

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ SAAD DAHLAB , BLIDA 1

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme

De : MASTER en Mathématiques

Option :

MODÉLISATION STOCHASTIQUE ET STATISTIQUE

Thème :

LES FILES D'ATTENTE FLOUES

Par :

MOSTEFAI YASMINE

et

MADOUNI LOUIZA

Les Membres du jury :

- **Président :** M^r **O.TAMI** $M.C.B$ $U.S.D.BLIDA1.$
- **Encadreur :** M^{me} **Z.BOUSSAHA** $M.C$ $A.M.H.B.CHERCHELL.$
- **Examinatrice :** M^{me} **Z.DAHMANE** $M.C.B$ $U.S.D.BLIDA1.$

juillet 2023

Dédicace

Du plus profond de mon coeur je dédie ce travail à ceux qui me sont chers,

A mon très cher père MOSTEFAI MOHAMMED

La meilleure offre que le bon Dieu m'a offert, à qui je dois ma réussite et tout mon respect, mon support dans la vie qui m'a dirigé vers la gloire aucune dédicace ne saurait exprimer ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être.

A Ma très chère mère DJEBBOURI SALIMA

À celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoir, à la source d'amour incessible, à la Mère des sentiments fragiles qui ma bénie par ses prières...

Puisse Dieu le très haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

A ma chère grand mère maternelle HANTOUR ROKIA.

A la mémoire de ma grand mère paternelle qu'elle ropose en paix.

A mes très chers frères : ISLAM, HOUSSEM, RABAH.

A mes très chères soeurs : SARAH, AYA, HIDAYAET, SHERIFA.

A mes petites nièces : WATINE, HAYAME.

A Mon bras droit NESRINE

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et les plus beaux moments de joie et de bonheur avec la quel j'ai partagé.

A mes très chers meilleures amies : ma chère binôme LOUIZA , SARAH, ANISSA.

A Mon pilier K.M merci d'être toujours là pour moi.

Merci a vous tous je vous remercie pour votre contribution à la réalisation de ce travail pour votre présence dans les moments difficiles ainsi que vos encouragements.

je vous aime.

MOSTEFAI

YASMINE

Dédicace

Je dédie ce modeste travail accompagné d'un profond amour à :

Ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui a tout fait pour ma réussite, que Dieu la garde.

Mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que Dieu prolonge votre vie et vous donne santé permanente.

Mes chères soeurs : Asma, Chérifa, Zina.

Mes frères : Salah, Toufik.

Ma nièce d'amour : Ghofrane.

Mes chères amies : Sarah et Yasmine qui m'ont toujours soutenue et encouragé durant tout mon parcours.

A mon très cher Mari : CHEMLIA

Spécial dédicace pour la Cité universitaire N° 05 pour tout les souvenirs.

MADOUNI

LOUIZA

REMERCIEMENTS

*T*out d'abord, nous tenons à remercier le bon DIEU tout puissant et miséricordieux, de nous avoir donné le courage, la force et la patience d'achever ce modeste travail..

*N*ous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre directrice de mémoire Madame. BOUSSAHA.ZINA d'avoir accepté d'encadrer notre projet de fin d'études, pour le choix du sujet et son poids ainsi que pour son soutien ,sa disponibilité, son implications et ses précieux conseils. qui ont rendu l'élaboration de ce travail possible.

*N*os plus sincères remerciements vont aux membres du jury :Monsieur le président TAMI.OMAR Chef du département du mathématique et Madame l'examinatrice DAHMANE ZINEB d'avoir bien voulu examiner et évaluer notre projet de fin d'études.

*N*ous témoignons une reconnaissance particulière pour notre chef de spécialité "MSS" Madame OUKID.NADIA Nous ne saurons oublier le grand mérite pour ses judicieuses orientations et d'avoir transmis son savoir dans cette théorie tout au long de ce master qui a contribué à notre formation.

*N*ous remercions également l'équipe pédagogique et tous ceux qui ont contribué de près et de loin à l'accomplissement de cette thèse.

Table des matières

- Dédicace i

- Dédicace ii

- Remerciements iii

- Table des matières iv

- Table des figures vii

- Introduction 1

- Résumé du mémoire 3

- Abstract 4

- 1 LA THÉORIE DES FILES D'ATTENTE 9**

 - 1.1 Introduction 9
 - 1.2 Structure de base d'une file d'attente 10
 - 1.3 Chaine de Markov 11
 - 1.3.1 Modèles markoviens 11
 - 1.3.2 Modèles non markoviens 12
 - 1.4 Classification des modèles de files d'attente 12
 - 1.4.1 Notion de classe 12

1.4.2	Notation de KENDALL	12
1.4.3	Terminologie et notation	14
1.4.4	Paramètres de performances d'un système d'attente	15
1.5	Loi de little	15
1.6	Processus de naissance et de mort	16
1.6.1	Rappel	16
1.6.2	Processus de naissance et de mort	17
1.7	Exemples de files d'attente	18
1.7.1	La file M/M/2	18
1.7.2	Le modèle M/M/ ∞	19
1.7.3	Le modèle M/G/4/-/SIRO	19
1.7.4	Le modèle G/E ₃ /5/200	19
1.8	Les systèmes de files d'attente	20
1.8.1	Le système M/M/1	20
1.8.2	Le modèle M/M/1/K	22
1.8.3	Le Modèle d'attente M/M/S	24
1.8.4	Le modèle M/M/ ∞	27
2	LA THEORIE DES ENSEMBLES FLOUS (fuzzy sets)	29
2.1	Introduction	29
2.2	Sous-ensemble flou	30
2.2.1	Historique	30
2.2.2	Définitions et Remarques	30
2.2.3	Caractérisation d'un sous ensemble flou	33
2.2.4	Les opérations sur les sous ensembles flous	34
2.3	Relation floue	37
2.3.1	Les propriétés d'une relation binaire floue dans X	37

2.4	Les α – coupes d’un sous-ensemble flou	38
2.5	Le principe d’extension de ZADEH	40
2.6	Comptabilité du principe avec les alpha-coupes	41
2.7	Les nombres flous	41
2.7.1	Quelques définitions sur ce concept	42
2.7.2	Alpha coupe d’un nombre flou (α – cut)	43
2.7.3	Opérations des α – coupes intervalles	44
2.8	Les types des nombres flous	45
2.8.1	Nombre flou de type triangulaire	45
2.8.2	Nombre flou de type trapézoïdal	47
2.8.3	Opération mathématique en nombres flous trapézoïdaux	47
2.8.4	Nombre flou de type L-R (LEFT-RIGHT)	49
2.8.5	Notations et appellations	49
2.8.6	Arithmétique des nombres flous de même type L-R	50
2.8.7	Deuxième forme de type L-R	51
2.8.8	Conclusion :	52
3	LES FILES D’ATTENTE FLOUES	53
3.1	Chaîne de Markov floue	54
3.1.1	Définition d’Avrachenkov et Sanchez	55
3.1.2	Définition de Buckley	55
3.2	Le modèle de file d’attente flou $M/F/1$ (par le principe d’extension de <i>ZADEH</i>)	57
3.3	Le modèle de file d’attente flou $M/F/1$ (par la méthode de Alpha-coupe)	59
3.4	Le modèle de file d’attente flou $FM/FM/C$	61
3.4.1	Les mesures de performance	62

3.4.2	Utilisation de la programmation paramétrique non linéaire (PNLP)	63
3.4.3	Analyse des numéros des serveurs	66
3.5	Conclusion	68
4	APPLICATION NUMÉRIQUE	70
4.1	Description du Problème	70
4.2	Solution	70
4.2.1	Données du problème	70
4.2.2	Solution par la méthode des alpha-coups	71
4.2.3	Solution par la méthode L-R	73
4.3	Discussion	76
4.4	Conclusion	76
	Conclusion	78
	Bibliographie	79

Table des figures

1.1	Structure d'une file d'attente	10
1.2	Exemple explicatif d'une chaîne de Markov	11
1.3	Processus de naissance et de mort	18
1.4	Graphe de transition d'un modèle M/M/1.	22
1.5	Le modèle M/M/1/K	23
1.6	La file M/M/S	25
1.7	Diagramme de transition d'un modèle M/M/S (s=c)	25
2.1	Présentation des ensembles flous.	31
2.2	Présentation de quelques formes de fonctions d'appartenance	32
2.3	Quelques opérations sur les sous-ensembles flous	36
2.4	Éléments caractéristiques d'un sous-ensemble flou.	40
2.5	Représentation d'un nombre flou triangulaire	46
2.6	Représentation d'un nombre flou trapézoïdal	48
3.1	Affichage des usagers	68
4.1	Fonction d'appartenance du nombre flou de patients dans la salle d'attente.	75
4.2	Fonction d'appartenance du temps d'attente flou dans la salle d'attente.	75

Liste Des Abréviations :

<i>N</i>	<i>ABRÉVIATIONS</i>	<i>SIGNIFICATIONS</i>
1.	<i>C M F :</i>	<i>Chaine de Markov floue.</i>
2.	<i>I.I.d :</i>	<i>Indépendents et identiquement distribués.</i>
3.	<i>L-R :</i>	<i>Left-Right (gauche et droite).</i>
4.	<i>M/M/1 :</i>	<i>File d'attente classique Markovienne à un seul serveur.</i>
5.	<i>M/M/c :</i>	<i>File d'attente classique Markovienne à c serveurs.</i>
6.	<i>M/G/1 :</i>	<i>:File d'attente à 1 seul serveur dont les temps d'inter-arrivés et de service sont respectivement exponentiels et généraux</i>
7.	<i>FM/FM/1 :</i>	<i>File d'attente floue markovienne à un seul serveur.</i>
8.	<i>PNLP :</i>	<i>Programmation non linéaire paramétrique.</i>
9.	<i>S.E.F :</i>	<i>Sous ensemble flous.</i>
10.	<i>Fuzzification :</i>	<i>Action pour laquelle un ensemble classique est rendu flou. A cette action, est associé souvent le verbe fuzzifier qui signifie dans ce contexte : rendre flou.</i>
11.	<i>Difuzzification :</i>	<i>Opération par laquelle un ensemble flou est rendu non flou, c-à-d classique.</i>
12.	<i>TQ :</i>	<i>Tel que.</i>
13.	<i>SSi :</i>	<i>Si et seulement si.</i>
14.	<i>FAC :</i>	<i>File d'attente classique.</i>
15.	<i>FAF :</i>	<i>File d'attente floues.</i>

Résumés du mémoire

Ce mémoire porte sur la problématique de l'évaluation des paramètres de performance des files d'attente floues. Nous sous-entendons un modèle de files d'attente pour lequel certains paramètres de fonctionnement sont des quantités imprécises ou mal connues appelées autrement nombres flous. Un tel modèle est différent de ceux traités habituellement en modèle classique, pour lesquels les paramètres de fonctionnement sont souvent des nombres réels précis.

La présente étude introduit la nouvelle méthode dénormmée "méthode L-R", qui permet de lancer l'analyse des paramètres de performances des files d'attente floues. Cette méthode tire son fondement de l'arithmétique des nombres flous de type L-R restreinte aux approximations sécantes. Elle est le fruit d'une réflexion, portant sur trois constats faits autour des mesures évaluées à l'aide de la méthode de la programmation non linéaire paramétrique, à savoir :

-Les paramètres de performance de files d'attente floues simples sont des nombres flous positifs; ces nombres désignent le nombre de clients, le temps d'attente, le débit de la file,.... qui sont habituellement des quantités positives;

-Les résultats de ces paramètres qui pour la plupart de fois sont décrits par les fonctions d'appartenance, peuvent être aussi décrits par les supports et les valeurs modales de nombres flous obtenus;

-La quasi-totalité ses études menées sur ce thème utilisent d'une part des nombres flous triangulaires ou trapézoïdaux comme paramètres de fonctionnement pour illustrer leur approches; et d'autres part, ces deux types de nombres font partie de nombres flous de type L-R.

MOT — CLÉS : file d'attente floue, paramètres de performance, méthode de la programmation non linéaire paramétrique, méthodes des alpha-coupes, méthode L-R, principe d'extension de Zadeh.

Abstract

This thesis deals with the problem of evaluating the performance parameters of fuzzy queues. We imply a queuing model for which some operating parameters are imprecise or poorly known quantities otherwise called fuzzy numbers. Such a model is different from those usually treated in a classical model, for which the operating parameters are often precise real numbers.

The present study introduces the new method called "L-R method", which allows to start the analysis of the performance parameters of the fuzzy queue.

This method draws its foundation from the arithmetic of fuzzy numbers of the L-R type restricted to secant approximations. It is the result of a reflection on three observations made around the measures evaluated using the parametric nonlinear programming method, namely :

-Simple fuzzy queue performance parameters are positive fuzzy numbers ; these numbers designate the number of customers, the waiting time, the flow of the queue,..... which are usually positive quantities ;

-The results of these parameters which for the most part are described by the membership functions, can also be described by the supports and the modal values of fuzzy numbers obtained ;

-Almost all of the studies carried out on this topic use on the one hand triangular or trapezoidal fuzzy numbers as operating parameters to illustrate their approaches ; and on the other hand, these two types of numbers belong to the L-R type fuzzy numbers.

KEYWORDS : fuzzy queue, performance parameters, parametric nonlinear programming method, alpha-cuts method, L-R method, Zadeh extension principale.

Introduction générale

Les files d'attente constituent un problème permanent dans la vie de l'homme dès que l'on cherche à satisfaire aux demandes massives des services. De recherches autour de ce problème, sont nées les premiers modèles mathématiques de files d'attente à la suite de la publication du tout premier article scientifique sur le sujet en 1909 par l'ingénieur danois Erlang, dont le titre a été "The theory of probabilities and telephone conversations" [17]. Introduit en premier lieu en télécommunication, ces modèles se sont vite étendus à plusieurs domaines tels que les systèmes informatiques, les systèmes de transport, les systèmes de production, etc. Avec l'évolution de la technologie et l'automatisation des systèmes techniques, ces modèles s'appliquent aujourd'hui à plusieurs files d'attente interconnectées appelées réseaux et sont devenus des outils de prédilection pour la modélisation de systèmes logistiques et de communication. Mais tout comme pour les autres domaines de la mathématique à l'époque, tous ces modèles construits ont été incapables d'analyser les mesures de performance de systèmes d'attente dont les paramètres sont des quantités imprécises ou des variables linguistiques.

Il a fallu attendre l'avènement de la théorie des ensembles flous introduite par *Zadeh* à partir de 1965, pour voir venir peu à peu, des solutions à cette dernière catégorie de problèmes. Avec cette nouvelle donne, les chercheurs du domaine ont eu la possibilité de relancer la problématique de files d'attente en ces nouveaux termes :

Quelles solutions faut-il envisager aux demandes massives des services au cas où les paramètres qui définissent les systèmes seraient mal connus ou imprécis ?

A la question de savoir comment en est-on arrivé aux files d'attente floues ? Il sied de rappeler que dans la théorie de FAC, les paramètres tels que le temps d'inter-arrivées et

celui de service sont caractérisés par des variables aléatoires. Pour déterminer les fonctions de distribution de celles-ci, on a besoin des données statistiques. Or dans beaucoup de cas réels de files d'attente, il est tellement difficile, voire impossible d'obtenir ces données; ou encore elles peuvent être obtenues, mais alors avec des marges d'erreurs très prononcées. Par contre, la description de ces mêmes paramètres en termes linguistiques est très fréquente dans le langage courant. C'est ainsi qu'à l'aide des ensembles flous, on a eu l'opportunité d'exprimer ces termes par des nombres flous, et de parler ainsi de files d'attente floues (FAF).

D'après la littérature, les files d'attente floues ont été introduites en 1980 par Prade, le tout premier chercheur à avoir produit un article scientifique appliquant pour la première fois la théorie des ensembles flous aux files d'attente ([47]). Dans cet article, l'auteur s'est concentré uniquement sur la recherche de la distribution de possibilité du temps moyen qu'un client passe dans le système. A partir de ce moment, les chercheurs de ce domaine ont eu la possibilité d'introduire une nouvelle forme de files d'attente, plus réalistes et plus adaptées au langage courant et au raisonnement humain, dites **files d'attente floues** (FAF). Ce sont des files d'attente dont certains paramètres intervenant dans le processus sont des nombres flous.

Ensuite deux autres articles sur ce thème, produits par Li et Lee (cf. [36]; [35]) sont parus successivement en 1988 et 1989. Dans ceux-ci, les auteurs, usant du principe d'extension de *Zadeh* [60], calculent les mesures de performance usuelles d'une file d'attente lorsque le taux d'arrivée et le taux de départ sont des variables floues.

Toutefois, Negi et Lee [43], dans leur article intitulé "Analysis and Simulation of Fuzzy Queues" paru en 1992, signalent que les formules utilisées par Li et Lee paraissent très compliquées et difficiles à évaluer. Ils ont pour cela proposé à leur tour une approche utilisant *les alpha-coupes* et une simulation à deux variables pour analyser les files d'attente floues, mais celle-ci ne leur a fourni que des résultats non *fuzzifiables*. Pour leur part, Kao et cie [33] ont fait usage de la technique de la programmation paramétrique, pour construire les fonctions d'appartenance de caractéristiques de systèmes pour des files d'attente et les ont appliquées avec succès aux modèles simples $F/M/1$, $M/F/1$, $F/F/1$

et $FM/FM/1$; où F représente le temps flou et FM la distribution exponentielle *fuzzifiée*. Au fur et à mesure que les recherches ont évolué, cette technique a été recentrée sur deux types d'arithmétiques floues, à savoir, l'arithmétique floue basée sur *le principe d'extension de Zadeh* et celle *des alpha-coupes* et intervalles, et est devenue ce que nous appelons dans ce travail méthode "*de la programmation non-linéaire paramétrique*", dite aussi méthode "*des programmes non linéaires paramétriques (PNLP)*". Plusieurs chercheurs l'ont utilisée pour évaluer les mesures de performance de files d'attente dont le nombre de variables floues va jusqu'à 5 ([30]). Les FAF constituent un thème qui a beaucoup d'applications dans la vie courante quoiqu'elles n'aient connu jusque là que très peu de publications scientifiques comparativement aux FAC. Les pionniers dans le domaine essaient de réexaminer les théories étudiées sur les FAC et de trouver de nouveaux résultats dans l'environnement flou au moyen de la théorie des ensembles flous introduite par Zadeh. Ces résultats portent progressivement sur la presque totalité de sous modèles couverts par l'approche classique. Parmi eux, nous pouvons citer :

- Des files d'attente floues de capacité finie ou infinie ([44], [49], [55]).
- Des files d'attente floues à un seul serveur ([4], [18]).
- Des files d'attente floues multi-serveurs ([64], [65]).
- Des files d'attente floues en tandem [63].
- Des files d'attente floues avec classes prioritaires de clients ([14], [54],[49], [55]).
- Des files d'attente floues avec vacances [30].
- Des files d'attente floues à serveurs amovibles ([64],[50]).
- Des files d'attente floues avec orbite ([49], [34], [45]).
- Des files d'attente floues avec orbite et vacances dues aux pannes et réparations de serveurs ([30], [48]).
- Des files d'attente floues à arrivées massives et traitements par lots([53], [46]).

Outre l'introduction générale et la conclusion générale, ce travail comprend quatre chapitres :

- Le premier chapitre fait un aperçu sur la théorie de files d'attente classique.
- Le deuxième chapitre introduit un résumé de la " théorie des ensembles flous". Dans

ce résumé, ont trouve les éléments essentiels sur la théorie des ensembles flous, permettant d'aborder l'analyse du problème posé dans ce travail, à savoir la détermination des performances de files d'attente floues.

-Dans le troisième chapitre " Les files d'attente flous" on a détaillé les modèles des files d'attente floues les plus utilisées par différentes méthodes connus.

