\frac{dp_\varepsilon}{dz} \right) \left[ 1 - \frac{192a}{\pi^5 b} \sum_{l=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\tanh(i\pi b / 2a)}{i^5} \right]$$

(D-10)

### c-Coefficient de perte de charge linéaire

Dans le cas de conduite à section rectangulaire, dont le rapport des cotés  $a_0/b_0$  est compris entre 0 et 1, le coefficient de perte de charge par frottement pour un régime laminaire et de degré de rugosité faible est exprimé ainsi :

$$K_{rect} = C_1 K = \frac{B}{R_e} \Rightarrow B = 64.C_1$$

(D-11)

Où  $K_{rect}$  : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section rectangulaire.

$K$  : Coefficient de perte de charge par frottement pour des conduites à section circulaire.

$C_1$  : Coefficient tenant compte du rapport des cotés  $a_0/b_0$  du rectangle.

$B$  : Coefficient sans dimension qui dépend de la forme géométrique de la section.

Expérimentalement, on a les résultats suivants : [16]

$R_e$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$K$	0.640	0.320	0.213	0.160	0.128	0.107	0.092	0.080	0.071	0.064

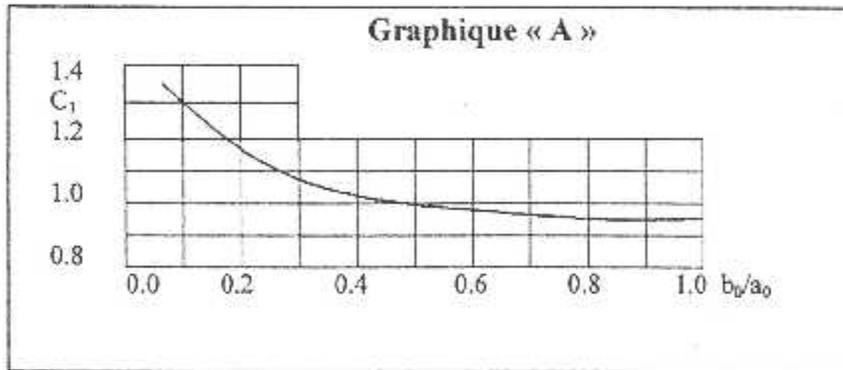
$R_e$	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000
$K$	0.058	0.053	0.049	0.046	0.043	0.040	0.038	0.036	0.034	0.032

b/

$b_0/a_0$	0	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$C_1$	1.50	1.34	1.20	1.02	0.94	0.90	0.89

Tableau (D-1) : a/ Les valeurs de K en fonction de  $R_e$   
 b/ Les valeurs de  $C_1$  en fonction de  $b_0/a_0$ .

Où  $C_1$  est exprimé en fonction de  $b_0/a_0$  sur le graphique 'A' suivant :

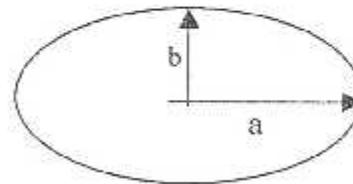


Après avoir calculer le coefficient de perte de charge expérimentalement on peut calculer la perte de charge ainsi que d'autres paramètres comme le coefficient de frottement , la force de cisaillement ...etc.

### D.3 Section elliptique réf [16]

Pour une section elliptique nous avons :

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 \leq 1$$



**Figure (D-4)** : Conduite rectiligne de section elliptique.

Le diamètre hydraulique a pour expression :

$$D_H = \frac{4ab}{1.5(a + b) - \sqrt{ab}} \quad (D-12)$$

On a remarqué que cette relation est moins précise lorsque le rapport des cotés d'ellipse est loin de l'unité. D'où un calcul numérique plus précis de la surface et du périmètre pour avoir ce diamètre hydraulique est indispensable pour les résultats.

### a-Expression de la vitesse et de la vitesse maximum

D'après la référence [16] on a :

$$W(x, y) = \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dp_x}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (D-13)$$

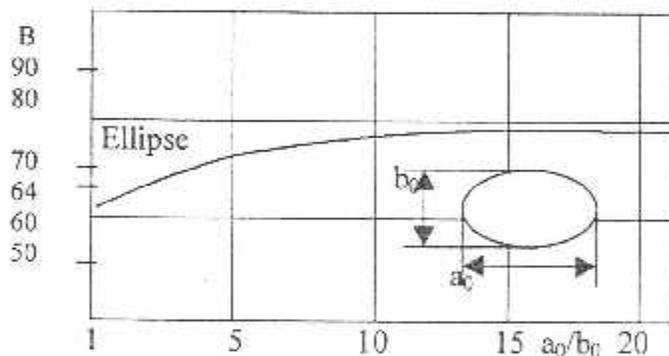
$$W_{\max} = \frac{1}{2\mu} \left( -\frac{dp_x}{dz} \right) \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \quad (D-14)$$

### b-Expression du débit volumique

On a : 
$$Q_v = \frac{\pi}{4\mu} \left( -\frac{dp_x}{dz} \right) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (D-15)$$

### c-Coefficient des pertes de charge linéaire[ 6 ]

La variation du coefficient 'B' pour une conduite elliptique est illustrée dans la figure suivante :



**Figure (D-5) :** Variation du coefficient B en fonction des dimensions transversales d'une conduite de section elliptique.

