REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
De LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

Présenté par

Mechti Houria

Sur le thème :

L'existence et la stabilité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires avec des exposants variables.

Soutenue publiquement, le 09/ 07 / 2023 devant le jury composé de :

Mr. Berkane Djamel	MCA	Univ. Blida1	Président
Mr. Dilmi Mohamed	MCB	Univ. Blida1	Directeur de mémoire
Mme. Betrouni Latifa	MCA	Univ. Blida1	Examinatrice

Année universitaire : 2022/2023

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH** qui m'a donné le courage, la volonté,et la patience pour terminer ce mémoire.

Je remercie mon encadreur Monsieur **M. Dilmi** , pour m'avoir proposé ce thème et pour avoir patiemment dirigé mes travaux. Sa disponibilité, son précieux aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral.

Je remercie infiniment le professeur **Dj. Berkane** d'avoir bien voulu présider ce jury de mémoire et de s'être intéressé à ce travail.

Je remercie aussi le professeur **L. Betrouni**, qui a accepté d'être membre du jury.

Enfin, c'est avec une grande émotion que j'exprime ma profonde gratitude à ma famille, particulièrement mes chers parents et mes frères et sœurs.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail
À mes chèrs parents, pour leur soutien et leurs encouragements, pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.
À mes chère soeurs et à mon frère,
À la meilleure personne que j'ai rencontrée, à ma chère amie Imene,
À tous mes amis,
En fin je remercie tous ceux qui m'ont aidé de prés ou de loin.

Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une fonction régulière, on note

1. $\bar{\Omega}$: l'adhérence de Ω.
2. $\partial\Omega$: la frontière de Ω.
3. $:=$ l'égalité par définition (affectation).
4. $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
5. $L^p(\Omega)$: l'espace de Lebesgue à exposant constant p.
6. $L^{p(x)}(\Omega)$: l'espace de Lebesgue à exposant variable $p(x)$.
7. $\|\cdot\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$: la norme dans $L^{p(x)}(\Omega)$.
8. $W^{1,p(x)}(\Omega)$: l'espace de Sobolev à exposant variable $p(x)$.
9. $\|\cdot\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}$: la norme dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.
10. $\frac{1}{p(x)}\|\cdot\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)} := \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\cdot|^{p(x)}\, dx$.
11. $div\,(u) := \sum\limits_{i=i}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$: la divergence de u.
12. $\nabla u := \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, $i, j = 1, 2, ...n$: le gradient de u.
13. $d(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$: le tenseur de déformation.
14. $C(0, T; X)$: l'espace des fonctions continues sur $[0; T]$ dans X.
15. $L^p(0, T; X)$: l'espace des fonctions Lebesgue mesurables définies sur $]0; T[$ à valeurs dans X.
16. $\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u\,(t)\,\|^p_X dt\right)^{\frac{1}{p}}$.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier l'existence et la stabilité des solutions de deux types de systèmes d'équations hyperboliques non linéaires avec des exposants variables. Dans la première étude, on considère l'équation d'élasticité généralisée avec terme source non linéaire à exposant variable et terme dissipatif linéaire. Au début, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence des solutions faibles. Ensuite, on utilise le lemme de Komornik pour montrer la stabilité des solutions. Quant à la deuxième étude, on présente le résultat de l'existence des solutions faibles pour l'équation de viscoélastique avec un terme source non linéaire à exposant variable. Ensuite, on prouve que ces solutions sont globales et stables.

Mots clés : *Exposant variable ; Équation d'élasticité ; Stabilité ; Terme dissipatif ; Terme source à exposant variable.*

Abstract

The main objective of this work is to study the existence and the stability of the solutions of two types of systems of nonlinear hyperbolic equations with variable exponents. In the first study, we consider the generalized elasticity equation with nonlinear source term with variable exponent and linear dissipative term. At the beginning, we use the Faedo-Galerkin method to prove the existence of the weak solutions. Then, we use Komornik's lemma to show the stability of the solutions. As for the second study, we present the result of the existence of weak solutions for the viscoelastic equation with a nonlinear source term with variable exponent. Then, we prove that these solutions are global and stable.

Keywords : *Elasticity equation ; Dissipative term ; Source term with variable exponent ; Stability ; Variable exponent.*

Introduction

La stabilité des systèmes dynamiques présentent un intérêt particulier pour l'ingénierie, la physique et la modélisation mathématique. Cela est dû au fait que ces systèmes sont impliqués dans de nombreuses applications, par exemple, la médecine, la physique (météo), l'électronique (les circuits électroniques), l'informatique (traitement d'images).
En mathématiques, la stabilité des systèmes dynamiques, consiste à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, l'étude du problème de stabilité s'intéresse à la détermination du comportement asymptotique de l'énergie notée $E(t)$. Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier.
Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire

$$E(t) \to 0, \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

cette stabilité est appelée stabilité forte.
Pour le second degré, la décroissance de l'énergie est plus rapide, c'est-à-dire lorsque l'énergie tend vers 0 de manière exponentielle

$$E(t) \leq C \exp\left(-\beta t\right), \forall t > 0,$$

où C et β sont des constantes positives avec C dépend des données initiales.
Le troisième degré concerne certaines situations intermédiaires dans lesquelles la décroissance de l'énergie est de type polynômiale, par exemple

$$E(t) \leq C.t^{-\alpha}, \forall t > 0.$$

Dans la littérature mathématique, de nombreuses publications intéressantes ont été publiées au cours des trois dernières décennies sur la stabilité des systèmes dynamiques. On peut citer, par exemple, le travail de Zuazua [27].

Récemment, l'étude de la stabilité des problèmes impliquant des exposants variables est un sujet nouveau et très intéressant, parce que des modèles mathématiques d'équations paraboliques et hyperboliques à exposants variables sont inclus dans la modélisation de nombreux systèmes dynamiques et de différents phénomènes physiques, comme les écoulements de fluides électro-rhéologiques ou de fluides à viscosité dépendante de la température, les applications liées au traitement d'images, les équations d'élasticité et la mécanique des contacts voir [24], [10], [3],[5], [12], [6]. Dans ce qui suit, mentionnons quelques études qui vont dans ce sens. Antontsev et Shmarev dans [1] ont prouvé l'existence et l'unicité des solutions faibles du problème de Dirichlet pour l'équation parabolique dégénérée non linéaire à exposants variables. Dans l'article [2], Antontsev a prouvé l'existence et l'explosion des solutions faibles d'une équation d'onde avec $p(x;t)$-Laplaciens et un terme d'amortissement. En 2015, Sun et al., [26] ont discuté des bornes inférieure et supérieure pour les résultats d'explosion des solutions de l'équation hyperbolique non linéaire avec terme amortissement à exposant variable et terme source, sous des hypothèses appropriées sur les données initiales. Otmani et al., dans [21], se sont intéressés au côté numérique du problème des équations paraboliques à exposants variables. Messaoudi et Talahmeh [18], ont prouvé l'explosion en temps fini des solutions de l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\left(|\nabla u|^{r(x)-2}\nabla u\right) + \alpha\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{m(x)-1}\frac{\partial u}{\partial t} = \beta|u|^{p(x)-1}u. \tag{1}$$

Messaoudi dans [19], a etudie l'équation (1) avec $\beta = 0$ et prouvé les estimations de décroissance de l'énergé des solutions sous des hypothèses appropriées sur les exposants variables $m(\cdot)$, $r(\cdot)$ et les données initiales. Ghegal dans [11] considéré l'équation (1) avec $r(\cdot) = 2$, $m(\cdot) = l(\cdot) - 1$ et $\alpha = \beta = 1$, dans un domaine bornée avec condition de Dirichlet, l'existence globale et le résultat de la stabilité des solutions sont prouvées. Rahmoune dans [22], il a étudié un problème aux limites hyperbolique généralisé semi-linéaire associé aux équations élastiques linéaires en présence d'un terme d'amortissement général à exposant variable, où il a prouvé l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions faibles. Une analyse complète des équations aux dérivées partielles non linéaires avec des exposants variables peut- être trouvée dans [23].

Dans ce mémoire, nous traitons la décroissance générale de l'énergie de deux problèmes aux limites impliquant des exposants variables. Le premier problème étudié est un système d'élasticité généralisé avec un terme source à exposant variable et un terme amortissement linéaire, le deuxième problème étudié est un système d'équations viscoélastique avec un terme source à exposant variable.

Ce mémoire est composée de trois chapitres et est organisée comme suit

Dans le chapitre 1, on va donner quelques notations et rappels d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans les différents chapitres de ce mémoire.

Dans le chapitre 2, on s'intéresse à l'étude de l'existence et la stabilité de la solution pour un problème hyperbolique généralisé associé à l'équation élasticité avec un terme source à exposant variable et terme dissipatif. Dans ce problème nous supposons que le tenseur des contraintes $\sigma^{p(x)}(\cdot)$ est de la forme

$$\sigma^{p(x)}(u) = \left(2\mu_1 + \mu_2 |d(u)|^{p(x)}\right) d(u) + \lambda Tr(d(u)).$$

Nous dérivons la formulation variationnelle de ce problème, puis en utilisant l'approximation de Faedo-Galerkin pour prouvé l'existence des solutions faibles de notre problème. Finalement, nous prouvons la décroissance générale de l'énergie des solutions. Ce travail peut être considéré comme un détail du travail trouvé dans [7].

Dans le dernier chapitre 3, on considère un problème hyperbolique non linéaire associé à l'équation viscoélastique avec un terme source à exposant variable. Nous étudions l'existence des solutions, puis nous prouvons la stabilité exponentielle et polynomiale des solutions.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Résumé. Dans ce chapitre nous présentons brièvement quelques notations et définitions élémentaires d'analyse fonctionnelle (Les espaces de Lebesgue, les espaces de Sobolev, ...), nous rappelons aussi quelques inégalités et notions élémentaires utiles qu'on utilise dans les différents chapitres de ce mémoire. Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) et nous utiliserons la mesure de Lebesgue.

Contenu

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue classiques

Les espaces de Lebesgue et Sobolev sont des espaces fonctionnels essentiels pour la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.
Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω.
Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ définie par

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable}\,; \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour en faire un espace de Banach.
Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}\,; \, supess_{x\in\Omega} |u\,(x)\,| < +\infty \},$$

avec

$$supess_{x\in\Omega} |u\,(x)\,| = \inf\{c > 0; \quad |u(x)| \leq C \text{ p.p.dans } \Omega\}.$$

• $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_\infty = supess_{x\in\Omega}|u(x)|$ est un espace de Banach
• $L^p(\Omega)$ est réflexif et séparable pour $1 < p < +\infty$ et son dual est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
• $L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif, son dual est $L^\infty(\Omega)$ et le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$.

