REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master
Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

Présenté par

Chater Imene

Sur le thème :

Etude du comportement asymptotique de certaines équations aux dérivées partielles dans un domaine mince

Soutenue publiquement, le 09/07/2023 devant le jury composé de :

Mr. Berkane Djamel	MCA	Univ. Blida1	Président
Mr. Dilmi Mohamed	MCB	Univ. Blida1	Directeur de mémoire
Mr. Ariche Sadjia	MCB	Univ. Blida1	Examinatrice

Année universitaire :2022/2023

Table des matières

Dédicace

Une grande salutation

Á "mon père" et "ma mère" qui m'ont accompagné tout au long de ma carrière et ont été mes plus fervents soutiens.

À mes soeurs "Chaima" et "Maissoune" et mon frère "Tarek".

À la meilleur amie de ma carrière universitaire "Houria".

et

À tous ceux qui m'ont aideé et encouragé.

Remerciements

Je tiens tout d'abord remercier ***ALLAH*** *qui m'a aidé à atteindre cette étape de ma vie et qui m'a donné la force de faire ce travail, je souhaite également exprimer ma reconnaissance en vers mon directeur de mémoire Monsieur* ***"Dilmi Mohamed"****, pour sa guidance précieuse tout au long de ce processus. Ses connaissances son expertise et sa disponibilité ont été d'une importance cruciale pour l'aboutissement de ce travail.Je suis reconnaissante pour son soutien constant, ses conseils avisés et sa patience, qui n'ont permis d'approfondir mes connaissances et de développer mes compétences de recherche.*

Je remercie infiniment le professeur ***"Berkane Djamel"*** *d'avoir bien voulu présider ce jury de méoimre et de s'être intéressé à ce travail.*

Je remercie aussi le professeur ***Ariche Sadjia****, qui a accepté d'être membre du jury.*

Enfin, je remercier mon père, ma mère et tous ma famille pour leur amour, leur soutient continu et leur encouragements tout au long de mes études, leur confiance en moi a été une source constante de motivation.

Notations

1. $\mathcal{D}(\Omega)$: Espace des fonctions différentiable et à support compact dans Ω.
2. $L^p(\Omega)$: L'espace de Lebesgue.
3. $:=$: L'égalité par définition (affectation).

Soient Ω^ε est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon \cup \omega$ est sa frontière tel que

1. ε : un réel positif destiné à tendre vers zéro.
2. ω : la frontière inférieur du domaine.
3. Γ_L^ε : la frontière latérale.
4. Γ_1^ε : la frontière supérieur du domaine.

Pour toute fonction $u^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times]0, T[\to \mathbb{R}^3$ régulière avec $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$, on note

1. u^ε : le champ de déplacement
2. $\operatorname{div}(u^\varepsilon) := \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_i}$: la divergence de u^ε.
3. $\nabla u^\varepsilon := \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right); 1 \leq i, j \leq 3$: le gradient de u^ε.
4. $d\left(u^\varepsilon\right) := \frac{1}{2}\left(\nabla u^\varepsilon + \left(\nabla u^\varepsilon\right)^t\right)$: le tenseur des déformations.
5. $\sigma^\varepsilon\left(u^\varepsilon\right)$: le tenseur des contraintes.

Les espaces fonctionnels en fonction de temps :

1. $C(0, T; X)$: L'espace des fonctions continues sur $]0, T[$ dans X.
2. $L^p(0, T; X)$: L'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0, T[$ à valeurs dans X.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'analyse asymptotique de quelques équations aux dérivées partielles dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, avec conditions de frottement sur une partie du bord. Plus précisément, nous avons fait ici l'étude de deux types de problèmes non linéaires, le premier concerne un problème parabolique pour l'équation de l'élasticité linéaire avec un terme source non linéaire, le second est un problème hyperbolique pour l'équation de viscoélastique avec terme dissipatif non linéaire.
L'idée principale de cette étude est de montrer comment dériver des problèmes limites bidimensionnels lorsque l'épaisseur tend vers zéro. En utilisant un changement d'échelle et plusieurs inégalités nous prouvons quelques estimations. Grâce à ces estimation, nous obtenons les résutats de convergence, les problèmes limites associes et leurs unicités.

Mots clés : *Analyse asymptotique ; Élasticité linéaire ; Film mince ; Terme source ; Terme dissipatif.*

Abstract

This thesis is devoted to the asymptotic analysis of some partial differential equations in a thin film $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, with friction conditions on part of the boundary. More precisely, we made here the study of two types of nonlinear problems, the first concerns a parabolic problem for the equation of linear elasticity with a nonlinear source term, the second is a hyperbolic problem for the equation of viscoelastic with nonlinear dissipative terms.

The main idea of this study is to show how to derive two-dimensional limit problems when the thickness tends to zero. Using a change of scale and several inequalities we prove some estimates. Thanks to these estimates, we obtain the convergence results, the associated limit problems and their uniqueness.

Keywords : *Asymptotic analysis ; Linear elasticity ; Thin film ; Source term ; Dissipative term.*

Introduction

L'analyse du comportement asymptotique des modèles mis en place sur des films minces (l'une des dimensions (l'épaisseur) est petite devant les autres), et comprendre comment l'épaisseur du film affecte le problème, est une question très importante en sciences appliquées, parce que les problèmes qui sont posés dans un film mince sont largement utilisés dans plusieurs domaines, par exemple dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...). Plus de détails peuvent être vus à [2].

Au cours des 50 dernières années, des méthodes asymptotiques ont été utilisées pour dériver et justifier des modèles simplifiés pour des problèmes tridimensionnels de mécanique des solides pour les poutres, les plaques et les coques. Par exemple Ciarlet et Destuynder [5], Destuynder [6], ont étudié des états d'équilibre d'une plaque mince $\Omega \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ sous des forces externes où Ω est un domaine lisse dans $\mathbb{R}^2$ et ε est un petit paramètre, pour justifier le modèle bidimensionnel des plaques.

Récemment, de nombreux auteurs ont appliqué les méthodes asymptotiques dans les problèmes d'élasticité et de viscosité tridimensionnels ou bidimensionnels pour dériver de nouveaux modèles réduits bidimensionnels ou unidimensionnels. L'importance de ces derniers qui sont obtenus réside dans le fait qu'on peut les utiliser à la place des modèles tridimensionnels complets lorsque l'épaisseur est suffisamment petite. En outre, les modèles bidimensionnels ou unidimensionnels sont plus simples que leur contrepartie tridimensionnelle ce qui facilite leur étude. Ils permettent aussi d'effectuer des simulations numériques moins coûteuses des simulations tridimensionnelles.

Dans [3], Bayada et Lhalouani ont étudié un problème de contact avec la loi de frottement de Coulomb entre un matériau élastique et un joint élastique de faible épaisseur encastré dans un support rigide. Paumier [18] réalise une modélisation asymptotique d'un problème de contact unilatéral d'une plaque mince, il a prouvé que ce problème tridimensionnel avec frottement tend vers un autre bidimensionnel sans frottement. La justification par l'analyse asymptotique des plaques élastiques donnée par Gilbert et Vashakmadze [13]. Dans [10], Benseridi et Dilmi étudient le comportement asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité dans un domaine mince tridimensionnel avec les conditions de frottement de Tresca. Dilmi et al., dans l'article [7] ont étudié le comportement asymptotique des systèmes élastiques avec des termes source et dissipatif non linéaires dans un domaine mince tridimensionnel en présence la loi de frottement de Tresca. Dans le cadre de l'étude des problèmes de viscosité, Rodríguez-Arós et Viaño dans ([21], [22]) justifient deux modèles pour l'étirement en flexion d'une barre viscoélastique en utilisant la méthode d'expansion asymptotique. Dilmi et al., ont étudié dans [11] l'analyse asymptotique d'un modèle mathématique impliquant un contact friction entre un corps électro-viscoélastique et une base dans un domaine mince tridimensionnel. Les auteurs dans [8], ont étudié l'analyse asymptotique des solutions du problème viscoélastique linéaire avec des termes dissipatif et source non linéaires dans un domaine mince tridimensionnel.

Le lecteur peut également consulter certains travaux concernant des équations aux dérivées partielles posées dans différentes domaines minces, voir par exemple ([9], [12], [14]).

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'analyse asymptotique de quelques équations aux dérivées partielles non linéaires dans un film mince Ω^ε, quand l'épaisseur ε du film tend vers zéro.

Ce mémoire se compose de trois chapitres que nous allons brièvement décrire

Dans le premier chapitre 1, on va donner quelques notations et rappels d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans les différents chapitres de ce mémoire.

Le deuxième chapitre 2, est consacré à l'étude du comportement asymptotique d'un problème parabolique associé aux équations élastiques linéaires avec terme source non linéaire dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$, en présance d'une loi de frottement non linéaire sur une partie de la frontière, ce frottement est modélisé par la loi de puissance.

Tout d'abord, nous dérivons la formulation variationnelle du problème et nous établissons un résultat d'existence et l'unicité d'une solution faible, puis on passe à l'étude de l'analyse asymptotique. Pour cela, en utilisant le changement d'échelle et des nouveaux inconnus pour mener l'étude sur un domaine qui ne dépend pas de ε. On cherche des estimations a priori en utilisant les inégalités de Poincaré, Korn et Hölder, ensuite en passant à la limite, on obtient le problème limite.

Dans le troisième chapitre 3, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un problème hyperbolique associé aux équations viscoélastiques avec un terme dissipatif non linéaire et la condition au limite de Fourier dans un domaine mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$.

Nous étudions l'analyse asymptotique du problème de la même manière que dans le deuxième chapitre. Le théorème de convergence et le problème limite sont obtenus après transformation du problème original en un problème posé sur un domaine de référence fixe et une dimension du domaine tend vers zéro.

Chapitre 1

Outils mathématiques

Résumé. Ce chapitre est consacré à rappeler quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Les résultats sont donnés sans démonstration, car ils sont standards et connus chez les lecteurs comme ils peuvent être trouvés dans beaucoup de références de mathématiques. Voir par exemple ([1], [4], [16]). Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3).

Contenu

1.1 Quelques espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprondre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de Lebesgue (les espaces des fonction p-intégrables), les espaces de Sobolev et les espaces des fonctions à valeurs vectorielles.
Dans la suite, on désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonction de C^∞ à support compact $K \subset \Omega$, c'est-à-dire l'espace des fonctions tests sur Ω. $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$ (le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$).

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble*

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}; v \quad mesurable \quad sur \quad \Omega \quad et \quad \int_\Omega |v|^p dx < +\infty\},$$

l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$ et $v : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, alors on définit l'espace $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{v : \Omega \to \mathbb{R}; v \quad mesurable \quad sur \quad \Omega \quad et \quad \sup_{x\in\Omega} \quad ess|v(x)| < +\infty\right\},$$

où

$$\sup_{x\in\Omega} ess|v(x)| := inf\{M > 0; |v(x)| \leq M \quad presque \quad partout \quad dans\ \Omega\},$$

l'espace $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} ess|v(x)|,$$

et aussi est un espace de Banach.
Dans ce qui suit nous allons rappeler quelques propriétés des espaces $L^p(\Omega)$.
Soit $1 < p < \infty$ un réel. On pose $q = \frac{p}{p-1}$ et on dit que q est l'exposant conjugué de p. L'exposant q est caractérisé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour $p = 1$(resp. $p = \infty$) nous posons naturellement $q = \infty$(resp. $q = 1$).

Théorème 1.1.1 *Soit $p \in [1, +\infty]$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes*
1) Les duaux des espaces $L^p(\Omega)$, pour $p \in [1, +\infty[$, vérifient $(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega)$.
2) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces réflexifs pour $p \in]1, +\infty[$.
3) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $p \in [1, +\infty[$.
4) $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$, c'est à dire que pour tout $u \in L^p(\Omega)$ il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

5) De toute suite de Cauchy dans $L^p(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq \infty$, on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout dans Ω.

Théorème 1.1.2 (Inégalité de Hölder) *Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$. Alors $u.v \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |u.v| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1.3 *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u.v dx, \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert. De plus on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Dans ce paragraphe nous définissons les espaces de Sobolev qui sont les outils fondamentaux de dériver la formulation variationnelle.

Définition 1.1.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \overline{1, d}\},$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle de u au sens des distributions.

Proposition 1.1.1 *Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (u(x).v(x) + \nabla u(x).\nabla v(x))dx,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla(x)|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 1.1.4 ***(de densité)*** *Si Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*
Définissons maintenant un autre espace de Sobolev qui est un sous-espace de $H^1(\Omega)$, ces espaces sont très utiles pour les problèmes avec conditions aux limites de Dirichlet.

Définition 1.1.3 *L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit*

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \exists v_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } v_n \to u \text{ dans } H^1(\Omega)\}.$$

Définition 1.1.4 *Le dual de l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est appelé $H^{-1}(\Omega)$.*

Proposition 1.1.2 *L'espace $H^{-1}(\Omega)$ caractérisé par*

$$H^{-1}(\Omega) = \{l = l_0 + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial l_i}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad l_0, l_1, .., l_d \in L^2(\Omega)\}.$$

Muni de la norme

$$\|l\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \langle l, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)},$$

l'espace $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.1.3 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante C_Ω telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.4 ***(Formule de Green)*** *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$ (par exemple Ω de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné); alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} v(x)\, u(x)\, \eta_i d\Gamma, \;\; i = 1 \text{ à } n,$$

où η_i est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

1.1.3 Espaces des fonctions des valeurs vectorielles

Nous allons introduire maintenant des outils supplémentaires qui sont fondamentaux pour les étude des problèmes dévolution. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 1.1.5 *Soit X un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty]$, on note $L^p(0, T, X)$ l'ensemble des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0, T[$ et à valeurs dans X, telles que l'application $t \to \|u(t)\|_X$ soit dans $L^p(0, T)$. L'espace $L^p(0, T; X)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := inf\{c > 0; \|u(t\|_X \leq c, \ t \in]0, T[\}, \quad si \quad p = \infty.$$

l'espace $C([0, T]; X)$ est un ensemble des fonctions continues dans $[0, T]$ á valeurs dans X. Par ailleurs, nous avons les résultats suivants

Proposition 1.1.5 *Pour $p \in [1, +\infty[$, on a*
1. Si X est séparable, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi séparable.
2. Si X est réflexif, alors $L^p(0, T; X)$ est aussi réflexif.
3. Soient X et Y deux espaces de Banach, tel que X est inclus dans Y, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T; X)$ dans $L^p(0, T; Y)$.
4. Si $(X, \langle ., . \rangle_X)$ est un espace de Hilbert, alors $L^2(0, T; X)$ est aussi est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par

$$\langle u, v \rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T ((u(t), v(t))_X dt.$$

5. Si X est un espace de Banach réflexif et X' son dual, alors

$$(L^p(0, T; X))' = L^q(0, T; X^{'}), \ \ 1 < p, q < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$(L^1(0, T; X))' = L^\infty(0, T; X^{'}),$$

où $(L^p(0, T; X))'$ représente le dual de l'espace $L^p(0, T; X), 1 \leq p \leq \infty$.