-Le quatrième est le dernier chapitre montre que la méthode L-R introduite dans ce travail est l'une des méthodes valides pour calculer les mesures de performance des files d'attente floues. A l'aide de cette technique de calcul, on trouve le nombre de clients et le temps d'attente d'une file d'attente simple $M/M/1$ en environnement flou. La méthode L-R a l'avantage d'être courte, pratique et flexible par rapport à la méthode bien connue et appelée alpha-cuts.

Chapitre 1

LA THÉORIE DES FILES D'ATTENTE

1.1 Introduction

La théorie des files d'attente est un outil analytique très puissant pour la modélisation de la dynamique des systèmes de logistique et de communication.

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années 1900-1920 avec les ouvrages pionnier de KRARUP ERLANG [17] concernant l'analyse des modèles pour la communication téléphonique à l'aide de processus de Poisson.

Aujourd'hui elle se développe très rapidement grace aux contribution de PALM KULMONGOROV, KHINTCHINE.....etc.

Les systèmes de files d'attente décrivent un aspect de la vie moderne que nous rencontrons à chaque étape de nos activités quotidiennes .Cette théorie s'est ensuite étendue à des nombreux champs d'application comme les télécommunications , les réseaux d'ordinateurs , les aéroportsetc

L'objectif principal de ce chapitre est d'expliquer le phénomène d'attente ,de présenter les notions de base concernant les systèmes de files d'attente et de définir les paramètres permettant de décrire les performances de tels systèmes.

1.2 Structure de base d'une file d'attente

Le modèle général d'un système de files d'attente peut être résumé comme suit : Des entités circulent dans un système et utilisent des ressources communes. Le système, les entités ou les ressources peuvent avoir un comportement imprévisible ,c'est - à -dire dans le contexte d'une modélisation mathématique, aléatoire.

Le modèle général d'un phénomène d'attente peut être résumé comme suit [62] :

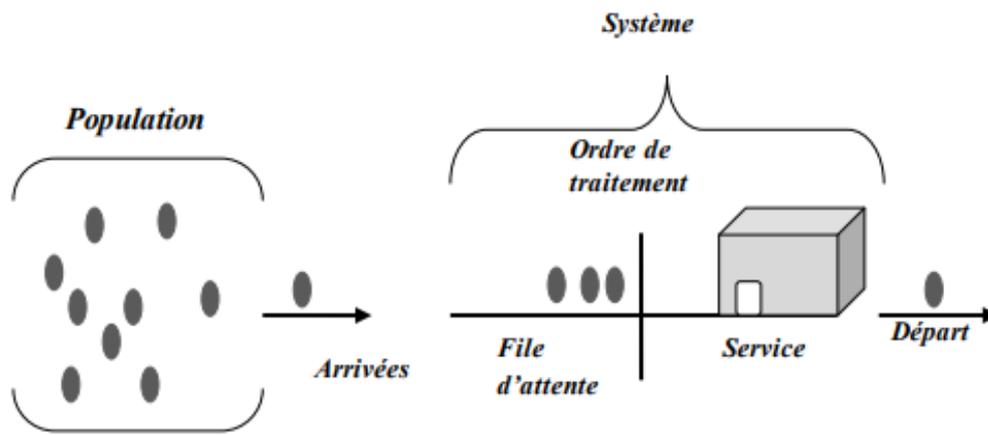


FIG. 1.1 – Structure d'une file d'attente

Population : constitue la source des clients potentiels, elle est caractérisée par son nombre d'éléments (fini ou infini).

Clients : sont les objets ou les personnes qui arrivent dans le système. On suppose que les clients dans le système arrivent un par un, et sont servis par leur ordre d'arrivées.

Arrivée : chaque entrée d'un client dans le système d'attente est appelée arrivée.

Inter Arrivée : c'est l'intervalle de temps séparent l'arrivée de deux clients successifs.

Files d'attente : une file d'attente est l'ensemble constitué par les clients dans l'ordre d'arrivée, qui attendent d'être servie par une ou plusieurs stations.

Station : la personne où l'appareil dans le système qui offre le service aux clients.

Service : le service peut être assuré par un ou plusieurs stations.

Système de file d'attente : c'est l'ensemble formé par les files d'attente, les clients en cours de service, les stations de service ainsi que les clients quittant après être servis.

Longeur de la file : c'est le nombre de clients dans le système en attente de bénéficier d'un service.

Capacité du système : représente le nombre maximum de clients qui peuvent être présent dans le système.

1.3 Chaîne de Markov

Dans la plupart des situations qui mettent en jeu l'analyse d'une durée dans un état donné (vivant, au chômage, en incapacité, en fonctionnement,etc), les chaînes de Markov fournissent un cadre d'analyse naturel de ces phénomènes et des transitions d'un état vers un autre.

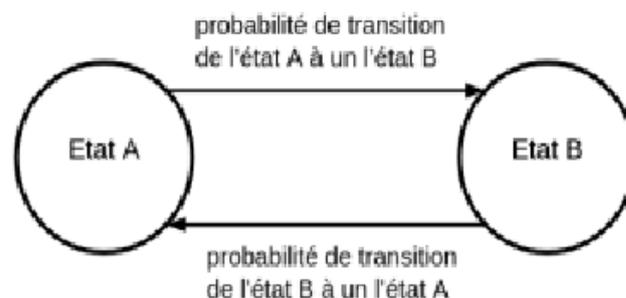


FIG. 1.2 – Exemple explicatif d'une chaîne de Markov

1.3.1 Modèles markoviens

Les files d'attente du modèle markovien, sont des systèmes où les deux quantités hasardeuses, les durées de service, les temps inter-arrivées sont des variables aléatoires et indépendantes, exponentiellement distribuées. La propriété "**sans mémoire**" de la loi exponentielle facilite l'analyse de ce modèle.

1.3.2 Modèles non markoviens

En éliminant l'hypothèse d'exponentialité de l'une des deux quantités hasardeuses les temps des inter-arrivés et les durées de service ou en introduisant des paramètres supplémentaires spécifiques au modèle étudié, on n'aura jamais de processus Markovien. Ce qui rend l'opération d'analyse du modèle très difficile, voire impossible. C'est pourquoi, parfois on se ramène à un processus Markovien.

1.4 Classification des modèles de files d'attente

1.4.1 Notion de classe

DAVID GEORGE KENDALL [31] a développé et qui a été largement adaptée pour spécifier le modèle des arrivées, la distribution du temps de service, et le nombre de canaux dans un modèle de file d'attente. Les phénomènes d'attente sont classifiés selon les cinq éléments suivants :

- La loi de probabilité des arrivées.
- La distribution du temps aléatoire de service.
- Le nombre de stations de service.
- La capacité totale du système qui représente le nombre maximum de clients pouvant être présents dans le système.
- La discipline de la file.

1.4.2 Notation de KENDALL

La notation de kendall porte le nom du mathématicien DAVID KENDALL [31] qui l'a introduit en 1953. Cette notation comprend des éléments comme suit :

$$\mathbf{A / B / C / D / E / F} \quad (1.1)$$

A : Représente le processus des arrivées des clients

Les codes utilisés sont :

M(MARKOV) : Les inter-arrivées suivant la loi exponentielle, il correspond à un processus de poisson ponctuelle (absence de mémoire).

D : Les inter-arrivées sont constantes (loi déterministe).

E_k : Les inter arrivées suivant la loi d'ERLANG d'ordre k.

H_k : Les inter-arrivées suivant la loi hyper exponentielle.

G : Distribution quelconque (loi générale).

G_J : Distribution quelconque, avec inter-arrivés deux à deux indépendants.

B : La distribution des temps de service d'un client (les codes utilisés sont les mêmes que A).

C : Nombre de stations service (nombre de serveurs).

D : Capacité maximale de la file (D est supposé infini).

E : Population des usagers.

F : La discipline de service, elle spécifie la manière avec laquelle le serveur sélectionne le prochain client à servir. Cependant, plusieurs possibilités existent à l'ordre selon lequel les clients seront servis.

Les principales disciplines de service sont :

FIFO (first in first out) [32] :

Cette discipline est la plus usuelle, les clients quittent le système dans l'ordre suivant lequel ils sont entrés .

LIFO (last in first out) [32] :

Le dernier client dans la file est le premier à être servis .

RANDOM [32] :

Tous les clients ont la même probabilité d'être servis en premier.

PN(priority service) [32] :

Les clients sont servis par priorité.

PS(Processor sharing)[32] :

les clients sont servis d'une manière égale. La capacité du système est partagé entre les clients .

SIRO(Served In Random Order) :

les clients sont servis au aléatoirement.

Les trois dernières paramètres ne sont pas explicités si leur valeur sont :

$$\mathbf{D} = \mathbf{FIFO} \ , \ \mathbf{E} = \infty \ , \ \mathbf{F} = \infty \tag{1.2}$$

1.4.3 Terminologie et notation

En lien avec la loi exponentielle [34] :

λ : le taux des arrivées ;le nombre moyen d'arrivées des clients dans le système par unité de temps.

μ :le nombre moyen de clients servis par unité de temps.

s :le nombre de serveurs.

φ :l'intensité de trafic.

on dit que la file d'attente est stable si et seulement si $\varphi < 1$

$$\varphi = \frac{\mathbf{taux\ des\ arrivées}}{\mathbf{taux\ de\ service}} \tag{1.3}$$

si l'utilisation d'une file d'attente est constitué de plusieurs serveur ς alors :

$$\varphi = \frac{\mathbf{taux\ des\ arrivées}}{\mathbf{taux\ de\ service\ globale}} \tag{1.4}$$

$s\mu$:est le taux de service global.

1.4.4 Paramètres de performances d'un système d'attente

Les paramètres de performance les plus importantes dans une file d'attente sont :

Le processus aléatoire

$(X_t)_{t \geq 0}$ qui représente le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant t , incluant à la fois ceux qui sont servis et ceux qui attendent d'être servis.

Les probabilités d'état

$P_n(t) = P(X_t = n)$ qui définissent le régime stationnaire du processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

Le régime stationnaire

ce dernier est définie par :

$$P_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} P_n(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(X_t = n) \quad (1.5)$$

La distribution stationnaire du processus

$(X_t)_{t \geq 0}$, permet de calculer d'autres paramètres de performances du système telle que :

L : nombre moyen (espérance mathématique de client dans le système).

L_q : nombre de clients dans la file d'attente excluant ceux qui sont dans le service.

W : le temps moyen passé par un client dans le système.

W_q : le temps moyen passé par un client dans la file (excluant le temps de service).

1.5 Loi de little

La loi de little [36] est une relation très générale qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. Aucune hypothèse sur

les variables aléatoires qui caractérisent le systèmes né est nécessaire, la seule condition d'application de la loi de little[35] est que le système soit stable .

$$d_s = d_e = d \tag{1.6}$$

La loi de little [36] comme suit :

Théorème 1.5.1 (FORMULE DE LITTLE) [36]

Le nombre moyen de client L ,le temps moyen passé dans le système W et le débit moyen d'un système stable d 'un régime permanent se relient de la facon suivante :

$$L = W \times d \tag{1.7}$$

Remarque 1.5.1 *La loi de little s'applique à tous les modèles de file d'attente rencontrés en pratique (pas seulement à la file $M/M/1$).*

1.6 Processus de naissance et de mort

1.6.1 Rappel

LA LOI EXPONENTIELLE

La distrubition exponentielle est la distrubition la plus importante et la plus facile à utiliser dans la théorie des files d'attente .

les temps inter-arrivées et les temps de service peuvent souvent être représenté exactement ou approximativement en utilisant la distrubition exponentielle [17].

$$f_T(t) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda e^{-\lambda t} \text{ si } \lambda \geq 0; t \geq 0 \\ 0 \text{ si non} \end{array} \right\} \tag{1.8}$$

PROCESSUS DE POISSON

Le processus de Poisson est un processus à état continue discret , il est couramment utilisé pour indiquer le nombre d'arrivées dans un système des files d'attente dans l'intervalle $]0, t[$

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \times e^{-\lambda t} \quad (1.9)$$

tel que $P(N(t))$ est la probabilité d'obtenir n arrivées.

les temps des inter-arivées sont indépendants et obéissent à une loi exponentielle de paramètre λ .

1.6.2 Processus de naissance et de mort

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continue et à espace d'états discret

$n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, n$ ils sont caractérisées par :

L'absence de mémoire [23], et à partir d'un état donné n , des transitions ne sont possibles que vers l'un a l'autre des etats voisins $(n + 1)$ et $(n - 1)$ pour $n \geq 1$

On note $\{N(t), t \geq 0\}$ [23] un processus de naissance et de mort à états discrets et homogènes dans le temps c'est-à-dire :

$$P(N(t + s) = j / N(s) = i) = P_{ij}(t) \quad (1.10)$$

ne dépend pas de s .ce processus est de naissance et de mort si :

$$P_{i,i+1}(\delta t) = \lambda_i \delta t + \theta \delta t \quad i \geq 0 \quad (1.11)$$

$$P_{i,i-1}(\delta t) = \mu_i \delta t + \theta \delta t \quad i \geq 1 \quad (1.12)$$

$$P_{i,i}(\delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)\delta t + \theta(t) \quad i \geq 0 \quad (1.13)$$

$$P_{i,j}(\delta t) = \theta(\delta t), |i - j| \geq 1 \quad (1.14)$$

$$P_{i,j}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.15)$$

λ_i, μ_i sont appelées taux de naissance et de mort [56] (taux de transition).

Le diagramme

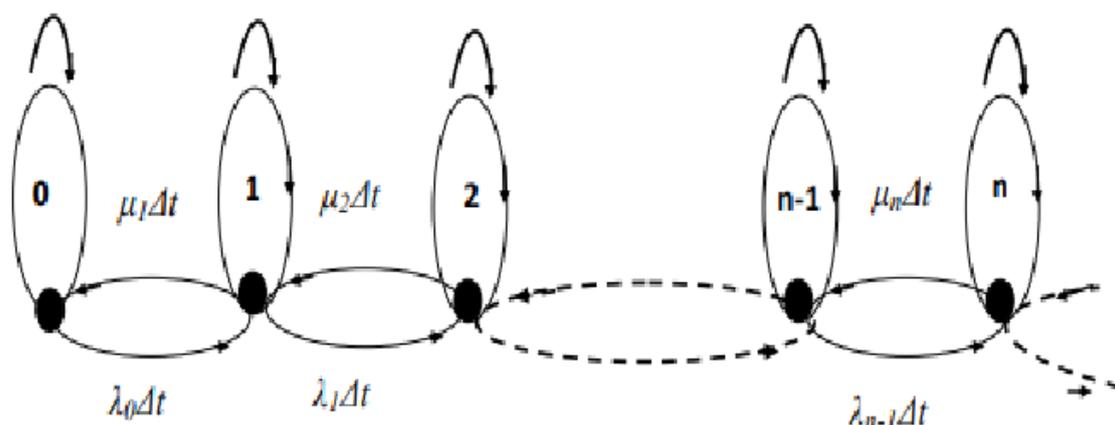


FIG. 1.3 – Processus de naissance et de mort

1.7 Exemples de files d'attente

Voici quelque exemple de modèles de files d'attente suivant la notation de Kendall [31] que nous explicitons :

1.7.1 La file M/M/2

-Les arrivées suivent la loi de Poisson .

-Le temps de service suit la loi exponentiel de taux μ , indépendant d 'un client à un autre , le système compt de serveurs .

-La discipline de la file est FIFO.

-Le nombre de places disponibles est infini .

1.7.2 Le modèle M/M/ ∞

-Les arrivées suivent une loi de Poisson .

-Les temps de service suivent une loi exponentielle .

-Le nombre de serveur est infini :les clients sont traités simultanément et indépendamment . On les retrouve généralement dans le cas des réseaux téléphoniques.

1.7.3 Le modèle M/G/4/-/SIRO

-Les arrivées suivent la loi de Poisson .

-Les durées de service suivent la distribution générale .

-Le nombre de serveur est 4.

-Le nombre de place disponible est infini.

-La discipline de la file est SIRO.

1.7.4 Le modèle G/E₃/5/200

-Les arrivées suivent la loi générale.

-Les durées de service suivent la loi d'ERLANG [17] de paramètre 3.

-Le nombre de serveur est 3.

-Le nombre de places disponibles dans le système est 200.

-La discipline de la file est FIFO.

1.8 Les systèmes de files d'attente

1.8.1 Le système M/M/1

La file $M/M/1$ est la file markovienne la plus simple, on n'a qu'un seul serveur ou le processus d'arrivée suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et le service pour chaque client qui suit une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$, la discipline d'attente est FIFO, la file d'attente est de capacité infinie, dans ce cas le processus est de naissance et de mort [17] dont les taux de transition sont : $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$.

La distribution

Soit $X(t)$ le nombre de clients dans le système à l'instant t . En raison de la distribution exponentielle des temps inter-arrivées et des temps de service, le processus $(X(t); t \geq 0)$ est un processus de Markov.

Définition 1.8.1 Soit $(P_i, i \geq 0)$ la fonction de distribution du nombre de clients dans le système à l'état d'équilibre.

Les équations d'équilibre pour ce processus sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda P_0 = \mu P_1 \\ (\lambda + \mu) P_n = \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \end{array} \right., \forall n \geq 1$$

Remarque 1.8.1 Soit $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ l'intensité du trafic

Les probabilités d'état pour un régime stationnaire du processus est donné par [3] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_n = P_0 \rho^n \\ P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = 1 - \rho \end{array} \right. \quad (1.16)$$

D'où :

$$\pi_n = (1 - \rho) \rho^n \forall n \geq 0 \quad (1.17)$$

Les mesures de performances

Le nombre moyen de clients dans le système L :

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (1.18)$$

Le nombre moyen de clients dans la file :

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} \quad (1.19)$$

Le temps moyen qu'un client passe dans le service :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (1.20)$$

Le temps moyen d'attente :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} \quad (1.21)$$

Remarque 1.8.2 *Plus l'intensité du trafic se rapproche de un , plus la longueur moyenne de la file d'attente tend vers l'infinie [5].*

La probabilité d'être servi immédiatement à l'arrivée est π_0 .

Diagramme de transition d'état M/M/1

Les diagrammes montrent comment le système se déplace d'un état à l'autre, et les taux de mouvements entre les états .

Les systèmes de files d'attente qui sont modélisés par des chaînes de Markov à temps continue :

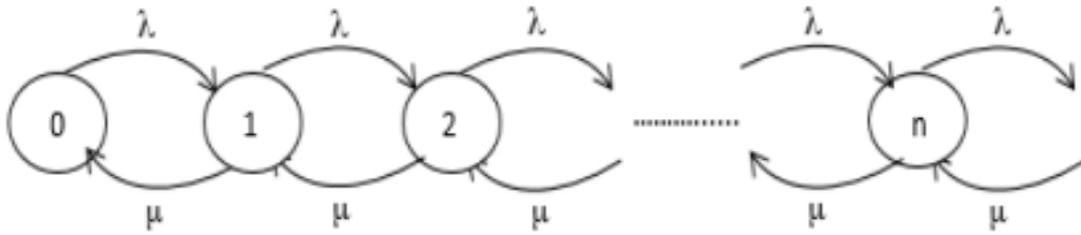


FIG. 1.4 – Graphe de transition d'un modèle M/M/1.

1.8.2 Le modèle M/M/1/K

Déscription du modèle

La file $M/M/1/K$ est une file markovienne composé d' un seul serveur et disposant de K places au totale le nombre maximale de clients en attente est donc $K - 1$ on à donc toujours les hypothèses suivante :

- Le processus d'arrivés des clients dans la file est un processus de poisson de taux λ [20].
- Le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux μ [20].

Soit K la capacité de la file d'attente ,la capacite de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de clients qui se présentent sont rejetés .