1.1.2 Espace de Sobolev classique

Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^n \},$$

qui muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)^n} \right)^{\frac{1}{p}},$$

est un espace de Banach.
Si $p=\infty$, on muni $W^{1,\infty}(\Omega)$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}=\max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)},\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)^n}\right).$$

On note pour $1\leq p<+\infty, W_0^{1,p}(\Omega)=\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.
Pour $1\leq p<+\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.
On peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distribution $\mathcal{D}'(\Omega)$ par

$$W^{-1,q}(\Omega)=\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)', \quad \left(q=\frac{p}{p-1}\right).$$

1.1.3 Espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable

Nous rappelons dans cette partie quelques définitions et propriétés des espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable (voir par exemple [8], [9]).
Pour un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, soit $p(x):\Omega\longrightarrow[1,+\infty]$ une fonction mesurable, appelé l'exposant variable. Dans tous la suit nous adoptons les notation suivantes

$$\mathcal{C}_+(\bar\Omega)=\{p\mid p\in\mathcal{C}(\bar\Omega),\, p(x)>1 \text{ pour tout } x\in\bar\Omega\},$$

$$p^-:=infess_{x\in\Omega}(p(x)), \quad p^+:=supess_{x\in\Omega}(p(x)).$$

Définition 1.1.1 *Pour deux fonctions mesurables bornées p, $q:\Omega\to\mathbb{R}$, on a*

$$q(\cdot)<<p(\cdot) \text{ si } (p-q)^->0.$$

Définition 1.1.2 *On définit l'espace de Lebesgue généralisé $L^{p(x)}(\Omega)$ appelé aussi espace de Lebsegue à exposant variable, comme l'ensemble des fonctions mesurables $u:\Omega\to\mathbb{R}$ pour le quelles le module convexe*

$$\rho_{p(x)}(u):=\int_\Omega |u|^{p(x)}dx,$$

est fini.

- Si $p^+<\infty$, alors l'expression

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}:=\inf\left\{\lambda>0:\int_\Omega\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)}dx\leq 1\right\},$$

définit une norme dans $L^{p(x)}(\Omega)$, appelé la norme de Luxembourg.

• Si $p^- > 1$, $L^{p(x)}(\Omega)$ est uniformément convexe donc réflexif et son dual est isomorphe à $L^{q(x)}(\Omega)$, où $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$,

Théorème 1.1.1 *L'espace* $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|.\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\right)$ *est un espace de Banach et* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Définition 1.1.3 *On définit l'espace de Sobolev généralisé qui aussi appelé l'espace de Sobolev à exposant variable*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega)\ ;\ \nabla u \in \left(L^{p(x)}(\Omega)\right)^n \right\},$$

qui muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} := \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)^n},$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1.4 *L'espace* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p(x)}(\Omega)$.
En particulier, si $p^- > 1$, *l'espace* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable et réflexif. Son espace dual est noté par* $W^{-1,q(x)}(\Omega)$.

Dans l'écriture des formulations variationnelles apparaît en général le module convexe $\rho_{p(x)}$ ce qui nous amène à énoncer le résultat important suivant

Proposition 1.1.1 *Si* $u_n, u \in L^{p(x)}(\Omega)$ *et* $p^+ < +\infty$, *les relations suivantes sont vraies*

1. $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \quad (resp = 1, > 1) \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) < 1 \quad (resp = 1, > 1)$,

2. $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1 \Rightarrow \|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)}$,

3. $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \Rightarrow \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)}$,

4. $\|u_n\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \to 0$ *(respectivement* $\to +\infty$*)* $\Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u_n) \to 0$ *(respectivement* $\to +\infty$*)* ,

5. $\rho_{p(x)}\left(u / \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}\right) = 1$.

Proposition 1.1.2 *Si* $q \in C_+(\bar{\Omega})$ *et si pour tout* $x \in \bar{\Omega}$, $q(x) < p^*(x)$ *alors* $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ *est continue et compacte où*

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{np(x)}{n-p(x)} & si\ p(x) < n, \\ \infty & si\ p(x) \geq n. \end{cases}$$

En particulier, on a $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ *est continue et compacte.*

Définition 1.1.5 *La fonction continue $p(x) : \bar{\Omega} \longrightarrow [1, +\infty)$ satisfait la condition de continuité Hölderienne, s'il existe une constante C tel que*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\log|x-y|},\ \forall x, y \in \bar{\Omega} \text{ avec } |x-y| < \frac{1}{2}.$$

Remarque 1.1.2 *Bien que cette condition de régularité n'est pas nécessaire pour définir les espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable, elle s'avère être très utile pour ces espaces pour introduire quelques propriétés, telle que $C^{\infty}(\bar{\Omega})$ est dense dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$ et $W_0^{1,p(x)}(\Omega) = W^{1,P(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,1}(\Omega)$ de plus si $1 < p^- \leq p^+ < n$, alors l'injection de Sobolev reste vraie pour $q(x) = p^*(x)$.*

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette section, nous donnons quelques préliminaires sur la convergence faible et la convergence faible étoile, enfin nous donnons quelques notion sur les opérateurs monotones. Extrait de [4].

1.2.1 Convergence faible et convergence faible étoile

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$ on note par X' l'espace dual de X , et par $\langle ., .\rangle_{X' \times X}$ le produit de dualité entre X et X'.

Définition 1.2.1 *On dit que la suite $(u_n) \in X$, converge faiblement vers $u \in X$, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si*

$$\lim_{n \to \infty} \langle v, u_n \rangle_{X' \times X} = \langle v, u \rangle_{X' \times X},\ \forall v \in X'.$$

Dans ce cas, u s'appelle limite faible de la suite u_n.

Proposition 1.2.1 *Soit u_n une suite de X, on a*
1. Si $u_n \to u$ fortement, alors $u_n \rightharpoonup u$ faiblement.
2. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement, alors $\|u_n\|_X$ est borné et $\|u\|_X \leq \lim inf \|u_n\|_X$.
3. Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement et $v_n \to v$ fortement dans X' (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{X'} = 0$), alors $\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n \rangle_{X' \times X} = \langle v, u \rangle_{X' \times X}$.

Théorème 1.2.1 ***(Compacité faible des bornés du dual d'un espace réflexif)***
Soit X un espace réflexif , et soit (u_n) une suite bornée de X (c'est-à-dire il existe $c \in \mathbb{R}_+$

tq : $\|u_n\| \leq c$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*) alors il existe une sous-suite encore notée* (u_n) *et* $u \in X$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X*.*

Définition 1.2.2 *On dit que la suit* $(u_n) \in X'$ *converge faiblement étoile vers un élément* $u \in X'$*,et on note* $u_n \rightharpoonup^* u$*, si* $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, v\rangle_{X'\times X} = \langle u, v\rangle_{X'\times X}, \quad \forall v \in X$*.*
u s'appelle limite faible étoile de la suite (u_n)*.*

Proposition 1.2.2 *Soit* u_n *une suite de* X'*, on a*

1. *Si* $u_n \to u$ *fortement, alors* $u_n \rightharpoonup^* u$ *faiblement.*
2. *Si* $u_n \rightharpoonup^* u$ *faiblement, alors* $\|u_n\|_{X'}$ *est bornée et* $\|u_n\|_{X'} \leq \lim inf \|u_n\|_{X'}$*.*
3. *Si* $u_n \rightharpoonup^* u$ *faiblement et si* $v_n \to v$ *fortement dans* X *(c'est-à-dire* $\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_X = 0$*) alors* $\lim_{n\to\infty}\langle u_n, v_n\rangle_{X'\times X} = \langle u, v\rangle_{X'\times X}$*.*

Théorème 1.2.2 ***(Compacité faible étoile des bornés du dual d'un espace séparable)*** *Soit* X *un espace séparable, et soit* (u_n) *une suite bornée de* X' *(c'est-à-dire il existe* $C > 0$ *t.q.* $\|u_n\|_{X'} \leq C$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, alors il existe une sous-suite encore notée* (u_n) *et* $u \in X'$ *telle que* $u_n \rightharpoonup^* u$ *dans* X'*.*

Théorème 1.2.3 ***(représentation de Riesz-Fréchet)*** *Soit* X *un espace de Hilbert rèel et* $(.,.)_X$ *un produit scalaire de* X*, pour tout* $v \in X'$*, il existe* $u \in X$ *unique tel que*

$$\langle v, w\rangle_{X'\times X} = (u, w)_X, \quad \forall w \in X,$$

de plus on a $\|u\|_X = \|v\|_X'$*.*

Proposition 1.2.3 *Soit* V *un espace de Banach uniformément convexe.*
Soit (x_n) *une suite dans* V *telle que* $x_n \to x$ *pour la topologie faible* $\sigma(V, V')$ *et*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|,$$

alors $x_n \to x$ *fortement .*

1.2.2 Résultats de compacité

Pour plus de détails voir le livre de Lions [16].

Définition 1.2.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T un réel strictement positif. On note Q_T le cylindre défini par $Q_T =]0,T[\times\Omega$.*

On définit l'espace
$$H^1(Q_T) = \left\{ u \in L^2(Q_T); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T) \right\},$$
qui l'on munit de la norme définie par
$$\|u\|_{H^1(Q_T)} = \left(\|u\|^2_{L^2(Q_T)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q_T)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.2.4 *L'espace $H^1(Q_T)$ est de Hilbert pour la norme définie ci-dessus.*

Théorème 1.2.5 *L'injection de $H^1(Q_T)$ dans $L^2(Q_T)$ est compacte.*

Théorème 1.2.6 *Soient B_0, B et B_1 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B \subset B_1$ (l'injection est algébrique et topologique). On suppose que l'injection $B \hookrightarrow B_1$ est continue. Soit T est fini et $1 < p_0, p_1 < \infty$. On suppose B_0 et B_1 sont réflexifs et on définit*
$$W = \left\{ u : (0,T) \to B_0 : u \in L^{p_0}(0,T;B_0); \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\}.$$

L'espace W est un espace de Banach réflexif pour la norme
$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Théorème 1.2.7 *Nous supposons que l'injection $B_0 \hookrightarrow B$ est compacte. Si $1 < p_0, p_1 < \infty$, alors l'injection de W dans $L^{p_0}(0,T;B)$ est compacte.*

Lemme 1.2.1 *Soit Θ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$ et g_μ, g des fonctions de $L^q(\Theta)$;$1 < q < \infty$ telles que*
$$\|g_\mu\|_{L^q(\Theta)} \leq c \quad \text{et} \quad g_\mu \to g \quad p.p \quad \text{dans} \quad \Theta,$$
alors
$$g_\mu \rightharpoonup g \text{ faible dans } L^q(\Theta).$$

1.2.3 Dérivations au sens de Gâteaux

Soit X un espace de Banach. On note X' le dual topologique de X c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X. Nous noterons par $\langle .,. \rangle_{X' \times X}$ le produit dans le dualité entre X' et X.