Théorème 1.1.5 ***(Bochner)*** *Une fonction $u : [0,T] \to X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \to \|u(t)\|_X : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ est intégrable. Dans ce cas*

$$\| \int_0^T u(t)dt\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Lemme 1.1.1 *Si $u \in L^p(0,T;X)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;X)(1 \leq p \leq \infty)$, alors u est après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle de $]0,T[$, continue de $[0,T] \to X$. C'est-à-dire $u \in C([0,T];X)$.*

Théorème 1.1.6 *Soit $(X,(.,.)_X)$ un espace de Hilbert et soit $u :]0,T[\to X$ une fonction telle que $u \in L^p(0,T;X)$, et $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;X)$, alors*
1. La fonction $t \to \|u(t)\|_X$ est une fonction absolument continue sur l'espace $]0,T[$.
2. $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_X^2 = \left(\frac{du}{dt}, u(t)\right)_X$, presque partout dans $]0,T[$.
3. $\frac{1}{2}\|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_X^2 + \int_0^t \left(\frac{du(s)}{dt}, u(s)\right)_X ds$, $\forall t \in]0,T[$.

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous donnons quelques préliminaires sur la convergence faible et la convergence faible étoile. Extrait de [4].

1.2.1 Convergence faible et convergence faible étoile

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$ on note par X' l'espace dual de X , et par $\langle .,. \rangle_{X' \times X}$ le produit de dualité entre X et X'.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite $(u_n) \in X$, converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \langle v, u_n \rangle_{X' \times X} = \langle v, u \rangle_{X' \times X}, \ \forall v \in X'.$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite u_n.

Proposition 1.2.1 *Soit u_n une suite de X, on a*
1. Si $u_n \to u$ fortement, alors $u_n \rightharpoonup u$ faiblement.
2. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement, alors $\|u_n\|_X$ est borné et $\|u\|_X \leq \lim inf \|u_n\|_X$.
3. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement et $v_n \to v$ fortement dans X' (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{X'} = 0$), alors $\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle_{X' \times X} = \langle v, u \rangle_{X' \times X}$.

Théorème 1.2.1 ***(Compacité faible des bornés du dual d'un espace réflexif)***
Soit X un espace réflexif , et soit (u_n) une suite bornée de X (c'est-à-dire il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tq : $\|u_n\| \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) alors il existe une sous-suite encore notée (u_n) et $u \in X$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans X.

Définition 1.2.2 *On dit que la suit $(u_n) \in X'$ converge faiblement étoile vers un élément $u \in X'$,et on note $u_n \rightharpoonup^* u$, si $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, v\rangle_{X'\times X} = \langle u, v\rangle_{X'\times X}, \quad \forall v \in X$.*
u s'appelle limite faible étoile de la suite (u_n).

Proposition 1.2.2 *Soit u_n une suite de X', on a*
1. Si $u_n \to u$ fortement, alors $u_n \rightharpoonup^* u$ faiblement.
2. Si $u_n \rightharpoonup^* u$ faiblement, alors $\|u_n\|_{X'}$ est bornée et $\|u_n\|_{X'} \leq \lim inf \|u_n\|_{X'}$.
3. Si $u_n \rightharpoonup^* u$ faiblement et si $v_n \to v$ fortement dans X (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_X = 0$) alors $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, v_n\rangle_{X'\times X} = \langle u, v\rangle_{X'\times X}$.

Théorème 1.2.2 ***(Compacité faible étoile des bornés du dual d'un espace séparable)*** *Soit X un espace séparable, et soit (u_n) une suite bornée de X' (c'est-à-dire il existe $C > 0$ t.q. $\|u_n\|_{X'} \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors il existe une sous-suite encore notée (u_n) et $u \in X'$ telle que $u_n \rightharpoonup^* u$ dans X'.*

Théorème 1.2.3 ***(représentation de Riesz-Fréchet)*** *Soit X un espace de Hilbert rèel et $(.,.)_X$ un produit scalaire de X, pour tout $v \in X'$, il existe $u \in X$ unique tel que*

$$\langle v, w\rangle_{X'\times X} = (u, w)_X, \quad \forall w \in X,$$

de plus on a $\|u\|_X = \|v\|_{X'}$.

Proposition 1.2.3 *Soit V un espace de Banach uniformément convexe.*
Soit (x_n) une suite dans V telle que $x_n \to x$ pour la topologie faible $\sigma(V, V')$ et

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|,$$

alors $x_n \to x$ fortement .

1.2.2 Résultats de compacité

Pour plus de détails voir le livre de Lions [16].

Définition 1.2.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et T un réel strictement positif. On note Q_T le cylindre défini par $Q_T =]0, T[\times \Omega$.*

On définit l'espace

$$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L^2(Q_T); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T) \right\},$$

qui l'on munit de la norme définie par

$$\|u\|_{H^1(Q_T)} = \left(\|u\|^2_{L^2(Q_T)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q_T)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.2.4 *L'espace $H^1(Q_T)$ est de Hilbert pour la norme définie ci-dessus.*

Théorème 1.2.5 *L'injection de $H^1(Q_T)$ dans $L^2(Q_T)$ est compacte.*

Théorème 1.2.6 *Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$ (l'injection est algébrique et topologique). On suppose que l'injection $B \hookrightarrow B_1$ est continue. Soit T est fini et $1 < p_0, p_1 < \infty$. On suppose B_0 et B_1 sont réflexifs et on définit*

$$W = \left\{ u : (0, T) \to B_0 : u \in L^{p_0}(0, T; B_0); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}.$$

L'espace W est un espace de Banach réflexif pour la norme

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Théorème 1.2.7 *Nous supposons que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte. Si $1 < p_0, p_1 < \infty$, alors l'injection de W dans $L^{p_0}(0, T; B)$ est compacte.*

Lemme 1.2.1 *Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}_t$ et g_μ, g des fonctions de $L^q(\Theta)$;$1 < q < \infty$ telles que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\Theta)} \leq c \quad et \quad g_\mu \to g \quad p.p \quad dans \quad \Theta,$$

alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \text{ faible dans } L^q(\Theta).$$

1.2.3 Dérivations au sens de Gâteaux

Soit X un espace de Banach. On note X' le dual topologique de X c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X. Nous noterons par $\langle .,. \rangle_{X' \times X}$ le produit dans le dualité entre X' et X.

Définition 1.2.4 *[15] Soient V une partie d'un espace de Banach X et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in V$, on dit que J est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $J(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_z(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u+tz) - J(u)}{t} = \langle l, z \rangle_{X' \times X}.$$

On pose $J'(u) = l$.

Autrement, on dit qu'une fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in V$ de dérivée $g(u) \in X'$ si , pour tout $h \in X$:

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[J(u+tz) - J(u) - \langle g(u), th \rangle_{X' \times X} \right] = 0.$$

Exemple 1.2.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$; un ouvert, pour $p \in]1; +\infty[$ on définit une fonctionnelle*

$$\begin{array}{ccl} J & : & W_0^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u & \longrightarrow & J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \end{array}$$

alors J est différentiable dans $W_0^p(\Omega)$ et

$$J'(u)(v) = p \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u . \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^p(\Omega).$$

On considère la fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définit par $\Phi(x) = |x|^p$, c'est une fonction de classe C^1, et $\nabla \Phi = p |x|^{p-2} x$ en effet

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\Phi(x+ty) - \Phi(x)}{t} = p |x|^{p-2} x.y, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme conséquence

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{|\nabla u(x) + t \nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x),$$

par le théorème des accroissement finis, pour presque tout $x \in \Omega$ et pour $t > 0$; il existe une fonction θ à valeur dans $]0;1[$ telle que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned} & \left|\nabla u(x) + t\nabla v(x)\right|^{p} - \left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p} - tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right) \qquad (1.1) \\ = \; & tp\left|\nabla u\left(x\right) + \theta\left(x,t\right)t\nabla v\left(x\right)\right|^{p-2}\left(\nabla u\left(x\right) + \theta\left(x,t\right)t\nabla v\left(x\right)\right).\nabla v\left(x\right) \\ & - tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right). \end{aligned}$$

En divisant par t, on obtient pour presque tout x

$$\lim_{t \longrightarrow 0^{+}} \frac{\left|\nabla u(x) + t\nabla v(x)\right|^{p} - \left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p} - tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right)}{t} = 0.$$

D'autre par, on peut majorer le deuxième membre de l'égalité (1.1) divisée par t par

$$f\left(x\right) = 2\left(\left|\nabla u\left(x\right)\right| + \left|\nabla v\left(x\right)\right|\right)^{p-1}.\left|\nabla v\left(x\right)\right|.$$

En utilisant en suite l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\Omega}\left|f\left(x\right)\right|dx \leq c\left\|\nabla v\right\|_{L^{p}(\Omega)}\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1} + \left\|\nabla v\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1}\right).$$

On peut dent appliquer le théorème de convergence dominée et conclure à

$$J'\left(u\right)\left(v\right) = p\int\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx, \quad \forall v \in W_{0}^{p}\left(\Omega\right).$$

Alors J est Gâteaux différentiable.

1.3 Lemme de Gronwall

À la fin de ce chapitre, nous passons en revenue le lemme de Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes aux limites, en particulier pour établir l'unicité de la solution, ainsi que pour former les estimations à priori.

Lemme 1.3.1 *Soient $u, v \in C([0,T];\mathbb{R})$, telles que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T], a \geq 0$ une constante, et $w \in C([0,T];\mathbb{R})$.*
1. Si

$$w(t) \leq a + \int_0^t u(s) + \int_0^t v(s)w(s)ds, \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq \left(a + \int_0^t u(s)ds\right)\exp\left(\int_0^t v(s)ds\right), \forall \in [0,T].$$

2. Si

$$w(t) \leq u(s) + a \int_0^t v(s)ds, \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t w(s)ds \leq \exp(aT) \int_0^t u(s)ds.$$

Corollaire 1.3.1 *Si $v \in C([0,T];\mathbb{R})$ tel que $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante et $w \in C([0,T];\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$w(t) \leq a + \int_0^t v(s)w(s)ds, \forall t \in [0,T],$$

alors

$$w(t) \leq a \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right), \forall t \in [0,T].$$

Chapitre 2

Comportement asymptotique pour le système d'élasticité avec un terme source non linéaire

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un problème dynamique pour l'élasticité linéaire dans un domaine de faible épaisseur $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$ avec un terme source $\alpha^\varepsilon |u^\varepsilon|^{p-2} u^\varepsilon$ et la condition de fortement non linéaire sur une partie de la frontière et la condition de Dirichlet sur l'autre partie. Notre objectif est d'étudier le comportement asymptotique de la solution lorsque ε tend vers zéro.

Contenu

2.1 Description du problème

Nous considérons un problème associé à des déformations d'un corps élastique homogène et isotrope en régime dynamique dans un domaine mince Ω^ε borné de $\mathbb{R}^3$, avec une surface frontière réguliere Γ^ε partitionnée en trois parties mesurables $\bar{\omega}$, $\bar{\Gamma}_1^\varepsilon$ et $\bar{\Gamma}_L^\varepsilon$, où ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x_3 = 0$. On suppose que ω est la frontière inférieure du domaine, Γ_L^ε la frontière latérale et Γ_1^ε la surface supérieure définie par l'équation $x_3 = \varepsilon h(x_1, x_2)$, où ε est un petit paramètre destiné à tendre vers zéro $(0 < \varepsilon < 1)$ et $h(\cdot)$ est une fonction définie sur ω telle que

$$0 < \underline{h} = h_{min} \leq h(x_1, x_2) \leq h_{max} = \bar{h}, \forall (x_1, x_2) \in \omega.$$

On note par $x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, donc le domaine physique Ω^ε est donné par

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

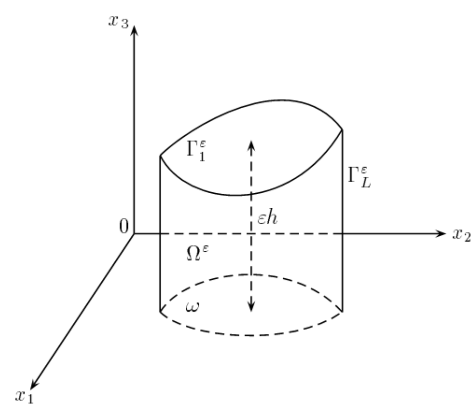

FIGURE 2.1 – Le corps élastique Ω^ε.

On note par $u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t), u_2^\varepsilon(x,t), u_3^\varepsilon(x,t))$ le champ de déplacement et $\sigma^\varepsilon(\cdot)$ le tenseur des contraintes dont les composantes $\sigma_{ij}^\varepsilon(\cdot)$, $(1, i, j < 3)$ sont données par la loi suivante

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + \lambda \sum_{k=1}^{3} d_{kk}(u^\varepsilon)\delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 3, \text{ et } d_{ij}(u^\varepsilon) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right),$$

où λ, μ sont les coefficients de lamé, $d_{ij}\left(\cdot\right)$ le tenseur des taux de déformations et δ_{ij} est le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j, \\ 0, \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

L'équation qui gouvernement les déformations d'un corps élastique homogène et isotrope avec un terme source non linéaire en régime dynamique est la suivante

$$\rho\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - div(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)) + \alpha^\varepsilon|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon = f^\varepsilon, \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon\times]0,T[, \tag{2.1}$$

où $f^\varepsilon = (f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon, f_3^\varepsilon)$ représente une densité massique des forces extérieures, $\rho, \quad \alpha^\varepsilon, \quad p \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2 \leq p$.

Nous allons maintenant décrire les conditions aux limites, pour cela on définit les composantes normales et tangentielles du déplacement u^ε par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n, \quad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n,$$

Pour les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes σ^ε la définition est la suivante

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma^\varepsilon.n).n, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon.n - (\sigma_n^\varepsilon).n,$$

où $n = (n_1, n_3, n_3)$ la normale extérieure unitaire sur Γ^ε.

- Nous supposons que le déplacement est connu sur $\Gamma_1^\varepsilon\times]0,T[$ et $\Gamma_L^\varepsilon\times]0,T[$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varepsilon\times]0,T[, \tag{2.2}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L^\varepsilon\times]0,T[.$$

- Sur $\omega\times]0,T[$ le déplacement est supposée inconnue et il vérifié la condition suivante

$$u^\varepsilon.n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\times]0,T[. \tag{2.3}$$

- Nous supposons aussi l'existence du frottement sur ω, ce frottement est modélisé par la loi de puissance qui s'écrit sous la forme

$$\sigma_\tau^\varepsilon = -k^\varepsilon(x')\left(|u^\varepsilon|^{q-2}\,u^\varepsilon\right)_\tau, \quad \text{sur} \quad \omega\times]0,T[, \tag{2.4}$$

tel que $k^\varepsilon : \omega \to \mathbb{R}_+$ le seuil de frottement (coefficient de frottement) et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Le problème(2.1)-(2.4) est complété par la condition initiale suivante

$$u^\varepsilon(x,0) = \vartheta_0(x), \quad \forall x \in \Omega^\varepsilon. \tag{2.5}$$

Remarque 2.1.1 *Sur* $\omega\times]0,T[$ *la troisième composante du déplacement est nulle*

$$u_3^\varepsilon = 0, \quad sur \;\; \omega\times]0,T[,$$

en effet, d'après la condition (2.3) *on a*

$$u^\varepsilon.n = u_1^\varepsilon.n_1 + u_2^\varepsilon.n_2 + u_3^\varepsilon.n_3 = 0 \;\; sur \; \omega\times]0,T[,$$

où $n=(n_1,n_2,n_3)=(0,0,-1)$ *est le vecteur normal unitaire extérieur à* ω. *Donc* $u_3^\varepsilon = 0$ *sur* $\omega\times]0,T[$.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Dans cette section, nous construisons une formulation variationnelle du problème (2.1)-(2.5). Pour cela, nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^\varepsilon)^3$

$$K^\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 : v = 0 \;\; \text{sur} \;\; \Gamma_1^\varepsilon \cup \Gamma_L^\varepsilon, \;\; v.n = 0 \;\; \text{sur} \;\; \omega\},$$

et pour simplifier l'écriture, on note

$$a(u,v) = 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega^\varepsilon} d_{ij}(u) d_{ij}(v) dx + \lambda \int_{\Omega^\varepsilon} div(u) div(v) dx, \;\; \forall u,v \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3,$$

$$j_q^\varepsilon(u,v) = \int_\omega k^\varepsilon(x')(|u|^{q-2}u)_\tau.v_\tau dx'.$$

Où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $K^\varepsilon \times K^\varepsilon$.