- Ce processus est considère comme un processus de naissance et de mort [18] avec :

Le taux de naissance $\lambda_n = \lambda$ pour tout $n \leq K$

Le taux de mort $\mu_n = \mu$ pour tout $n \neq 0$

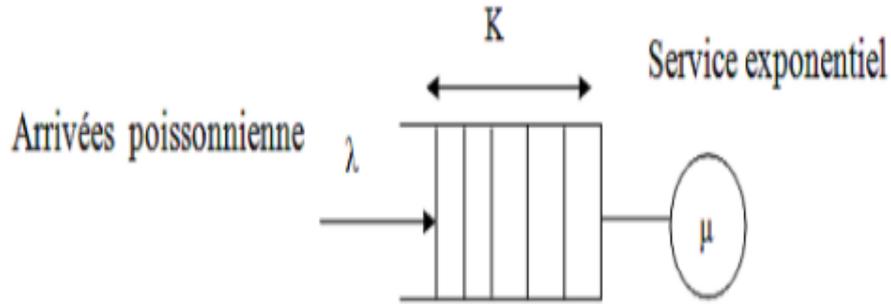


FIG. 1.5 – Le modèle M/M/1/K

Le diagramme

Le régime stationnaire

soit π_n , $n = 0, 1, 2, \dots, K$ la probabilité pour qu'il y ait n clients dans le système à l'instant t .

$$\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \quad (1.22)$$

$$(\lambda + \mu)\pi_n = \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} \text{ pour tout } n = 1, 2, \dots, K - 1$$

$$\lambda\pi(N - 1) = \mu\pi(N)$$

Le calcul de P_n se fait de la manière suivante

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^n}{(1-\rho^{K+1})} \text{ pour } n \leq K \\ 0 \text{ pour } n > K \end{cases} \quad (1.23)$$

Les mesures de performances

Le nombre moyen de clients L :

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^k n P_n = \left[\frac{(1-\rho)}{(1-\rho^{k+1})} \right] \sum_{n=0}^k n \rho^n & (1.24) \\
L &= \left[\frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho^{k+1})} \right] \sum_{n=1}^k n \rho^{n-1} \\
L &= \left[\frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho^{k+1})} \right] \frac{d}{d\rho} \left[\frac{(1-\rho^{k+1})}{(1-\rho)} \right] - 1 \\
L &= \left[\frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho^{k+1})} \right] \left[\frac{1 - (K+1)\rho^k + K\rho^{k+1}}{(1-\rho)^2} \right] \\
L &= \left[\frac{\rho}{(1-\rho)} \right] \left[\frac{1 - (K+1)\rho^k + K\rho^{k+1}}{(1-\rho^{k+1})} \right]
\end{aligned}$$

Lorsque $n \rightarrow \infty$ on obtient $L = \frac{\rho}{1-\rho}$ [17] qui représente le nombre moyen de clients pour la file précédente M/M/1.

1.8.3 Le Modèle d'attente M/M/S

Description du modèle

Pour ce modèle de file d'attente il existe s serveurs identiques et indépendants les uns des autres ,et la capacité est infinie .

On a les hypothèses suivants :

1. le processus d'arrivée d'un client dans la file est un processus de Poisson de taux λ .
2. le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de paramètre μ .

Dans ce cas le processus modélisant le nombre de clients dans le système est un processus de naissance et de mort

Le diagramme de transition d'état M/M/S

le diagramme de transition d'état est représenté sur la figure suivante :

Le taux de naissance : $\lambda_n = \lambda \quad \forall n$

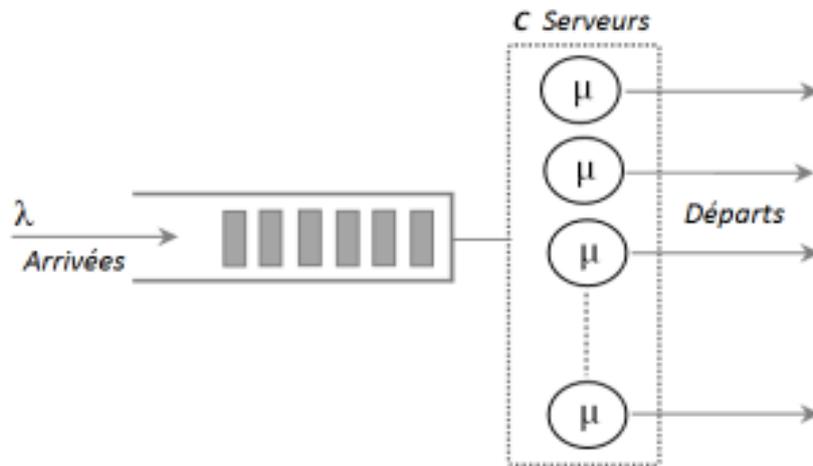


FIG. 1.6 – La file M/M/S

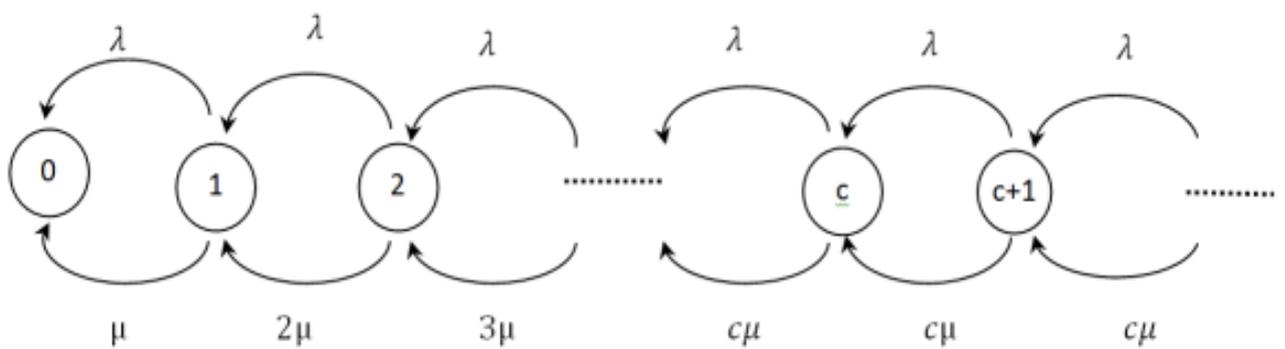


FIG. 1.7 – Diagramme de transition d'un modèle M/M/S ($s=c$)

$$\text{Le taux de mort : } \mu_n = \begin{cases} n\mu & 1 \leq n \leq s \\ s\mu & n > s \end{cases}$$

Le régime stationnaire

Pour calculer \prod_n , le système doit être **stable** ($\lambda < s\mu$ donc $\rho < s$) qui exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file sont capable de traiter par unité de temps [6].

Alors :

$$\prod_n = \begin{cases} \pi_0 \frac{\rho^n}{n!} \text{ pour } n = 1, 2, \dots, s-1 \\ \pi_0 \rho^n \frac{s^{n-1}}{s!} \text{ pour } n \geq s \end{cases} \quad (1.25)$$

avec :

$$\prod_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{s}} \right) \right]^{-1}$$

Remarque 1.8.3 pour la valeur $s = 1$ on obtient les mêmes résultats ce qui représente le système $M/M/1$.

Les mesures de performances

Le temps moyen de séjour W :

Le temps moyen de séjour est composé du temps moyen dans la file plus le temps de service, il suffit donc d'appliquer **la loi de little**.

$$W = W_q + W_s \quad (1.26)$$

$$W = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\rho} \quad (1.27)$$

il reste donc de calculer le nombre moyen de clients dans la file L_q :

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \prod_n & (1.28) \\
&= \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \frac{\rho^n}{s! s^{n-s} \pi_0} \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{s! s} \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \left(\frac{\rho}{s}\right)^{n-s-1} \pi_0 \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{s! s \left(1 - \frac{\rho}{s}\right)^2} \pi_0 \\
&= \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} \pi_0
\end{aligned}$$

Alors :

$$W = \left[\frac{\rho^S}{\mu (s-1)!(s-\rho)^2} \pi_0 + \frac{1}{\mu} \right] \quad (1.29)$$

Le nombre moyen de client L :

La loi de little permet de trouver le nombre moyen de clients dans la file

$$\begin{aligned}
L &= W \times d = W \times \lambda & (1.30) \\
&= \left[\frac{\rho^{S+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} \pi_0 + \rho \right]
\end{aligned}$$

1.8.4 Le modèle M/M/ ∞

Dans le cas ou $s = \infty$, nous obtenons le système M/M/ ∞ , il est evident qu'aucune file d'attente ne se forme.

LA DISTRIBUTION STATIONNAIRE

$$\prod_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \times \left(\frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}}}{n!}\right) \quad (1.31)$$

LES MESURES DE PERFORMANCES

Le nombre moyen de clients L

$$L = \rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (1.32)$$

Le nombre moyen de client moyen L_q

$$L_q = 0 \quad (1.33)$$

Le temps moyen d'attente dans le système W

$$W = \frac{1}{\mu} \quad (1.34)$$

Le temps moyen d'attente dans la file W_q

$$W_q = 0 \quad (1.35)$$

Conclusion 1.8.1 *Dans ce chapitre nous avons définie quelques concepts de base utilisés dans les chapitres suivants. Nous avons présenté et défini le mécanisme d'attente et donné quelques préliminaires sur les files d'attente et les systèmes markoviens des files d'attente.*

Chapitre 2

LA THEORIE DES ENSEMBLES FLOUS (fuzzy sets)

2.1 Introduction

La modélisation des files d'attentes floues en générale comporte une bonne partie de notions liées à la théorie des ensembles flous une branche de l'algèbre abstraite qui est une extension de la logique habituelle .

Dans ce chapitre nous rappelons quelque notions de base de cette théorie dont nous avons besoin dans les chapitres suivants, ces notions sont abordées avec un peu plus de détails car la manipulation imprécise sur les systèmes d'attentes flous exige une connaissance plus ou moins approfondis de cette théorie .

Ce chapitre est structuré de la manière suivante, la deuxième section rappelle l'historique de cette logique, la définition d'un sous-ensemble flou ; ses caractéristiques et les opérations algébriques dans la famille des sous ensembles flous, la troisième englobe les relations floues, la quatrième rappelle le principe d'extension de ZADEH [58] (et l'une des méthodes importantes la méthode alpha-coup), la cinquième section et la sixième introduisant les nombres flous (triangulaires et trapézoïdaux) la septième détaille un nombre flou de type L-R et la huitième une généralité sur l'arithmétique des nombres flous finalement une conclusion sur ce qui précède.

2.2 Sous-ensemble flou

2.2.1 Historique

La logique du flou (FUZZY LOGIC) a été formulée par le professeur LOTFI ZADEH [57] à l'université de CALIFORNIA a BERKELEY en 1965 mais elle a été mentionné par WILLIAM SHAKESPEARE des siècles avant lui mais d'une autre manière pour décrire la vie humaine où il a mentionné que la race humaine contient des couleurs , grises et que le noir et les couleurs blanches sont difficile à trouver car il est rare de trouver une personne qui va parfaitement bien ou mal appliqué... Ce que l' on entend par les couleurs grises (ie : vous pouvez être bon ou mauvais mais dans de proportions variables).

Sans être elle-même imprécise, la théorie des sous-ensembles flous est basée sur l'intuition, et tient compte de l'imprécision, de l'incertitude, de l'incomplétude et de la subjectivité.

Associée à la logique floue et à la théorie des possibilités qui furent créés par le même auteur quelques années plus tard, la théorie des sous-ensembles flous a porté ses premiers fruits aux alentours des années 1974. Dès cette période, plusieurs applications qui se sont inspirées des recherches de Mamdani [37] sur le contrôle flou et des articles de Zadeh sur l'approche linguistique dans le réglage des systèmes, ont commencé à produire les premiers résultats qui ont éveillé la curiosité du monde industriel et scientifique. Elle est utilisée dans les systèmes d'aide à la conduite des véhicules , les diagnostic médicaux, les outils assurantiels et les préventions des risques, les intelligences artificielles qui gère le trafic routier et aérien et également les modèles de prédiction métrologique et climatique .Son idée principale est basée sur l'incertitude, l'intuition, l'incomplétude et la subjectivité contrairement au traditionnelle binaire, rien n'est 100% vrai, et rien n'est 100% faux.

2.2.2 Définitions et Remarques

Le concept de sous-ensemble flou constitue un assouplissement de celui de sous ensemble d'un ensemble donné. Il n'existe pas d'ensemble flou au sens propre , tous les ensembles

considérés étant classiques et bien définis. On utilise toute-fois souvent le terme d'ensemble flou au lieu de sous ensemble flou par abus de langage, conformément à la traduction du terme originale de "*fuzzy set*", que l'on oppose au "*crisp set*" désignant un sous-ensemble non flou. Pour un langage mathématique acceptable nous utilisons indifféremment le terme sous-ensemble flou et ensemble flou.

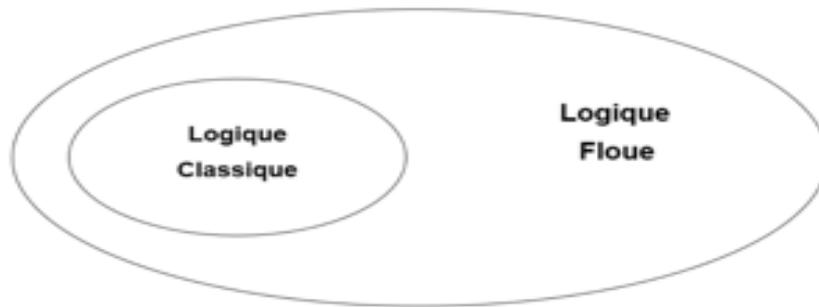


FIG. 2.1 – Présentation des ensembles flous.

Définition

Soit X un ensemble, un sous ensemble flou A est caractérisé par une fonction réelle appelée fonction d'appartenance peut être de différentes formes selon son utilisation, Elle est choisie arbitrairement en suivant les conseils de l'expert ou en faisant des études statistiques (forme triangulaire, hyperbolique, tangente, trapézoïdes, gaussiennes, sigmoïdes...) Cette dernière admet des degrés d'appartenance à un ensemble donné.

Le degré d'appartenance d'un fuzzy set est matérialisé par un nombre compris entre 0 et 1 est on la note μ_A :

$$\mu_A : \mathbf{X} \longrightarrow [0, 1] \quad (2.1)$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mu_A(\mathbf{x})$$

Remarque 2.2.1 *Dans le texte de cette dissertation, les termes : classique, traditionnel ou ordinaire se rapportent à la théorie classique des ensembles, tandis que les termes flou, vague, imprécis, incertain, mal connu, . . . désignent ce qui est relatif aux ensembles flous.*

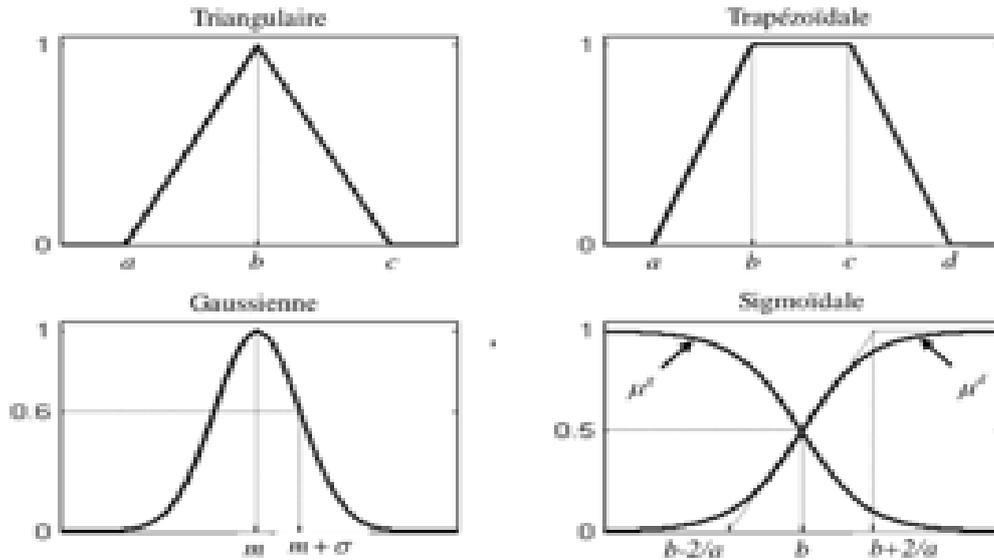


FIG. 2.2 – Présentation de quelques formes de fonctions d'appartenance

– $\tilde{P}(X)$ ou $\tilde{P}([0,1])$ désigne l'ensemble de tous les ensembles flous ordinaires, Il est appelé aussi **ensemble puissance de $[0,1]$**

– Pour distinguer l'ensemble flou A de l'ensemble non flou (**crisp set A**) nous surmonterons désormais l'ensemble flou du symbole " \tilde{A} " par A et on note :

$$\tilde{A} = \{(\mathbf{x}, \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})/\mathbf{x} \in \mathbf{X})\}. \quad (2.2)$$

– Dans le cas où le domaine est un sous ensemble flou fini (dénombrable) \tilde{A} est souvent noté par :

$$\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}_1)/\mathbf{x}_1 + \dots + \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}_n)/\mathbf{x}_n, \quad (2.3)$$

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}_i)/\mathbf{x}_i.$$

où le signe " + " représente l'union des éléments et où le signe "/" joue le rôle de séparateur .

– Lorsque X est infini ou non dénombrable, \tilde{A} est noté :

$$\tilde{A} = \int_X \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})/\mathbf{x}. \quad (2.4)$$

- Un sous ensemble \mathbf{A} est un cas particulier d'un sous ensemble flou \tilde{A}
- L'ensemble flou vide $\tilde{\phi}$ est noté par : $\mu_{\tilde{\phi}}(x) = \mathbf{0}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.
- Le plus grand sous ensemble sur X est noté par: $\tilde{\mathbf{1}}_X$ sa fonction d'appartenance :

$$\mu_{\tilde{\mathbf{1}}_X}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad (2.5)$$

2.2.3 Caractérisation d'un sous ensemble flou

Soit \mathbf{X} un univers et $\tilde{A} \in \mathbf{X}$, la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$. Les caractéristiques les plus utiles sont celles qui montre à quel point ils diffèrent d'un sous ensemble classique.

1. **Le noyau de \tilde{A} :** noté $\mathbf{noy}(\tilde{\mathbf{A}})$ est l'ensemble des éléments de X pour lesquels $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$ vaut 1.

$$\mathbf{noy}(\tilde{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} / \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{1}\}. \quad (2.6)$$

2. **Le support de \tilde{A}** noté $\mathbf{supp}(\tilde{\mathbf{A}})$ est la partie de X sur laquelle $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$ n'est pas nulle.

$$\mathbf{supp}(\tilde{\mathbf{A}}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} / \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}. \quad (2.7)$$

3. **La hauteur de \tilde{A}** noté $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{A}})$ est la plus grande valeur (ou le plus fort degré) prise par sa fonction d'appartenance.

$$\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{A}}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

4. Le sous ensemble flou \tilde{A} de X est dit normalisé si sa hauteur $\mathbf{h}(\tilde{\mathbf{A}})$ est égale à 1.

5. **La cardinalité de \tilde{A}** est définie par :

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}).$$

6. **La convexité :** un sous ensemble flou \tilde{A} sur E est dite **convexe** ssi :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \forall \lambda \in [0, 1] : \mu_{\tilde{A}}(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{y})]. \quad (2.9)$$

2.2.4 Les opérations sur les sous ensembles flous

Soient \tilde{A} et \tilde{B} deux sous-ensembles flous de X de fonctions d'appartenances $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x})$ et $\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x})$.