Définition 1.2.4 *[13] Soient V une partie d'un espace de Banach X et $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $u \in V$, on dit que J est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $J(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_z(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u+tz) - J(u)}{t} = \langle l, z \rangle_{X' \times X} .$$

On pose $J'(u) = l$.

Autrement, on dit qu'une fonctionnelle $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in V$ de dérivée $g(u) \in X'$ si , pour tout $h \in X$:

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{1}{t} \left[J(u+tz) - J(u) - \langle g(u), th \rangle_{X' \times X} \right] = 0.$$

Exemple 1.2.8 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; un ouvert, pour $p \in]1; +\infty[$ on définit une fonctionnelle*

$$\begin{aligned} J \quad &: \quad W_0^p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad &\longrightarrow \quad J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx, \end{aligned}$$

alors J est différentiable dans $W_0^p(\Omega)$ et

$$J'(u)(v) = p \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u . \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^p(\Omega).$$

On considère la fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, définit par $\Phi(x) = |x|^p$, c'est une fonction de classe C^1, et $\nabla \Phi = p|x|^{p-2} x$ en effet

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\Phi(x+ty) - \Phi(x)}{t} = p|x|^{p-2} x.y, \ \ \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme conséquence

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{|\nabla u(x) + t \nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x),$$

par le théorème des accroissement finis, pour presque tout $x \in \Omega$ et pour $t > 0$; il existe une fonction θ à valeur dans $]0;1[$ telle que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned} & \left|\nabla u(x)+t\nabla v(x)\right|^{p}-\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p}-tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right) \\ = \;& tp\left|\nabla u\left(x\right)+\theta\left(x,t\right)t\nabla v\left(x\right)\right|^{p-2}\left(\nabla u\left(x\right)+\theta\left(x,t\right)t\nabla v\left(x\right)\right).\nabla v\left(x\right) \\ & -tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

En divisant par t, on obtient pour presque tout x

$$\lim_{t\longrightarrow 0^{+}}\frac{\left|\nabla u(x)+t\nabla v(x)\right|^{p}-\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p}-tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2}\nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right)}{t}=0.$$

D'autre par, on peut majorer le deuxième membre de l'égalité (1.1) divisée par t par

$$f\left(x\right)=2\left(\left|\nabla u\left(x\right)\right|+\left|\nabla v\left(x\right)\right|\right)^{p-1}.\left|\nabla v\left(x\right)\right|.$$

En utilisant en suite l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{\Omega}\left|f\left(x\right)\right|dx\leq c\left\|\nabla v\right\|_{L^{p}(\Omega)}\left(\left\|\nabla u\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1}+\left\|\nabla v\right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p-1}\right).$$

On peut dent appliquer le théorème de convergence dominée et conclure à

$$J'\left(u\right)\left(v\right)=p\int\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx,\quad\forall v\in W_{0}^{p}\left(\Omega\right).$$

Alors J est Gâteaux différentiable.

1.2.4 Opérateurs monotones

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V'.

Définition 1.2.5 *On dit que*

1) A est borné si

$$\exists c>0:\left\|A(v)\right\|_{V'}\leq c.\left\|v\right\|_{V},\forall v\in V.$$

2) A est monotone si

$$\forall u,v\in V:\langle A(u)-A(v),u-v\rangle\geq 0.$$

3) A est hémicontinue si pour tous $u,v,w\in V$, l'application

$$t\mapsto\langle A(u+tv),w\rangle,$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

4) A est coercif si

$$\lim_{\|u\|_V \to +\infty} \frac{\langle A(u), v\rangle}{\|u\|_V} = +\infty.$$

Théorème 1.2.9 *[16]. Soit A un opérateur vérifiant*

1. A est borné,

2. A est hémi-continu,

3. A est monotone,

4. A est coercif.

Alors A est surjectif de $V \to V'$, c'est-à-dire pour $f \in V'$, il existe $u \in V$ tel que $A(u) = f$.

1.3 Quelques inégalités utiles

Dans cette dernière section, on va présenter quelques inégalités pratiques qui seront utilisées dans ce travail.

• **Inégalité de Hölder [8]**.

Pour toute fonction $u \in L^{p(x)}(\Omega)^n$ et $v \in L^{q(x)}(\Omega)^n$ on a

$$\int_\Omega |u||v|dx \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-})\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)^n}\|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)^n}. \tag{1.2}$$

où $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$.

• **Inégalité de Poincaré [6]**.

Pour tout $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)^n$, il existe un constante $C^* > 0$ qui ne dépend que de la dimension de Ω, p^- et p^+ tel que

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)^n} \leq C^*.mes(\Omega)\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{n\times n}}. \tag{1.3}$$

• **Inégalité de Korn [6]**.

Soit $p \in C_+(\Omega)$ avec $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, alors

$$C_K\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{n\times n}} \leq \|d(u)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{n\times n}}. \tag{1.4}$$

tel que $d(u) := \frac{1}{2}\left(\nabla u + (\nabla u)^t\right)$.

• **Inégalité de Young [8]**.

Pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \Omega$, on a

$$u.v \leq \frac{(u)^{p(x)}}{p^-} + \frac{(v)^{q(x)}}{q^-}, \text{ avec } \frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

• **L'inégalité de Gronwall.**

Remarque 1.3.1 *Nous passons en revue l'inégalité de Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes aux limites, en particulier pour établir l'unicité de la solution, ainsi que pour former les estimations a priori.*

Soient $u, v \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $u(t) \geq 0$ et $v(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $w \in C(0, T; \mathbb{R})$

1. Si

$$w(t) \leq a + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)w(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$w(t) \leq \left(a + \int_0^t u(s)ds\right) \exp\left(\int_0^t v(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$w(t) \leq u(s) + a\int_0^t v(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$w(t) \leq \exp(aT)\int_0^t u(s)ds.$$

Chapitre 2

L'existence et la stabilité des solutions pour l'équation d'élasticité généralisé à exposant variable.

Résumé. Dans ce chapitre, nous proposons un modèle mathématique décrivant les déformations d'un corps élastique isotrope en régime dynamique, nous supposons que le tenseur des contraintes $\sigma^{p(x)}$ donné par la forme suivante

$$\sigma^{p(x)}(u) = (2\mu_1 + \mu_2|d(u)|^{p(x)-2})d(u) + \lambda Tr(d(u))I_3.$$

où u est le champ de déplacement, μ_1, μ_2 et λ sont les coefficients donnés, $p(x)$ l'exposant variable, $d(u)$ et I_3 sont respectivement le tenseur de déformation et le tenseur unitaire. En utilisant la méthode de Foedo-Galerkin et le résultat de compacité on prouve l'existence des solutions faibles , puis on étudie la stabilité des solutions.

Contenu

2.1 Description du problème et formulation faible

Soit Ω un domaine ouvert et borné dans $\mathbb{R}^3$. La frontière $\partial\Omega$ de Ω est supposé régulière et est composé de deux partie $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$. Nous considérons un corps élastique isotrope occupant le domaine Ω. Pour $x \in \Omega$ et $t \in]0,T[$, on note $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\leq i\leq 3}$ le champ de déplacement. On suppose que la loi de comportement de l'élasticité est non linéaire, cette loi est donnée par

$$\sigma_{i,j}^{p(x)}(u) = \left(2\mu_1 + \mu_2|d(u)|^{p(x)-2}\right) d_{ij}(u) + \lambda \sum_{k=1}^{3} d_{kk}(u)\delta_{ij}, \;\; 1 \leq i,j \leq 3,$$

où

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

le tenseur de déformation, δ_{ij} est le symbole de kronecker, μ_1, μ_2 et λ sont les coefficients de Lamé.

L'equation qui régit les déformations d'un corps élastique isotrope avec un terme source non linéaire à exposant variable et un terme dissipatif linéaire en régime dynamique est le suivant

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\left(\sigma^{p(x)}(u)\right) + \alpha|u|^{p(x)-2}u + \beta\frac{\partial u}{\partial t} = f, \text{ dans } \Omega\times]0,T[. \tag{2.1}$$

Où $|\cdot|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$, f représente une densité de force, $p(\cdot)$ est l'exposant variable tel que $2 \leq p(x)$ et $\rho,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour décrire les conditions aux limites nous utilisons les notations habituelles

$$u_n = u.n,\; u_\tau = u - u.n,\; \sigma_n^{p(x)} = \left(\sigma^{p(x)}.n\right).n, \quad \sigma_\tau^{p(x)} = \sigma^{p(x)}.n - \left(\sigma_n^{p(x)}\right).n,$$

où $n = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$.

• Le déplacement est connue sur $\partial\Omega_1$

$$u(x,t) = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1\times]0,T[. \tag{2.2}$$

• Sur $\partial\Omega_2$ le tenseur des contraintes satisfait la condition suivante :

$$\sigma^{p(x)}(u).n = 0 \;\; \text{sur} \;\; \partial\Omega_2\times]0,T[. \tag{2.3}$$

Le problème consiste à trouver u qui satisfait (2.1)-(2.3) avec les conditions initiales suivantes

$$u(x,0) = \vartheta_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \vartheta_1(x), \;\; \forall x \in \Omega. \tag{2.4}$$

Maintenant, nous dérivons la formulation variationnelle du problème, pour cela on définit l'espace fermé suivant

$$K^{p(x)} = \left\{ v \in W^{1,p(x)}(\Omega)^3 : v = 0 \ \text{ sur } \ \partial\Omega_1 \right\}.$$

En multipliant l'équation (2.1) par une fonction test ϕ, puis en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green , nous obtenons la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver} \ \ u \in K^{p(x)}, \ \ \forall t \in]0, T[, \ \ \text{tel que} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}
\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \phi \right) + a_{p(x)}(u, \phi) + \alpha(|u|^{p(x)-2}u, \phi) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi \right) \\
= (f, \phi), \qquad \forall \phi \in K^{p(x)}, \\
u(x, 0) = \vartheta_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \vartheta_1(x),
\end{gathered}$$

où

$$a_{p(x)}(u, \phi) = \int_\Omega (2\mu_1 + \mu_2 |d(u)|^{p(x)-2}) d(u) : d(\phi) dx + \lambda \int_\Omega div(u).div(\phi) dx,$$

avec

$$d(u) : d(\phi) := \sum_{i,j=1}^{3} d_{ij}(u).d_{ij}(\phi).$$

On désigne aussi par $\mathcal{A}(\cdot)$ l'opérateur non linéaire

$$\begin{gathered}
\mathcal{A} : W_0^{1,p(x)} \to W^{-1,q(x)}(\Omega)^3 \\
u \longrightarrow \mathcal{A}(u),
\end{gathered}$$

tel que

$$(\mathcal{A}(u), v) = a_{p(x)}(u, v), \ \ \forall \ v \in W_0^{1,p(x)},$$

et

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

2.2 L'existence des solutions faibles

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'existence locale des solutions du problème (2.1)-(2.4).