Lemme 2.2.1 *Si* u^ε *est une solution régulière du problème (2.1)-(2.5), alors elle vérifie le problème variationnel suivant*

$$(PK)^\varepsilon \begin{cases} Trouver \;\; u^\varepsilon \in K^\varepsilon \;\; tel \;\; que \\ (\rho\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi) + a(u^\varepsilon,\varphi) + \alpha^\varepsilon(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon,\varphi) + j_q^\varepsilon(u^\varepsilon,\varphi) = (f^\varepsilon,\varphi), \;\; \forall \varphi \in K^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x',0) = \vartheta_0(x'). \end{cases} \tag{2.6}$$

Preuve. En multipliant l'équation (2.1) par φ, où $\varphi \in K^\varepsilon$, on intègre sur Ω^ε et on utilise la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \rho \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}.\varphi_i dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx - \int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j.\varphi_i dx + \alpha^\varepsilon \int_{\Omega^\varepsilon} |u_i^\varepsilon|^{p-2} u_i^\varepsilon.\varphi_i dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon.\varphi_i dx. \tag{2.7}$$

La condition aux limite (2.2) implique que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j.\varphi_i dx = \int_\omega \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j.(\varphi_i)dx'.$$

D'autre part, $\sigma_{ij}^\varepsilon.n_j = \sigma_{\tau_i}^\varepsilon + \sigma_n^\varepsilon.n_j$ et $\varphi_i n_i = 0$ sur ω, alors

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon.n_j.\varphi_i dx = \int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon.(\varphi)_\tau dx'.$$

En revenant à (2.7), on obtient

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \rho\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial t}.\varphi_i dx + \int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}dx - \int_\omega \sigma_\tau^\varepsilon.(\varphi)_\tau dx' + \int_{\Omega^\varepsilon} k^\varepsilon |u_i^\varepsilon|^{p-2}u_i^\varepsilon.\varphi_i dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon.\varphi_i dx. \quad (2.8)$$

Dans (2.8), nous utilisons le fait que

$$\sigma_\tau^\varepsilon = -k^\varepsilon(|u^\varepsilon|^{q-2}u^\varepsilon)_\tau,$$

et

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma_{ij}^\varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}dx = a(u^\varepsilon, \varphi),$$

on obtient la formulation variationnelle suivante

$$\left(\rho\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi\right) + a(u^\varepsilon, \varphi) + \alpha^\varepsilon(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon, \varphi) + j_q^\varepsilon(u, \varphi) = (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon.$$

□

2.2.1 L'existence et l'unicité de la solution.

Théorème 2.2.1 *Sous les hypothèses*

$$f^\varepsilon \in L^2(0, T.L^2(\Omega^\varepsilon)^3),$$

$$\vartheta_0 \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \cap L^p(\Omega^\varepsilon)^3, \quad (2.9)$$

$$k^\varepsilon \in L^\infty(\omega), \quad tel \quad que \quad 0 < k_*^\varepsilon \leq k^\varepsilon(x') \leq k_{**}^\varepsilon,$$

il existe une solution unique u^ε de (2.6), telle que

$$u^\varepsilon \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega^\varepsilon)^3) \cap L^\infty(0, T, L^p(\Omega^\varepsilon)^3),$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^3).$$

Preuve.

A) L'existence. La démonstration du Théorème 2.2.1 sera effectuée en trois étapes :
a) Solution approchée : on construit des solution approchées par la méthode de Faedo Galerkin.
b) Estimation à priori : on établit sur ces solution approchées des estimations (majorations) à priori.
c) Passage à la limite : en utilisant la propriété de compacité dans le terme non linéaire.

Etape 1 : Solution approchée.

On introduit une suite (w_n^ε) des fonctions ayant les propriétés suivantes

⊛ $\forall j; w_j^\varepsilon \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \cap L^p(\Omega^\varepsilon)^3$,

⊛ La famille $\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, w_3^\varepsilon, ...w_m^\varepsilon\}$ est linéairement indépendante,

⊛ L'espace $K_m^\varepsilon = vect\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, w_3^\varepsilon, ...w_m^\varepsilon\}$ engendré par la famille $\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, w_3^\varepsilon, ..., w_m^\varepsilon\}$ est dense dans $K^\varepsilon \cap L^p(\Omega^\varepsilon)^3$.

Soit $u_m^\varepsilon = u_m^\varepsilon(t)$ une solution approchée du problème (2.1)-(2.5) tel que

$$u_m^\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{m} \eta_{jm}(t) w_j^\varepsilon, m = 1, 2, 3...,$$

qui vérifie le système d'équations

$$\left(\rho \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}, w_j^\varepsilon\right) + a(u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon(|u_m^\varepsilon|^{p-2} u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon) + j_q(u_m^\varepsilon, w_j^\varepsilon) = (f, w_j^\varepsilon), 1 \leq j \leq m, \quad (2.10)$$

qui est un système non linéaire d'équation différentielles et sera complété par la condition initiale suivante

$$u_m^\varepsilon(x, 0) = \vartheta_{0m} = \sum_{i=1}^{m} X_{jm} w_j^\varepsilon \to \vartheta_0 \ \text{ quand } \ m \to \infty \ \text{ in } \ H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \cap L^p(\Omega)^3, \quad (2.11)$$

comme la famille $\{w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, ..., w_m^\varepsilon\}$ est linéairement indépendante, le problème (2.10)-(2.11) possède au moins une solution u_m^ε dans l'intervalle $[0, t_m]$.

Etape 2 : Estimation à priori.

En multipliant l'équation (2.10) par $\eta'_{jm}(t)$ et en effectuant la sommation sur $j = 1$ à m, on trouve

$$\left(\rho \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) + a\left(u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) + \alpha^\varepsilon\left(|u_m^\varepsilon|^{p-2} u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) + j_q\left(u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) = \left(f, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right), \quad (2.12)$$

D'autre part, en utilisant la dérivée au sens de Gâteaux nous avons

$$\left(|u_m^\varepsilon|^{p-2}u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|u_m^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p, \tag{2.13}$$

et

$$j_q\left(u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) = \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|(k^\varepsilon)^{\frac{1}{q}}u_m^\varepsilon(t)\|_{L^q(\omega)^2}^q, \tag{2.14}$$

on a aussi

$$a\left(u_m^\varepsilon, \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left[\mu\|d(u_m^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}^2 + \frac{\lambda}{2}\|div(u_m^\varepsilon(t))\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2\right]. \tag{2.15}$$

En utilisant les formules (2.13)-(2.15) dans Eq. (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\rho\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{d}{dt}\left[\mu\,\|d(u_m^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}^2 + \frac{\lambda}{2}\,\|div(u_m^\varepsilon(t))\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}^2\right]&\\ +\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\frac{d}{dt}\|u_m^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega)^3}^p + \frac{1}{q}\frac{d}{dt}\|(k^\varepsilon)^{\frac{1}{q}}u_m^\varepsilon(t)\|_{L^q(\omega)^2}^q&\\ = \left(f, \frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right).&\end{aligned}$$

En intégrant la dernière équation sur $]0, t[$ et en appliquant les inégalités de Hölder et Young, on déduit

$$\begin{aligned}\rho\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + \mu\|d(u_m^\varepsilon(t))\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3\times 3}^2 + \frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|u_m^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p&\\ \leq (2\mu+\lambda)\|\vartheta_{0m}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + \frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|\vartheta_{0m}\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p + k_{**}^\varepsilon\|\vartheta_{0m}\|_{L^q(\omega)^2}^q&\\ +2\rho\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + \frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds.&\end{aligned} \tag{2.16}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Korn

$$C_K\|u_m^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}^2 \leq \|d(u_m^\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}^2,$$

donc l'inégalité (2.16), sera

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + \mu C_K\|u_m^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}^2 + \frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|u_m^\varepsilon(t)\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p&\\ \leq 2\rho\int_0^t\|f(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2 ds + (2\mu+\lambda)\|\vartheta_{0m}\|_{H^1(\Omega^\epsilon)^3}^2 + \alpha^\varepsilon\|\vartheta_{0m}\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p + k_{**}^\varepsilon\|\vartheta_{0m}\|_{l^q(\omega)^2}^q,&\end{aligned}$$

comme

$$2\rho\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+(2\mu+\lambda)\|\vartheta_{0m}\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\alpha^\varepsilon\|\vartheta_{0m}\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}+k^\varepsilon_{**}\|\vartheta_{0m}\|^q_{L^q(\omega)^2}$$

$$\leq C^\varepsilon,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^*.$$

Où C^ε est une constante indépendante de m. Alors, on obtient

$$\left\|\frac{\partial u^\varepsilon_m(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3)}+\|u^\varepsilon_m(t)\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\|u^\varepsilon_m(t)\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}\leq C^\varepsilon. \tag{2.17}$$

Etape 3 : Passage à la limite.
D'après l'estimation (2.17), on conclut

$$u^\varepsilon_m \text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon)^3\right)\cap L^\infty\left(0,T;L^p(\Omega^\varepsilon)^3\right),$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon_m}{\partial t} \text{ bornée dans }\ L^2\left(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right),$$

on en déduit qu'on peut extraire une sous-suite u^ε_m telle que

$$u^\varepsilon_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon)^3\right)\cap L^\infty\left(0,T;L^p(\Omega^\varepsilon)^3\right), \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon_m}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial u}{\partial t} \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right),$$

On a les suites u^ε_m, $\frac{\partial u^\varepsilon_m}{\partial t}$ sont bornées dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right)$, alors par le lemme de compacité de Lions [16], on peut déduire

$$u^\varepsilon_m \overset{fortement}{\longrightarrow} u^\varepsilon \text{ dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right).$$

D'autre part, comme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, nous avons

$$\int_{\Omega^\varepsilon}\left||u^\varepsilon_m|^{p-2}u^\varepsilon_m\right|^q dx=\int_{\Omega^\varepsilon}|u^\varepsilon_m|^p dx\leq C^\varepsilon.$$

Donc $|u^\varepsilon_m|^{p-2}u^\varepsilon_m$ est borné dans $L^\infty\left(0,T;L^q(\Omega^\varepsilon)^3\right)$, ceci implique que $|u^\varepsilon_m|^{p-2}u^\varepsilon_m\rightharpoonup\chi^\varepsilon$ dans $L^\infty\left(0,T;L^q(\Omega^\varepsilon)^3\right)$. Mais comme $u^\varepsilon_m\longrightarrow u^\varepsilon$ dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right)$, on trouve

$$|u^\varepsilon_m|^{p-2}u^\varepsilon_m\rightharpoonup\chi^\varepsilon=|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon \text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^q(\Omega^\varepsilon)^3\right). \tag{2.19}$$

Maintenant, soit j fixé, et $l>j$. Donc d'après (2.10), on a

$$\left(\rho\frac{\partial u^\varepsilon_l}{\partial t},w^\varepsilon_j\right)+a(u^\varepsilon_l,w^\varepsilon_j)+\alpha^\varepsilon\left(|u^\varepsilon_l|^{p-2}u^\varepsilon_l,w^\varepsilon_j\right)+j_q(u^\varepsilon_l,w^\varepsilon_j)=(f,w^\varepsilon_j),1\leq j\leq l. \tag{2.20}$$

D'autre part, de (2.18) et (2.19), il résulte

$$\left(|u_l^\varepsilon|^{p-2}u_l^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) \rightharpoonup \left(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$

$$\left(\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t}, w_j^\varepsilon\right) \rightharpoonup \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, w_j^\varepsilon\right) \text{ dans } L^\infty(0,T),$$

donc

$$a(u_l^\varepsilon, w_j^\varepsilon) \rightharpoonup a(u^\varepsilon, w_j^\varepsilon) \text{ dans } L^\infty(0,T).$$

Par conséquent, lorsque $l \longrightarrow \infty$ la formule (2.20) devient

$$\left(\rho\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, w_j^\varepsilon\right) + a(u^\varepsilon, w_j^\varepsilon) + \alpha^\varepsilon\left(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon, w_j^\varepsilon\right) + j_q(u^\varepsilon, w_j^\varepsilon) = (f^\varepsilon, w_j^\varepsilon),$$

pour tout $w_j^\varepsilon \in K_m^\varepsilon$ et tout $1 \leq j \leq m$.
Par densité de K_m^ε dans $K^\varepsilon \cap L^p(\Omega^\varepsilon)^3$, on conclut que

$$\left(\rho\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi\right) + a(u^\varepsilon, \varphi) + \alpha^\varepsilon\left(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon, \varphi\right) + j_q(u^\varepsilon, \varphi) = (f^\varepsilon, \varphi),\ \forall\varphi \in K^\varepsilon. \tag{2.21}$$

Ainsi, u^ε satisfait (2.1)-(2.3).

B) L'unicité de la solution.