- **L'égalité :** On dit que deux SEF sont égaux si leur fonctions d'appartenance prennent la même valeur pour tout éléments de X .

$$\tilde{A} = \tilde{B} \text{ ssi } \forall x \in X, \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x}). \quad (2.10)$$

- **L'inclusion :** On dit que \tilde{A} est inclus dans \tilde{B} et on note $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ si et seulement si leurs fonctions d'appartenance sont telles que :

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \text{ ssi } \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \leq \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

- **L'intersection :** L'intersection de deux SEF \tilde{A} et \tilde{B} de X est un sous-ensemble flou \tilde{C} que l'on note $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ tel que :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{C}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(\mathbf{x}) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x})\}. \quad (2.12)$$

- "**min**" désignant l'opérateur de minimisation.
- **L'union :** L'union de de deux SEF \tilde{A} et \tilde{B} de X est un sous-ensemble flou \tilde{D} que l'on note $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ tel que :

$$\forall x \in X ; \mu_{\tilde{D}}(\mathbf{x}) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(\mathbf{x}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{x})\}. \quad (2.13)$$

- "**max**" désignant l'opérateur de maximisation.

Remarque 2.2.2 Ces définitions ne sont pas uniques. les opérateurs *min* et *max* peuvent être remplacés par des opérateurs faisant respectivement partie de la famille des **t-normes** (application de \mathbf{t} de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ commutatives, associatives, non décroissantes en chaque argument et telles que $(\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{1}) = \mathbf{x} \forall x \in [0, 1])$ et des **t-conormes** (applications de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ commutatives, associatives, non décroissantes en chaque argument

et telles que $(\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{x} \forall x \in [0, 1])$.

– **L'addition** $\tilde{A} + \tilde{B}$:

$$\tilde{A} + \tilde{B} = \sup_{x,y} \{ \min (\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y})) / x + y = z \}. \quad (2.14)$$

– **La multiplication** $\tilde{A} \times \tilde{B}$:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = \sup_{x,y} \{ \min (\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y})) / x.y = z \}. \quad (2.15)$$

– **La différence** $\tilde{A} - \tilde{B}$: la différence de deux SEF est l'ensemble flou $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}^c$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}^c}(x) = \sup_{x,y} \{ \min (\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}), \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y})) / x - y = z \}. \quad (2.16)$$

– Certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques (net) sont vérifiées :

– **L'associativité, la commutativité et la distributivité .**

– **Le complément** : \tilde{A}^c d'un SEF

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}^c}(\mathbf{x}) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

On a de plus :

$$(\tilde{A}^c)^c = \tilde{A}$$

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$$

Par contre d'autres propriétés ne le sont pas généralement (la propriété de la non contradiction et du tiers exclu)

$$\tilde{A}^c \cap \tilde{A} \neq \phi \quad (2.18)$$

$$\tilde{A}^c \cup \tilde{A} \neq X \quad (2.19)$$

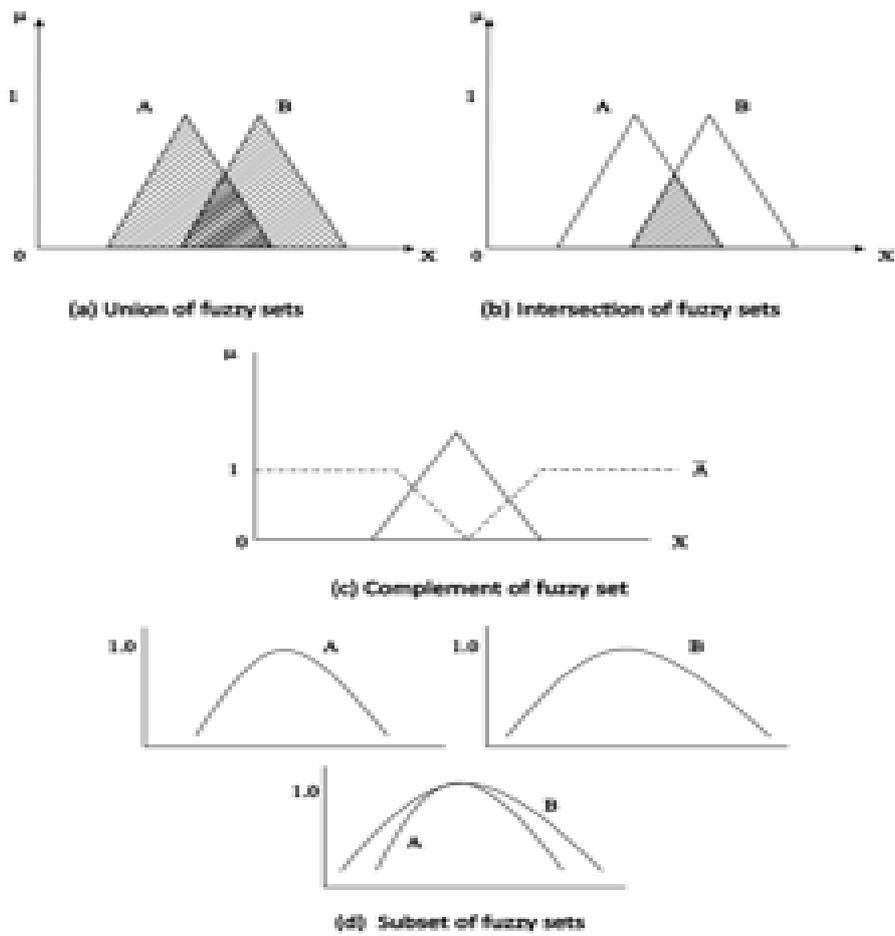


FIG. 2.3 – Quelques opérations sur les sous-ensembles flous

2.3 Relation floue

Une relation floue R entre r ensembles de référence X_1, X_2, \dots, X_r est définie comme un sous-ensemble flou du produit cartésien $X_1 \times X_2, \dots \times X_r$ et de fonctions d'appartenance μ_R .

Cas particulier :

1. Si $X_1 = X_2$ on dit que la relation floue R définit sur les deux univers X_1 et X_2 est une relation binaire floue.
2. Si on a seulement 2 ensembles de référence, finis, R peut être décrite par la matrice $M(R)$ des valeurs de sa fonction d'appartenance.
3. La composition de 2 relations floues R_1 sur $X \times Y$ et R_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $R = R_1 \circ R_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance représentée par :

$$\forall (x, z) \in X \times Z, \mu_R(x, z) = \sup_{y \in Y} \{ \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)) \}. \quad (2.20)$$

2.3.1 Les propriétés d'une relation binaire floue dans X

Soit R une relation binaire floue sur un ensemble de référence non vide, on dit que :

- R est **réflexive** ssi :

$$\forall x \in X, \quad R(x, x) = 1. \quad (2.21)$$

- R est **symétrique** ssi :

$$\forall x, y \in X, \quad R(x, y) = R(y, x). \quad (2.22)$$

- R est **antisymétrique** ssi :

$$\forall x, y \in X, \quad R(x, y) \wedge R(y, x) = 0 \Rightarrow x = y. \quad (2.23)$$

– R est **transitive** ssi :

$$\forall x, y, z \in X, R(x, y) \wedge R(y, z) \leq R(x, z). \quad (2.24)$$

– toute relation floue réflexive, symétrique, transitive est dite *une relation d'équivalence floue*.

2.4 Les α – coupes d'un sous-ensemble flou

Une α – coupe d'un ensemble flou \tilde{A} où ensemble de niveau α de noté \tilde{A}_α est le sous ensemble extrait de l'ensemble A (au sens de la théorie des ensembles classiques [7] des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égal à α avec $\alpha \in [0, 1]$ fixé.

On a :

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \geq \alpha\}. \quad (2.25)$$

D'autre part, on peut définir l'ensemble :

$$\tilde{A}^\alpha = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) > \alpha\}. \quad (2.26)$$

L'ensemble \tilde{A}^α est appelé α – coupe fort ou α – coupe strict ; et \tilde{A}_α est un sous-ensemble ordinaire dont la fonction caractéristique est [16] :

$$\chi_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{\tilde{A}_\alpha}(\mathbf{x}) \geq \alpha, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.27)$$

Proposition 2.4.1 Soit \tilde{A} et \tilde{B} deux sous ensembles flous alors :

Propriétés 2.4.1 Si $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ alors

- i) $\tilde{A}_\alpha \subset \tilde{B}_\alpha$,
- ii) $(\tilde{A} \cap \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\alpha$,
- iii) $(\tilde{A} \cup \tilde{B})_\alpha = \tilde{A}_\alpha \cup \tilde{B}_\alpha$,

Théorème 2.4.1 (Théorème de décomposition) [17] Tout sous-ensemble flou \tilde{A} de

l'ensemble de référence X est défini à partir de ses α – coupes par :

$$\forall x \in X / \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)). \quad (2.28)$$

où "sup" indique la borne supérieure des valeurs possibles et $\chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)$ est la fonction d'appartenance de A_α .

Preuve. Soit $x \in X$ supposons $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \beta$, $\beta \in [0, 1]$, $\mathbf{x} \in \tilde{A}$.

Donc $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \beta \cdot \chi_{\tilde{A}_\beta}(x)$ et $\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) \leq \sup_{\beta \in [0,1]} (\beta \cdot \chi_{\tilde{A}_\beta}(x))$.

Réciproquement, soit $x \in X$ pour tout niveau β on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_{\tilde{A}_\beta}(x) = 0 \text{ si } \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \beta \\ \chi_{\tilde{A}_\beta}(x) = 1 \text{ si } \mu_\alpha(\mathbf{x}) \geq \beta \end{array} \right\}. \quad (2.29)$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \cdot \chi_{\tilde{A}_\beta}(x) = \beta \text{ si } \mu_\alpha(\mathbf{x}) \geq \beta \\ \beta \cdot \chi_{\tilde{A}_\beta}(x) = 0 \text{ si } \mu_\alpha(\mathbf{x}) < \beta \end{array} \right\}. \quad (2.30)$$

Donc dans les deux cas

$$\beta \cdot \chi_{\tilde{A}_\beta}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}),$$

d'où

$$\sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x)) \leq \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}). \quad (2.31)$$

Par conséquent, pour tout $x \in X$

$$\mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{\tilde{A}_\alpha}(x))$$

■

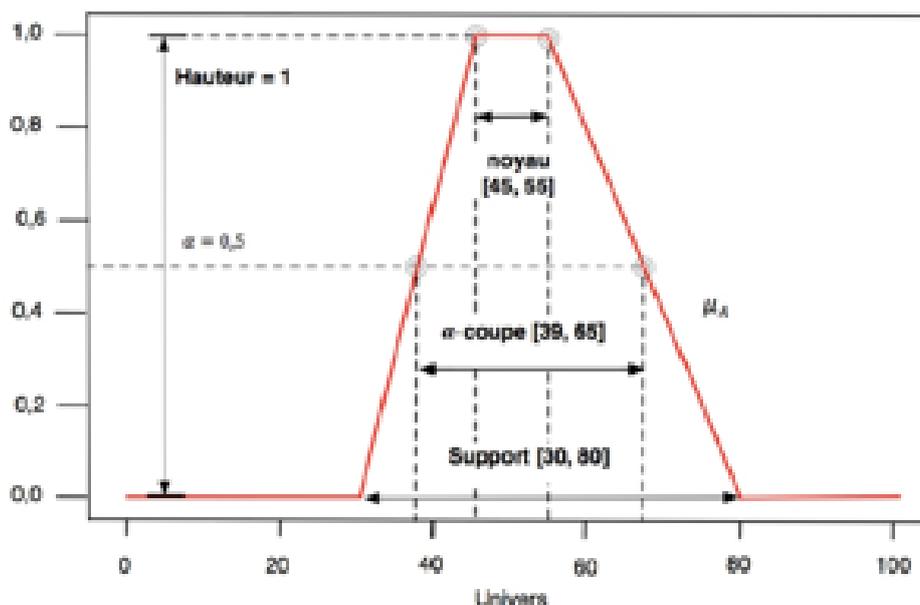


FIG. 2.4 – Éléments caractéristiques d'un sous-ensemble flou.

2.5 Le principe d'extension de ZADEH

Le principe d'extension de Zadeh constitue un outil très puissant de la théorie des ensembles flous. Il permet d'exploiter des connaissances classiques dans le cas de données imprécises. Plusieurs chercheurs tels que Zadeh [60] lui-même, Dubois et Prade[16] et les autres [11], [7], s'en sont servis pour bâtir l'arithmétique floue sur la base de l'arithmétique classique comme nous le verrons dans la section ci-dessous. Introduit sous sa forme élémentaire par Zadeh dans [57] en 1965, ce principe a connu par la suite quelques modifications suggérées par le même auteur successivement dans [59] en 1973 et dans [60] en 1975. Ici, nous présentons sa forme générale proposée par Zadeh dans [57] et Dubois et Prade dans [16].

Soit une application f d'un univers X vers un univers Y . Soit \tilde{A} un sous-ensemble flou défini sur X auquel x appartient fortement. Le principe d'extension stipule que l'image par f de \tilde{A} , $f(\tilde{A})$ est un sous-ensemble flou de Y dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x}/\mathbf{y}} \mu_{\tilde{A}}(\mathbf{x}). \quad (2.32)$$

Ce principe est illustré en [57]. La généralisation à des fonctions de plusieurs variables

est la suivante :

Soient X_i $i = 1, \dots, n$ univers, X le produit Cartésien des X_i , et f une fonction de X vers Y . L'image des sous-ensembles flous $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ de X_1, X_2, \dots, X_n par f est donnée par :

$$\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}/f(\mathbf{x})=\mathbf{y}} \left\{ \min \left\{ \mu_{\tilde{A}_1}(\mathbf{x}_1), \mu_{\tilde{A}_2}(\mathbf{x}_2), \mu_{\tilde{A}_3}(\mathbf{x}_3), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(\mathbf{x}_n) \right\} \right\} \text{ si } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \quad (2.33)$$

$$\mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Notation 2.5.1 notons que le principe d'extension est compatible avec les α – coupes strictes :

$$\tilde{A}^\alpha = f((\tilde{A}_1)^\alpha + (\tilde{A}_2)^\alpha + (\tilde{A}_3)^\alpha + \dots + (\tilde{A}_n)^\alpha). \quad (2.34)$$

2.6 Comptabilité du principe avec les alpha-coupes

Au sujet de ce principe, Nguyen a montré dans [54] l'équivalence suivante qui confirme sa comptabilité avec les alpha-coupes :

$$[\tilde{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)]_\alpha = \tilde{f}(\tilde{A}_{1\alpha}, \tilde{A}_{2\alpha}, \dots, \tilde{A}_{n\alpha}) \quad (2.35)$$

\Updownarrow

$$\exists (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n \text{ tq } \mu_{\tilde{B}}(\mathbf{y}) = \mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \dots \times \tilde{A}_n}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$$

2.7 Les nombres flous

Les nombres flous généralisent les nombres réels classiques [47] et plus précisément, les nombres flous sont des sous ensembles flous de \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels, qui ont quelques propriétés additionnelles.

2.7.1 Quelques définitions sur ce concept

Avant d'entamer la définition on procède à définir quelques notions importantes.

Définition 2.7.1 1) (**Quantité floue**) Une quantité floue [11] est un sous-ensemble flou normalisé \tilde{Q} de \mathbb{R} (l'ensemble des nombres réels).

2) (**Une valeur modale**) où **mode** d'une quantité floue \tilde{Q} est un élément m de \mathbb{R} tel que $\mu_{\tilde{Q}}(m) = 1$.

3) (**Intervalle flou**) Si le $\text{Noy}(\tilde{A})$ est un intervalle de \mathbb{R} on parle alors d'intervalle flou, autrement dit une quantité floue convexe.

4) (**Nombre flou**) Soit \tilde{A} un sous-ensemble flou de \mathbb{R} . Alors, \tilde{A} est dit un nombre flou s'il satisfait les propriétés suivantes :

i) \tilde{A} est normalisé.

ii) \tilde{A} est convexe.

iii) $\mu_{\tilde{A}}$ est à support compact i.e , l'ensemble $\overline{\{x \in \mathbb{R}, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}$ est compact, on le note **Supp A**.

iv) $\mu_{\tilde{A}}$ est semi-continue supérieurement sur \mathbb{R} [58], i.e, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, une des conditions d'équivalences suivantes est vérifiée :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(0)$$

Définition 2.7.2 pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $W \subset \mathbb{R}$ de x_0 tel que pour tout $x \in W$ on a :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(0) < \varepsilon \quad (2.36)$$

On note par $F(\mathbb{R})$ l'ensemble de tout nombres flous.

Définition 2.7.3 On dit qu'un nombre flou est positif (respectivement négatif) si sa fonction d'appartenance est telle que [16]:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, \forall x < 0 (\forall x > 0) \quad (2.37)$$

2.7.2 Alpha coupe d'un nombre flou ($\alpha - cut$)

La notion des alpha-coupes est très capitale sur la théorie des nombres flous. Avec l'aide du principe d'extension de Zadeh [60] elle a pu faciliter l'introduction de l'arithmétique floue dite "arithmétique des α -coupes et intervalles". Plusieurs théorèmes importants de cette théorie portent sur cette notion, notamment : le stacking theorem [15], le théorème de caractérisation [36] le théorème de représentation $L - U$ [6] le théorème de Goetschel et Voxman [23], etc. Tous ces théorèmes décrivent les caractéristiques de fonctions déterminant les coupes de niveau α d'un nombre flou \tilde{A} .

Définition 2.7.4 *Un sous ensemble flou \tilde{A} appelé un nombre flou lorsque l'ensemble universel sur lequel $\mu_{\tilde{A}}$ est défini, l'ensemble de tout les nombres réels \mathbb{R} satisfait les conditions suivantes :*

- 1) *Tout les $\alpha - coupes$ de \tilde{A} ne sont pas vide pour $0 \leq \alpha \leq 1$.*
- 2) *Tout les $\alpha - coupes$ de \tilde{A} sont des intervalles fermés de \mathbb{R} .*

$$\text{sup } \tilde{A} = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

est borné.

Représentons les $\alpha - coupes$ du nombre flou \tilde{A} par [37]

$$[\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha].$$

Nous observons que tout nombre réel r est un nombre flou dont la fonction d'appartenance est la fonction caractéristique.

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r, \\ 0 & \text{si } x \neq r. \end{cases} \quad (2.38)$$

2.7.3 Opérations des α – coupes intervalles

Les α – coupes des nombres flous sont toujours fermées et bornée des intervalles [11].

Définition 2.7.5 Les α – coupes de l'ensemble flou

$$[\tilde{A} \otimes \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha \otimes [\tilde{B}]^\alpha, \quad (2.39)$$

pour tout $\alpha \in [0, 1]$, où \otimes est une opérations arithmétique $\{+, -, \times, /\}$.

Proposition 2.7.1 Soient \tilde{A} et \tilde{B} des nombres flous avec α – coupes donnés respectivement par $[\tilde{A}]^\alpha = [\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha]$ et $[\tilde{B}]^\alpha = [\tilde{b}_1^\alpha, \tilde{b}_2^\alpha]$. Alors les les propriétés suivantes sont :

1) La somme de \tilde{A} et \tilde{B} est le nombre flou $\tilde{A} + \tilde{B}$ dont les α – coupes sont [26] :

$$[\tilde{A} + \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha + [\tilde{B}]^\alpha = [\tilde{a}_1^\alpha + \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha + \tilde{b}_2^\alpha]. \quad (2.40)$$

2) La différence de \tilde{A} et \tilde{B} est le nombre flou $\tilde{A} - \tilde{B}$ dont les α – coupes sont [26] :

$$[\tilde{A} - \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha - [\tilde{B}]^\alpha = [\tilde{a}_1^\alpha - \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha - \tilde{b}_2^\alpha]. \quad (2.41)$$

3) La multiplication de \tilde{A} par un scalaire λ est le nombre flou $\lambda\tilde{A}$ dont les α – coupes sont [26] :

$$[\lambda\tilde{A}]^\alpha = \lambda[\tilde{A}]^\alpha = \begin{cases} [\lambda\tilde{a}_1^\alpha, \lambda\tilde{a}_2^\alpha] & \text{si } \lambda \geq 0, \\ [\lambda\tilde{a}_2^\alpha, \lambda\tilde{a}_1^\alpha] & \text{si } \lambda < 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

4) La multiplication de \tilde{A} par \tilde{B} est le nombre flou $\tilde{A} \times \tilde{B}$ dont les α – coupes sont [26]

$$[\tilde{A} \times \tilde{B}]^\alpha = [\tilde{A}]^\alpha \times [\tilde{B}]^\alpha = [\min P^\alpha, \max P^\alpha], \quad (2.43)$$

où $P^\alpha = \{\tilde{a}_1^\alpha\tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_1^\alpha\tilde{b}_2^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha\tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha\tilde{b}_2^\alpha\}$.