Théorème 2.2.1 *Selon les hypothèses*

$$f, \frac{\partial f}{\partial t} \in L^{q(x)}\left(0, T, L^{q(x)}(\Omega)^3\right),$$

$$\vartheta_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)^3, \quad \vartheta_1 \in L^2(\Omega)^3. \tag{2.6}$$

Il existe une solution faible u de (2.5) tel que

$$u \in L^\infty(0, T, W^{1,p(x)}(\Omega)^3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)^3).$$

Preuve. Nous utilisons la méthode standard de Faedo-Galerkin pour prouver notre résultat. Pour plus de détails voir [16].

Nous introduisons une suite de fonctions (v_j) ayant les propriétés suivantes

* $\forall j \in 1, ..., m, \quad v_j \in K^{p(x)}$,
* La famille $v_1, v_2, ..., v_m$ est linéairement indépendante,
* L'espace $K_m = [v_j]_{1 \leq j \leq m}$ engendrée par la famille $v_1, v_2, ..., v_m$ est dense dans $K^{p(x)}$.

Soit $u_m = u_m(t)$ une solution approchée du problème (2.1)-(2.4) telle que

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \eta_{jm}(t) v_j, \qquad m = 1, 2, 3, ...,$$

qui vérifie le système d'équation suivant

$$\rho\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, v_j\right) + a_{p(x)}(u_m, v_j) + \alpha(|u_m|^{p(x)-2} u_m, v_j) + \beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v_j\right) \tag{2.7}$$

$$= (f, v_j), \quad 1 \leq j \leq m,$$

qui est un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires et qui sera complété par les conditions initiales suivant

$$u_m(x, 0) = \vartheta_{0m} = \sum_{i=1}^{m} w_{jm} v_j \to \vartheta_0 \;\text{ quand }\; m \to \infty \;\text{ dans }\; W^{1,p(x)}(\Omega)^3, \tag{2.8}$$

et

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}(x, 0) = \vartheta_{1,m} = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{X}_{jm} v_j \to \vartheta_1 \;\text{ quand }\; m \to \infty \;\text{ dans }\; L^2(\Omega)^3. \tag{2.9}$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles, nous sommes assurés de l'existence d'une solution de (2.7) (on note que $det(v_i, v_j) \neq 0$) grâce à l'indépendance

linéaire de $v_1, v_2, ..., v_m$ dans l'intervalle $[0,T]$.
En multipliant l'équation (2.7) par $\eta'_{jm}(t)$ et effectuant la sommation sur $j=1$ à m on trouve

$$\rho\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) + a_{p(x)}\left(u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) + \alpha\left(|u_m|^{p(x)-2}u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) + \beta\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) = \left(f, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right). \tag{2.10}$$

D'autre part, en utilisant la dérivée au sens de Gâteaux nous avons

$$\left(|u_m|^{p(x)-2}u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) = \frac{1}{p(x)}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3}, \tag{2.11}$$

également

$$\begin{aligned} a_{p(x)}\left(u_m, \frac{\partial u_m}{\partial t}\right) =& \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{p(x)}\|d(u_m(t))\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} + \mu\|d(u_m(t))\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}\right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{2}\|\operatorname{div}(u_m(x,t))\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

en utilisant les équations (2.11)-(2.12) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned} & \tfrac{\rho}{2}\tfrac{d}{dt}\left\|\tfrac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ & + \tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{\mu_1}{p(x)}\|d(u_m(t))\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} + 2\mu_2\|d(u_m(t))\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \tfrac{\lambda}{2}\|div(u_m(t))\|^2_{L^2(\Omega)}\right] \\ & + \tfrac{\alpha}{p(x)}\tfrac{d}{dt}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{L^p(x)(\Omega)^3} + \beta\left\|\tfrac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ & = \left(f, \tfrac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

En intégrant la dernière équation sur $]0,t[$ et en appliquant les inégalités de Hölder (1.2) et Young, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \mu_1\|d(u_m(t))\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \frac{\mu_2}{p(x)}\|d(u_m(t))\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} \\ & \quad + \frac{\alpha}{p(x)}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3} + \beta\int_0^t\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \\ & \quad \leq \|\vartheta_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\mu_2}{p^-}\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3} + \left(\frac{2\mu+\lambda}{2}\right)\|\vartheta_{0m}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)^3} \\ & + \frac{\alpha}{p^-}\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3} + \int_0^t\|u_m(s)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3}\,ds + \frac{\alpha}{2p^+}\|u_m(s)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$+\left(\frac{2p^{+}}{\alpha}\right)^{\frac{q^{+}}{p^{-}}}\|f(t)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}+\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial f(s)}{\partial t}\right\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}ds$$
$$+\|f(0)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}+\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3}}.$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Korn (1.4) et le fait que $W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$, on trouve

$$\frac{C_K}{p(x)}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}\leq\frac{1}{p(x)}\|d(u_m(t))\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times3}},$$

et

$$\|u_m(s)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3}}\leq C_{p^{+}}\|u_m(s)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}},$$

alors l'inégalité (2.13) devient

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}}+\frac{\mu_1C_K}{2}\|u_m(t)\|^{2}_{W^{1,2}(\Omega)^{3}}+\frac{\mu_2C_k}{p^{+}}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}$$
$$+\frac{\alpha}{2p^{+}}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3}}+\beta\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial u_m(s)}{\partial t}\right\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}}ds$$
$$\leq C_{p^{+}}\int_{0}^{t}\|u_m(s)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}ds+\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial f(s)}{\partial t}\right\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}ds+\left(\frac{2p^{+}}{\alpha}\right)^{\frac{q^{+}}{p^{-}}}\|f(t)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}$$
$$+\|f(0)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}+\left(1+\frac{1+\alpha c_{p^{+}}}{p^{-}}+\frac{2\mu+\lambda}{2}\right)\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}+\|\vartheta_{1m}\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}},$$

comme

$$\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial f(s)}{\partial t}\right\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}ds+\left(\frac{2p^{+}}{\alpha}\right)^{\frac{q^{+}}{p^{-}}}\|f(t)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}+\|f(0)\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^{3}}$$
$$+\left(1+\frac{1+\alpha c_{p^{+}}}{p^{-}}+\frac{2\mu+\lambda}{2}\right)\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}+\|\vartheta_{1m}\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}}\leq C,\qquad\forall m\in\mathbb{N}^{*},$$

où C une constante indépendant de m.

Donc, on trouve

$$\frac{\rho}{2}\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}}+\frac{\mu_1C_K}{2}\|u_m(t)\|^{2}_{W^{1,2}(\Omega)^{3}}+\frac{\mu_2C_k}{p^{+}}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}\tag{2.14}$$
$$+\frac{\alpha}{2p^{+}}\|u_m(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3}}+\beta\int_{0}^{t}\left\|\frac{\partial u_m(s)}{\partial t}\right\|^{2}_{L^{2}(\Omega)^{3}}ds$$
$$\leq C+c_{p^{+}}\int_{0}^{t}\|u_m(s)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^{3}}ds.$$

Maintenant en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\|u_m(t)\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)}^{p(x)} \leq C_T, \tag{2.15}$$

donc de (2.14) on trouve

$$\left\|\frac{\partial u_m(t)}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|u_m(t)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^3}^{p(x)} \leq C'. \tag{2.16}$$

Les estimations (2.15) et (2.16) impliquent

$$u_m \ \ \textbf{borné dans} \ L^\infty(0,T;W^{1,p(x)}(\Omega)^3),$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \ \ \textbf{borné dans} \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3).$$

Alors on déduit qu'on peut extraire une sous-suite u_m telle que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{dans} \ \ L^\infty(0,T;W^{1,p(x)}(\Omega)^3), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \ \ \text{dans} \ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^3),$$

$$|u_m|^{p(x)-2}u_m \rightharpoonup \mathcal{X} \ \ \text{dans} \ \ L^\infty(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3),$$

$$\mathcal{A}(u_m) \rightharpoonup \theta \ \ \text{dans} \ \ L^\infty(0,T;W^{-1,q(x)}(\Omega)^3).$$

On a les suites u_m et $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$, d'après le lemme de compacité de Lions [16], on peut déduire que

$$u_m \overset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u \ \ \text{dans} \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)^3),$$

d'autre part on a

$$\int_\Omega \left||u_m|^{p(x)-2}u_m\right|^{q(x)}dx = \int_\Omega |u_m|^{p(x)}dx \leq C.$$

Donc $|u_m|^{p(x)-2}u_m$ est borné dans $L^\infty(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3)$, mais comme $u_m \overset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)^3)$ on trouve

$$|u_m|^{p(x)-2}u_m \rightharpoonup \mathcal{X} = |u|^{p(x)-2}u \ \ \text{dans} \ \ L^\infty(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3). \tag{2.18}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{A}(\cdot)$ est borné monotone et hemicontinue on peut montrer que (voir [17])

$$0 \leq \int_0^t (\theta(s) - \mathcal{A}(u(s)), w(s))ds, \quad \forall w \in L^2(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega))^3,$$

de cela, on déduit que $\theta = \mathcal{A}(u)$.
Maintenant, soit j fixé et $l > j$, en utilisant (2.7), on obtient

$$\begin{aligned}\left(\rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2}, v_j\right) + a_{p(x)}(u_l, v_j) + \alpha \left(|u_l|^{p(x)-2} u_l, v_j\right) + \beta \left(\frac{\partial u_l}{\partial t}, v_j\right) \\ = (f, v_j), \quad 1 \leq j \leq l.\end{aligned} \tag{2.19}$$

de (2.18) et (2.17) il résulte que

$$\begin{aligned}\left(|u|^{p(x)-2} u_l, v_j\right) &\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup} \left(|u|^{p(x)-2} u, v_j\right) \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T), \\ \left(\frac{\partial u_l}{\partial t}, v_j\right) &\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup} \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_j\right) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T), \\ a_{p(x)}(u_l, v_j) &\overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup} a_{p(x)}(u, v_j) \quad \text{dans} \quad L^\infty(0,T),\end{aligned}$$

d'autre part

$$\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2}, v_j\right) \rightharpoonup \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v_j\right) \quad \text{dans} \quad D'(0,T).$$