Soient $u^{\varepsilon,1}$ et $u^{\varepsilon,2}$ deux solutions du problème (2.6). On a

$$\left(\rho\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}, \varphi\right) + a(u^{\varepsilon,1}, \varphi) + \alpha^\varepsilon\left(|u^{\varepsilon,1}|^{p-2}u^{\varepsilon,1}, \varphi\right) + j_q^\varepsilon(u^{\varepsilon,1}, \varphi) = (f^\varepsilon, \varphi), \forall\varphi \in K^\varepsilon, \tag{2.22}$$

et

$$\left(\rho\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}, \varphi\right) + a(u^{\varepsilon,2}, \varphi) + \alpha^\varepsilon\left(|u^{\varepsilon,2}|^{p-2}u^{\varepsilon,2}, \varphi\right) + j_q^\varepsilon(u^{\varepsilon,2}, \varphi) = (f^\varepsilon, \varphi), \forall\varphi \in K^\varepsilon, \tag{2.23}$$

En choisit $\varphi = u^{\varepsilon,2} - u^{\varepsilon,1}$ dans (2.22) et $\varphi = u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}$ dans (2.23), puis en sommant les deux équations, il vient que

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial(u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2})}{\partial t}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) &+ a\left(u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) \\ &+\alpha^\varepsilon\left(|u^{\varepsilon,1}|^{p-2}u^{\varepsilon,1} - |u^{\varepsilon,2}|^{p-2}u^{\varepsilon,2}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) \\ &+j_q^\varepsilon\left(u^{\varepsilon,1}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) - j_q^\varepsilon\left(u^{\varepsilon,2}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$\left(|u^{\varepsilon,1}|^{p-2}u^{\varepsilon,1} - |u^{\varepsilon,2}|^{p-2}u^{\varepsilon,2}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) \geq 0,$$

et

$$j_q^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon,1}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) - j_q^{\varepsilon}\left(u^{\varepsilon,2}, u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right) \geq 0,$$

on conclut que

$$\rho\frac{d}{dt}\left\|u^{\varepsilon,1}(t) - u^{\varepsilon,2}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K\left\|u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \leq 0. \tag{2.24}$$

Maintenant, par l'intégration de (2.24) sur $]0,t[$, on obtient

$$\left\|u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \int_0^t \left\|u^{\varepsilon,1}(s) - u^{\varepsilon,2}(s)\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} ds \leq 0.$$

D'où $u^{\varepsilon,1} = u^{\varepsilon,2}$ ce qui achève la démonstration. □

2.3 Changement du domaine et estimations à priori

Notre domaine Ω^ε est variable en ε, donc pour étudier l'analyse asymptotique du problème on va d'abord transformer le domaine Ω^ε en un domaine fixe Ω. Pour cela, nous utiliserons la technique de changement d'échelle

$$z = \frac{x_3}{\varepsilon}.$$

Donc le domaine fixe Ω est défini par

$$\Omega = \{(x', z) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, 0 < z < h(x')\}.$$

On note $\Gamma = \bar{\omega} \cup \bar{\Gamma}_L \cup \bar{\Gamma}_1$, sa frontière.

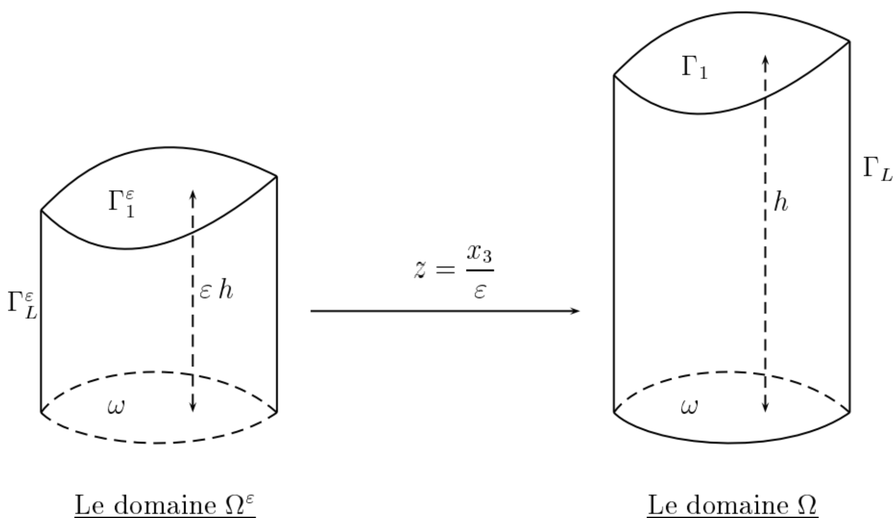

FIGURE 2.2 – Passage de Ω^ε à Ω.

Nous définissons sur Ω des nouveaux inconnues

$$\begin{cases} \hat{u}_1^\varepsilon(x', z, t) = u_1^\varepsilon(x', x_3, t), \\ \hat{u}_2^\varepsilon(x', z, t) = u_2^\varepsilon(x', x_3, t), \\ \hat{u}_3^\varepsilon(x', z, t) = \varepsilon^{-1} u_3^\varepsilon(x, x_3, t), \end{cases}$$

pour les données du problème, on suppose qu'elles dépendent de ε de la manière suivante

$$\begin{cases} \hat{f}_i(x', z, t) = \varepsilon^2 f_i^\varepsilon(x, x_3, t), i = 1, 2, 3, \\ \hat{k} = \varepsilon k^\varepsilon, \hat{\alpha} = \varepsilon^2 \alpha^\varepsilon, \end{cases}$$

avec $\hat{f}_i, i = 1,2,3$, $\hat{k}$ et $\hat{\alpha}$ indépendants de ε.
De plus, nous définissons des espaces des fonctions sur Ω

$$K = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L \text{ et } \varphi.n = 0 \text{ sur } \omega\}, \tag{2.25}$$

$$\Pi(K) = \{\varphi \in H^1(\Omega)^2 : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}, \tag{2.26}$$

$$V_z = \left\{ v \in L^2(\Omega)^2 : \frac{\partial v}{\partial z} \in L^2(\Omega)^2, \;\; v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}, \tag{2.27}$$

V_z est un espace de Banach, muni de la norme

$$\|v\|_{V_z} = \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En multipliant (2.6) par ε, et en passant au domaine fixe Ω on montre que le problème (PK^ε) est équivalent au problème (PK) donné par

$$(PK) \begin{cases} \text{Trouve } \hat{u}^\varepsilon \in K, \text{ tel que} \\ \varepsilon^2 \rho \sum\limits_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_i \right) + \varepsilon^4 \rho \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_3 \right) + \hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}) + \hat{\alpha} \sum\limits_{i=1}^{2} \left(|\hat{u}_i^\varepsilon|^{p-2} \hat{u}_i^\varepsilon, \hat{\varphi}_i \right) \\ + \hat{\alpha} \varepsilon^2 (|\hat{u}_3^\varepsilon|^{p-2} \hat{u}_3^\varepsilon, \hat{\varphi}_3) + \hat{J}_q\left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}\right) \\ = \sum\limits_{i=1}^{3} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 \right), \forall \hat{\varphi} \in K, \\ \hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{\vartheta}_0, \end{cases} \tag{2.28}$$

où

$$\hat{J}_q(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}) = \sum_{i=1}^{2} \int_\omega \hat{k}.|\hat{u}^\varepsilon|^{q-2} \hat{u}_i^\varepsilon \hat{\varphi}_i dx',$$

et

$$\hat{a}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}) = \mu \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz$$

$$+ \mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_i} \right) dx' dz$$

$$+ 2\mu \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial z} dx' dz + \lambda \varepsilon^2 \int_\Omega div(\hat{u}^\varepsilon).div(\hat{\varphi}) dx dz.$$

Nous essayons maintenant à chercher des estimations à priori sur $\hat{u}^\varepsilon$. Pour cela nous avons besoin d'établir les lemmes suivants

Lemme 2.3.1 ***(Inégalité de Poincaré)*** *Rappelons que $0 < h(x') < \bar{h}, \forall x' \in \omega$. On a l'inégalité suivante*

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

Preuve. Pour tout $0 < z < h(x') < \bar{h}$, on a

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x', \zeta, t) d\zeta + \hat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t), \quad i = 1, 2.$$

et puisque $\hat{u}_i^\varepsilon(x', h(x'), t) = 0, i = 1, 2$ sur Γ_1, il revient

$$\hat{u}_i^\varepsilon(x', z, t) = -\int_z^{h(x')} \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x', \zeta, t) d\zeta, \quad i = 1, 2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$|\hat{u}_i^\varepsilon(x', z.t)|^2 \leq \bar{h} \int_z^{h(x')} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x', \zeta, t) \right|^2 d\zeta, \quad i = 1, 2,$$

et par intégration en z de 0 à $h(x)$, on obtient

$$\int_0^{h(x)} |\hat{u}_i^\varepsilon(x', \zeta, t)|^2 d\zeta \leq \bar{h}^2 \int_0^{h(x')} \left| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial \zeta}(x', \zeta, t) \right|^2 d\zeta, \quad i = 1, 2,$$

en intégrant cette fois sur ω, on trouve

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad i = 1, 2.$$

□

Lemme 2.3.2 ***(Inégalité de Korn)*** *Pour tout $\varphi \in K^\varepsilon$, on a*

$$C_K \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \leq \|d(\varphi)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}, \tag{2.29}$$

où C_K est une constante positive ne dépend ni de ε ni de φ.

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses suivantes*

$$f^\varepsilon, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \in L^2\left(0, T, L^2(\Omega^\varepsilon)^3\right), \vartheta_0 \in H^1(\Omega^\varepsilon)^3 \cap L^{2(p-1)}(\Omega^\varepsilon)^3,$$

il existe une constante c indépendante de ε telle que

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\| \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\hat{u}_i^\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega)} \right) \tag{2.30}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\varepsilon\hat{u}_3^\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}^p\leq c,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \tag{2.31}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq c.$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (2.6), on prend $\varphi=\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$, donc

$$\rho\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+\alpha^\varepsilon\left(|u^\varepsilon|^{p-2}u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+j_q^\varepsilon\left(u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)=\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),$$

d'où

$$\rho\left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)^\varepsilon)^3}^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[a(u^\varepsilon,u^\varepsilon)+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|u^\varepsilon\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p+\frac{1}{q}\|(k^\varepsilon)^{\frac{1}{q}}u^\varepsilon\|_{L^q(\omega)^3}^q\right]=\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right).$$

Par intégration sur $]0,t[$ nous avons

$$\rho\int_0^t\left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}^2ds+a(u^\varepsilon,u^\varepsilon)+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|\vartheta_0\|_{L^p(\Omega)^3}^p+\frac{k_*^\varepsilon}{q}\|u^\varepsilon\|_{L^q(\omega)^2}^q$$

$$\leq(2\mu+3\lambda)\|\nabla\vartheta_0\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{2\times2}}^2+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|\vartheta_0\|_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}^p+\frac{k_{**}^\varepsilon}{q}\|\vartheta_0\|_{L^p(\omega)^2}^q+2\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right)ds,$$

comme

$$2\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right)ds=2(f^\varepsilon,u^\varepsilon)-2(f^\varepsilon(0),\vartheta_0)-2\int_0^t\left(\frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t},u^\varepsilon(s)\right)ds,$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\leq\varepsilon\bar{h}\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}},$$

et l'inégalité de Young

$$ab\leq\eta^2\frac{a^2}{2}+\eta^{-2}\frac{b^2}{2},\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\forall\eta,$$

on obtient

$$\left|2\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right)ds\right| \tag{2.32}$$

$$\leq\mu C_K\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}^2+\frac{4\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu C_K}\|f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2+4\varepsilon^2\bar{h}^2\|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2$$

$$+\|\nabla\vartheta_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\mu C_K\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}ds+\frac{4(\varepsilon\bar{h})^2}{\mu C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}ds.$$

De (2.32) et de l'inégalité de Korn (2.29) on obtient l'existence d' une constante $C_K>0$ indépendante de ε telle que

$$\mu C_K\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|u^\varepsilon(s)\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3} \tag{2.33}$$

$$\leq\mu C_K\int_0^t\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}ds+(1+2\mu+3\lambda)\|\nabla\vartheta_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\|\vartheta_0\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\frac{k^\varepsilon_{**}}{q}\|\vartheta_0\|^q_{L^q(\omega)^2}$$

$$+\frac{4\varepsilon^2\bar{h}^2}{\mu C_K}\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^2}+4\varepsilon^2\bar{h}^2\|f^\varepsilon(0)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\frac{4(\varepsilon\bar{h}^2)}{\mu C_K}\int_0^t\left\|\frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds.$$

En multipliant (2.33) par ε et en utilisant l'égalité

$$\varepsilon^2\|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}=\varepsilon^{-1}\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)^3},$$

on obtient

$$\mu C_K\varepsilon\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}+\frac{\alpha^\varepsilon}{p}\varepsilon\|u^\varepsilon(s)\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}\leq\mu C_K\int_0^t\varepsilon\|\nabla u^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}ds+A,$$

où A est une constante ne dépend pas de ε avec

$$A=(1+2\mu+3\lambda)\|\nabla\hat{\vartheta}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times3}}+\frac{\hat{\alpha}}{p}\|\hat{\vartheta}_0\|^p_{L^p(\Omega)^3}+\frac{\hat{k}_{**}}{q}\|\vartheta_0\|^q_{L^q(\omega)^3}$$

$$+4\bar{h}^2\|\hat{f}(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3}+\frac{4\hat{h}^2}{\mu C_K}\|\hat{f}\|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega)^3)}+\frac{4\bar{h}^2}{\mu C_k}\left\|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3))}.$$

En utilisant maintenant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon}\|u^\varepsilon\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)^3}+\varepsilon\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}\leq c.$$

Donc l'estimation (2.30) est démontrée.

Pour montrer l'estimation a priori (2.31), on dérive (2.21) par rapport t, puis on prend $\varphi=\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$, on trouve

$$\left(\rho\frac{\partial^2u^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+(p-1)\,\alpha^\varepsilon\left(|u^\varepsilon|^{p-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)$$

$$+(q-1)\int_\omega k^\varepsilon|u^\varepsilon|^{q-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}.\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dx'$$

$$= \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right),$$

comme $\int_\omega k^\varepsilon |u^\varepsilon|^{q-2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} . \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} dx' \geq 0$ et $\left(|u^\varepsilon|^{p-2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right) \geq 0$, on obtient

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + a\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right) \leq \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} \right).$$

En intégrant sur $]0, t[$ et utilisant l'inégalité de Korn (2.29), on trouve

$$\rho \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}$$

$$= \rho \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2 \int_0^t \left(\frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t}, \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right) ds,$$

d'où l'on déduit

$$\rho \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \tag{2.34}$$

$$\leq \rho \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + \mu C_K \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}$$

$$+4 \frac{(\varepsilon \bar{h})^2}{\mu C_K} \int_0^t \left\| \frac{\partial f^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \mu C_K \int_0^t \left\| \nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} ds.$$

Maintenant, il faut estimer $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0)$. D'après l'équation (2.21), on déduit que

$$\left(\rho \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0), \varphi \right) = (f^\varepsilon(0), \varphi) - a(\vartheta_0, \varphi) - \alpha^\varepsilon \left(|\vartheta_0|^{p-2} \vartheta_0, \varphi \right) - j^\varepsilon_q(\vartheta_0, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon,$$

donc

$$| \left(\rho \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0), \varphi \right) | \leq \varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\mu + 3\lambda) \|\vartheta_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}$$

$$+\alpha^\varepsilon \left(\int_{\Omega^\varepsilon} |\vartheta_0|^{2(p-1)} dx' dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \sqrt{k^\varepsilon_{**}} \left(\int_\omega |(\vartheta_0)_\tau|^{2(q-1)} dx' \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\omega)^2}$$

$$\leq \left(\varepsilon \bar{h} \|f^\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + (2\mu + 3\lambda) \|\vartheta_0\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} \right) \|\varphi\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}$$

$$+ \frac{\hat{\alpha} \bar{h}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\int_\Omega |\vartheta_0|^{2(p-1)} dx' dz \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \sqrt{k^\varepsilon_{**}} \left(\int_\omega |(\vartheta_0)_\tau|^{2(q-1)} dx' \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\omega)^2},$$

multipliant cette dernière inégalité par $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient

$$\sqrt{\varepsilon} \| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0) \|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq C'.$$

où

$$C' = \bar{h}\|\hat{f}(0)\|_{L^2(\Omega)^3} + (2\mu+3\lambda)\|\hat{\vartheta}_0\|_{H^1(\Omega)^3}$$
$$+\hat{\alpha}\bar{h}\left(\int_\Omega |\vartheta_0|^{2(p-1)}dx'dz\right)^{\frac{1}{2}} + \bar{h}c(\Omega)\sqrt{\hat{k}_{**}}\left(\int_\omega |(\vartheta_0)_\tau|^{2(q-1)}dx'\right)^{\frac{1}{2}},$$

en multipliant maintenant (2.34) par ε, on obtient

$$\rho\varepsilon\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K\int_0^t \varepsilon\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}} ds \le B,$$

où B est une constante ne dépend pas de ε

$$B = (C')^2 + \frac{4\bar{h}^2}{\mu C_K}\left\|\frac{\partial\hat{f}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)}.$$

Donc l'estimation (2.31) est démontré. □

2.4 Résultats de convergence et problème limite

Nous avons établi dans la section précédente des estimations a priori sur la solution du problème (2.28). La question qui se pose naturellement est de savoir quel sera le comportement asymptotique du membrane élastique lorsque l'épaisseur est très faible ? Mathématiquement, cela revient à savoir si le champ de déplacement $\hat{u}^\varepsilon$ admette une limite quand ε tend vers zéro et quel est le problème vérifié par cette limite ? Dans cette section, nous allons essayer de répondre à ces questions.