5) La division de \tilde{A} par \tilde{B} , si $0 \notin \sup \tilde{B}$, est le nombre flou dont les α – coupes sont

[26] :

$$\begin{aligned}
[\tilde{A} / \tilde{B}]^\alpha &= [\tilde{A}]^\alpha / [\tilde{B}]^\alpha = [\tilde{a}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha] / [\tilde{b}_1^\alpha, \tilde{b}_2^\alpha] \\
&= [\min(\tilde{a}_1^\alpha / \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_1^\alpha / \tilde{b}_2^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha / \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha / \tilde{b}_2^\alpha), \max(\tilde{a}_1^\alpha / \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_1^\alpha / \tilde{b}_2^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha / \tilde{b}_1^\alpha, \tilde{a}_2^\alpha / \tilde{b}_2^\alpha)].
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

2.8 Les types des nombres flous

En général, les nombres flous triangulaires et trapézoïdaux jouent un grand rôle en mathématique floue et en particulier sur l'analyse des systèmes d'attente flous [15]. Dans le traitement de ces systèmes, ces nombres servent à modéliser des paramètres imprécis tels que le taux d'arrivée des clients aux systèmes, les taux de service aux différents serveurs, le taux de rappel de clients en orbite, les taux de panne de serveurs, les taux de réparation de serveurs, ou encore les différents coûts intervenant dans les systèmes [47]. L'intérêt qu'ils présentent est qu'ils sont intuitifs et faciles à manipuler dans les calculs par rapport aux autres.

2.8.1 Nombre flou de type triangulaire

C'est le plus populaire, un nombre flou \tilde{M} est dit de type triangulaire noté $\tilde{M} = (a, b, c)$ où $\tilde{M} = (a/b/c)$ s'il existe trois réels $a < b < c$ est sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{M}}(X)$ est définie par :

$$\mu_{\tilde{M}}(X) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } b < x \leq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\tag{2.45}$$

Arithmétique sur les nombres flous de type triangulaires

Soient \tilde{M} et \tilde{N} deux nombres flous de type triangulaire.

– **Multiplication scalaire :**

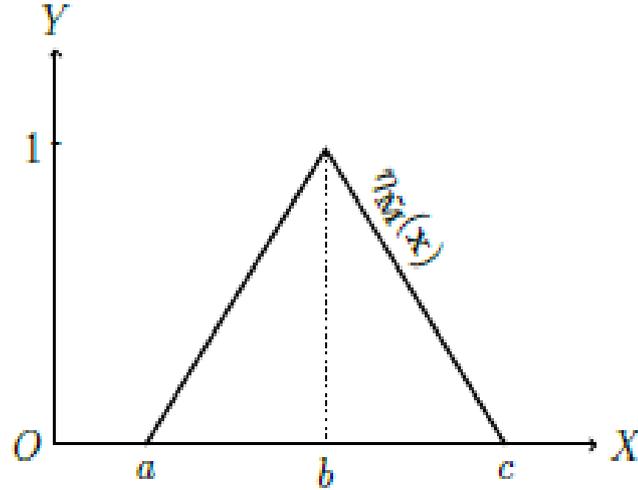


FIG. 2.5 – Représentation d'un nombre flou triangulaire

Soit le nombre flou triangulaire $\widetilde{M} = (a, b, c)$ Il vient :

$$\begin{cases} \text{si } \lambda > 0, \lambda \in R : \lambda \otimes \widetilde{M} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) \\ \text{si } \lambda < 0, \lambda \in R : \lambda \otimes \widetilde{M} = (\lambda a, -\lambda b, -\lambda c). \end{cases} \quad (2.46)$$

– **Addition :**

Soient deux nombres flous $\widetilde{M} = (a, b, c)$ et $\widetilde{N} = (d, e, f)$ de type triangulaire. Il vient :

$$\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} = (a + d, b + e, c + f). \quad (2.47)$$

– **Soustraction :**

Étant donnée deux nombres triangulaire de même type. $\widetilde{M} = (a, b, c)$ et $\widetilde{N} = (d, e, f)$ Il vient :

$$-\widetilde{N} = -(d, e, f) = (d, -e, f) \quad (2.48)$$

$$\widetilde{M} \ominus \widetilde{N} = (a + d, b - e, c + f) \quad (2.49)$$

Comparaison de deux nombres triangulaire

Soient deux nombres flous triangulaire $\widetilde{M} = (a, b, c)$ et $\widetilde{N} = (d, e, f)$

- $\widetilde{M} = \widetilde{N} \Leftrightarrow a = d, b = e, c = f.$
- $\widetilde{M} \leq \widetilde{N} \Leftrightarrow a \leq d, a - b \leq d - e, a + c \leq d + f.$

Théorème 2.8.1 (de reconnaissance d'un nombre flou triangulaire) : Soit un nombre flou \widetilde{M} de α - coupe $\widetilde{M}_\alpha = [\widetilde{M}^L(\alpha), \widetilde{M}^U(\alpha)]$. \widetilde{M} est triangulaire ssi il existe trois réels $u < v < w$ tq $\alpha \in [0, 1]$:

$$\widetilde{M}^L(\alpha) = (v - u)\alpha + u \quad (2.50)$$

et

$$\widetilde{M}^U(\alpha) = (v - w)\alpha + w \quad (2.51)$$

Preuve. a voir [32]. ■

2.8.2 Nombre flou de type trapézoïdal

Un nombre flou \widetilde{M} est dit de type trapézoïdal noté $\widetilde{M} = (a, b, c, d)$ où $\widetilde{M} = (a/b/c/d)$ s'il existe quatre réels $a < b < c < d$ et sa fonction d'appartenance $\mu_{\widetilde{M}}(X)$ est définie par :

$$\mu_{\widetilde{M}}(X) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{si } c < x \leq d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.52)$$

2.8.3 Opération mathématique en nombres flous trapézoïdaux

Les nombres flous peuvent être affichés à des distance déterministe, supposons deux nombres flous trapézoïdaux :

$$\widetilde{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ et } \widetilde{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

avec les caractéristiques suivantes :

$$\widetilde{U} + \widetilde{V} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4) \quad (2.53)$$

$$\tilde{U} - \tilde{V} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, u_4 - v_4) \quad (2.54)$$

$$\tilde{U} \times \tilde{V} = (u_1 \times v_1, u_2 \times v_2, u_3 \times v_3, u_4 \times v_4) \quad (2.55)$$

$$\tilde{U} / \tilde{V} = (u_1/v_1, u_2/v_2, u_3/v_3, u_4/v_4) \quad (2.56)$$

Il convient de noter que le produit de la multiplication et de la division de deux nombres flous trapézoïdaux n'est plus un nombre flou trapézoïdal, mais le produit peut être supposé approximativement un nombre flou trapézoïdal.

Comparaison de deux nombres flous trapézoïdaux

Soient deux nombres flous trapézoïdaux $\tilde{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $\tilde{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

- $\tilde{U} = \tilde{V} \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3, u_4 = v_4.$
- $\tilde{U} \leq \tilde{V} \Leftrightarrow u_1 \leq v_1, u_2 \leq v_2, u_1 - u_3 \leq v_1 - v_3, u_2 + u_4 \leq v_2 + v_4.$

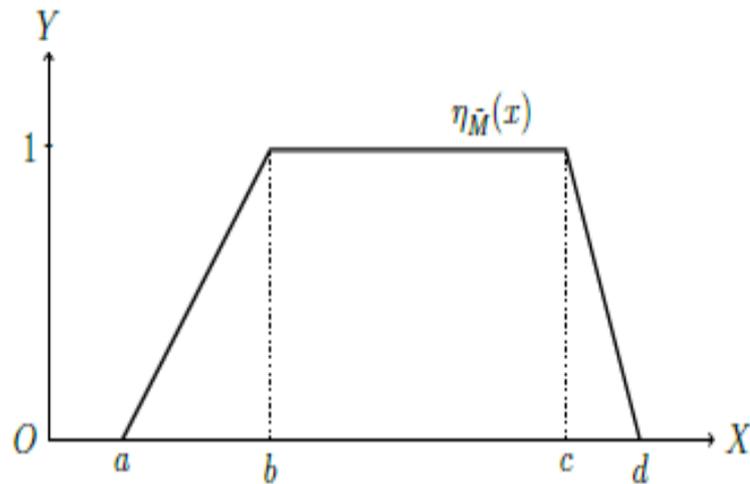


FIG. 2.6 – Représentation d'un nombre flou trapézoïdal

2.8.4 Nombre flou de type L-R (LEFT-RIGHT)

La première forme de type L-R

Un nombre flou \widetilde{M} est de représentation **L – R**, si et seulement s'il existe trois réels $m, a > 0, b > 0$ et deux fonctions L et R dites de référence du nombre flou \widetilde{M} positives, continues et décroissantes de \mathbb{R} dans l'intervalle unité $[0, 1]$ tels que :

$$L(0) = R(0) = 1 \quad (2.57)$$

$$L(x) = L(-x); R(x) = R(-x), \forall x; \quad (2.58)$$

$$L(1) = 0 \text{ ou } L(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0 \quad (2.59)$$

$$R(1) = 0 \text{ ou } R(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = 0 \quad (2.60)$$

$$\mu_{\widetilde{M}}(X) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right) & \text{si } x \in [m-a, m] \\ R\left(\frac{x-m}{b}\right) & \text{si } x \in [m, m+b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.61)$$

2.8.5 Notations et appellations

1. m est la **valeur modale** ou le **mode** de \widetilde{M} .
2. a et b sont appelés respectivement **étalement gauche** [18] ou **écart gauche** et **étalement droit** [18] ou **écart droit**.
3. Symboliquement \widetilde{M} se note $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{L-R}$.
4. La notation $\langle m, a, b \rangle_{L-R}$ est appelée **la représentation L – R** ou **l'écriture L – R** ou encore **la forme L – R** de \widetilde{M} .
5. Par convention $\langle m, 0, 0 \rangle_{L-R}$ est le nombre réel ordinaire m appelé aussi **singleton flou**.

6. La famille des nombre flous de type $L - R$ sera noté $F_{L-R}(\mathbb{R})$.

7. D'après la définition de $\mu_{\widetilde{M}}(X)$ en (2.7.4), **le support de \widetilde{M}** est déterminé par l'intervalle ouvert :

$$Supp(\widetilde{M}) =]m - a, m] \cup [m, m + b[=]m - a, m + b[\quad (2.62)$$

8. Si L et R sont égales, le nombre \widetilde{M} est dite **semi-symétrique**. Un nombre **semi-symétrique** dont les étalements sont égaux, est dit **symétrique** [14].

2.8.6 Arithmétique des nombres flous de même type L-R

Étant donné deux nombre flous de même type $L - R$, $\widetilde{M} = \langle m, a, b \rangle_{L-R}$ et $\widetilde{N} = \langle n, c, d \rangle_{L-R}$, les opérations floues donnent les nombres flous suivant :

1) $\ominus \widetilde{M} = \langle -m, a, b \rangle_{R-L}$, de type $R - L$,

2) $\widetilde{M} \oplus \widetilde{N} = \langle m + n, a + c, b + d \rangle_{L-R}$, de type $L - R$,

3) $\widetilde{M} \ominus \widetilde{N} = \langle m - n, a + c, b + d \rangle_{L-R}$ si $L - R$, de type $L - R$,

4) $\odot \widetilde{N}$ n'est, par contre, généralement pas du type $L - R$, mais on peut en donner une valeur approché de type $L - R$. lorsque \widetilde{M} et \widetilde{N} ont un support inclus dans \mathbb{R}^+ , que a et b sont petits devant m , c et d sont petits devant n .

5) $\widetilde{M} \odot \widetilde{N} = \langle mn, mc + na, md + nb \rangle_{LR}$.

6) $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}} = \frac{\langle m, a, b \rangle_{L-R}}{\langle n, c, d \rangle_{L-R}} \approx \left\langle \frac{m}{n}, \frac{md}{n(n+d)} + \frac{a}{n} - \frac{ad}{n(n+d)}, \frac{mc}{n(n-c)} + \frac{b}{n} + \frac{bc}{n(n-c)} \right\rangle_{L-R}$.

Théorème 2.8.2 Soit \widetilde{M} et \widetilde{N} deux nombres flous alors

$$(m, a, b)_{L-R} \odot (n, c, d)_{L-R} = (mn, mc + na, md + nb)_{LR} \quad (2.63)$$

pour \widetilde{M} et \widetilde{N} positif, on a aussi

$$(m, a, b)_{L-R} \odot (n, c, d)_{L-R} = (mn, na - md, nb - nc)_{LR} \quad (2.64)$$

pour \tilde{N} positif et \tilde{M} négatif, et

$$(m, a, b)_{L-R} \odot (n, c, d)_{L-R} = (mn, -nb - md, na - mc)_{LR} \quad (2.65)$$

pour \tilde{M} et \tilde{N} négatif.

2.8.7 Deuxième forme de type L-R

On définit aussi un nombre flou de type $L - R$ de la deuxième forme dans le cas des nombres flous multimodaux.

On dit qu'un tel nombre flou de type $L - R$ si et seulement s'il existe des nombres réels $m, m', a > 0, b > 0$; et deux fonctions positives décroissantes et continues L et R allant de \mathbb{R} dans l'intervalle unité $[0, 1]$ tq :

L et R vérifient les relations (2.63),(2.64),(2.65);

et

$$\mu_{\tilde{M}}(X) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{a}\right) & \text{si } x \in [m-a, m] \\ 1 & \text{si } x \in [m, m'] \\ R\left(\frac{x-m'}{b}\right) & \text{si } x \in [m', m'+b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.66)$$

Notation 2.8.1 La représentation $L - R$ de \tilde{M} dans ce cas se note $\langle m, m', a, b \rangle_{L-R}$. L'arithmétique de ces nombres est semblable à celle de nombre de type $L - R$ de la première forme vue précédemment aux sous sections (2.8.4).

Pour plus de détails sur ce type de nombre flous, un lecteur intéressé est prié de se référer à [2],[1] et [5].

Remarque 2.8.1 Un nombre flous de type $L - R$ est complètement déterminé par la connaissance de son mode, de son support et des fonctions de référence L et R qui déterminent le graphe de sa fonction d'appartenance.

Remarque 2.8.2 *D'une manière générale, l'arithmétique floue de type $L - R$ n'est pas très employée dans la littérature à cause des trois inconvénients qu'elle présente [13] :*

i) *Les opérations élémentaires sont ouvertes et exigent des approximations qui font perdre certaines informations significatives.*

ii) *Les opérations sont applicables seulement aux nombres flous de même type $L - R$; elles ne sont pas définies pour des types $L - R$ différentes.*

iii) *Les opérations sont définies uniquement pour des nombres flous qui sont soit positifs, soit négatifs ; et non pour des nombres flous dont les supports comprennent zéro.*

Malgré ces inconvénients, retenons que les valeurs exactes de modes et supports obtenus par le biais des approximations sécantes, construisent un à tout majeur que nous exploiterons à fond dans la suite de ce travail.

Proposition 2.8.1 *Un nombre flou triangulaire est un nombre flou de type $L - R$. En d'autres termes $F_{TRI}(\mathbb{R}) \subseteq F_{L-R}(\mathbb{R})$.*

Preuve. Voir [29]. ■

Proposition 2.8.2 *Le produit de deux nombres triangulaires n'est pas nécessairement triangulaire.*

Preuve. Voir [61]. ■

2.8.8 Conclusion :

Ce chapitre vient de rappeler les éléments essentiels sur la théorie des ensembles flous, on a présenté plusieurs approches fondamentales de la théorie des ensembles flous , nous avons commencé par quelques propriétés de base. Ensuite nous avons détaillé les méthodes de calcul utilisées dans la littérature tel que, alpha-coupe, le principe d'extension de zadeh ainsi on a vu l'arithmétique et les types des nombres flous afin d'aborder l'analyse du problème posé dans ce travail, à savoir la détermination des performances des files d'attente floues.

Chapitre 3

LES FILES D'ATTENTE FLOUES

D'aucuns peuvent se demander qu'est-ce que la théorie de files d'attente Chedom Fotso [20] et Pauline Fotso [20] définissent la théorie de files d'attente dans [20] comme « une technique de la Recherche opérationnelle qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et de déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions ».

D'après cette définition, qui est d'ailleurs plus proche de celles données par plusieurs auteurs, il revient de comprendre qu'une étude théorique de files d'attente permet d'établir à l'avance les performances de l'ensemble du système, d'identifier les éléments critiques, ou encore, d'appréhender les effets d'une modification des conditions de fonctionnement du système. Aux alentours de 1980 avec la parution du tout premier article scientifique produit par Prade [47], faisant mention de l'utilisation des nombres flous dans la modélisation d'une file d'attente. A partir de ce moment, les chercheurs de ce domaine ont eu la possibilité d'introduire une nouvelle forme de files d'attente, plus réalistes et plus adaptées au langage courant et au raisonnement humain, dites files d'attente floues (FAF). Ce sont des files d'attente dont certains paramètres intervenant dans le processus sont des nombres flous.

A la question de savoir comment en est-on arrivé aux files d'attente floues ? Il sied de rappeler que dans la théorie de FAC, les paramètres tels que le temps d'inter-arrivées et celui de service sont caractérisés par des variables aléatoires. Pour déterminer les fonctions

de distribution de celles-ci, on a besoin des données statistiques. Or dans beaucoup de cas réels de files d'attente, il est tellement difficile, voire impossible d'obtenir ces données. Par contre, la description de ces mêmes paramètres en termes linguistiques est très fréquente dans le langage courant. C'est ainsi qu'à l'aide des ensembles flous, on a eu l'opportunité d'exprimer ces termes par des nombres flous, et de parler ainsi de files d'attente floues (FAF). Les FAF constituent un thème qui a beaucoup d'applications dans la vie courante quoiqu'elles n'aient connu jusque là que très peu de publications scientifiques comparativement aux FAC.

En théorie de files d'attente floues, l'approche mathématique la plus utilisée, qui a couvert plusieurs sous-modèles de files d'attente est celle de *la programmation non-linéaire paramétrique* (PNLP). Cette approche utilise simultanément deux types d'arithmétiques floues pour calculer les mesures de performance, à savoir l'arithmétique floue basée sur le principe d'extension de *Zadeh* et celle des *alpha-coupes* et intervalles [38]. Elle permet d'obtenir des mesures de performance d'une file d'attente floue par la connaissance de leurs fonctions d'appartenance au lieu de valeurs moyennes employées en modèle classique.

Dans ce chapitre nous allons calculer les mesures de performance des files d'attente $M/F/1$, $F/F/1$ et $FM/FM/C$ où F représente le temps flou et FM la distribution exponentielle fuzzifiée : par les méthodes suivantes : le principe d'extension de *ZADEH* [60], *la méthode des alpha-coupes puis en passant à la méthode des alpha-coupes assouplie*[58], qui est inspirée par celle de *la programmation non-linéaire paramétrique* (PNLP) .