Par conséquent (2.19) devient

$$\left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v_j\right) + a_{p(x)}(u, v_j) + \alpha \left(|u|^{p(x)-2} u, v_j\right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v_j\right) = (f, v_j),$$

pour tout $v_j \in K_m$ et tout $1 \leq j \leq m$.
Par la densité de K_m dans $K^{p(x)}$, on obtient

$$\left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \phi\right) + a_{p(x)}(u, \phi) + \alpha \left(|u|^{p(x)-2} u, \phi\right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \phi\right) = (f, \phi), \quad \forall \phi \in K^{p(x)}.$$

Donc u satisfait (2.1)-(2.3).
Pour les conditions initiales, on note

$$u \in L^2(0,T; W^{1,p(x)}(\Omega)^3),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)^3).$$

Donc d'après le lemme de Lions [16] on a $u \in C\left(0,T; L^2(\Omega)^3\right)$ et par l'équation (2.8), on conclut que

$$u(x,0) = \vartheta_0(x).$$

Pour la deuxième condition on a

$$\int_0^T \left| \left(\rho \frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}, \phi(s) \right) \right| ds$$

$$\leq \int_0^T \left| a_{p(x)}(u(s), \phi(s)) \right| ds + \alpha \int_0^T \left| \left(|u(s)|^{p(x)-2} u(s), \phi(s) \right) \right| ds$$

$$+\beta \int_0^T \left| \left(\frac{\partial u(s)}{\partial t}, \phi(s) \right) \right| ds + \int_0^T (f(s), \phi(s)) ds, \ \forall \phi(s) \in L^2(0, T; K^{p(x)}),$$

ce qui implique

$$\int_0^T \left| \left(\rho \frac{\partial^2 u(s)}{\partial t^2}, \phi(s) \right) \right| ds$$

$$\leq C \int_0^T \left(\|u(s)\|_{W^{1,p(x)}}(\Omega)^3 + \left\| \frac{\partial u(s)}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} + \|f(s)\|_{L^{q(x)}(\Omega)^3} \right) \|\phi(s)\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3} ds,$$

$$\leq C \|\phi\|_{L^2(0,T;W1,p(x)(\Omega)^3}, \ \forall \phi(s) \in L^2(0, T; K^{p(x}),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(0, T; W^{-1,q(x)}(\Omega)^3).$$

Rappelons que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3)$, donc on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C(0, T; W^{-1,q(x)}(\Omega)^3),$$

par conséquent $\frac{\partial u_m(x,0)}{\partial t}$ a un sens et on a

$$\frac{\partial u_m(x,0)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \ \text{ dans } \ W^{-1,q(x)}(\Omega)^3,$$

mais

$$\frac{\partial u_m(x,0)}{\partial t} \to \vartheta_1(x) \text{ dans } \ L^2(\Omega)^3.$$

Donc

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \vartheta_1(x).$$

□

2.3 Stabilité des solutions

Nous allons maintenant montrer la stabilité des solutions du problème (2.1)-(2.4) avec $f = 0$ et $\rho = 1$. Pour cela, nous introduisons l'énergie associée au problème par la formule

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \mu_1\|u(t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)^3} + \frac{\mu_2}{p(x)}\|u(t)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\|div(u(t))\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{p(x)}\|u(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3}.$$

Lemme 2.3.1 *L'énergie $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. On choisit $\phi = \frac{\partial u(s)}{\partial t}$ dans (2.5), on obtient

$$E(t) - E(0) = -\beta\int_0^t \left\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} ds,$$

ça veut dire

$$E'(t) = -\beta\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.20}$$

□

Théorème 2.3.1 ***(Existence globale)*** *Sous les hypothèse de Théorème 2.2.1 la solution u du problème (2.1)-(2.4) satisfait*

$$u \in C(\mathbb{R}_+, W^{1,p(x)}(\Omega)^3), \ \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega)^3).$$

Preuve. On a u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ vérifiant l'égalité (2.20), donc

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\mu_1}{2}\|u(t)\|^2_{W^{1,2}(\Omega)^3} + \frac{\mu_2}{p(x)}\|u(t)\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3}$$

$$+\frac{\lambda}{2}\|div(u(t))\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{p(x)}\|u(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3}$$

$$\leq E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

cette estimation est indépendante de t.

□

Ensuite, nous établissons plusieurs lemmes techniques pour prouver le résultat principal de la stabilité.

Lemme 2.3.2 (Komornik [14]) *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante vérifie l'estimation*

$$\int_t^\infty E^{\nu+1}(s)ds \leq KE^\nu(0).E(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Alors

$$E(t) \leq E(0)\left(\frac{K+\nu K}{K+\nu t}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad si \;\; \nu > 0,$$

et

$$E(t) \leq E(0)\exp(1 - \frac{1}{K}t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}_+, \;\; si \;\; \nu = 0,$$

où $\nu \geq 0$ et $K > 0$ sont deux constants.

Lemme 2.3.3 *La fonction d'énergie $E(\cdot)$ satisfait l'estimation suivant pour tout $T > T_0 \geq 0$*

$$\int_{T_0}^T E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt \leq -\left[E^{\frac{p(x)}{2}}(t)\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx\right]_{T_0}^T \tag{2.21}$$

$$+\frac{p(x)-2}{2}\int_{T_0}^T \left(E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t).E'(t)\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx\right)dt$$

$$+\int_{T_0}^T E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega \left(2\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 - u\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdt.$$

Preuve. En multipliant (2.1) par $E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t).u$ et en intégrant sur $\Omega\times]T_0, T[$, on obtient

$$0 = \int_{T_0}^T E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega u\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - div\sigma^{p(x)}(u) + \alpha|u|^{p(x)-2}u + \beta\frac{\partial u}{\partial t}\right]dxdt.$$

Utilisant le fait que $\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}udx = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx - \int_\Omega |\frac{\partial u}{\partial t}|^2 dx$, on obtient

$$0 = \left[E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udx\right]_{T_0}^T - \frac{p(x)-2}{2}\int_{T_0}^T E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}udxdt$$

$$+\int_{T_0}^T E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega \left[-udiv\sigma^{p(x)}(u) + \alpha|u|^{p(x)} + \beta u\frac{\partial u}{\partial t} - \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2\right]dxdt.$$

D'autre par, on a

$$\int_\Omega \left[-u.div\sigma^{p(x)}(u) + \alpha|u|^{p(x)}\right]dx \geq 2E(t) - \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx,$$

on obtient

$$0 \geq \left[E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx \right]_{T_0}^{T} - \frac{p(x)-2}{2} \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt$$

$$+ \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \left[2E(t) - \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \beta u \frac{\partial u}{\partial t} - \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 \right] dx dt,$$

Alors

$$0 \geq \left[E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx \right]_{T_0}^{T} - \frac{p(x)-2}{2} \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} u dx dt$$

$$+2 \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t) - \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \left(2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 - \beta u \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt.$$

□

Dans ce qui suit, nous désignons par c une constante positive générique, qui peut avoir des valeurs différentes à différentes occurrences.

Lemme 2.3.4 *Il existe une constante positive C indépendante de $E(0)$, T_0 et T tel que l'énergie $E(\cdot)$ vérifie l'estimation suivante :*

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t) dt$$
$$\leq C E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0) + \int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \left(2 \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx - \beta u \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx dt, \text{ pour tout } T > T_0 \geq 0. \tag{2.22}$$

Preuve. On sait qu'il existe une constante C_1 tel que

$$\int_\Omega -u.div \sigma^{p(x)}(u) dx \geq C_1 \left[\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)^3} + \|u\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3} \right] \geq C_1 \int_\Omega |u|^2 dx,$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$\left| E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial t} dx \right| \leq c E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + |u|^2 \right) dx$$

$$\leq c E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t) \int_\Omega \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx - u.div\ \sigma^{p(x)}(u) \right) dx$$

$$\leq c E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{p(x)-2}{2}\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t)E'(t)\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\right| \\
&\leq c\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-4}{2}}(t)\left(-E'(t)\right)E(t)dt \\
&\leq c\left[E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0)-E^{\frac{p(x)}{2}}(T)\right] \\
&\leq cE^{\frac{p(x)}{2}}(T_0),
\end{aligned}$$

remplaçons ces deux estimations dans (2.21) pour trouver (2.22).

□

Lemme 2.3.5 *Pour tout* $\varsigma > 0$*, on a*

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \tag{2.23}$$

$$\leq \varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt + c(\varsigma)E(T_0) + cE^{\frac{p(x)}{2}}(T_0), \quad \textit{pour tout } \; T > T_0 > 0.$$

Preuve. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ fixé on voit que

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx = \int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|\leq 1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx + \int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|>1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx.$$

Notez également qu'il existe une constante $c \geq 0$ tel que

$$\int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|\leq 1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \leq c\left(\int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|\leq 1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\right)^{\frac{2}{p(x)}}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx &\leq c\left(\int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|\leq 1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx\right)^{\frac{2}{p(x)}} + c\int_{|\frac{\partial u}{\partial t}|>1}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx \\
&\leq c(-E'(t))^{\frac{2}{p(x)}} - c.E'(t),
\end{aligned}$$

donc

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt$$

$$\leq c\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p(x)}}dt - c\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)E'(t)dt.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$c\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)(-E'(t))^{\frac{2}{p(x)}}dt$$

$$\leq c\frac{p(x)-2}{p(x)}\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)dt + c\frac{2}{p(x)}\int_{T_0}^{T}(-E'(t))dt$$

$$\leq \varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt + c(\varsigma)E(T_0).$$

donc, on trouve

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)dt\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dxdt \leq \varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt + c(\varsigma)E(T_0) + cE^{\frac{p(x)}{2}}(T_0).$$

□

Lemme 2.3.6 *L'énergie $E(\cdot)$ satisfait l'estimation suivante, pour tout $\varsigma > 0$*

$$\left|\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\right| \leq \varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt + c(\varsigma)E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0). \tag{2.24}$$

Preuve. En appliquant l'inégalité de Young, on a

$$\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dx \leq \varsigma\int_{\Omega}|u|^2dx + c(\varsigma)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$\leq \varsigma\int_{\Omega} -udiv(\sigma^{p(x)}(u))dx + c(\varsigma)\int_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx$$

$$\leq \varsigma E(t) + c(\varsigma)(-E'(t)),$$

pour tout $\varsigma > 0$.