Lemme 2.4.1 *Sous les hypothèse du Théorème 2.3.1, il existe $u_i^* \in L^2(0,T,V_z)\cap L^2(0,T,L^p(\Omega)), i = 1,2$ tel que pour toute sous suite de $\hat{u}^\varepsilon$ notée encore $\hat{u}^\varepsilon$, on a les résultats de convergences suivants*

$$\hat{u}^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*, i=1,2, \ \ dans\ L^2(0,T,V_z)\cap L^2(0,T,L^p(\Omega)), \tag{2.35}$$
$$\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^*}{\partial t}, i=1,2, \ \ dans\ L^2(0,T,V_z),$$
$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0; \varepsilon\frac{\partial^2\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j\partial t} \rightharpoonup 0,\ i,j=1,2, \ \ dans\ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{2.36}$$
$$\varepsilon\frac{\partial\hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, i=1,2, \ \ dans\ L^2(0,T,L^2(\Omega)), \tag{2.37}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, i = 1, 2, \ \ dans\ L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{2.38}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \ \ dans\ L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{2.39}$$

$$\hat{u}_i^\varepsilon \longrightarrow u_i^*, i = 1, 2, \ \ dans\ L^2(0, T, L^2(\Omega)), \tag{2.40}$$

$$|\hat{u}_i^\varepsilon|^{p-2}\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup |u_i^*|^{p-2}u_i^*, i = 1, 2\ \ dans\ L^2(0, T, L^q(\Omega)). \tag{2.41}$$

Preuve. Selon le Théorème 2.3.1, il existe une constante c indépendante de ε telle que

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c, i = 1, 2.$$

Utilisant cette estimation et l'inégalité de Poincaré

$$\|\hat{u}_i^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \bar{h} \left\| \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, i = 1, 2,$$

on déduit que la suite $\hat{u}_i^\varepsilon$ est borné dans $L^2(0, T, V_z) \cap L^2(0, T, L^p(\Omega))$, d'oú le résultat de convergence faible. De même d'après (2.31) et l'inégalité de Poincaré pour $\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}$, on déduit que $\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $L^2(0, T, V_z)$ et par suite converge vers une limite v, et comme $\hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*$, donc $v = \frac{\partial u_i^*}{\partial t}$. Pour (2.36)-(2.39), d'après (2.30), (2.31) et (2.35).
On a les suite $\hat{u}_i^\varepsilon, \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, i = 1, 2$ sont bornées dans $L^2(0, T, V_z)$, donc d'après le lemme de compacité de Lions [16], on peut déduire

$$\hat{u}_i^\varepsilon \longrightarrow u_i^* \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3), i = 1, 2.$$

D'autre part, nous avons

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \left| |\hat{u}_i^\varepsilon|^{p-2}\hat{u}_i^\varepsilon \right|^q dx = \int_{\Omega^\varepsilon} |\hat{u}_i^\varepsilon|^p dx \leq C, i = 1, 2.$$

Donc $|\hat{u}_i^\varepsilon|^{p-2}\hat{u}_i^\varepsilon$ est borné dans $L^2(0, T; L^q(\Omega^\varepsilon)^3)$. Comme $\hat{u}_i^\varepsilon \overset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u_i^*$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, d'où (2.41). □

Théorème 2.4.1 *Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, la limite (u_1^*, u_2^*) vérifie la formulation variationnelle*

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dxdz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |u_i^*|^{p-2} u_i^* . \hat{\varphi}_i dxdz + \hat{J}_q(u^*, \hat{\varphi}) \tag{2.42}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i.\hat{\varphi}_i dx, \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K),$$

aussi (u_1^*, u_2^*) *satisfait le problème suivante*

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}(t) + \hat{\alpha}|u_i^*|^{p-2}u_i^*(t) = \hat{f}_i(t), \quad i = 1,2 \ \textit{dans} \ L^2(\Omega), \tag{2.43}$$

Preuve. Rappelons que la formulation variationnelle (2.28) s'écrit sous la forme

$$\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_i \right) + \varepsilon^4 \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_3 \right) + \hat{a}\left(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}\right) + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \left(|\hat{u}_i^\varepsilon|^{p-2}\hat{u}_i^\varepsilon, \hat{\varphi}_i \right)$$

$$+\hat{\alpha}\varepsilon^2 \left(|\hat{u}_3^\varepsilon|^{p-2}\hat{u}_3^\varepsilon, \hat{\varphi}_3 \right) + \hat{j}(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi})$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i \right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3 \right), \forall \hat{\varphi} \in K.$$

En faisant tendre ε vers zéro, et on utilisant les résultats de convergence du Lemme 2.4.1 on obtient

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z}.\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} |u_i^*|^{p-2}u_i^*, \hat{\varphi}_i dx'dz + \hat{J}_q(u^*, \hat{\varphi})$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i.\hat{\varphi}_i dx'dz.$$

Nous choisissons maintenant dans cette formulation variationnelle

$$\hat{\varphi}_i \in H_0^1(\Omega), i = 1, 2,$$

donc

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial z}\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx, dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} |u_i^*|^{p-2}u_i^*.\hat{\varphi}_i dxdz = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \hat{f}_i\hat{\varphi}_i dxdz.$$

Utilisant maintenant la formule de Green, puis en choisissant $\hat{\varphi}_1 \in H_0^1(\Omega)$ et $\hat{\varphi}_2 = 0$, puis $\hat{\varphi}_2 \in H_0^1(\Omega)$ et $\hat{\varphi}_1 = 0$, on obtient

$$-\int_{\Omega} \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial z} \right) \hat{\varphi}_i dx'dz + \hat{\alpha} \int_{\Omega} |u_i^*|^{p-2}u_i^*.\hat{\varphi}_i dx'dz + \int_{\Omega} \hat{f}_i\hat{\varphi}_i dx'dz, \forall \hat{\varphi}_i \in H_0^1(\Omega), i = 1, 2.$$

Par conséquent

$$-\mu \frac{\partial^2 u_i^*(t)}{\partial z^2} + \hat{\alpha}|u_i^*(t)|^{p-2}u_i^*(t) = \hat{f}_i(t), i = 1,2 \ \text{ dans } \ H^{-1}(\Omega), \forall t \in]0, T[, \tag{2.44}$$

et comme $\left(\hat{f}_i \in L^2(\Omega), i = 1, 2 \right)$ alors (2.43) est vrais dans $L^2(\Omega)$). $\square$

Théorème 2.4.2 *Soit*

$$\tau_i^*(x,t) = \frac{\partial u_i^*}{\partial z}(x,0,t) \quad et \quad s_i^*(x,t) = u_i^*(x,0,t),$$

les traces du déplacement $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ sur ω. Sous les mêmes hypothèses du Théorème 2.4.1, τ^* et s^* vérifient l'inégalité suivante

$$\int_\omega \left(\hat{k}|s^*|^{q-2}s^* - \mu\tau^*\right)\hat{\varphi}dx' \geq 0, \forall \hat{\varphi} \in L^2(\omega)^2, \tag{2.45}$$

et la condition du frottement de la loi de puissance

$$\mu\tau^* = \hat{k}|s^*|^{q-2}s^*, \ p.p \ dans \ \omega \times]0,T[\,,$$

aussi (u^*, s^*) vérifient la formulation faible

$$\int_\omega \left(\tilde{F} - \frac{h}{2}s^* + \int_0^h u^*(x,z,t)dz + \tilde{U}\right)\nabla\hat{\varphi}(x')dx' = 0, \forall \hat{\varphi} \in H^1(\omega), \tag{2.46}$$

où

$$\tilde{F}(x,h,t) = \frac{1}{\mu}\int_0^h F(x,h,t)dz - \frac{h}{2\mu}F(x,h,t), \ \ \tilde{U}(x,h,t) = -\frac{\hat{\alpha}}{\mu}\int_0^h U(x,z,t)dz + \frac{\hat{\alpha}h}{2\mu}U(x,h,t),$$

$$F(x,z,t) = \int_0^z \int_0^\zeta \hat{f}(x,\eta,t)d\eta d\zeta, \ \ U(x,z,t) = \int_0^z \int_0^\zeta |u^*|^{p-2}u^*(x,\eta,t)d\eta d\zeta.$$

Preuve. D'après la formulation variationnelle (2.42), on a pour tout $\hat{\varphi} \in \Pi(K)$

$$\mu\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z}.\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}dx'dz + \hat{\alpha}\sum_{i=1}^2 \int_\Omega |u_i^*|^{p-2}u_i^*.\hat{\varphi}_i dx'dz + \hat{J}_q(u^*, \hat{\varphi})$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \hat{f}_i\hat{\varphi}_i dx'dz,$$

et comme $n = (0,0,-1)$ sur ω, en utilisant la formule de Green, il vient que

$$-\mu\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}\hat{\varphi}_i dx'dz + \hat{\alpha}\sum_{i=1}^2 \int_\Omega |u_i^*|^{p-2}u_I^*.\hat{\varphi}_i dx, dz - \int_\omega \mu\tau^*\hat{\varphi}_i dx' + \int_\omega \hat{k}|s^*|^{q-2}s^*\hat{\varphi}_\tau dx'$$

$$= \sum_{i=1}^2 \int_\Omega \hat{f}_i\hat{\varphi}dx'dz.$$

De (2.43), on obtient

$$-\int_\omega \mu\tau^*\hat{\varphi}dx' + \int_\omega \hat{k}|s^*|^{q-2}s^*\hat{\varphi}dx' = 0,\ \ \hat{\varphi}\in\mathcal{D}(\omega)^2. \tag{2.47}$$

Donc par la densité de $\mathcal{D}(\omega)^2$ dans $L^2(\omega)^2$ on déduit (2.45). D'après (2.47), nous obtenons

$$\mu\tau^* = \hat{k}|s^*|^{q-2}s^*,\ \text{p.p sur } \omega\times\,]0,T[\,.$$

Pour démontrer (2.46) en intégrant deux fois l'équation (2.43) de 0 à z, on trouve

$$u^*(x',\eta,t) = s_i^* + z\tau_i^* + \frac{\hat{\alpha}}{\mu}\int_0^z\int_0^\zeta |u_i^*|^{p-2}u_i^*(x',\eta,t)d\eta d\zeta - \frac{1}{\mu}\int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)d\eta d\zeta, \tag{2.48}$$

en particulier pour $z=h(x)$, donc on a

$$s_i^* + h\tau_i^* = -\frac{\alpha}{\mu}\int_0^h\int_0^\zeta |u_i^*|^{p-2}u^*(x,\eta,t)d\eta d\zeta + \frac{1}{\mu}\int_0^h\int_0^\zeta f_i(x,\eta,t)d\eta d\zeta. \tag{2.49}$$

Intégrant (2.48) entre 0 et h, on obtient

$$\int_0^h u_i^*(x',z,t)dz = hs_i^* + \frac{1}{2}h^2\tau_i^* + \frac{\hat{\alpha}}{\mu}\int_0^h\int_0^z\int_0^\zeta |u_i^*|^{p-2}u_i^*(x',\eta,t)d\eta d\zeta dz \tag{2.50}$$

$$-\frac{1}{\mu}\int_0^h\int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)d\eta d\zeta dz.$$

De (2.49) et (2.50), nous déduisons

$$\int_0^h u_i^*(x',z,t)dz - \frac{h}{2}s^* + F_i + U_i = 0,$$

avec

$$\tilde{F}_i(x',h,t) = \frac{1}{\mu}\int_0^h F_i(x',z,t)dz - \frac{h}{2\mu}F_i(x',h,t),$$

$$F_i(x',z,t) = \int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)d\eta d\zeta,$$

$$\tilde{U}_i(x',h,t) = -\frac{\hat{\alpha}}{\mu}\int_0^h U_i(x',z,t)dz + \frac{\hat{\alpha}h}{2\mu}U_i(x',h,t),$$

$$U_i(x',z,t) = \int_0^z\int_0^\zeta |u_i^*|^{p-2}u_i^*(x',\eta,t)d\eta d\zeta.$$

Donc, on obtient la formulation faible

$$\int_\omega \left(\int_0^h u^*(x',z,t)dz - \frac{h}{2}s^* + \tilde{F} + \tilde{U}\right)\nabla\varphi(x')dx' = 0.$$

$\square$

Théorème 2.4.3 *La solution* (u_1^*, u_2^*) *du problème limite* (2.42) *et* (2.43) *est unique dans* $L^2(0, T, V_z) \cap L^2(0, T, L^p(\Omega)^2)$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux solution u_1^* et u_1^{**} de la formulation variationnelle (2.42), donc on a

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |u_i^*|^{p-2} u_i^* . \hat{\varphi}_i dx' dz + \hat{J}_q(u^*, \hat{\varphi}) \tag{2.51}$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i . \hat{\varphi} dx' dz,$$

et

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^{**}}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz + \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |u_i^{**}|^{p-2} u_i^{**} . \hat{\varphi}_i dx' dz + \hat{J}_q(u^*, \hat{\varphi}) \tag{2.52}$$
$$= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i . \hat{\varphi} dx' dz.$$

On prend $\hat{\varphi} = u_i^{**} - u_i^*$ dans (2.51), puis $\hat{\varphi} = u_i^* - u_i^{**}$ dans (2.52) et en sommant les deux équation, on obtient

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega |\frac{\partial (u_i^* - u_i^{**}}{\partial z})|^2 dx' dz$$
$$+ \hat{\alpha} \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \left(|u_i^*|^{p-2} u_i^* - |u_i^{**}|^{p-2} u_i^{**} \right) . (u_i^* - u_i^{**}) dx' dz$$
$$+ \hat{J}_q(u^*, u^* - u^{**}) - \hat{J}_q(u^{**}, u^* - u^{**})$$
$$= 0.$$

D'autre part, on a

$$\left(|u_i^*|^{p-2} u_i^* - |u_i^{**}|^{p-2} u_i^{**} \right) . (u_i^* - u_i^{**}) \geq 0,$$

et

$$\hat{J}_q(u^*, u^* - u^{**}) - \hat{J}_q(u^{**}, u^* - u^{**}) \geq 0,$$

donc, en posant $\bar{W}(t) = u^*(t) - u^{**}(t)$, on aura

$$\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \|_{L^2(\Omega)^2}^2 = 0.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on déduit que

$$\|\bar{W}\|_{L^2(0,T,V_z)} = 0.$$

□

Chapitre 3

Analyse asymptotique du problème viscoélastique avec terme dissipatif non linéaire

Résumé. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'analyse asymptotique d'un problème viscoélastique avec un terme dissipatif $\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, r \geqslant 2$; dans un domaine mince tridimensionnel Ω^ε. Les conditions aux limites utilisées sont la condition de Dirichlet sur la frontière latéral et la frontière supérieure et la condition de frottement de Fourier sur la frontière inférieure. Nous étudions le comportement asymptotique de ce problème quand une dimension du domaine tend vers zéro.