3.1 Chaîne de Markov floue

La théorie de chaînes de Markov floues a vu le jour lorsqu'il s'est agi de modéliser des processus stochastiques dont certains paramètres sont mal connus ou imprécis.

La définition d'une CMF varie logiquement suivant la nature des paramètres imprécis. Nous en proposons deux ci-dessous : celle formulée par Avrachenkov et Sanchez [3], basée sur des états flous et celle proposée par Buckley [10], qui fait usage des probabilités floues.

3.1.1 Définition d'Avrachenkov et Sanchez

Définition

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ un univers d'états d'un système en transition à chaque instant $t = 1, 2, 3, \dots$. Tous sous-ensemble flou (ou distribution floue) de Ω peut être représenté par un vecteur $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ où x_i représente le degré d'appartenance de i à \tilde{x} . En désignant l'ensemble des sous-ensembles flous de Ω par $\tilde{P}(\Omega)$, l'état du système est décrit à l'instant t par :

$$\tilde{x}^{(t)} = (x_1^{(t)}, \dots, x_n^{(t)}) \in \tilde{P}(\Omega);$$

où $x_i^{(t)}$ est le degré d'appartenance de i à $\tilde{x}^{(t)}$.

Soit \tilde{R} une relation floue définie sur Ω^2 de matrice floue $(r_{ij})_{n \times n}$. La loi de transition d'une chaîne de Markov floue est définie par la relation suivante [3] :

$$\tilde{x}_j^{(t+1)} = \max_{i \in \Omega} (x_i^{(t)} \wedge r_{ij}), \quad j \in \Omega \quad (3.1)$$

où le symbole " \wedge " entre deux réels a et b , représente " $\min(a, b)$ " et où $\tilde{x}^{(0)}$ représente la distribution initiale.

3.1.2 Définition de Buckley

Définition

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité fini. Considérons sur cet espace une CMF pour laquelle les probabilités de transition p_{ij} sont mal connues ou imprécises. Buckley ([10], pp. 33-43) remplace ces probabilités imprécises par des nombres flous \tilde{p}_{ij} provenant des intervalles de confiance; qui lui ont permis enfin de définir une CMF comme étant la chaîne dont la matrice de transition est déterminée par les probabilités floues \tilde{p}_{ij} .

Voici la procédure que Buckley [13] a usée pour obtenir ces nombres flous \tilde{p}_{ij} .

Supposons que chaque transition se réalise dans un intervalle de temps δ , et que le processus est observé pendant N périodes au cours desquelles il s'est produit n transitions.

Désignons par $p_{k(k+i)}$ la probabilité qu'il y ait i transitions pendant une période de temps δ , $i = 1, 2, \dots, m$. On peut se décider de commencer l'estimation de ces intervalles à partir de la valeur moyenne de $p_{k(k+i)}$; et dans ce cas, notre point d'estimation est naturellement le nombre $\frac{n}{N}$. Par la théorie d'estimation d'intervalles de confiance, on peut estimer l'intervalle de confiance $(1 - \beta)$ 100% de $p_{k(k+i)}$ pour tout β tq $0.01 \leq \beta < 1$.

Notons ces intervalles par :

$$[p_{k(k+i)_1}(\beta), p_{k(k+i)_2}(\beta)] \quad (3.2)$$

où $[\frac{n}{N}, \frac{n}{N}]$ est pris comme l'intervalle de confiance à 0%

Ces intervalle se présentant sous forme des segments emboîtés, on peut les placer successivement les uns sur les autres de façon à produire un nombre flou $\tilde{p}_{k(k+i)}$ de forme triangulaire, dont la coupe de niveau α est constituée des intervalles de confiance de la forme :

$$\left(\tilde{p}_{k(k+i)}\right)_\alpha = [p_{k(k+i)_1}(\beta), p_{k(k+i)_2}(\beta)] \quad (3.3)$$

pour $0.01 \leq \alpha \leq 1$ (cf. , p.22).

Plus bas, sur le graphe de la fonction d'appartenance de $\tilde{p}_{k(k+i)}$, au voisinage de l'axe des abscisses, Buckley propose de couper le graphe de $\tilde{p}_{k(k+i)}$ pour compléter ses α -coupes afin d'avoir un nombre flou complet; et on a :

$$\left(\tilde{p}_{k(k+i)}\right)_\alpha = [p_{k(k+i)_1}(0.01), p_{k(k+i)_2}(0.01)] \quad (3.4)$$

pour $0.01 \leq \alpha \leq 1$.

Sous cette voie, puise beaucoup plus d'informations dans $\tilde{p}_{k(k+i)}$ que celles qu'on aurait pu obtenir par un seul point d'estimation ou un simple intervalle d'estimation([13], pp. 22-24). L'étude détaillée de la théorie de probabilité floue se trouve dans [9] et celle d'intervalle de confiance dans [39].

3.2 Le modèle de file d'attente flou $M/F/1$ (par le principe d'extension de *ZADEH*)

Nous pouvons définir une chaîne de Markov floue intégrée pour le système de file d'attente $M/F/1$.

$X(\tilde{s})$ désignent le processus stochastique flou induit qui peut être montré comme Markovien flou en regardant le système immédiatement après que le service d'un client est terminé et que le service est sur le point de commencer pour le prochain client dans la file d'attente.

Soit (\tilde{P}_i) la probabilité du $i^{\text{ième}}$ client qui arrive pendant la durée de service \tilde{s} .

On note \tilde{P}_i la fonction floue telle qu'il existe une distribution de possibilité, induite par $\mu_{\tilde{s}}$ sur chacun de ses points.

Puisque le processus d'arrivée est supposé Poissonien avec un taux λ , la fonction de probabilité floue peut être définie par :

$$\mu_{\tilde{P}_i}(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \mu_{\tilde{s}}(t) \mid x = \frac{\exp(-\lambda t) (\lambda t)^i}{i!} \right\}. \quad (3.5)$$

La matrice de transition en une étape pour une chaîne de Markov floue peut être maintenant construite de manière simple.

Notons qu'une transition de l'état zéro à l'état j , ou une transition de l'état i à l'état j les deux nécessitent l'arrivée de j clients pendant l'intervalle du service.

De plus, passer de l'état i à l'état j ou $j \geq i - 1 > 0$, nécessite que $(j - i + 1)$ clients arrivent pendant l'intervalle de service, l'arrivée supplémentaire étant nécessaire pour tenir compte du client connu comme partant au point de transition. Il est clairement possible de passer de i à j où $j < i - 1$ et impossible tant que le service n'a lieu qu'un à la fois.

On note la matrice de probabilités de transitions de la chaîne de Markov floue par

$\tilde{P} = [\tilde{P}_{ij}]$, on peut alors écrire pour tout $j \geq i - 1, i \geq 1$ comme :

$$\tilde{P} = [\tilde{P}_{ij}] = \begin{bmatrix} \tilde{P}_0, & \tilde{P}_2, & \tilde{P}_3, & \cdots \\ \tilde{P}_0, & \tilde{P}_1, & \tilde{P}_2, & \cdots \\ 0, & \tilde{P}_0, & \tilde{P}_1, & \cdots \\ 0, & 0, & \tilde{P}_0, & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où \tilde{P}_{ij} est définie par :

$$\forall j \geq i - 1, i \geq 1, \mu_{\tilde{P}_i}^{\sim}(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x_{ij} = \frac{\exp(-\lambda t) (\lambda t)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} \right\}. \quad (3.7)$$

De même, une chaîne de Markov floue peut être vue comme une perception d'une chaîne de Markov usuelle qui est appelée l'originale de la chaîne de Markov floue. Cette originale est inconnue mais se situe dans un ensemble U de la chaîne de Markov. Basé sur la théorie des files d'attente, nous pouvons résoudre les équations stationnaires pour chaque originale possible de la chaîne de Markov floue.

$$\forall t, \lambda \in \mathbb{R}^+, t < \frac{1}{\lambda} : \Pi_0 = 1 - \lambda t, \Pi_1 = (1 - \lambda t) [\exp(\lambda t) - 1], \quad (3.8)$$

$$\Pi_n = (1 - \lambda t) \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \exp(k\lambda t) \left[\frac{(k\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{(k\lambda t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right]. \quad (3.9)$$

pour $n \geq 2$.

De plus, les mesures de performance du système peuvent être démontrées comme étant :

$$L = \frac{\lambda t (2 - \lambda t)}{2(1 - \lambda t)}, W = \frac{L}{\lambda} = \frac{t(2 - \lambda t)}{2(1 - \lambda t)}, \quad (3.10)$$

où Π_n indique la probabilité de d'état stable de n clients dans le système à un point de départ, L indique la longueur prévue de la file d'attente, et w indique le temps de séjour prévu.

A l'aide du principe d'extension de *ZADEH* [59], les résultats correspondants dans le cas flou peuvent être définis par leurs fonctions d'appartenance pour les solutions en régime stationnaires :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ : \mu_{\Pi_0}^{\sim}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+, t < 1 < \lambda} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = 1 - \lambda t \right\}, \quad (3.11)$$

$$\mu_{\Pi_1}^{\sim}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+, t < 1 < \lambda} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = (1 - \lambda t) [\exp(\lambda t) - 1] \right\}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad \mu_{\Pi_n}^{\sim}(x) &= \sup_{t \in \mathbb{R}^+, t < 1 < \lambda} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = (1 - \lambda t) \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \right. \\ &\quad \left. \times \exp(k\lambda t) \left[\frac{(k\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{(k\lambda t)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

alors le système des mesures de performance est :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ : \mu_{L_0}^{\sim}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+, t < 1 < \lambda} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = \frac{\lambda t (2 - \lambda t)}{2(1 - \lambda t)} \right\}, \quad (3.14)$$

$$\mu_{w_0}^{\sim}(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+, t < 1 < \lambda} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = \frac{t(2 - \lambda t)}{2(1 - \lambda t)} \right\}. \quad (3.15)$$

En outre, soit \tilde{L}_k dénote le $k^{\text{ème}}$ moment factoriel de la taile du système, et \tilde{w}_k le $k^{\text{ème}}$ moment factoriel du temps d'attente du système :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ : \mu_{\tilde{w}_k}^{\sim}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left\{ \mu_{\tilde{L}_k}^{\sim}(t) \mid y = \frac{x}{\lambda^k} \right\}, \quad (3.16)$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^+ \\ y = \frac{x}{\lambda^k}}} \sup_{\substack{t \in \mathbb{R}^+ \\ t < \frac{1}{\lambda}}} \left\{ \mu_s^{\sim}(t) \mid x = \frac{d^k \left(\frac{(1-\lambda t)(1-z)}{1-z \exp[\lambda t(1-z)]} \right)}{dz^k} \Big|_{z=1} \right\}. \quad (3.17)$$

3.3 Le modèle de file d'attente flou $M/F/1$ (par la méthode de Alpha-coupe)

En utilisant α -coupes, cette file d'attente floue $M/F/1$ peut être réduite à une famille de files d'attente $M/G/1$ avec différents ensembles de niveau α . Ainsi, nous pouvons ré-

soudre une famille de files d'attente $M/G/1$. Puisque la file d'attente $M/G/1$ a été résolue sous forme fermée, cette fusion de concepts flous dans des files d'attente traditionnelles devient exceptionnellement simple.

Premièrement, pour chaque α -coupes, l'intervalle de confiance est transformé en une plage de valeurs flous, en suit la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire dans cette range de α -coupes sera utilisée pour dériver les caractéristique de la file d'attente par la formule $M/G/1$ bien comme. Les hypothèses simplificatrices habituelles dans la théorie des files d'attente commerciales telles que la capacité de file d'attente infinie, la population d'appels infinie et les clients restent en file d'attente pour le service quel que soit le temps d'attente sont supposées.

Pour simplifier davantage l'approche, le taux de service est représenté par des nombres flous trapézoïdaux. Cela devrait souligner que l'approche peut être facilement étendue à tous les nombres flous convexes normaux. Cependant, pour la plupart des situations pratiques, le nombre flou trapézoïdal est un compromis idéal entre des représentations trop compliquées et trop simplifiées..

En utilisant α -coupes, le temps de service trapézoïdal peut être représenté par différents niveaux d'intervalle de confiances, que cet intervalle de confiance soit représenté par $[t_{1\alpha}, t_{2\alpha}]$. Étant donné que les distributions de probabilité pour les ensembles α -coupes peuvent être représentées par des distributions uniformes, nous avons :

$$P(t_\alpha) = \frac{1}{t_{2\alpha} - t_{1\alpha}}, \quad t_{1\alpha} \leq t_\alpha \leq t_{2\alpha}. \quad (3.18)$$

Ainsi la moyenne de la distribution est

$$E(T_\alpha) = \int_{t_{1\alpha}}^{t_{2\alpha}} \frac{1}{t_{2\alpha} - t_{1\alpha}} t_\alpha dt_\alpha = \frac{1}{2} (t_{2\alpha}^2 - t_{1\alpha}^2). \quad (3.19)$$

De même pour le deuxième moments, nous avons

$$E(T_\alpha^2) = \int_{t_{1\alpha}}^{t_{2\alpha}} \frac{1}{t_{2\alpha} - t_{1\alpha}} dt_\alpha^2 = \frac{t_{2\alpha}^3 - t_{1\alpha}^3}{3(t_{2\alpha}^2 - t_{1\alpha}^2)}, \quad (3.20)$$

en utilisant la fomule bien comme

$$var (T_\alpha) = E (T_\alpha^2) - E (T_\alpha)^2,$$

la variance peut être obtenue comme suit :

$$var (T_\alpha) = \frac{1}{12} (t_{2\alpha} - t_{1\alpha})^2. \quad (3.21)$$

Ainsi, à chaque ensemble de α -coupes, nous avons un système $M/G/1$ avec moyenne et variance connus. En utilisant la solution bien connue suivante pour le système $M/G/1$ [14] ce problème peut être résolu à chaque ensemble de α -coupes :

$$L = \lambda E (T_\alpha) + \frac{\lambda^2 [E^2 (T_\alpha) + var (T_\alpha)]}{2 (1 - \lambda E (T_\alpha))}, \quad (3.22)$$

$$W_t = E (T_\alpha) + \frac{\lambda [[E (T_\alpha)]^2 + var (T_\alpha)]}{2 (1 - \lambda E (T_\alpha))}, \quad (3.23)$$

$$W_q = \frac{\lambda [[E (T_\alpha)]^2 + var (T_\alpha)]}{2 (1 - \lambda E (T_\alpha))}. \quad (3.24)$$

telle que :

L : le nombre de clients moyenne dans le système.

W_t : le temps moye passé par un client dans le système.

3.4 Le modèle de file d'attente flou $FM/FM/C$

Dans le monde réel, le taux d'arrivée et le taux de service ne sont pas déterministes, ils sont plutôt un nombre non déterministe et incorporent une incertitude. Afin de développer l'application du modèle de file d'attente $M/M/C$, des caractéristique floues sont prises en compte pour les paramètre de file d'attente, en d'autres termes le système à l'étude est

transformé en modèle $FM/FM/C$ avec l'hypothèse que le taux d'arrivée λ et le taux de service μ sont approximativement connus. Soient les nombre flous $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$.

$$\tilde{\lambda} = \{(x, \varphi_{\tilde{\lambda}}(x)) \mid x, X\}, \quad (3.25)$$

$$\tilde{\mu} = \{(x, \varphi_{\tilde{\mu}}(y)) \mid y, Y\}, \quad (3.26)$$

où $\varphi_{\tilde{\lambda}}(x)$ et $\varphi_{\tilde{\mu}}(y)$ sont des fonctions d'adhésion de $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$, X et Y sont des ensembles universels déterministes, pour l'analyse d'un système $FM/FM/C$, il faut d'abord définir les valeur de P_n comme cas classique, cependant, avant cette définition il est nécessaire de donner les caractéristique des opérations mathématiques en nombre flous (voir 2.8.2).

3.4.1 Les mesures de performance

Afin d'analyser un système de file d'attente de $M/M/C$ dans l'état flou, il faut étudier la mesure de performance du système dans cet état. A cette fin, supposons que $f(x, y)$ soit révélateur des caractéristique du système, puisque $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont des nombre flous, $f(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})$ serait également un nombre flou. La fonction caractéristique du système sera défini ci-dessous selon le principe de *ZADEH* [58]

$$\varphi_{f(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu})}(z) = \sup_{x \in X, y \in Y, 0 < \frac{\lambda}{c\mu} < 1} \min \left\{ \varphi_{\tilde{\lambda}}(x), \varphi_{\tilde{\mu}}(y) / Z = f(x, y) \right\}, \quad (3.27)$$

Supposons que la caractéristique du système qui nous intéresse est le nombre prévu de clients dans le système [39]

(longueur prévue de la file d'attente).

$$f(x, y) = \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1}, \quad (3.28)$$

Bien que cette formule soit théoriquement correcte,[5] elle n'est pas adaptée en pra-

tique et imaginer la forme de sa fonction d'appartenance elle est impossible. Ici, l'idée de α -coupe est d'utilisée dans les ensembles flous pour extraire la fonction d'appartenance de \tilde{L} .

3.4.2 Utilisation de la programmation paramétrique non linéaire (PNLP)

La fonction d'adhésion pour le nombre moyen de clients en attente est définie comme [27] :

$$\varphi_{\tilde{L}}(z) = \sup_{x \in X, y \in Y, 0 < \frac{\lambda}{c\mu} < 1} \min_{\left\{ \varphi_{\tilde{\lambda}}(x), \varphi_{\tilde{\mu}}(y) / z = \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)(cy-x)^2} \right] \right.} \left. \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right] \right\}, \quad (3.29)$$

par conséquent, les α -coupes flous pour le nombre de clients en attente dans le système sont $\lambda(a)$ et $\mu(a)$ qui sont en faite des ensembles déterminantes.

Le modèle de file d'attente floue de $FM/FM/C$ peut être réduit à une famille de file d'attente déterministe de $M/M/C$ avec différentes valeurs de α [27].

$$\lambda(\alpha) = [x_{\alpha}^L, x_{\alpha}^U] = \left[\min \left\{ x \mid \varphi_{\tilde{\lambda}}(x) \geq \alpha \right\}, \max \left\{ x \mid \varphi_{\tilde{\lambda}}(x) \geq \alpha \right\} \right]. \quad (3.30)$$

$$\mu(\alpha) = [y_{\alpha}^L, y_{\alpha}^U] = \left[\min \left\{ y \mid \varphi_{\tilde{\mu}}(\mu) \geq \alpha \right\}, \max \left\{ y \mid \varphi_{\tilde{\mu}}(\mu) \geq \alpha \right\} \right]. \quad (3.31)$$

En supposant que les nombres flous considérés sont convexes, les limites supérieure et inférieure de ces distances seront une fonction de α . En conséquence, $\varphi_{\tilde{L}}(z)$ serait égal au montant minimum de $\varphi_{\tilde{\lambda}}(x)$ et $\varphi_{\tilde{\mu}}(y)$.