Donc en déduit que

$$\left|\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_{\Omega} u\frac{\partial u}{\partial t}dxdt\right| \leq \varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt + c(\varsigma)E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0),$$

pour tout $T > T_0 \geq 0$. □

Lemme 2.3.7 *Pour tout $T > T_0 \geq 0$, on a l'estimation suivante*

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt \leq c\left(1 + E^{\frac{p(x)-2}{2}}(0)\right)E(T_0).$$

Preuve. Par (2.23) et (2.24), on obtient

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega\left(2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx-\beta u\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdt$$

$$\leq 2\varsigma\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt+c(\varsigma)E(T_0)+c(\varsigma)E^{\frac{p(x)}{2}}(T_0),$$

on choisit $\varsigma=\frac{1}{4}$ on trouve

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)-2}{2}}(t)\int_\Omega\left(2+\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 dx-\beta u\frac{\partial u}{\partial t}\right)dxdt \tag{2.25}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt+cE^{\frac{p(x)}{2}}(T_0).$$

Maintenant, utilisant l'inégalité (2.25) et (2.22), on obtient

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt\leq\frac{1}{2}\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt+cE^{\frac{p(x)}{2}}(T_0),\quad 0\leq T_0<T,$$

ce qui implique que

$$\int_{T_0}^{T} E^{\frac{p(x)}{2}}(t)dt\leq c\left(1+E^{\frac{p(x)-2}{2}}(T_0)\right)E(T_0)$$

$$\leq c\left(1+E^{\frac{p(x)-2}{2}}(0)\right)E(T_0).$$

Le Lemme 2.3.1 et 2.3.7 preuve que $E:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante et vérifier le inégalité suivante

$$\int_{t}^{\infty} E^{\frac{p^+}{2}}(s)ds\leq cE^{\frac{p^+-2}{2}}(0)E(t),\ \ \forall t>0. \tag{2.26}$$

□

Théorème 2.3.2 ***(Stabilité des solutions)*** *Il existe deux constantes positives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ telles que la solution du problème (2.1) et (2.4) vérifie l'estimation suivante*

$$E(t)\leq\mathcal{C}t^{\frac{-2}{p^+-2}},\quad\forall t\geq 0,\quad si\quad p^+>2,$$

et

$$E(t)\leq E(0)\exp(1-\mathcal{D}t),\quad\forall t\geq 0,\quad si\quad p^+=2,$$

où la constante $\mathcal{C}$ dépend de l'énergie initiale $E(0)$ et la constante $\mathcal{D}$ indépendante de $E(0)$.

Preuve. La preuve se fait directement par application du lemme 2.3.2 et l'inégalité (2.26).
□

Chapitre 3

L'existence et la stabilité des solutions de l'équation de viscoélastique non linéaire à exposant variable.

Résumé. Dans ce chapitre, nous considérons un système viscoélastique dans un domaine tridimensionnel avec terme source non linéaire à exposant variable. Ce type de problème apparait dans de nombreuses applications telles que la dynamique des fluides, les fluides électro rhéologiques qui montrent un changement de viscosité lorsqu'un champ électrique est appliqué, en plus de la mécanique de l'élasticité et de la viscosité.
Nous donnons le résultat de l'existence des solutions faibles, puis nous étudions la stabilité des solutions.

Contenu

3.1 Position du problème et formulation variationnelle

Soit Ω domaine ouvert et borné dans $\mathbb{R}^3$. La frontière $\partial\Omega$ de Ω est supposé régulière. Pour $x \in \Omega$ et $t \in]0,T[$, on note $u(x,t)$ le champ de déplacement tel que $u : \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Les équations régissant la déformation d'un corps viscoélastique avec un terme source non linéaire a exposant variable dans un régime dynamique sont les suivantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu div(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) - \nu\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \lambda\nabla(div(u)) \tag{3.1}$$

$$+h(u) = f \quad \text{dans } \ \Omega\times]0,T[,$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \ \partial\Omega\times]0,T[, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \vartheta_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \vartheta_1(x),\ \forall x \in \Omega, \tag{3.3}$$

où $\nabla u = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $|\cdot|$ est la norme Euclidienne, f représente la densité de force, $p(\cdot)$ est l'exposante variable tel que $2 \leq p(\cdot)$; $\mu, \lambda > 0$ sont des constants de Lamé, ν est le coefficient de viscosité et $h(\cdot)$ un terme source non linéaire.

• **Hypothèse sur le terme source** $h(\cdot)$. Supposant que $h(u) = (h_i(u_i))_{1\leq i\leq 3}$ est un terme non linéaire caractérisé par des fonctions continues $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ satisfaisant

$$h_i(u)u \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Il existe une constante $\beta > 0$ tel que

$$|h_i\,(u)\,| \leq \beta\left(1 + |u|^{p(x)-2}\right)|u|, \quad \forall u \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

On note aussi $H(\cdot) = \sum_{i=1}^{3} H_i(\cdot)$ tel que

$$H_i(u) = \int_0^u h_i(v)dv > 0, i = 1, 2, 3,$$

avec

$$|H_i(u)| \leq \beta_0|u|^{p(x)}, \quad \forall u \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3.$$

Remarque 3.1.1 *Comme un exemple du terme source, nous pouvons prendre*

$$h(u) = h_i(u_i)_{1\leq i\leq 3} = \left(\alpha|u_i|^{p(x)-2}u_i\right)_{1\leq i\leq 3}$$

Maintenant, nous dérivons la formulation variationnelle du problème.
Nous multiplions l'équation (3.1) par une fonction test ϕ, et intégrant sur Ω, puis en utilisant la formule de Green, on obtient la formulation variationnelle suivante
Trouver $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3$, pour tout $\phi \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3$ et pour tout $t \in]0, T[$ tel que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \phi\right) + \mu a_{p(x)}(u, \phi) + \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla \phi\right) + \lambda(div(u), div(\phi)) \tag{3.5}$$

$$+(h(u), \phi) = (f, \phi),$$

$$u(x, 0) = \vartheta_0(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \vartheta_1(x), \ \forall x \in \Omega,$$

où

$$a_{p(x)}(u, v) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u : \nabla v dx,$$

avec

$$\nabla u : \nabla v := \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} . \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

On désigne aussi par $\mathcal{A}(\cdot)$ l'opérateur non linéaire

$$\mathcal{A} : W_0^{1,p(x)} \to W^{-1,q(x)}(\Omega)^3$$
$$u \longrightarrow \mathcal{A}(u),$$

tel que

$$(\mathcal{A}(u), v) = a_{p(x)}(u, v), \quad \forall \ v \in W_0^{1,p(x)},$$

et

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

Théorème 3.1.2 *Sous les hypothèse*

$$f \in L^2(0, T, L^2(\Omega)^3), \quad \vartheta_0 \in W^{1,p(x)}(\Omega)^3, \quad \vartheta_1 \in L^2(\Omega)^3,$$

il existe une solution faible u de (3.5) tel que

$$u \in L^\infty(0, T, W^{1,p(x)}(\Omega)^3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, W^{1,2}(\Omega)^3),$$

$$h(u) \in L^2(0, T, L^{q(x)}(\Omega)^3).$$

Preuve. Nous utilisons la méthode standard de Faedo-Galerkin comme dans le chapitre 2.

Introduisez une suite de fonctions $(v_j)_j$ ayant les propriétés suivantes :

• $\forall j \in \{1, ..., m\}$; $v_j \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

• La famille $\{v_1; v_2; ...; v_m\}$ est linéairement indépendante.

• L'espace $V_m = [v_j]_{1\leq j\leq m}$ engendré par la famille $\{v_1; v_2; ...; v_m\}$, est dense dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Soit $u_m = u_m(t)$ une solution approchée du problème (3.5) tel que

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^m(t) v_i \,,$$

qui satisfait le système d'équations

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, v_j\right) + \mu\left(\mathcal{A}(u_m), v_j\right) + \nu\left(\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}, \nabla v_j\right) + \lambda\big(\operatorname{div}(u_m), \operatorname{div}(v_j)\big) + \\ &(h(u_m), v_j) = (f, v_j)\,, \qquad 1 \leq j \leq m,\end{aligned} \tag{3.6}$$

qui est un système non linéaire d'équations différentielles ordinaires et sera complété par les conditions initiales suivantes

$$u_m(x,0) = \vartheta_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \omega_i^m(0) v_i \to \vartheta_0\,, \quad \text{quand } \ m \to \infty \ \text{ dans } W^{1,p(x)}(\Omega)^3, \tag{3.7}$$

et

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}(x,0) = \vartheta_{1m} = \sum_{i=1}^{m} \left(\omega_i^m\right)'(0) v_i \to \vartheta_1\,, \quad \text{quand } \ m \to \infty \ \text{ dans } \ L^2\left(\Omega\right)^3. \tag{3.8}$$

En multipliant l'équation (3.6) par $\left(\omega_i^m\right)'(t)$ et en faisant la sommation sur $j = 1$ à m, on trouve

$$\begin{aligned}&\big(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, \frac{\partial u_m}{\partial t}\big) + \mu\big(\mathcal{A}(u_m), \frac{\partial u_m}{\partial t}\big) + \nu\big(\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}, \nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\big) + \\ &\lambda\big(\operatorname{div}(u_m), \operatorname{div}\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\big) + \big(h\left(u_m\right), \frac{\partial u_m}{\partial t}\big) = \big(f, \frac{\partial u_m}{\partial t}\big).\end{aligned} \tag{3.9}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned}&\mu\big(\mathcal{A}(u_m), \frac{\partial u_m}{\partial t}\big) + \lambda\big(\operatorname{div}(u_m), \operatorname{div}\left(\frac{\partial u_m}{\partial t}\right)\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg(\frac{\mu}{p(x)}\left\|\nabla u_m\right\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}^{p(x)} + \frac{\lambda}{2}\left\|\operatorname{div}(u_m)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\bigg).\end{aligned} \tag{3.10}$$

En insérant l'équation (3.10) dans l'équation (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mu}{p(x)}\|\nabla u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}+\frac{\lambda}{2}\|\mathrm{div}(u_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\&+\nu\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega H\big(u_m(t)\big)\mathrm{d}x=\big(f,\frac{\partial u_m}{\partial t}\big),\end{aligned}$$

en intégrant la dernière équation sur $]0,t[$ et en utilisant à la fois les inégalités de Hölder et de Young, on en déduit

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}+\frac{\mu}{p(x)}\|\nabla u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}+\nu\int_0^t\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}\mathrm{d}s\\&+\int_\Omega H\big(u_m(x,t)\big)\mathrm{d}x\\\leq\ &\|\vartheta_{1m}\|^2_{L^2(\Omega)^3}+\frac{1}{p^-}\|\vartheta_{0m}\|^{p(x)}_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3}+\frac{\lambda}{2}\|\vartheta_{0m}\|^2_{W^{1,2}(\Omega)^3}+\int_\Omega H(\vartheta_{0m})\mathrm{d}x\\&+\int_0^t\|\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s+\int_0^t\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Donc, il existe une constante $C_T>0$ (indépendante de m) telle que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}+\frac{\mu}{p(x)}\|\nabla u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}+\nu\int_0^t\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}\mathrm{d}s\\&+\int_\Omega H\big(u_m(x,t)\big)\mathrm{d}x\\&\leq\int_0^t\|\frac{\partial u_m}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s+C_T,\end{aligned}\tag{3.11}$$

en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}\leq C_T.\tag{3.12}$$

Par conséquent (3.11), donne

$$\|\nabla u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}+\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{3\times 3})}\mathrm{d}s\leq C_T.\tag{3.13}$$