Contenu

3.1 Formulation mécanique du problème

Dans ce chapitre Ω^ε désignera le même domaine mince considéré dans le deuxième chapitre

$$\Omega^\varepsilon = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \omega, 0 < x_3 < \varepsilon h(x')\}.$$

Nous rappelons que Γ^ε est sa frontière, avec

- ω : la frontière inférieure du domaine.
- Γ_L^ε : la frontière latérale.
- Γ_1^ε : la frontière supérieur du domaine

Nous considérons un corps viscoélastique qui occupe dans un film mince $\Omega^\varepsilon \subset \mathbb{R}^3$. Soit $T > 0$, nous étudions dans l'intervalle de temps $]0, T[$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces volumiques f^ε. Supposons que le corps visqueux est homogène, isotrope et satisfait la loi de comportement suivante

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = 2\mu d_{ij}(u^\varepsilon) + 2\lambda d_{ij}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right), 1 \leq i, j \leq 3,$$

où μ le coefficient de Lamé, λ est le coefficient de viscosité, $u^\varepsilon(x,t) = (u_1^\varepsilon(x,t), u_2^\varepsilon(x,t), u_3^\varepsilon(x,t))$ le champ de déplacement du corps viscoélastique au point x au temps $t \in]0, T[$ et $d_{ij}(u^\varepsilon), 1 \leq i, j \leq 3$ le tenseur des taux de déformation donné par

$$d_{ij}(u^\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i}\right), 1 \leq i, j \leq 3.$$

Soit $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal unitaire extérieur à Γ^ε et $n = (0, 0, -1)$ le vecteur normale unitaire extérieure à ω. Pour un vecteur u^ε nous définissons les composantes normales et tangentiels par

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon.n, \quad u_\tau^\varepsilon = u^\varepsilon - u_n^\varepsilon.n \ .$$

Pour les composantes normales et tangentielles du tenseur des contraintes la définition est comme suit

$$\sigma_n^\varepsilon = (\sigma_n^\varepsilon).n, \quad \sigma_\tau^\varepsilon = \sigma^\varepsilon.n - (\sigma_n^\varepsilon).n.$$

Le problème complet consiste donc à trouver le champ de déplacement $u^\varepsilon : \Omega^\varepsilon \times]0, T[\to \mathbb{R}^3$ qui vérifie les équations et les conditions aux limites suivantes

$$\rho\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - div\,(\sigma^\varepsilon(u^\varepsilon)) + \beta\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = f^\varepsilon, \quad \text{dans} \quad \Omega^\varepsilon \times]0, T[, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij}^{\varepsilon}(u^{\varepsilon}) = 2\mu d_{ij}(u^{\varepsilon}) + 2\lambda d_{ij}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right), \; i,j = 1,2,3 \;\text{ dans }\; \Omega^{\varepsilon}\times]0,T[, \tag{3.2}$$

$$u^{\varepsilon} = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_1^{\varepsilon}\times]0,T[, \tag{3.3}$$

$$u^{\varepsilon} = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_L^{\varepsilon}\times]0,T[, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}.n = 0 \;\text{ sur }\; \omega\times]0,T[, \tag{3.5}$$

$$\sigma_{\tau}^{\varepsilon} = k^{\varepsilon}(x')\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right)_{\tau} \;\text{ sur }\; \omega\times]0,T[, \tag{3.6}$$

$$u^{\varepsilon}(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \forall x \in \Omega^{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Le problème (3.1)-(3.7) représente l'évolution dynamique des matériaux viscoélastique, où l'équation (3.1) représente les déformation d'un corps viscoélastique avec un terme dissipatif dans le régime dynamique, ρ, β sont des constantes positives et f^{ε} représente une densité des forces extérieures. L'équation (3.2) représente la loi de comportement des matériaux viscoélastiques. (3.3)-(3.4) représente les conditions de Dirichlet pour le déplacement sur $\Gamma_1^{\varepsilon}\times]0,T[$ et $\Gamma_L^{\varepsilon}\times]0,T[$. (3.6) représente condition au limite de Fourier sur $\omega\times]0,T[$, où $k^{\varepsilon} : \omega \to \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée. (3.7) représente les conditions initiales du champ de déplacement u_0 et le champ de vitesse u_1.

3.2 Problème variationnel

Pour donner la formulation variationnelle du problème (3.1)-(3.7) considéré, nous définissons le convexe fermé non vide de $H^1(\Omega^{\varepsilon})^3$

$$K^{\varepsilon} = \{v \in H^1(\Omega^{\varepsilon})^3 : v = 0 \text{ on } \Gamma_1^{\varepsilon} \cup \Gamma_L^{\varepsilon}, v.n = 0 \text{ on } \omega\}.$$

En multipliant l'équation (3.1) par φ, où $\varphi \in K^{\varepsilon}$ et par intégration sur Ω^{ε}, en utilisant la formule de Green on obtient le problème variationnel suivant

Problème P(Ω^{ε}). Trouver $u^{\varepsilon} \in K^{\varepsilon}$ où $\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t} \in K^{\varepsilon}$, $\forall t \in [0,T]$, telle que

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}, \varphi\right) + a_{\mu}(u^{\varepsilon}, \varphi) + a_{\lambda}\left(\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}, \varphi\right) + \beta\left(\left|\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}, \varphi\right) \tag{3.8}$$

$$+ \int_{\omega} k^{\varepsilon}\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\varphi dx'$$

$$= (f^{\varepsilon}, \varphi), \quad \forall \varphi \in K^{\varepsilon},$$

$$u^{\varepsilon}(x,0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}(x,0)=u_1(x).$$

Où

$$a_{\vartheta}(u,v)=2\vartheta\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}d_{ij}(u)d_{ij}(v)dx,\vartheta\in\mathbb{R}_{+}^{*},\ \forall v\in H^1(\Omega^{\varepsilon})^3,$$

et

$$(f,v)=\sum_{i=1}^{3}\int_{\Omega^{\varepsilon}}f_iv_idx,\forall v\in H^1(\Omega^{\varepsilon})^3.$$

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses*

$$\begin{gathered} f^{\varepsilon},\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial t}\in L^2\left(0,T,L^2\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^3\right), \\ u_0\in K^{\varepsilon}\cap H^2(\Omega^{\varepsilon})^3,\ u_1\in K^{\varepsilon}\cap H^2(\Omega^{\varepsilon})^3, \\ k^{\varepsilon}\in L^{\infty}\left(\omega\right),\ tel\ que\ k^{\varepsilon}\left(x'\right)>0, \end{gathered}\tag{3.9}$$

il existe une solution unique u^{ε} de (3.8)*, telle que*

$$u^{\varepsilon}\in L^{\infty}\left(0,T,H^1(\Omega^{\varepsilon})^3\right),$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial t}\in L^2\left(0,T,H^1(\Omega^{\varepsilon})^3\right)\cap L^r\left(0,T,L^r\left(\Omega^{\varepsilon}\right)^3\right),$$
$$\frac{\partial^2 u^{\varepsilon}}{\partial t^2}\in L^2\left(0,T,L^2(\Omega^{\varepsilon})^3\right)\cap L^2\left(0,T,H^1(\Omega^{\varepsilon})^3\right).$$

Preuve. Pour prouver ce Théorème, nous utilisons la méthode de Faedo-Galerkin, comme dans le deuxième chapitre.

A) L'existence.

Etape 1 : Solution approchée.

On introduit une suite (w_n^{ε}) de fonctions ayant les propriétés suivantes :

⊛ $\forall j$; $w_j^{\varepsilon}\in H^1(\Omega^{\varepsilon})^3$,

⊛ La famille $\{w_1^{\varepsilon},w_2^{\varepsilon},w_3^{\varepsilon},....w_m^{\varepsilon}\}$ est linéairement indépendante,

⊛ L'espace $K_m^{\varepsilon}=$ vect $\{w_1^{\varepsilon},w_2^{\varepsilon},w_3^{\varepsilon},....w_m^{\varepsilon}\}$ engendré par la famille $\{w_1^{\varepsilon},w_2^{\varepsilon},w_3^{\varepsilon},....,w_m^{\varepsilon}\}$ est dense dans K^{ε}.

Soit $u_m^{\varepsilon}=u_m^{\varepsilon}(t)$ une solution approchée du problème (3.1) $-$ (3.7) tel que

$$u_m^{\varepsilon}(t)=\sum_{j=1}^{m}\theta_{jm}(t)\,w_j^{\varepsilon},\ m=1,2,3...,$$

qui est vérifie le système d'équations

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2},w_j^\varepsilon\right)+a_\mu\left(u_m^\varepsilon,w_j^\varepsilon\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)+\beta\left(\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right) \tag{3.10}$$
$$+\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .w_j^\varepsilon dx'$$
$$=\left(f,w_j^\varepsilon\right),\ \ 1\leq j\leq m,$$

qui est un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires et sera complété par la condition initiale suivante

$$u_m^\varepsilon\left(x,0\right)=u_{0m}=\sum_{i=1}^m X_{jm}w_j^\varepsilon\to u_0\ \text{ quand }\ m\to\infty \text{ in } H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3,$$

$$\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\left(x,0\right)=u_{1m}=\sum_{i=1}^m \varsigma_{jm}w_j^\varepsilon\to u_1\ \text{ quand }\ m\to\infty \text{ in } H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3,$$

Comme la famille $\{w_1^\varepsilon,w_2^\varepsilon,...,w_m^\varepsilon\}$ est linéairement indépendante, le problème (3.10) possède au moins une solution u_m^ε dans l'intervalle $[0,t_m]$.

Etape 2 : Estimations à priori.

En multipliant l'équation (3.10) par $\theta'_{jm}\left(t\right)$ et en effectuant la sommation sur $j=1$ à m, on trouve

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)+a_\mu\left(u_m^\varepsilon,\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)+\beta\left(\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right) \tag{3.11}$$
$$+\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau dx'$$
$$=\left(f,\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right).$$

D'autre part, nous avons le terme $\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau dx'$ est positif, donc l'équation (3.11) devient

$$\rho\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon\left(t\right)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}^2+\frac{d}{dt}\mu\left\|d\left(u_m^\varepsilon\left(t\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}^2+2\lambda\left\|d\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon\left(t\right)}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}^2$$
$$+\beta\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon\left(t\right)}{\partial t}\right\|_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3}^r$$
$$\leq\int_{\Omega^\varepsilon}\left|f\left(x,t\right)\right|.\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon\left(x,t\right)}{\partial t}\right|dx.$$

En intégrant la dernière équation sur $]0,t[$ et en appliquant les inégalités de Hölder et Young, on déduit

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\mu\left\|d\left(u_m^\varepsilon(t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}+2\lambda\int_0^t\left\|d\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}ds \\
&+\beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3}ds \\
&\leq \mu\left\|u_{0m}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\frac{\rho}{2}\left\|u_{1m}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\frac{2}{\rho}\int_0^t\left\|f(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+\frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds.
\end{aligned}\tag{3.12}$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Korn, nous avons

$$C_K\left\|u_m^\varepsilon(t)\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\leq\left\|d\left(u_m^\varepsilon(t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}},$$

alors l'inégalité (3.12), sera

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\mu C_K\left\|u_m^\varepsilon(t)\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\lambda C_K\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}ds \\
&+\beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3}ds \\
&\leq\frac{2}{\rho}\int_0^t\left\|f(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+\frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+\mu\left\|u_{0m}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\frac{\rho}{2}\left\|u_{1m}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{2}{\rho}\int_0^t\left\|f^\varepsilon(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+\mu\left\|u_{0m}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\frac{\rho}{2}\left\|u_{1m}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\leq C^\varepsilon,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^*,$$

où C^ε est une constante indépendante de m, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\mu C_K\left\|u_m^\varepsilon(t)\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+\lambda C_K\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}ds \\
&+\beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3}ds \\
&\leq C_T^\varepsilon.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Deuxième estimation, nous dérivons l'équation (3.10) par rapport à t, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\rho\frac{\partial^3 u_m^\varepsilon}{\partial t^3},w_j^\varepsilon\right)+a_\mu\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2},w_j^\varepsilon\right) \\
&+(r-1)\beta\left(\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2},w_j^\varepsilon\right)+\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau .w_j^\varepsilon dx' \\
&=\left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right).
\end{aligned}\tag{3.14}$$

En multipliant (3.14) par $\theta''_{jm}(t)$ et en sommant en $j = 1$ de m ; il vient

$$\rho\left(\frac{\partial^3 u_m^\varepsilon}{\partial t^3}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right) + a_\mu\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right) + a_\lambda\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)$$
$$+\beta(r-1)\left(\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right) + \int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau \cdot \left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau dx'$$
$$= \left(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right),$$

puisque les termes $\left(\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)$ et $\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau \cdot \left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\right)_\tau dx'$ sont positifs, on en déduit que

$$\rho\frac{d}{2dt}\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu\frac{d}{dt}\left\|d\left(\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} + 2\lambda\left\|d\left(\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}} \tag{3.15}$$
$$\leq \left(\frac{\partial f^\varepsilon(t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right).$$

Par intégration sur $]0;t[$ de (3.15) puis en utilisant les inégalités de Korn, Hölder et de Young, il résulte

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \mu C_K\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} + 2C_K\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(s)}{\partial t^2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} ds \tag{3.16}$$
$$\leq \frac{2}{\rho}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))^3} + \frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(s)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \mu\|u_1\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3} + \frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}.$$

Maintenant, il faut estimer $\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$.
On a, pour tout $j : 1 \leq j \leq m$ de (3.10) il découle

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}, w_j^\varepsilon\right) \tag{3.17}$$
$$= \left(f(0) + 2\mu\mathrm{div}(d(u_{0m})) + 2\lambda\mathrm{div}(d(u_{1m})) - \beta|u_{1m}|^{r-2}u_{1m}, w_j^\varepsilon\right),$$

en utilisant (3.9), on obtient

$$\|\mathrm{div}(d(u_{0m}))\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + \|\mathrm{div}(d(u_{1m}))\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \leq c.$$

Multipliant l'équation (3.17) par $\theta''_{jm}(0)$ et sommant sur $j = 1$ à m, il vient

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right)$$
$$= \left(f(0) + 2\mu\mathrm{div}(d(u_{0m})) + 2\lambda\mathrm{div}(d(u_{1m})) - \beta|u_{1m}|^{r-2}u_{1m}, \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right).$$

Alors

$$\rho\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$$
$$\leq\Big(\|f(0)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\mu\left\|\operatorname{div}\left(d\left(u_{0m}^\varepsilon\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\lambda\left\|\operatorname{div}\left(d\left(u_{1m}\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}$$
$$+\beta\left\|u_{1m}\right\|^{\frac{1}{2(r-1)}}_{L^{2(r-1)}(\Omega^\varepsilon)^3}\Big)\cdot\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}.$$

Et par conséquent on a

$$\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(0)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\leq c_0.$$

Revenant à la formule (3.16), nous trouvons

$$\begin{aligned}&\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\mu C_K\left\|\frac{\partial u_m^\varepsilon(t)}{\partial t}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+2\lambda C_K\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(s)}{\partial t^2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}ds\\ \leq\ &\frac{2}{\rho}\left\|\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))^3}+\frac{\rho}{2}\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(s)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}ds+\mu\left\|u_1\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}+c_0.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le Lemme de Gronwall pour conclure que

$$\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(t)}{\partial t^2}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon(s)}{\partial t^2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}ds\leq C_T^\varepsilon. \tag{3.18}$$

Etape 3 : Passage à la limite.