Trouver la fonction d'adhésion $\varphi_L^\sim(z)$ à besoin d'au moins un des éléments suivants, dans lequel $z = f(x, y)$ satisfait la valeur $\varphi_L^\sim(z)$.

$$\text{cas 01 : } \left(\varphi_\lambda^\sim(x) = \alpha, \varphi_\mu^\sim(y) \geq \alpha \right) \quad (3.32)$$

$$\text{cas 02 : } \left(\varphi_\lambda^\sim(x) \geq \alpha, \varphi_\mu^\sim(y) = \alpha \right) \quad (3.33)$$

Les techniques *PNL* peuvent être utilisées pour calculer les limites inférieure et supérieure de donnée [7] ci-dessous :

pour la cas 01 :

$$(L)_\alpha^{L_1} = \min \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.34)$$

$$(L)_\alpha^{U_1} = \max \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.35)$$

et pour le cas 02 :

$$(L)_\alpha^{L_2} = \min \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.36)$$

$$(L)_\alpha^{U_2} = \max \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.37)$$

en ce qui concerne la définition [8] de $\lambda(a)$ et $\mu(a)$ où $x \in \lambda(a)$ et $y \in \mu(a)$, ils peuvent être remplacés par $x \in [x_\alpha^L, x_\alpha^U]$ et $y \in [y_\alpha^L, y_\alpha^U]$. Considérons la structure pour α -coupes pour $0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1$:

$$[x_{\alpha_1}^L, x_{\alpha_1}^U] \subseteq [x_{\alpha_2}^L, x_{\alpha_2}^U]$$

lorsque les limites inférieure et supérieure sont indiquées comme suite :

$$(L)_\alpha^L = \min \left\{ (L)_\alpha^{L_1}, (L)_\alpha^{L_2} \right\} \quad (3.38)$$

$$(L)_\alpha^U = \min \left\{ (L)_\alpha^{U_1}, (L)_\alpha^{U_2} \right\} \quad (3.39)$$

donc

$$(L)_\alpha^L = \min \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.40)$$

telque

$$x_\alpha^L \leq x \leq x_\alpha^U$$

$$y_\alpha^L \leq y \leq y_\alpha^U$$

et

$$(L)_\alpha^U = \min \left[\frac{x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^c xy}{(c-1)!(cy-x)^2} \right] \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{y}\right)^n + \frac{1}{c!} \left(\frac{x}{y}\right)^c \left(\frac{cy}{cy-x}\right) \right]^{-1} \quad (3.41)$$

telque

$$x_\alpha^L \leq x \leq x_\alpha^U$$

$$y_\alpha^L \leq y \leq y_\alpha^U$$

ce modèle est un cas particulier dans les programmation non linéaire paramétrique.

L'intervalle net $[(L)_\alpha^L, (L)_\alpha^U]$ obtenu indiquent des α -coupes pour L . Basé sur le principe d'extension de *ZADEH* [58] et la convexité du nombre flou :

$$\begin{cases} (\tilde{L})_{\alpha_1}^L \geq (\tilde{L})_{\alpha_2}^L \\ (\tilde{L})_{\alpha_1}^U \geq (\tilde{L})_{\alpha_2}^U \\ 0 < \alpha_2 < \alpha_1 \leq 1 \end{cases} \quad (3.42)$$

en d'autre termes, l'augmentation de α augmentera $(L)_\alpha^L$ et diminuera $(L)_\alpha^U$. En outre, lorsque les fonction $(L)_\alpha^L$ et $(L)_\alpha^U$ sont inversables en terme de α , on peut reformuler les fonction comme $L(z) = [(L)_\alpha^L]^{-1}$ et $R(z) = [(L)_\alpha^U]^{-1}$ pour le côté gauche et le côté droit de la forme de la fonction d'adhésion $\varphi_{L_\alpha}^\sim(z)$, respectivement. La fonction d'adhésion $\varphi_{L_\alpha}^\sim(z)$ serait régénéré comme suit [15] :

$$\varphi_{L_\alpha}^\sim(z) = \begin{cases} 0 & (L)_{\alpha=0}^L > z, \quad z > (L)_{\alpha=1}^L \\ L(z) & (L)_{\alpha=0}^L \leq z, \quad z \leq (L)_{\alpha=1}^L \\ 1 & (L)_{\alpha=0}^L \leq z \leq (L)_{\alpha=1}^U \\ R(z) & (L)_{\alpha=1}^U \leq z \leq (L)_{\alpha=0}^U \\ 0 & (L)_{\alpha=1}^U > z, \quad z > (L)_{\alpha=0}^U \end{cases} \quad (3.43)$$

Si les valeur de $(L)_\alpha^U$ et $(L)_\alpha^L$ n'ont peut être trouvées de manière analytique, la forme de la fonction d'adhésion $\varphi_{L_\alpha}^\sim(z)$ peut être extraite à l'aide de la solution numérique pour les valeurs de α à gauche et à droite, cependant trouver la fonction exacte n'est pas simple.

La même méthode sera utilisé pour d'autre paramètres de l'évaluation des performance du système[9].

3.4.3 Analyse des numéros des serveurs

Les choix du nombre de serveurs est très important pour l'administrateur du système *FM/FM/C*.

L'analyse floue peut contribuer à une analyse plus appropriée de cette question.

Détermination du nombre approprié de serveurs :

Les processus des arrivée et de service sont totalement indépendants. Comme les deux facteurs (le taux d'arrivée et le taux de service) sont importants a l'analyse du nombre de serveurs, les relations floues peuvent être utilisées pour fournir les définition suivantes [9] :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_1 &= \tilde{\lambda} \times \tilde{c} \\ \tilde{Z}_2 &= \tilde{c} \times \tilde{\mu}\end{aligned}$$

où $\tilde{Z}_1(\tilde{\lambda}, \tilde{c})$ et $\tilde{Z}_2(\tilde{c}, \tilde{\mu})$ sont définie dans les produit cartésiens de $\Lambda \times c$ et $c \times \chi$ respectivement . Ces deux termes qui sont des combinaisons des deux facteurs signifient qu'ils peuvent satisfaire les objectifs du système. On peut donc supposer que $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ conduisent à une décision sur \tilde{c} [16].

$$\tilde{Z}_1 \circ \tilde{Z}_2 = \left\{ (\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \max_c \left\{ \min \left\{ \varphi_{\tilde{Z}_1}(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}), \varphi_{\tilde{Z}_2}(\tilde{c}, \tilde{\mu}) \right\} \right\} \lambda \in \Lambda, \mu \in \chi, c \in C \right\} \quad (3.44)$$

entre temps, à partir d'une lemme dans l'inférence floue, on eut soutenir que pour les entrées floues individuelles, \tilde{c}_i est déterminé par le degré de correspondance minimum de $\tilde{\lambda}_i$ et $\tilde{\mu}_i$.

En effet, dans la base de règles floues, une règle floue est définie[15] comme suit :

$$\tilde{R}: \text{ si } u_0 \text{ est } \tilde{\lambda} \text{ et } v_0 \text{ est } \tilde{\mu} \text{ alors } w \text{ est } \tilde{c}$$

$\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ et \tilde{c} ont des degrés d'appartenance trapézoïdale, comme le montre la figure (3.1), les entrées assignées sont sous forme d'entré floues individuelles de u_0 et v_0 , \tilde{c}_i sera déterminé par le degré $\tilde{\mu}_i$ par exemple, lorsque $\lambda_i = u_0$, et $\tilde{\mu}_i = v_0$, la valeur du degré de α_i correspondant obtiendra une valeur minimale entre $\varphi_{\lambda'_i}^{\sim}(u_0)$ et $\varphi_{\mu'_i}^{\sim}(v_0)$.

$$\alpha_i = \varphi_{\lambda'_i}^{\sim}(u_0) \circ \varphi_{\mu'_i}^{\sim}(v_0) = \min \left[\varphi_{\lambda'_i}^{\sim}(u_0), \varphi_{\mu'_i}^{\sim}(v_0) \right]$$

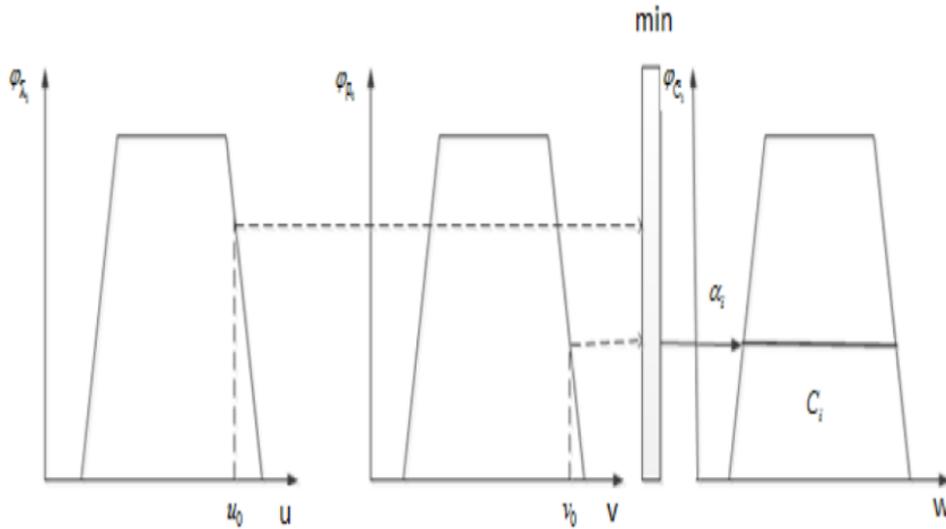


FIG. 3.1 – Affichage des usagers

L'inférence résultante peut être obtenue en appliquant l'opérateur de Mamdani minimum. $\tilde{R}_{\tilde{c}}$, cela mènerait à la détermination de la fonction d'adhésion \tilde{c}_i :

$$\varphi_{\tilde{c}_i}(w) = \alpha_i \hat{\varphi}_{c_i}(w)$$

comme le montre la figure (3.1) \tilde{c}_i est le résultat d'un ensemble flou. Étant donné que la prise de décision concernant le nombre de serveur nécessite une réponse déterministe en utilisant la méthode de fuzzification [16]. Une méthode commune à cet effet est la méthode α – coupes. Ainsi, le nombre de serveurs c peut être transformé en un nombre déterministe [1].

3.5 Conclusion

Au cours de ce troisième chapitre, nous avons traité le processus stochastique flou appelé "chaîne de Markov floue". Ce processus se distingue d'un processus de Markov classique, par le fait qu'il traite simultanément des informations précises et imprécises. Puis nous avons fait l'étude de plusieurs modèles de files d'attente floues par différentes méthodes connus dans la littérature à savoir le principe d'extension de ZADEH [61], la

méthode de α -coupe, et celle basé sur la programmation paramétrique non linéaire qui applique simultanément deux types d'arithmétiques pour déterminer les différentes mesures de performance d'une file d'attente floue : l'arithmétique basée sur le principe d'extension de Zadeh et l'arithmétique des alpha-coupes et intervalles. Comme ces différentes mesures sont des fonctions de ces paramètres en modèles classiques, leurs correspondantes en modèles flous sont des fonctions des variables floues, dont les résultantes sont également des nombres flous.

Dans le prochain chapitre nous présentons un exemple numérique qui peut montrer clairement notre travail.

Chapitre 4

APPLICATION NUMÉRIQUE

4.1 Description du Problème

Après avoir constaté qu'environ 45 patients par jour cherchaient de faire une radio IRM dans une clinique; Le responsable de la clinique a fournis une machine de scanner qui peut servir environ 48 patients par jour. Le directeur veut aménager à moindre coût une salle d'attente confortable et adaptée à leur condition physique, afin que aucun de ces client n'attend, il a installé un logiciel d'enregistrement des demandes des patients suivant la discipline FIFO qui traite les questions suivantes :

- 1-)Quelle devrait être la capacité de la salle?
- 2-)Quel est le nombre de clients attendus dans la salle après une longue période de service?
- 3-)Quel est le temps d'attente moyen d'un client en salle?

4.2 Solution

4.2.1 Données du problème

Les débits étant donnés en information floue (termes linguistiques), il n'est pas possible d'analyser ce problème avec la théorie traditionnelle des files d'attente. La salle

d'attente que la clinique essaie d' aménager une simple file d'attente $FM/FM/1$ ayant des débits flous. Supposons que ces taux soient des nombres flous triangulaires donnée par $\boxed{\tilde{\lambda} = (44, 45, 46) \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = (47, 48, 49)}$

4.2.2 Solution par la méthode des alpha-coupes

Pour résoudre ce problème, la méthode des alpha-coupes utilise les étapes suivantes :

(i) Nous mettons en (1.19) et (1.21) $\lambda = \tilde{\lambda}$ et $\mu = \tilde{\mu}$ ie les équations (1.19) et (1.21) deviennent :

$$\tilde{N} = f(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}} \quad (4.1)$$

et

$$\tilde{T} = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} \quad (4.2)$$

(ii) On détermine les α -coupes suivantes des nombres flous $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ a l'aide de l'équation (2.25) :

$$\tilde{\lambda}_\alpha = [\alpha + 44, -\alpha + 46], \quad (4.3)$$

et

$$\tilde{\mu}_\alpha = [\alpha + 47, -\alpha + 49]. \quad (4.4)$$

(iii) Nous définissons les fonctions d'appartenance de \tilde{N} et \tilde{T} . Ces fonctions d'appartenance ne se présentent pas sous formes habituelles ; il est très difficile d'imaginer leur formes. Pour cela, la méthode des alpha-coupes fait appel au problème en utilisant ces techniques de programmation mathématiques appelées NPL (Parametric Non Linear Programming). Ce problème nécessite de déterminer les α -coupes de \tilde{N} et \tilde{T} . Ces dernières sont calculées en utilisant la définition des alpha-coupes dans l'équation (2.25) et les formules arithmétiques des intervalles dans(2.41) et (2.44) comme suit :

Pour \widetilde{N}_α nous avons :

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}_\alpha &= \frac{\widetilde{\lambda}_\alpha}{\widetilde{\mu}_\alpha - \widetilde{\lambda}_\alpha} & (4.5) \\
&= \frac{[\alpha + 44, -\alpha + 46]}{[\alpha + 47, -\alpha + 49] - [\alpha + 44, -\alpha + 46]} \\
&= \frac{[\alpha + 44, -\alpha + 46]}{[2\alpha + 1, -2\alpha + 5]} \\
&= [\min D, \max D]
\end{aligned}$$

Où

$$D = \left\{ \frac{\alpha + 44}{2\alpha + 1}, \frac{\alpha + 44}{-2\alpha + 5}, \frac{-\alpha + 46}{2\alpha + 1}, \frac{-\alpha + 46}{-2\alpha + 5} \right\} \quad (4.6)$$

En utilisant la PNLP, nous trouvons enfin

$$\widetilde{N}_\alpha = \left[\frac{\alpha + 44}{-2\alpha + 5}, \frac{-\alpha + 46}{2\alpha + 1} \right] \quad (4.7)$$

Pour \widetilde{T}_α , on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}_\alpha &= \frac{\widetilde{N}_\alpha}{\widetilde{\lambda}_\alpha} & (4.8) \\
&= \frac{\left[\frac{\alpha + 44}{-2\alpha + 5}, \frac{-\alpha + 46}{2\alpha + 1} \right]}{[\alpha + 44, -\alpha + 46]} \\
&= [\min E, \max E]
\end{aligned}$$

Où

$$E = \left\{ \frac{1}{(-2\alpha + 5)}, \frac{\alpha + 44}{(-2\alpha + 5)(-\alpha + 46)}, \frac{-\alpha + 46}{(2\alpha + 1)(\alpha + 44)}, \frac{1}{2\alpha + 1} \right\} \quad (4.9)$$

Le PNLP donne enfin :

$$\widetilde{T}_\alpha = \left[\frac{\alpha + 44}{(-2\alpha + 5)(-\alpha + 46)}, \frac{-\alpha + 46}{(2\alpha + 1)(\alpha + 44)} \right] \quad (4.10)$$

(iv) On pose $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ dans l'équation (4.7) et (4.10) pour obtenir des nombres flous triangulaires $\widetilde{N} = (8.8/15/46)$ et $\widetilde{T} = (0.191/0.333/1.045)$ qui donnent facilement

une suite de fonctions d'adhésion :

$$\mu_{\tilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-8.8}{6.2} & si & 8.8 \leq x \leq 15 \\ \frac{46-x}{31} & si & 15 < x \leq 46 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (4.11)$$

et

$$\mu_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} \frac{x-0.191}{0.142} & si & 0.191 \leq x \leq 0.333 \\ \frac{1.045-x}{0.712} & si & 0.333 < x \leq 1.045 \\ 0 & sinon \end{cases} \quad (4.12)$$

(v) Formule des résultats finaux

1)-Le nombre de patients en régime permanent est compris entre 8.8 et 46 environ.

2)-le temps d'attente dans la file d'attente en régime permanent est compris entre 0.191 h et 1.045 h environ.

4.2.3 Solution par la méthode L-R

Voici les étapes de la méthode L-R :

(i) Nous mettons les équations (1.19) et (1.21) $\lambda = \tilde{\lambda}$ et $\mu = \tilde{\mu}$ pour obtenir successivement des nombres flous des équations (4.1) et (4.2).

(ii) Nous déterminons les représentations L-R des nombres flous $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ selon la section (2.8.5) :

$$\tilde{\lambda} = \langle 45, 1, 1 \rangle_{LR}, \quad (4.13)$$

et

$$\tilde{\mu} = \langle 48, 1, 1 \rangle_{LR} \quad (4.14)$$

(iii) Remplaçons l'équation (4.13) et (4.14) dans (4.1) et (4.2) En utilisant les formules

dans la section (2.8.6) pour obtenir successivement :

$$\begin{aligned}
\tilde{N} &= \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu} - \tilde{\lambda}} & (4.15) \\
&= \frac{\langle 45, 1, 1 \rangle_{LR}}{\langle 48, 1, 1 \rangle_{LR} - \langle 45, 1, 1 \rangle_{LR}} \\
&= \frac{\langle 45, 1, 1 \rangle_{LR}}{\langle 3, 2, 2 \rangle_{LR}} \\
&\approx \left\langle \frac{45}{3}, \frac{45 \times 2}{3(3+2)} + \frac{1}{3} - \frac{1 \times 2}{3(3+2)}, \frac{45 \times 2}{3(3-2)} + \frac{1}{3} + \frac{1 \times 2}{3(3-2)} \right\rangle_{LR} \\
&= \langle 15, 6 + \frac{1}{3} - \frac{2}{15}, 30 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \rangle_{LR} \\
&= \langle 15, 6.2, 31 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\tilde{T} &= \frac{\tilde{N}}{\tilde{\lambda}} & (4.16) \\
&= \frac{\langle 15, 6.2, 31 \rangle_{LR}}{\langle 45, 1, 1 \rangle_{LR}} \\
&\approx \left\langle \frac{15}{45}, \frac{15 \times 1}{45(45+1)} + \frac{6.2}{45} - \frac{6.2 \times 1}{45(45+1)}, \frac{15 \times 1}{45(45-1)} + \frac{31}{45} + \frac{31 \times 1}{45(45-1)} \right\rangle_{LR} \\
&= \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{138} + \frac{62}{450} - \frac{31}{10350}, \frac{1}{132} + \frac{31}{45} + \frac{31}{1980} \right\rangle_{LR} \\
&= \langle 0.333, 0.142, 0.711 \rangle_{LR}
\end{aligned}$$

(iv) Pour déduire des valeurs floues pour \tilde{N} et \tilde{T} , nous avons seulement besoin de leurs valeurs modales et de leur supports comme indiqué respectivement la figure (4.1) et la figure (4.2) représentées ci-dessous. Leurs formes de fonctions d'appartenance ne sont pas importantes dans ce cas.

(v) Formulation des résultats finaux :

La figure (4.1) indique que **le support de \tilde{N}** varie de 8.8 à 46, cela signifie que le nombre de patients attendus dans la salle est flou, il est impossible que ces valeurs soient inférieures à 8.8 ou supérieures à 46.