D'autre part, à partir de la condition (3.4), on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega\big|h\big(u_m(x,t)\big)\big|^{q(x)}\mathrm{d}x\ &\leq\ C\Big(\|u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3}+\|u_m\|^{q(x)}_{L^{q(x)}(\Omega)^3}\Big)\\&\leq\ C_{q^+}\|u_m\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^3},\end{aligned}$$

par l'estimation (3.13), on obtient

$$\int_{\Omega} \left|h\big(u_m(x,t)\big)\right|^{q(x)} \mathrm{d}x \leq C. \tag{3.14}$$

Les estimations (3.12), (3.13) et (3.14) impliquent

$$\begin{aligned}
&u_m \text{ borné dans } L^2\big(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3\big),\\
&\frac{\partial u_m}{\partial t} \text{ borné dans } L^2\big(0,T;W^{1,2}(\Omega)^3\big),\\
&h(u_m) \text{ borné dans } L^2\big(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3\big),
\end{aligned}$$

de cela, on en déduit qu'il peut extraire une sous-suite u_m telle que

$$\begin{aligned}
&u_m \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2\big(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3\big),\\
&\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{dans } L^\infty\big(0,T;L^2(\Omega)^3\big),\\
&h(u_m) \rightharpoonup \zeta \quad \text{dans } L^2\big(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3\big),\\
&\mathcal{A}(u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{dans } L^2\big(0,T;W^{-1,q(x)}(\Omega)^3\big).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

On a les suites u_m, $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ sont bornées dans $L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$, donc par la compacité Lemme des Lions [16], on peut en déduire

$$u_m \overset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u \quad \text{dans } L^2\big(0,T;L^2(\Omega)^3\big).$$

Comme $h(u_m)$ est une borne dans $L^2\big(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3\big)$ et $u_m \overset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u$ dans $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)^3\right)$, on obtient

$$\zeta = h(u) \quad \text{dans } L^2\big(0,T;L^{q(x)}(\Omega)^3\big).$$

De (3.15), il résulte

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v_j\Big) \overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup} \Big(\frac{\partial u}{\partial t}, v_j\Big) \quad \text{dans } L^2\big(]0,T[\big),\\
&\big(\mathcal{A}(u_m), v_j\big) \overset{\text{faible étoile}}{\rightharpoonup} \big(\chi, v_j\big) \quad \text{dans } L^\infty\big(]0,T[\big),
\end{aligned}$$

aussi

$$\Big(\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}, v_j\Big) \rightharpoonup \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v_j\Big) \quad \text{dans } \mathcal{D}'\big(]0,T[\big).$$

Alors, en utilisant la densité de V_m dans $W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3$ et les résultats de convergences (3.15), on passe à la limite quand $m \to \infty$, dans (3.6), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi\Big) + \mu(\chi, \varphi) + \nu\Big(\nabla\frac{\partial u}{\partial t}, \nabla\varphi\Big) + \lambda\big(\operatorname{div}(u), \operatorname{div}(\varphi)\big) + \big(h(u), \varphi\big) = (f, \varphi).$$

Par conséquent u satisfait

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu\chi - \nu\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\nabla \mathrm{div}\,(u) + h\,(u) = f. \tag{3.16}$$

Prouvons maintenant que

$$\chi = \mathcal{A}\,(u)\,.$$

A partir du problème approché (3.6), on a

$$\begin{aligned}
&\mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(u_m\,(s))\,, u_m\,(s)\,\big)\mathrm{d}s = -\big(\frac{\partial u_m}{\partial t}\,(t)\,, u_m\,(t)\,\big) + (\vartheta_{1,m}, \vartheta_{0,m}) \\
&+ \int_0^t \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left\|\nabla\vartheta_{0,m}\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} - \frac{1}{2}\left\|\nabla u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \\
&- \int_0^t \big(h\,(u_m\,(s))\,, u_m\,(s)\,\big)\mathrm{d}s + \int_0^t \big(f\,(s)\,, u_m\,(s)\,\big)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

alors, pour tout $v \in L^2\left(0, T; W_0^{1,p(x)}\,(\Omega)^3\right)$ on a

$$\begin{aligned}
&\mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(u_m\,(s)) - \mathcal{A}\,(v\,(s))\,, u_m\,(s) - v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s = -\big(\frac{\partial u_m}{\partial t}\,(t)\,, u_m\,(t)\,\big) \\
&+ (\vartheta_{1,m}, \vartheta_{0,m}) + \int_0^t \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\left\|\nabla\vartheta_{0,m}\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \\
&- \frac{1}{2}\left\|\nabla u_m\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} - \int_0^t \big(h\,(u_m\,(s))\,, u_m\,(s)\,\big)\mathrm{d}s + \int_0^t \big(f\,(s)\,, u_m\,(s)\,\big)\mathrm{d}s \\
&- \mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(u_m\,(s))\,, v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s - \mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(v\,(s))\,, u_m\,(s) - v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats de convergence, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup \mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(u_m\,(s)) - \mathcal{A}\,(v\,(s))\,, u_m\,(s) - v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s \leq -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,(t)\,, u\,(t)\right) \\
&+ (\vartheta_1, \vartheta_0) + \int_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\,(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3} ds + \frac{1}{2}\left\|\nabla\vartheta_0\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} - \frac{1}{2}\left\|\nabla u\,(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \\
&- \int_0^t \big(h\,(u\,(s))\,, u\,(s)\,\big)\mathrm{d}s + \int_0^t \big(f\,(s)\,, u\,(s)\,\big)\mathrm{d}s - \mu\int_0^t \big(\chi, v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s \\
&- \mu\int_0^t \big(\mathcal{A}\,(v\,(s))\,, u\,(s) - v\,(s)\,\big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant l'équation (3.16) par u, puis en intégrant sur $\Omega\times]0,t[$ et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\mu\int_0^t \big(\chi, u(s)\big)\mathrm{d}s = \big(\frac{\partial u}{\partial t}(t), u(t)\big) - (\vartheta_1, \vartheta_0) - \int_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^3}\mathrm{d}s \\
&-\frac{1}{2}\|\nabla\vartheta_0\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} + \int_0^t \big(h(u(s)), u(s)\big)\mathrm{d}s \\
&-\int_0^t \big(f(s), u(s)\big)\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Puisque $\mathcal{A}(\cdot)$ est un opérateur monotone, cela implique que

$$
\int_0^t \big(\chi - \mathcal{A}(v(s)), u(s) - v(s)\big)\mathrm{d}s \geq 0, \tag{3.17}
$$

posons $v(s) = u(s) - \alpha w(s)$, tel que $w(s) \in L^2\big(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3\big)$ et $\alpha > 0$, alors (3.17) devient

$$
\int_0^t \big(\chi - \mathcal{A}(u(s) - \alpha w(s)), w(s)\big)\mathrm{d}s \geq 0,
$$

en utilisant l'hémicontinuité de $\mathcal{A}(\cdot)$, nous concluons que

$$
\chi = \mathcal{A}\big(u(s)\big).
$$

Pour traiter les conditions initiales, nous remarquons que

$$
\begin{aligned}
&u \in L^2\big(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3\big), \\
&\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\big(0,T; L^2(\Omega)^3\big).
\end{aligned}
$$

Donc, en utilisant le Lemme du Lions dans [16] et (3.7), on obtient facilement

$$
u(x,0) \rightharpoonup \vartheta_0(x).
$$

Pour la deuxième condition, pour tout $\varphi(s) \in L^2\big(0,T; W_0^{1,p(x)}(\Omega)^3\big)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left|\big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s), \varphi(s)\big)\right|\mathrm{d}s \leq \mu\int_0^T \left|\big(\mathcal{A}(u(s)), \varphi(s)\big)\right|\mathrm{d}s \\
&+\nu\int_0^T \left|\big(\nabla\frac{\partial u}{\partial t}(s), \nabla\varphi(s)\big)\right|\mathrm{d}s + \int_0^T \left|\big(\operatorname{div}(u(s)), \operatorname{div}(\varphi(s))\big)\right|\mathrm{d}s \\
&+\int_0^T \left|\big(h(u(s)), \varphi(s)\big)\right|\mathrm{d}s + \int_0^T \left|\big(f(s), \varphi(s)\big)\right|\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev, on obtient

$$\int_0^T \left|\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s), \varphi(s)\right)\right| \mathrm{d}s \leq c \int_0^T \Bigg(\|\nabla u(s)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} + \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s)\right\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}$$
$$+ \|\operatorname{div}(u(s))\|_{L^2(\Omega)} + \|h(u(s))\|_{L^{q(x)}(\Omega)^3} + \|f(s)\|_{L^2(\Omega)^3}\Bigg) \|\varphi(s)\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)^3} \mathrm{d}s,$$
$$\leq c \|\varphi\|_{L^2\left(0,T;W^{1,p(x)}(\Omega)^3\right)},$$

cela signifie que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2\big(0, T; W^{-1,q(x)}(\Omega)^3\big).$$

En rappelant que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2\big(0, T; L^2(\Omega)^3\big)$, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in C\big(0, T; W^{-1,q(x)}(\Omega)^3\big).$$

Donc, $\frac{\partial u_m}{\partial t}(x, 0)$ a du sens et

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}(x, 0) \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \quad \text{dans } W^{-1,q(x)}(\Omega)^3.$$

Mais, à partir de (3.8) nous avons

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}(x, 0) \to \vartheta_1(x) \ \text{ dans } L^2(\Omega)^3,$$

ce qui implique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \vartheta_1(x).$$

La preuve du Tthéorème (3.1.2) est terminée.