D'après l'estimation (3.13) et (3.18), on conclut

$$\begin{aligned}&u_m^\varepsilon \text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\\ &\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\text{ bornée dans } L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^r\left(0,T;L^r\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\\ &\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}\text{ bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\end{aligned}$$

on en déduit qu'on peut extraire une sous-suite u_m^ε telle que

$$\begin{aligned}u_m^\varepsilon &\rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\\ \frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}&\rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}\text{ dans } L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^r\left(0,T;L^r\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right),\\ \frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}&\rightharpoonup \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\text{ dans } L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)\cap L^2\left(0,T;H^1\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

On a les suites $\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u_m^\varepsilon}{\partial t^2}$ sont bornées dans $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)=L^2(Q)$, alors par le lemme de compacité de Lions [16], on peut déduire

$$\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\overset{\text{fortement}}{\longrightarrow}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\text{ dans }L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right).$$

D'autre part, nous avons

$$\int_0^T\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}u_m^\varepsilon\right|^s dxds=\int_0^T\int_{\Omega^\varepsilon}\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^r dxds\leq C^\varepsilon,\text{ avec }\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,$$

donc $\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}$ est borné dans $L^s\left(0,T;L^s\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$, ceci implique que $\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup\chi^\varepsilon$ dans $L^s\left(0,T;L^s\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$. Mais comme $\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\overset{\text{fortement}}{\longrightarrow}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$ dans $L^2\left(0,T;L^2\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right)$, on trouve

$$\left|\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u_m^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup\chi^\varepsilon=\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\text{ dans }L^s\left(0,T;L^s\left(\Omega^\varepsilon\right)^3\right).\tag{3.20}$$

Maintenant, soit j fixé, et $l>j$. Donc d'après (3.10), on a

$$\begin{aligned}&\left(\rho\frac{\partial^2 u_l^\varepsilon}{\partial t^2},w_j\right)+a_\mu\left(u_l^\varepsilon,w_j\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t},w_j\right)+\beta\left(\left|\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t},w_j\right)\\&+\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .w_j dx'\\&=\left(f,w_j\right),\ \ 1\leq j\leq l.\end{aligned}\tag{3.21}$$

D'autre part, de (3.19) et (3.20), il résulte

$$\left(\left|\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup}\left(\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)\text{ dans }L^\infty\left(0,T\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_l^\varepsilon}{\partial t^2},w_j^\varepsilon\right)\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup}\left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},w_j\right)\text{ dans }L^\infty\left(0,T\right),$$

donc

$$\begin{aligned}&a_\mu\left(u_l^\varepsilon,w_j^\varepsilon\right)\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup}a_\mu\left(u^\varepsilon,w_j^\varepsilon\right)\quad\text{dans }L^\infty\left(0,T\right),\\&a_\lambda\left(\frac{\partial u_l^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup}a_\lambda\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)\quad\text{dans }L^\infty\left(0,T\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $l\longrightarrow\infty$ la formule (3.21) devient

$$\begin{aligned}&\left(\rho\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},w_j^\varepsilon\right)+a_\mu\left(u^\varepsilon,w_j^\varepsilon\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)+\beta\left(\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},w_j^\varepsilon\right)\\&+\int_\omega k^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau .w_j dx'\\&=\left(f^\varepsilon,w_j^\varepsilon\right),\end{aligned}$$

pour tout $w_j^\varepsilon \in K_m^\varepsilon$ et tout $1 \leq j \leq m$.
Par densité de K_m^ε dans K^ε, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\left(\rho \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}, \varphi\right) + a_\mu \left(u^\varepsilon, \varphi\right) + a_\lambda \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi\right) + \beta \left(\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi\right) \\
&+ \int_\omega k^\varepsilon \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)_\tau . (\varphi)_\tau \, dx' \\
&= (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Ainsi, u^ε satisfait (3.1) − (3.3).

B) L'unisité de la solution.

Soient $u^{\varepsilon,1}$ et $u^{\varepsilon,2}$ deux solutions du problème (3.8). On a

$$\begin{aligned}
&\left(\rho \frac{\partial^2 u^{\varepsilon,1}}{\partial t^2}, \varphi\right) + a_\mu \left(u^{\varepsilon,1}, \varphi\right) + a_\lambda \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}, \varphi\right) + \beta \left(\left|\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}, \varphi\right) \\
&+ \int_\omega k^\varepsilon \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}\right)_\tau . \varphi_\tau dx' \\
&= (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\rho \frac{\partial^2 u^{\varepsilon,2}}{\partial t^2}, \varphi\right) + a_\mu \left(u^{\varepsilon,2}, \varphi\right) + a_\lambda \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}, \varphi\right) + \beta \left(\left|\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}, \varphi\right) \\
&+ \int_\omega k^\varepsilon \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right)_\tau . \varphi_\tau dx' \\
&= (f^\varepsilon, \varphi), \forall \varphi \in K^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

En choisit $\varphi = \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}$ dans (3.23) et $\varphi = \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}$ dans (3.24), puis en sommant les deux équations, il vient que

$$\begin{aligned}
&\rho \left(\frac{\partial^2 \left(u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}\right)}{\partial t^2}, \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right) + a_\mu \left(u^{\varepsilon,1} - u^{\varepsilon,2}, \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right) \\
&+ a_\lambda \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}, \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right) \\
&+ \beta \left(\left|\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \left|\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}, \frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right) \\
&+ \int_\omega k^\varepsilon \left(\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t} - \frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right)^2 dx' \\
&= 0,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\left(\left|\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}-\left|\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t},\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}-\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right)\geq 0,$$

on conclut que

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^{\varepsilon,1}}{\partial t}-\frac{\partial u^{\varepsilon,2}}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+2\mu C_K\left\|u^{\varepsilon,1}-u^{\varepsilon,2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\right]\leq 0. \tag{3.25}$$

Maintenant, par intégration de (3.25) sur $]0,t[$, on obtient

$$\left\|u^{\varepsilon,1}-u^{\varepsilon,2}\right\|^2_{H^1(\Omega^\varepsilon)^3}\leq 0.$$

D'où $u^{\varepsilon,1}=u^{\varepsilon,2}$ ce qui achève la démonstration. □

3.3 Analyse asymptotique du problème

Dans cette section nous étudions le comportement asymptotique de la solution de (3.8).

3.3.1 Le problème variationnel dans un domaine fixe Ω

Pour l'analyse asymptotique du problème, nous utilisant comme le deuxième chapitre le changement d'échelle, en posant $z=x_3/\varepsilon$, ainsi le domaine Ω^ε se transforme à un domaine Ω indépendant de ε

$$\Omega=\{(x',z)\in\mathbb{R}^3:(x',0)\in\omega,0<z<h(x')\},$$

où $\Gamma=\bar{\Gamma}_1\cup\bar{\Gamma}_L\cup\bar{\omega}$ sa frontière.
Maintenant, nous définissons des nouvelles fonction sur Ω

$$\begin{cases}\hat{u}_i^\varepsilon(x',z,t)=u_i^\varepsilon(x',x_3,t), i=1,2,\\ \hat{u}_3^\varepsilon(x',z,t)=u_3^\varepsilon(x',x_3,t).\end{cases}$$

Pour les données du problème, nous avons les relations suivantes

$$\begin{cases}\hat{f}_i(x',z,t)=\varepsilon^2 f_i^\varepsilon(x',x_3,t), i=1,2,3,\\ \hat{k}=\varepsilon k^\varepsilon,\end{cases}$$

avec $\hat{f}_i$ et $\hat{k}$ ne dépend pas de ε.
Nous introduisons le même cadre fonctionnel sur Ω qu'au chapitre 2 ((2.25)-(2.27)).
Le problème variationnel (3.8) est reformulé sur le domaine fixe Ω comme suit
Problème P(Ω). Trouver $\hat{u}^\varepsilon \in K$, où $\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t} \in K, \forall t \in]0,T[$ telle que

$$\sum_{i=1}^{2} \varepsilon^2 \left(\rho \frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_i\right) + \varepsilon^4 \left(\rho \frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2}, \hat{\varphi}_3\right) + \hat{a}_\mu(\hat{u}^\varepsilon, \hat{\varphi}_i) + \hat{a}_\lambda \left(\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}\right) \tag{3.26}$$

$$+\varepsilon^2 \sum_{i=1}^{2} \beta \left(\left|\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_i\right) + \varepsilon^4 \beta \left(\left|\frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2} \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}, \hat{\varphi}_3\right)$$

$$+ \int_\omega \hat{k} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \varphi dx'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \left(\hat{f}_i, \hat{\varphi}_i\right) + \varepsilon \left(\hat{f}_3, \hat{\varphi}_3\right), \quad \forall \hat{\varphi} \in K,$$

$$\hat{u}^\varepsilon(0) = \hat{u}_0, \quad \frac{\partial \hat{u}^\varepsilon}{\partial t}(0) = \hat{u}_1,$$

où

$$\hat{a}_\vartheta \left(\hat{\psi}, \hat{\vartheta}\right) = \vartheta \varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial x_j} dx' dz$$

$$+\vartheta \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial \hat{\psi}_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial x_i}\right) dx' dz$$

$$+2\vartheta \varepsilon^2 \int_\Omega \frac{\partial \hat{\psi}_3}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\vartheta}_3}{\partial z} dx' dz, \quad \forall \hat{\psi}, \hat{\varphi} \in K.$$

3.3.2 Estimations a priori

Notre but maintenant est d'obtention des estimation a priori sur la solution $\hat{u}^\varepsilon$.

Théorème 3.3.1 *Il existe une constante c dépendante de* $\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\Omega)^3}$, $\left\|\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)^3}$, $\|\hat{u}_0\|_{L^3(\Omega)^3}$, $\|\hat{u}_1\|_{L^2(\Omega)^3}$, $\|\nabla \hat{u}_0\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}$ *et* $\|\nabla \hat{u}_1\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}$ *mais indépendant de ε, telle que*

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \tag{3.27}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \left\|\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\varepsilon \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|\varepsilon^2 \frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c,$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left\|\varepsilon^{\frac{1}{r}}\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right\|^r_{L^r(0,T,L^3(\Omega))}+\left\|\varepsilon^{1+\frac{2}{r}}\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right\|^r_{L^r(0,T,L^r(\Omega))}\leq c, \tag{3.28}$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}+\left\|\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}\right) \tag{3.29}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}+\left\|\varepsilon\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}\leq c.$$

Preuve. Soit u^ε la solution du problème (3.8). Nous choisissions $\varphi=\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}$, donc nous obtenons

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a_\mu\left(u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+a_\lambda\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+\beta\left(\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right|^{r-2}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)$$
$$+\int_\omega k^\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}dx'$$
$$=\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),$$

ceci implique

$$\rho\frac{d}{dt}\left[\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3)}+a_\mu(u^\varepsilon,u^\varepsilon)\right]+a_\lambda\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t},\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right)+\beta\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3}$$
$$=\left(f^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right),$$

En intégrant sur $]0,t[$ et en utilisant l'inégalité de Korn (2.29), on trouve

$$\left[\rho\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^\varepsilon)^3)}+2\mu C_K\left\|\nabla u^\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right] \tag{3.30}$$

$$+2\lambda C_K\int_0^t\left\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}ds+\frac{\beta}{r}\int_0^t\left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}ds$$
$$\leq 2\int_0^t\left(f^\varepsilon(s),\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right)ds+\left[\|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}+2\mu\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}}\right].$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Poincaré

$$\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\leq\varepsilon h\|\nabla\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times 3}},$$

et l'inégalité de Young, on obtient

$$2\int_0^t \left(f^\varepsilon(s), \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right) ds \leq 2\int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} \|f^\varepsilon(s)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds \tag{3.31}$$

$$\leq \lambda C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}} ds + \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\lambda C_K}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds.$$

Insérer (3.31) dans (3.30), nous obtenons

$$\rho \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu C_K \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}} \tag{3.32}$$

$$+\lambda C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}} ds + \frac{\beta}{r}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3} ds$$

$$\leq \frac{4\varepsilon^2 \bar{h}^2}{\lambda C_K}\int_0^t \|f^\varepsilon(s)\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} ds + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} + 2\mu \|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}},$$

comme

$$\varepsilon^2 \|f^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3} = \varepsilon^{-1}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3},$$

en multipliant (3.32) par ε, nous déduisons

$$\rho\left[\varepsilon \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^3}\right] + 2\mu C_K \left[\varepsilon \|\nabla u^\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}}\right] + \frac{\beta}{r}\int_0^t \varepsilon \left\|\frac{\partial u^\varepsilon(s)}{\partial t}\right\|^r_{L^r(\Omega^\varepsilon)^3} ds \tag{3.33}$$

$$+\lambda C_K \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega^\varepsilon)^{3\times3}} ds$$

$$\leq A,$$

où A est une constante qui ne dépend pas de ε avec

$$A = \|\hat{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)^3} + 2\mu \|\nabla \hat{u}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times3}} + \frac{4\bar{h}^2}{\lambda C_K}\left\|\hat{f}\right\|^2_{L^2(0,T,L^2(\Omega)^3)} ds.$$

Donc, à partir de (3.33), nous concluons (3.27) et (3.28). □

3.3.3 Théorème de convergence

Théorème 3.3.2 *Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.3.1, il existe* $u_i^* \in L^2(0, T, V_z), i = 1, 2$ *telle que*

$$\left.\begin{array}{l} \hat{u}_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^*, i = 1, 2 \\ \frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_i^*}{\partial t}, i = 1, 2 \end{array}\right\} \quad \textit{dans } L^2(0, T, V_z), \tag{3.34}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^{\frac{1}{r}}\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \quad dans\ L^r\left(0,T,L^r(\Omega)\right), \tag{3.35}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0, \quad i=1,2 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup 0 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial x_i} \rightharpoonup 0, i=1,2 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial z} \rightharpoonup 0 \\ \\ \varepsilon\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup 0, i,j=1,2 \end{array}\right\} \quad dans\ L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right), \tag{3.36}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right) \rightharpoonup 0, \ i,j=1,2 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right) \rightharpoonup 0 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t}\right) \rightharpoonup 0, \ i=1,2 \\ \\ \varepsilon\frac{\partial^2 \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0, \ i=1,2 \\ \\ \varepsilon^2\frac{\partial^2 \hat{u}_3^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup 0 \end{array}\right\} \quad dans\ L^2\left(0,T,L^2(\Omega)\right). \tag{3.37}$$

Preuve. D'après les estimations (3.27) et (3.29) il existe une constante positive c indépendante de ε telle que

$$\left\|\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial z}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \text{ et } \left\|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \hat{u}_i^\varepsilon}{\partial t}\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c, \quad i=1,2.$$

En utilisant ces estimation avec l'inégalité de Poincaré dans le domaine Ω, on déduit que les suites $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon$ et $\left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon$ sont bornées dans$L^2\left(0,T,V_z\right)$, ce qui implique l'existence des élément (u_1^*, u_2^*) et $\left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t}\right)$ dans $L^2\left(0,T,V_z\right)$ telles que $(\hat{u}_1^\varepsilon, \hat{u}_2^\varepsilon)_\varepsilon \left(\text{ resp. } \left(\frac{\partial \hat{u}_1^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial \hat{u}_2^\varepsilon}{\partial t}\right)_\varepsilon\right)$ converge faiblement vers $(u_1^*, u_2^*)\left(\text{resp. } \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial t}, \frac{\partial u_2^*}{\partial t}\right)\right)$ dans $L^2\left(0,T,V_z\right)$, donc nous obtenons (3.34). Aussi les convergences (3.35)-(3.37) découlent à partir de (3.27)-(3.29) et (3.34). $\square$

3.3.4 Problème limite

Nous avons vu que la solution $\hat{u}^\varepsilon$ du problème variationnel (3.26) admet une limite faible u^* quand ε tend vers zéro. Il nous reste qu'à chercher le problème de limite vérifié par cette limite faible.