D'une autre manière plus explicite comme le cas du rectangle , et d'après la référence [6] , on peut déterminer le coefficient sans dimension intermédiaire 'B' qui dépend de la forme géométrique de la section du rapport des cotés d'ellipse . Tel que :

$$n = b_0/a_0$$

Alors , on a :

$$B' = \frac{64(1 + n^2)}{\pi \cdot n^3} \quad (D-16)$$

Et  $B = B' \cdot \frac{\pi}{2}$

Si  $n=1$  , la section est circulaire et on trouve la formule de *Poiseuille*

Les résultats empiriques obtenus pour les sections non circulaires sont déduits à partir des expériences effectuées pour le régime laminaire ainsi que les différentes dimensions des conduites.

Afin de généraliser la résolution des équations d'un écoulement visqueux (Newtonien) à travers des conduites de sections quelconques, le recour à des méthodes de résolution numériques plus précises est indispensable.

**BIBLIOGRAPHIE** “”

- [1] W.F Hughes & E.W Gaylord.  
« *Basic Equations Of Engineering Science* »  
Schaums Outline series. Mc Graw-Hill Book company, (1964).
- [2] GOURI Dhatt & GILBERT Touzot.  
« *Une présentation de la méthode des éléments finis* »  
Université LAVAL, Maloine S.A. Editeur, Paris (1981).
- [3] INGE L. RYMING  
« *Dynamique des Fluides* »  
PRESSES POLYTECHNIQUES ROMANDES, Paris (1982)
- [4] R. OUZIAUX & J. Perrier  
« *Mécanique Des Fluides Appliquée* ».  
Dunod Université, 3<sup>e</sup> Edition -BORDAS, Paris 1978
- [5] :OURAGH Youcef (Maitre assistant I.N.G.M)  
« Aide Mémoire de Mathématique pour ingénieurs »Partie II  
Edition OPU , ALGERIE ,(1993).
- [6] R. COMOLET.  
« *Mécanique Des Fluides (Expérimentale)* », Dynamique des fluides réels, Tome II  
©Masson, 3<sup>ème</sup> Edition - Paris, (1982 ).
- [7] Pierre Arnaud RAVIART & Robert DAUTRY.  
« *Les Méthodes D'Éléments Finis En Mécanique Des Fluides* ».  
Editions EYROLLES, saint germain, Paris (1981).
- [8] REDDY A.  
« *The Finite Element Method* »  
Mc GARW-HILL International Editions, 3<sup>rd</sup> Printing in 1988
- [9] G. STRANG & G.J. Fix.  
« *An Analysis Of The Finite Element Method* »  
Wellesley-Cambridge Press, Wellesley (1973).
- [10] MASATAKE Momi - MAC Millan.  
« *The Finites Elements Method And Its Application* »  
publishing Company, New York (U.S.A) 1986.

- [11] FRANK M. White  
 « *Viscous fluid flow* », 2<sup>nd</sup> Edition.  
 Mc GRAW-HILL, Series in mechanical engineering - New York (1991).
- [12] G. BEAUQUET et M. POGU.  
 « *Programmation des éléments finis (2D)* »  
 Edition CEPADUES - Toulouse, FRANCE 1987
- [13] M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN  
 « *Méthodes Numérique Appliquées* » ; Edition OPU, ALGERIE, 1983.
- [14] Merzak DAMOU (Msc, Phd)  
 « *Mécanique des fluides* » ; Edition OPU. Ben Aknoun (ALGERIE) 1994
- [15] O.C. ZIENKIEWICZ.  
 « *The Finite Element Method In Engineering Science (2<sup>nd</sup> Edition)* ».  
 McGRAW - HILL, LONDON - 1971.
- [16] M.CARLIER  
 « *Hydraulique Générale et Appliquée* » ; EYROLLES Editeur PARIS.
- [17] I. E IDELCIK  
 « *Mémento des Pertes de Charge* » ; EYROLLES Editeur PARIS.
- [18] A.PIMENOV KH. & TAGUI-Zadé  
 « *Hydraulique Générale* » ; EDITION OPU, ALGERIE, 1990.
- [19] OURAGH Youcef (Maître assistant I.N.G.M.)  
 « *Aide Mémoire de Mathématique pour Ingénieurs* » Partie 'II'  
 Edition OPU, ALGERIE, (1993).
- [20]: HARDY -CROSS-  
 < *Analyses Of Flow In Networks Of Conductors.*>  
 UNIV.of.ILLINOIS.Bull.n°286 nov.1936.
- [21] Mouloud AISSANI.  
 <Simulation numérique de l'écoulement laminaire dans les conduites de section complexe de forme mono et multi connexes par la méthode des éléments finis>, Thèse de MAGISTER.  
 Institut d'aéronautique, Université de Blida.

## [22] TECHNIQUES DE L'INGENIEUR

« *Rubriques de Tuyauteries Et Appareils à Pression* », cote **A690** &  
« *Ecoulement Des Fluides Dans Les Tuyauteries* », cote **A738** ; France -(1991)

## [23] Amar KHENNANE.

« *Méthodes Des éléments Finis, énoncé des principes de base* ».  
**Edition OPU, ALGERIE, 1997.**

## [24] ZEBBICH TOUFIK (CHARGE DE COURS à L'I.A.B.)

« *Eléments Finis* » cours Ingénieur Aéronautique, Option Structure.  
**Institut d'Aéronautique, Université de Blida, ALGERIE, 1998.**