La valeur moyenne \tilde{N} est exactement égale à 15; qui est la valeur **la plus possible**

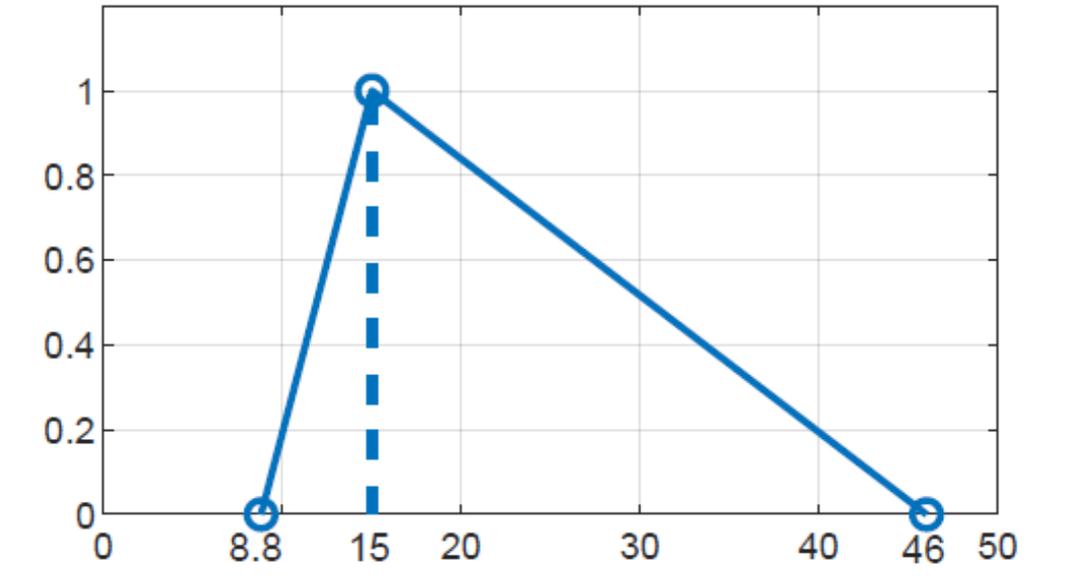


FIG. 4.1 – Fonction d'appartenance du nombre flou de patients dans la salle d'attente.

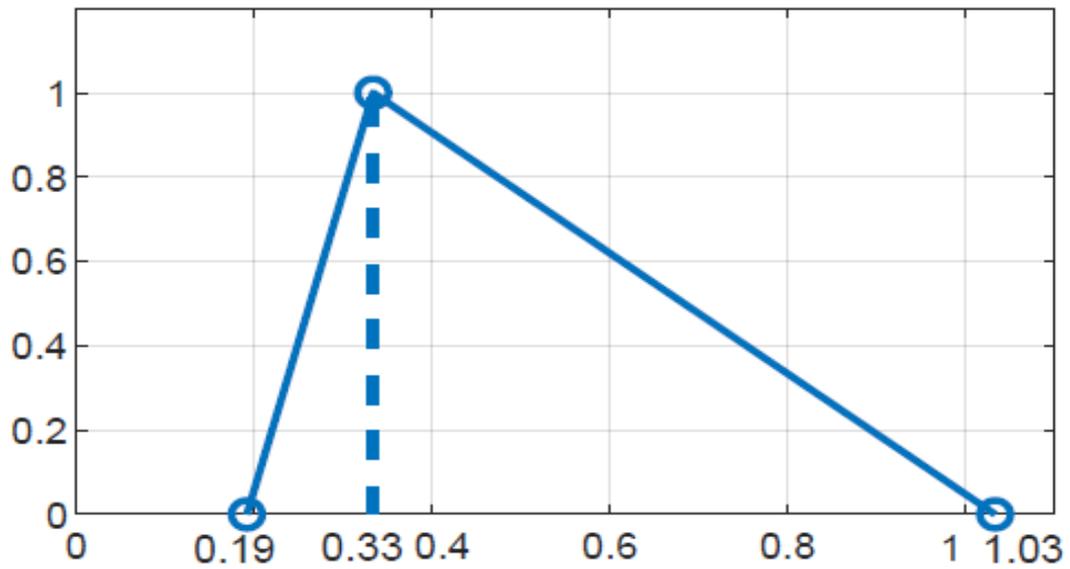


FIG. 4.2 – Fonction d'appartenance du temps d'attente flou dans la salle d'attente.

pour le nombre de patients attendus dans la salle. De même

sur la figure (4.2), le temps d'attente d'un patient dans le système se situe entre 0.19 h (11 minutes) et 1.044 h (63 minutes). Il indique que le temps d'attente dans le système ne dépassera jamais 63 minutes ni ne sera inférieure à 11 minutes . Le temps d'attente le plus possible dans la salle est de 0.333 h (=20 minutes).

4.3 Discussion

Les résultats obtenus aux sous-sections (4.2.2) et (4.2.3) permettant d'apporter des réponses aux trois questions posées ci-dessus par le directeur de la clinique.

1)-La capacité de la salle d'attente correspond à "**la longueur de la file**" ou au "**nombre de patients**" dans la terminologie de la théorie des files d'attente. Cette mesure dépend des valeurs moyennes de **supports des taux flous** $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$. Mais dans le problème , les valeurs moyennes et les supports de $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ ne sont pas spécifiés. Par conséquent , nous ne précisons pas la capacité de la salle. Cependant, si la formulation du problème avait précisé, par exemple que ces débits flous étaient ceux considérés dans la sous section (4.2.1), alors la capacité de la salle allait être un entier c tel que :

$$\forall x \in \text{supp}(\tilde{\mathbf{N}}); \mathbf{x} \leq \mathbf{c} \quad \text{avec } c=46 \quad (4.17)$$

2)-Selon $\text{supp}(\tilde{\mathbf{N}})$ de la figure (4.1), le nombre attendu de patients dans la salle après une longue période de service se situe approximativement entre 8 et 46.

3)-Selon $\text{supp}(\tilde{\mathbf{T}})$ de la figure (4.2), le temps d'attente prévu d'un patient dans la salle est approximativement compris entre 11 et 63 minutes.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre on a fait une application ou on a compare entre deux méthodes la méthode des alpha-coups et la méthode L-R. Cette dernière a été utilisée pour dériver

calculer les mesures de performance du modèle. Avec l'aide de la méthode LEFT-RIGHT, le nombre de clients et le temps d'attente moyen du modèle FM/FM/1 sont calculés avec succès et les résultats sont trouvés dans la représentation L-R. On déduit donc que les résultats flous donnent beaucoup plus d'informations que les résultats nets. La valeur moyenne de la mesure floue correspond à la mesure moyenne dans la théorie traditionnelle des files d'attente.

Les solutions apportées dans ce chapitre montrent que cette méthode présente trois avantages majeurs :

Elle est courte, pratique et flexible par rapport à la méthode des alpha-coups. Nous sommes convaincus que la méthode L-R pourrait aider à d'autres recherches pour obtenir des résultats pour certains problèmes ouverts dans ce domaine comme l'évaluation des mesures de performances des réseaux de files d'attente floues.

Conclusion générale

Ce mémoire est consacré, en premier lieu, à la présentation d'une revue de la littérature sur les systèmes d'attentes flous en définissant les notions de base qui lui sont liées.

L'étude des files d'attente se faisant le plus souvent par la connaissance de ses paramètres de performance, les chercheurs de ce domaine se sont évertués depuis l'avènement de la théorie des ensembles flous, à développer les modèles mathématiques de calcul des performances des files d'attente floues simples et de réseaux de files d'attente floues, semblables à ceux développés dans le modèle classique. malheureusement, ces développements n'ont réussi à analyser jusqu'à présent que les performances de files d'attente floues simples. Plusieurs modèles utilisant la théorie de possibilité, la mesure de crédibilité, la logique floue, la simulation, la programmation non linéaire paramétrique,.... ont été définis pour la cause.

Parmi eux, celui utilisant *la programmation non linéaire paramétrique* semble être le modèle de base, car c'est par lui que plus de la moitié des travaux scientifiques portant sur les files d'attente floues ont été analysés dans la littérature.

S'appuyant sur une nouvelle méthode dénommée "*méthode des alpha-coups assouplie (flexible alpha-cuts method)*", la présente étude introduit une méthode "*méthode L-R*", l'analyse des paramètres de performance d'une file d'attente floues de type $FM/FM/1$. Cette deuxième méthode tire son fondement de l'arithmétique des nombres flous de type $L-R$ restreinte aux approximations sécantes. La méthode $L-R$ a l'avantage d'être courte, pratique et flexible par rapport à la méthode bien connue et appelée alpha-cuts.

Comme perspectives et améliorations futures des travaux déjà réalisés dans le cadre de

ce projet, nous pouvons citer :

- L'étude d'autres modèles d'attentes flous plus complexes en utilisant la méthode $L-R$.
- Rechercher si la méthode $L-R$ peut résoudre facilement la file d'attente floue non markovienne.

Bibliographie

- [1] Abramovich F. Wagenknecht M. and Khurgin Y.I. Solution of L-R type Fuzzy Systems of Linear Algebraic Equations, Available : [http : //www.polytech.univ-savoie.fr//35_18 .pdf](http://www.polytech.univ-savoie.fr//35_18.pdf) (September 14, 2014).
- [2] Atanassov K.T. Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20 : 87 – 96, 1986. [http : //dx :doi :org/10 :1016/S0165 - 0114\(86\)80034 - 3](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3).
- [3] Avrachenkov K.E. and Sanchez E. Fuzzy Markov Chains and Decision Making. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1(2) :143–159, 2002.
- [4] Barak S. and Fallahnezhad M.S. Cost Analysis of Fuzzy Queueing Systems. *International journal of Applied Operation Research*, 12, 2012.
- [5] Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer-Verlag, Berlin, 2013. [http : //dx :doi :org//10 :1007/978 - 3 - 642 - 35221 - 8](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-35221-8).
- [6] Bellman R.E and Zadeh L.A. Decision-making in a Fuzzy Environment. *Management Science*, 17 :141–164, 1970.
- [7] Bouchon-Meunier B. La Logique Floue et Ses Applications. Addison-Wesley France, Paris, 1995.
- [8] Bouchon-Meunier B., Foulloy L. and Ramdani M. Logique Floue, Exercices Corrigés et Exemples d'Applications. Cépaduès-Editions, Toulouse, 1998.
- [9] Buckley J.J. Fuzzy Probabilities, New Approach and Applications. Physica –Verlag, Heidelberg, 2003.
- [10] Buckley J.J. *Fuzzy Probabilities and Fuzzy Sets for Web Planing*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

- [11] Buckley J.J. and Eslami E. An Introduction to Fuzzy Logic and Fuzzy Sets. Springer –Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [12] Buckley J.J. and Eslami E. Fuzzy Markov Chains : Uncertain Probabilities. *Mathware Soft Computing*, 9 :33–41, 2002.
- [13] Buckley J.J., Eslami E. and Feuring T. Fuzzy Mathematics in Economics and Engineering. Physica-verlag, Heidelberg, 2010.
- [14] Devaraj J. and Jayalakshmi D. A Fuzzy Approach to Non-Preempted Priority Queues. *International Journal of Mathematical Archive*, 3(7) :2704 – 2712, 2012.
- [15] Dubois D. and Prade H. Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications. Academic Press, New York, 1980.
- [16] Dubois D., Prade H. and Yager R.R. Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems. Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo (California),1993.
- [17] Erlang A.K. The Theory of Probabilities and Telephone Conversations. *Nyt Tidsskrift Matematik B*, 20 :33–39, 1909.
- [18] Jeeva M. and Rathnakumari E. Fuzzy Cost Computations of M/M/1 and M/G/1 Queueing Models. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(1) :120–132, 2014.
- [19] Falin G.I. and Templeton J.G.C. *Retrials Queues*. Springer-Sciences + Business MEDIA, London, 1997.
- [20] Fotso C. and Fotso L.P. Phénomène d’Attente dans un Système Bancaire ; Approximations des Mesures des Performances des Files d’Attente. Université de Yaoundé I, Yaoundé, 2006.
- [21] Gacogne L. *Eléments de Logique Floue*. Hermès, Paris, 1997.
- [22] Godjevac J. *Idées Nettes sur la Logique Floue*. P.P.U.R., Lausanne, 1999.
- [23] Goetschel R. and Voxman W. Elementary Fuzzy Calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 18 :31–43, 1986.
- [24] Gross D., Shortie J.F. Thompson J.M. and Harris C.M. *Fundamentals of Queueing Theory*, Fourth Edition. Wiley, New Jersey, USA, 2008.

- [25] Hanss M. *Applied Fuzzy Arithmetic, An Introduction with Engineering Applications*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
- [26] Henriet L. and Perny P. Méthodes Multicritères Non Compensatoires pour la Classification Floue d'Objets. In Rencontres francophones sur la logique floue et ses applications, pages 9–15. Nancy, 1996.
- [27] Hung W-L. and Yang M-S. Fuzzy Clustering on LR-Type Fuzzy Numbers with Application in Taiwanese Tea Evaluation. *Fuzzy Sets and systems*, 150 :561–577, 2005.
- [28] Jeeva M. and Rathnakumari E. Fuzzy Cost Computations of $M/M/1$ and $M/G/1$ Queueing Models. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(1) :120–132, 2014
- [29] Kahraman C. *Fuzzy Applications in Industrial Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [30] Kalayanaraman R., Thillaigovindan N. and Kannadasan G. A Single Server Fuzzy Queue with Unreliable Server. *International Journal of Computational Cognition*, 8(1) :1–4, March 2010.
- [31] Kandel A. *Fuzzy mathematical Techniques with Application*. Addison-Wesley Publishing Company, Tokyo, 1996.
- [32] Kaufmann A. *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous (Fuzzy sets theory), 2. Applications à la linguistique, à la logique et à la sémantique*. Masson et Cie, Paris, 1975.
- [33] Kao C., Li C.C. and Chen S.P. Parametric Programming to the Analysis of Fuzzy Queues. *Fuzzy Sets and Systems*, 107 :93–100,1999. [http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114\(97\)00295-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0165-0114(97)00295-9).
- [34] Ke J.-C., Huang H.-I. and Lin C.-H. On Retrial Queuing Model with Fuzzy Parameters. *Physica A*, 374 :272–280, 2007.
- [35] Li R.J. and Lee E.S. Analysis of Fuzzy Queues. Proc. NAFIPS 1998, pages 158–162, June 8-10, 1988.

- [36] Li R.J. and Lee E.S. Analysis of Fuzzy Queues. Computers and Mathematics with Applications, 17 :1143–1147, 1989.
- [37] Mamdani, Ebrahim H., and Sedrak Assilian. "An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller." International journal of man-machine studies 7.1 (1975) : 1-13.
- [38] Mary K.J. R., Monica P. and Mythili S. Performance Measures of FM/FM/1 Queueing System with N-Policy. International Journal of Physics and Mathematical Sciences, 4(3) :5–10, September 2014.
- [39] Mukeba J.P. Chaines de Markov floues et evaluation des paramètres de performance d'un réseau de files d'attentes floues à formes produit, 12-136 *de la Faculté des Sciences de l'Université de Kinshasa*, 26 Novembre 2016.
- [40] Mukeba J.P. *Analysis of Fuzzy Queue Characteristics by Flexible Alphacuts Method*. Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis, 2016, p. 1-12.
- [41] Mukeba J.P., Mabela R. et Ulungu B. Sur la Multiplication des Nombres Flous de Type L-R. *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Kinshasa*, 1 :33–40, Septembre 2014.
- [42] Mukeba J.P., Mabela R. and Ulungu B. Computing Fuzzy Queueing .Performance Measures by L-R Method. *Journal of Fuzzy Sets Valued Analysis*, 2015(1) : 57–67, 31 March 2015. [http : //dx :doi :org/10 :5899/2015/jfsva - 00226](http://dx.doi.org/10.5899/2015/jfsva-00226).
- [43] Negi D.S. and Lee E.S. Analysis and simulation of Fuzzy Queues. *Fuzzy Sets and Systems*, 46 :321–330, 1992. [http : //dx :doi :org/10 :1016/0165- 0114\(92\)90370 - J](http://dx.doi.org/10.1016/0165-0114(92)90370-J).
- [44] Ning Y. and Zhao R. Analysis on Random Fuzzy Queueing Systems with Finite Capacity. In The 9th International Conference on Electronic Business, pages 1–7, Macau, November 30 - December 04, 2009.
- [45] Noora A.A., Jahanshahloo G.R., Rashidi S.F. and Godarzi M.M. A Study of Discrete - Time Multi Server Retrial Queue with Finite Population and Fuzzy Parameters. *African Journal of Business Management*, 5(6) :2426–2431, March 2011.

- [46] Palpandi B. and Geetharamani G. Evaluation of Performance Measures of Bulk Arrival Queue with Fuzzy Parameters Using Robust Ranking Technique. *International Journal of Computational Engineering Research*, 3(10) :53–57, October 2013.
- [47] Prade H.M., Wang P.P. and Chang S.K. (eds), An Outline of Fuzzy or Possibilistic Models for Queueing Systems. Fuzzy Sets, Plenum Press, pages 147–153, 1980.
- [48] Ramesh R. and Ghuru S.K. Analysis of Performance Measures of Fuzzy Queueing Model with an Unreliable Server using Ranking Function Method. *International Journal of Advances in Computer Science and Technology*, 4(1) :441–445, 2014.
- [49] Ritha W. and Menon S.B. Fuzzy N Policy Queues with Infinite Capacity. *Journal of Physical Sciences*, 15 :73–82, December 2011.
- [50] Ritha W. and Menon S.B. Analysis of a Fuzzy Queueing System with a Removable and Non-Reliable Server. *Journal of Computing Technologies*, 1 :1–4, June 2012.
- [51] Stefanini L. and Sorini L. Fuzzy Arithmetic with Parametric LR Fuzzy Numbers. ISFA-EUSFLAT, page 600 – 605, 2009.
- [52] Tyagi A. and Singh T.P. Trapezoidal Fuzzy Queue Model to an Interdependent Communication Network with Bulk Arrivals. *International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems*, 2(4) :459–466, 2012.
- [53] Upadhyaya S. Bernoulli Vacation Policy for a Bulk Retrieval Queue with Fuzzy Parameters. *International Journal of Applied Operational Research*, 3(3) :1–14, 2013.
- [54] Vincent G.S. and Bhuvaneshwari S. On Fuzzy Retrieval Queue with Priority Subscribers. *International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics*, 4(1) :9–20, February 2011.
- [55] Wang T.-Y., Yang D.-Y. and Li M.-J. Fuzzy Analysis for the N Policy Queues with Infinite Capacity. *International Journal of Information and Management Sciences*, 21 :41–45, 2010.
- [56] Yang T. and Templeton J.G.C. A Survey on Retrieval Queues. *Queueing Systems*, 2 :201–203, 1987.

- [57] Zadeh L.A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965. [http://dx.doi.org/10.1016/S-19-9958\(65\)90241-X](http://dx.doi.org/10.1016/S-19-9958(65)90241-X).
- [58] Zadeh L.A. A Fuzzy-Set-Theoretical Interpretation of Linguistics Hedges. *Journal of Cybernetics*, 2 :4–34, 1972.
- [59] Zadeh L.A. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems. *Man and Cybernetics*, 3 :28–44, 1973.
- [60] Zadeh L.A. A Meaning Representation Language for Natural Language. *Int. J. Man-Machine Studies*, 10 :395–460, 1978.
- [61] Zadeh L.A. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :3–28, 1978.
- [62] Zhang R., Phillis Y. A. and Kouikoglou V.S. *Fuzzy Control of Queuing Systems*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [63] Zhang R. and Phillis Y. A. Fuzzy Control of Arrivals to Tandem Queues with Two Stations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(3) :361–367, June 1999.
- [64] Zhang R. and Phillis Y. A. Fuzzy Routing of Queueing Systems with Heterogeneous Servers. *Proceedings of the 1997 IEEE; International Conference on Robotics and Automation*, pages 2340–2345, April 1997.
- [65] Zhang R. and Phillis Y. A. Fuzzy Admission Control and Scheduling of Production Systems. *Proceedings of the 1999 IEEE; International Conference on Robotics and Automation*, pages 1508–1513, May 1999.