Théorème 3.3.3 *La limite* (u_1^*, u_2^*) *vérifie*

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz \tag{3.38}$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \int_\omega \hat{k} \frac{\partial u_i^*}{\partial t} . \hat{\varphi}_i dx'$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i \hat{\varphi}_i dx' dz, \quad \forall \hat{\varphi} \in \Pi(K),$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^*(t) + \lambda \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right) = \hat{f}_i(t), \ i = 1, 2 \quad dans \quad L^2(\Omega), \tag{3.39}$$

$$u_i^*(x', z, 0) = \hat{u}_{0,i}(x', z), \ i = 1, 2.$$

Preuve. Par passage à la limite quand ε tend vers zéro dans la formulation variationnelle (3.26) et en utilisant les résultats de convergence de Théorème 3.3.2, on obtient

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx' dz + \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx' dz \tag{3.40}$$

$$+ \int_\omega \hat{k} \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} \right)_\tau . (\hat{\varphi})_\tau dx' = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i . \hat{\varphi}_i dx' dz.$$

Nous choisissons maintenant dans (3.40)

$$\hat{\varphi}_i = \psi_i, \ \psi_i \in H_0^1(\Omega), \ i = 1, 2,$$

et en utilisant la formule de Green, puis en choisissant $\psi_1 = 0$ et $\psi_2 \in H_0^1(\Omega)$, puis $\psi_2 = 0$ et $\psi_1 \in H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u_i^*}{\partial z} + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) \right) \psi_i dx' dz = \int_\Omega \hat{f}_i \varphi_i dx' dz.$$

Donc

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\mu u_i^*(t) + \lambda \frac{\partial u_i^*(t)}{\partial t} \right) = \hat{f}_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2 \quad \text{in} \quad H^{-1}(\Omega), \tag{3.41}$$

et comme $\hat{f}_i \in L^2(\Omega), \ i = 1, 2,$ donc (3.41), est valide dans $L^2(\Omega)$. □

Théorème 3.3.4 *Sous les même hypothèses du Théorème 3.3.3, les traces*

$$\tau^*(x',t) = \frac{\partial u^*}{\partial z}(x',0,t); \quad \varrho^*(x',t) = u^*(x',0,t),$$

vérifient

$$\int_\omega \hat{k}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}dx' - \int_\omega \left(\mu\tau^* + \lambda\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\right)\psi dx' = 0, \ \ \forall\psi \in L^2(\omega)^2, \tag{3.42}$$

et la condition au limite de Fourier sur $\omega\times]0,T[$

$$\left(\mu\tau^* + \lambda\frac{\partial u^*}{\partial t}\right) = \hat{k}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}, \quad p.p \ \ sur \ \ \omega\times]0,T[,$$

et (u^*, ϱ^*) *vérifient la formulation faible*

$$\int_\omega \left(\tilde{F} - \frac{h}{2}\left(\mu\varrho^* + \lambda\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}\right) + \int_0^h \left(\mu u^* + \lambda\frac{\partial u^*}{\partial t}\right)(x',z,t)dz\right)\nabla\psi(x')dx' \tag{3.43}$$
$$= 0, \ \forall\psi \in H^1(\omega).$$

où

$$\tilde{F}(x',h,t) = \int_0^h F(x',z,t)dz - \frac{h}{2}F(x',z,t), F(x',z,t) = \int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}(x',\eta,t)d\eta d\zeta.$$

Preuve. Dans l'équation variationnelle (3.38), on choisit $\hat{\varphi} \in \Pi(K)$, on trouve

$$\mu\sum_{i=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z}.\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}dx'dz + \lambda\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right).\frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z}dx'dz + \int_\omega \hat{k}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}\hat{\varphi}_\tau dx'$$
$$= \sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{f}_i\hat{\varphi}_i dx'dz,$$

en utilisant la formule de Green, il vient que

$$-\mu\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial z^2}\hat{\varphi}_i dx'dz - \lambda\sum_{i=1}^2\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right).\hat{\varphi}_i dx'dz - \int_\omega\left(\mu\tau^* + \lambda\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\right)\hat{\varphi}_\tau dx'$$
$$+ \int_\omega \hat{k}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}\hat{\varphi}_\tau dx'$$
$$= \sum_{i=1}^2\int_\Omega \hat{f}_i\hat{\varphi}dx'dz.$$

De (3.39), on obtient

$$-\int_\omega\left(\mu\tau^* + \lambda\frac{\partial \tau^*}{\partial t}\right)\hat{\varphi}dx' + \int_\omega \hat{k}\frac{\partial \varrho^*}{\partial t}\hat{\varphi}dx' = 0, \ \hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\omega)^2. \tag{3.44}$$

Donc par la densité de $\mathcal{D}(\omega)^2$ dans $L^2(\omega)^2$ on déduit (3.42). D'après (3.44), nous obtenons

$$\hat{k}\frac{\partial\varrho^*}{\partial t} = \mu\tau^* + \lambda\frac{\partial\tau^*}{\partial t}, \text{ p.p sur } \omega\times\left]0,T\right[.$$

Pour démontrer (3.43) en intégrant deux fois l'équation (3.39) de 0 à z, on trouve

$$\mu u_i^*(x',z,t) + \lambda\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',z,t) = \mu\varrho_i^* + \mu z\tau_i^* + \lambda\frac{\partial\varrho_i^*}{\partial t} + \lambda z\frac{\partial\tau_i^*}{\partial t} - \int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta, \quad (3.45)$$

en particulier pour $z = h(x)$, donc on a

$$\mu\varrho_i^* + \mu h\tau_i^* + \lambda\frac{\partial\varrho_i^*}{\partial t} + \lambda h\frac{\partial\tau_i^*}{\partial t} = \int_0^h\int_0^\zeta f_i(x,\eta,t)\,d\eta d\zeta. \quad (3.46)$$

Intégrant (3.45) entre 0 et h, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^h\left(\mu u_i^*(x',z,t) + \lambda\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',z,t)\right)dz \quad (3.47)\\ &= h\mu\varrho_i^* + \frac{\mu}{2}h^2\tau_i^* + h\lambda\frac{\partial\varrho_i^*}{\partial t} + \frac{\lambda}{2}h^2\frac{\partial\tau_i^*}{\partial t} - \int_0^h\int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta dz.\end{aligned}$$

De (3.46) et (3.47), nous déduisons

$$\int_0^h\left(\mu u_i^*(x',z,t) + \lambda\frac{\partial u_i^*}{\partial t}(x',z,t)\right)dz - \frac{h}{2}\left(\mu\varrho_i^* + \lambda\frac{\partial\varrho_i^*}{\partial t}\right) + \tilde{F}_i = 0,$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}_i(x',h,t) &= \int_0^h F_i(x',z,t)\,dz - \frac{h}{2}F_i(x',h,t),\\ F_i(x',z,t) &= \int_0^z\int_0^\zeta \hat{f}_i(x',\eta,t)\,d\eta d\zeta,\end{aligned}$$

Donc, on obtient la formulation faible

$$\int_\omega\left(\int_0^h\left(\mu u^*(x',z,t) + \lambda\frac{\partial u^*}{\partial t}(x',z,t)\right)dz - \frac{h}{2}\left(\mu\varrho^* + \lambda\frac{\partial\varrho^*}{\partial t}\right) + \tilde{F}\right)\nabla\psi(x')\,dx' = 0.$$

□

Théorème 3.3.5 *La solution $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ du problème limite (3.38)-(3.39) est unique dans $L^2(0,T,V_z)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux solutions u_i^* et $u_i^{**}, i = 1,2$ de la formulation variationnelle (3.38), nous avons

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^*}{\partial z} . \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\varphi}_i - \frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) dx'dz + \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \right) . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz \tag{3.48}$$

$$+ \int_\omega \hat{k} \frac{\partial u^*}{\partial t} \hat{\varphi} dx' = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i . \hat{\varphi}_i dx'dz,$$

et

$$\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial u_i^{**}}{\partial z} . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz + \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) . \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial z} dx'dz \tag{3.49}$$

$$+ \int_\omega \hat{k} \frac{\partial u^{**}}{\partial t} \hat{\varphi} dx' = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \hat{f}_i . \hat{\varphi}_i dx'dz.$$

Nous prenons $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t}$ dans (3.48), puis $\hat{\varphi} = \frac{\partial u_i^*}{\partial t}$ dans (3.49) et en additionnant les deux équations, on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z}(u_i^* - u_i^{**}) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dxdz \\
&+ \lambda \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) . \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dxdz \\
&+ \int_\omega \hat{k} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) . \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t} - \frac{\partial u_i^{**}}{\partial t} \right) dx' \\
&\leq 0,
\end{aligned}$$

on pose $\bar{W}(t) = u^*(t) - u^{**}(t)$, ceci implique

$$\mu \frac{d}{dt} \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)^2} + \lambda \left\| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)^2} + k_* \left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\omega)^2} \leq 0.$$

Nous avons $\bar{W}(0) = 0$, alors par l'intégration sur $]0, t[$, nous trouvons

$$\left\| \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right\|^2_{L^2(\Omega)^2} \leq 0.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, nous concluons

$$\left\| \bar{W} \right\|_{L^2(0,T,V_z)} = 0.$$

□

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'analyse asymptotique de deux problèmes du film mince Ω^ε, avec conditions de frottement sur une partie du bord.
Pour étudier l'analyse asymptotique de ces problèmes, nous utilisons la technique de changement d'échelle, nous transformons les problèmes initiaux posés dans le domaine Ω^ε à de nouveaux problèmes posés sur un domaine fixe Ω indépendant du paramètre ε. On établit des estimations a priori sur les solutions des problèmes et on montre que les solutions admettent des limites faibles quand l'épaisseur ε du domaine tend vers zéro. Celles-ci vérifient ce qu'on appelle les problèmes limites. Pour obtenir ces problèmes limites, nous sommes passés à la limite dans les formulations variationnelles. Ensuite, nous montrons le résultat d'unicité des solutions des problèmes limites.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces.* Academic Press, NewYork, 1975.

[2] K. Attipou, *Étude des instabilités dans les membranes minces sous chargements thermomécaniques.* Thèse, Université de Lorraine 2015.

[3] G. Bayada and K. Lhalouani, *Asymptotic and numerical analysis for unilateral contact problem with Coulomb's friction between an elastic body and a thin elastic soft layer.* Asymptot. Anal. 25 (2001), 329-362.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson. Parie.New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[5] P.G. Ciarlet and P. Destuynder, *A justification of the two-dimensional plate model.* J. Mécanique, 18 (1979), 315-344.

[6] P. Destuynder, *Comparaison entre les modules tridimensionnels et bidimensionnels de plaques en élasticité.* RAIRO Analyse Numérique, 15 (1981), 331-369.

[7] M. Dilmi, M. Dilmi, S. Boulaaras and H. Benseridi, *Source term model for elasticity system with nonlinear dissipative term in a thin domain.* Demonstratio Mathematica 55(2022) ; 437-451.

[8] M. Dilmi, M. Dilmi and H. Benseridi, *A 3D-2D asymptotic analysis of viscoelastic problem with nonlinear dissipative and source terms.* Math Meth Appl Sci. 2019 ;1-17. https ://doi.org/10.1002/mma.5755.

[9] M. Dilmi, *Asymptotic analysis for coupled parabolic problem with Dirichlet-Fourier boundary conditions in a thin domain.* Journal of Mathematics and Applications (accepted).

[10] H. Benseridi and M. Dilmi, *Some inequalities and asymptotic behaviour of dynamic problem of linear elasticity.* Georgian Math. J., 20(1) (2013), pp. 25-41.

[11] M. Dilmi, M. Dilmi and H. Benseridi, *Asymptotic analysis of quasistatic electro-viscoelastic problem with Tresca's friction Law*. Comp and Math Methods, 2019. https ://doi.org/10.1002/cmm4.1028.

[12] T. Elsken, *Continuity of attractors for net-shaped thin domain.* Topol. Methods Nonlinear Anal, 26 (2005), 315–354.

[13] R.P. Gilbert and T.S. Vashakmadze, *A two-dimensional nonlinear theory of anisotropic plates.* Mathematical and Computer Modelling, 32 (2000), 855–875.

[14] J.K. Hale and G. Raugel, *Reaction–diffusion equation on thin domains.* J. Math. Pures Appl, (9) 71 (1) (1992), 33–95.

[15] O. Kavian, *Introduction à la théorique des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.* Springer-Velarg.France, Parie, 1993.

[16] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires.* Dunod, Paris, 1969.

[17] T.A. Mel'nyk and A.V. Popov, *Asymptotic analysis of boundary value and spectral problems in thin perforated domains with rapidly changing thickness and different limiting dimensions.* Mat. Sb, 203 (8) (2012), 97–124.

[18] J.C. Paumier, *Modélisation asymptotique d'un problème de plaque mince en contact unilatéral avec frottement sur un obstacle rigide*. Rapport technique LMC-IMAG, juillet 2002 [http : //www-lmc.imag.fr/~pamier/signoplaque.ps].

[19] M. Prizzi, M. Rinaldi and K.P. Rybakowski, *Curved thin domains and parabolic equations.* Studia Math, 151 (2) (2002), 109-140.

[20] G. Raugel, *Dynamics of partial differential equations on thin domains*. Lecture Notes in Math., vol. 1609, Springer-Verlag, 1995.

[21] Á. Rodríguez-Arós and J.M. Viaño, *Mathematical jusitification of viscoelastic beam models by asymptotic methods.* J. Math. Anal. Appl, 370(2010), 607–634.

[22] Á. Rodríguez-Arós and J.M. Viaño, *Mathematical justification of Kelvin-Voigt beam models by asymptotic methods.* Z. Angew. Math. Phys, 63(2012), 529-556.