□

3.2 Étude de la stabilité des solutions

Nous allons maintenant étudier la stabilité de la solution du problème (3.1)-(3.3) avec $f = 0$. Pour cela, on définit l'énergie du problème par la relation

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\mu}{p(x)}\|\nabla u(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} + \frac{\lambda}{2}\|div(u(t))\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega H(u(t))dx.$$

Lemme 3.2.1 *L'énergie $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante pour tout $t \geq 0$.*

Preuve. On choisit $\phi = \frac{\partial u(s)}{\partial t}$ dans (3.5), on obtient

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \frac{\nu}{2} \|\nabla \frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} ds,$$

c'est-à-dire

$$E'(t) = -\frac{\nu}{2} \|\nabla \frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.18}$$

□

Théorème 3.2.1 ***(Existence globale)*** *Sous les hypothèse du Théorème 3.1.2, la solution du problème (3.1)-(3.3) satisfait*

$$u \in C(\mathbb{R}_+, W^{1,p(x)}(\Omega)^3), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\mathbb{R}_+, W^{1,2}(\Omega)^3).$$

Preuve. On a u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ vérifie l'égalité (3.18), donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} + \frac{\mu}{p(x)} \|\nabla u(t)\|^{p(x)}_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}} + \frac{\lambda}{2} \|div(u(t))\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \int_\Omega H(u(x,t))dx + \frac{1}{2}\nu \int_0^t \|\nabla \frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \\
&\quad \leq E(0), \quad \forall t \geq 0,
\end{aligned}$$

cette estimation est indépendante de t. □

Lemme 3.2.2 ([20]) *Soit $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et vérifie l'estimation suivante*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E^{\nu+1}(s) \leq K \left(E(t) - E(t+1) \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

avec $\nu \geq 0$ et $K > 0$ sont deux constantes positives. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

$$E(t) \leq c(1+t)^{-1/\nu}, \quad si \quad \nu > 0,$$

et

$$E(t) \leq c \exp(-\alpha t), \quad si \quad \nu = 0,$$

où c et α sont deux constantes positives indépendante de t.

Théorème 3.2.2 ***(Stabilité des solutions)*** *Soit* $E(\cdot)$ *l'énergie associe au problème* (3.1)-(3.3). *Sous les hypothèse du Théorème* (3.1.2) *avec*

$$h(u)u - H(u) \geq 0,$$

l'énergie du problème (3.1)-(3.3) *vérifie l'estimation*

$$E(t) \leq c(t+1)^{\frac{-p^+}{p^+-2}}, \; si \;\; p^+ > 2,$$

et

$$E(t) \leq c\exp(-\alpha t), \; si \; p^+ = 2,$$

pour tout $t \geq 0$, *où* c *et* α *sont constantes positives indépendante de* t.

Preuve. Dans la suite, on note par c un constante positive générique, qui a des différentes valeurs.
D'abord, on a

$$E'(t) = \frac{-\nu}{2} \|\nabla \frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}},$$

En intégrant de t à $(t+1)$, on obtient

$$E(t+1) - E(t) = -\frac{\nu}{2} \int_t^{t+1} \|\nabla \frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} ds. \tag{3.19}$$

D'autre part, utilisant l'inégalité de Poincaré, on trouve

$$\int_t^{t+1} \|\nabla \frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} \geq c \int_t^{t+1} \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3} ds, \tag{3.20}$$

en appliquant le théorème de la moyenne, il existe $t \leq t_1 \leq t + \frac{1}{3}$ et $t + \frac{2}{3} \leq t_2 \leq t+1$ tel que

$$\|\frac{\partial u(t_i)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)^3} \leq c \left(\int_t^{t+1} \|\nabla \frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}} ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2. \tag{3.21}$$

Maintenant, remplaçons ϕ par $u(t)$ dans la formulation variationnelle du problème (3.5), on obtient

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u\right) + a_{p(x)}(u,u) + \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla u\right) + \lambda(div(u), div(u)) + (h(u), u) = 0,$$

utilisant le fait que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u(t)}{\partial t}, u(t)\right) - \|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3},$$

on obtient
$$\int_{t_1}^{t_2} a_{p(x)}((u(t),u(t))dt+\lambda\int_{t_1}^{t_2}(div(u(t),div(u(t))dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}(h(u(t)),u(t))dt$$
$$=\left(\frac{\partial u(t_1)}{\partial t},u(t_1)\right)-\left(\frac{\partial u(t_2)}{\partial t},u(t_2)\right)$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(\nabla\frac{\partial u(t)}{\partial t},\nabla u(t)\right)dt.$$
Donc, par l'inégalité de Hölder, on obtient
$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds\leq\sum_{i=1}^{2}\|\frac{\partial u(t_i)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)^3}\|u(t_i)\|_{L^2(\Omega)^3}+\int_t^{t+1}\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}ds$$
$$+\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}.\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds$$
$$\leq\sum_{i=1}^{2}\|\frac{\partial u(t_i)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)^3}\|u(t_i)\|_{L^2(\Omega)^3}+\int_t^{t+1}\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^3}ds$$
$$+\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
Maintenant, en utilisant l'injection Sobolev et (3.20), on a
$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds \tag{3.22}$$
$$+c\sum_{i=1}^{2}\|\frac{\partial u(t_i)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega)^3}\|\nabla u(t_i)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}$$
$$+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(s)\|_{L^2(\Omega)^{3\times 3}},$$
en combinant l'inégalité (3.21) dans (3.22), on obtient
$$\int_{t_1}^{t_2} E(s)ds\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds$$
$$+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{3}\|\nabla u(t_i)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}}\right)$$

$$+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_{L^{p(x)}(\Omega)^{3\times 3}},$$

par conséquent

$$\int_{t_1}^{t_2}E(s)ds\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds \tag{3.23}$$

$$+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}(E(t))^{\frac{1}{p^+}},$$

par la monotone de $E(t)$, on a

$$E(t+1)\leq 2\int_{t_1}^{t_2}E(s)ds. \tag{3.24}$$

Alors, en utilisant (3.24) et le fait que

$$E(t+1)=E(t)-\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds.$$

On déduit que

$$E(t)\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds$$

$$+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{1}{2}}(E(t))^{\frac{1}{p^+}}.$$

Maintenant, utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$E(t)\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds+c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{p^+}{2(p^+-1)}}. \tag{3.25}$$

Donc, on a deux cas

1. Si $p^+=2$, donc

$$E(t)\leq c\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds,$$

en utilisant (3.19) et le lemme 3.2.2, on trouve

$$E(t)\leq c\exp(-\alpha t),\ \ \forall t\geq 0.$$

2. Si $p^+\geq 2$ on utilise la bornitude de $\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds$ et l'inégalité (3.25), on trouve

$$E(t)\leq c\Big(\int_t^{t+1}\|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{L^2(\Omega)^{3\times 3}}ds\Big)^{\frac{p^+}{2(p^+-1)}},$$

ceci implique que

$$(E(t))^{1+\frac{p^+-2}{p^+}} \leq c(E(t)-E(t+1)).$$

On appliquant le lemme 3.2.2, on obtient un constante c tel que

$$E(t) \leq c(1+t)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}, \forall t \geq 0.$$

$\square$

Conclusion

Ce mémoire représente une contribution à l'étude de la stabilité des solutions de quelques problèmes aux limites non linéaires avec des exposants variables.
Dans ce mémoire, nos résultats concernant l'existence et la stabilité des solutions des systèmes hyperboliques non linéaires avec des exposants variables sont prouvés.
Dans la première étude, nous avons prouvé l'existence globale et la stabilité des solutions faibles pour l'équation d'élasticité généralisé en présence d'un terme source à exposant variable et d'un terme amortissement.
Dans la seconde étude, nous avons obtenu l'existence globale et la stabilité des solutions faibles pour l'équation viscoélastique avec un terme source à exposant variable .

Bibliographie

[1] S.N. Antontsev, S.I. Shmarev, *Existence and uniqueness of solutions of degenerate parabolic equations with variable exponents of nonlinearity*, J. of Math. Sciences, **150** (2008), 2289-2301.

[2] S. Antontsev, *Wave equation with $p(x,t)$-Laplacian and damping term : existence and blow-up*, J. Difference Equ. Appl. **3** (2011), 503-525. 3, 387-411.

[3] M.M. Boureanu, A. Matei, M. Sofonea, *Nonlinear problems with $p(\cdot)$-growth conditions and applications to antiplane contact models*, Advanced Nonlinear Studies. **14** (2014), 295-313.

[4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson. Parie.New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[5] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), 1383-1406.

[6] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011.

[7] M. Dilmi, S. Otmani, *Existence and asymptotic stability for generalized elasticity equation with variable exponent. Opuscula Math. 43* (2023).

[8] X. Fan, D. Zhao, *On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 424-446.

[9] X. L. Fan, D. Zhao, *On the generalised Orlicz-Sobolev Space $W^{k,p(x)}(\Omega)$*, Journal of Gansu Education College. **12** (1998), no. 1, 1-6.

[10] M. Gaczkowski, P. Górka, D.J. Pons, *Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids*, Mathematical methods in the applied sciences. **33** (2010), no. 2, 125-137.

[11] S. Ghegal, I. Hamchi, SA. Messaoudi, Globalexistence and stability of a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities, Appl Anal. 99(2020), no. 8, 1333-1343.

[12] P. Gwiazda, F.Z. Klawe, A. Świerczewska-Gwiazda, *Thermo-viscoelasticity for Norton-Hoff-type models*, Nonlinear Analysis : Real World Applications. **26** (2015), 199-228.

[13] O. Kavian, *Introduction à la théorique des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Velarg.France, Parie, 1993.

[14] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Elsevier Masson. **36** (1994).

[15] W. Lian, V.D. Rădulescu, R. Xu, Y. Yang, N. Zhao, *Global well-posedness for a class of fourth-order nonlinear strongly damped wave equations*, Adv. Calc. Var. **14** (2021), no. 4, 589-611.

[16] L. J. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1966.

[17] T. F. Ma, J. A. Soriano, *On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications **37** (1999), 1029-1038.

[18] SA. Messaoudi, AA. Talahmeh, *A blow-up result for a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities*, Appl Anal. **96** (2017), 1509-1515.

[19] SA. Messaoudi, JH. Al-Smail, AA. Talahmeh, *Decay for solutions of a nonlinear damped wave equation with variable-exponent nonlinearities*, Comput Math Appl. **76** (2018), 1863-1875.

[20] M. Nakao, *Existence of Global Smooth Solutions to the Initial-Boundary Value Problems for the Quasi-Linear Wave Equation with a Degenerate Dissipative Term.* J. Differential Equations 98 (1992), 229-327.

[21] S. Otmani, S. Boulaaras, A. Allahem, *The maximum norm analysis of a nonmatching grids method for a class of parabolic $p(x)-$Laplacian equation*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática. **40** (2022), 1-13.

[22] A. Rahmoune, *On the existence, uniqueness and stability of solutions for semi-linear generalized elasticity equation with general damping term*, Acta Mathematica Sinica, English Series Nov. **33** (2017), no. 11, 1549-1564.

[23] V. Rădulescu, D. Repovs, *Partial Differential Equations with Variable Exponents : Variational Methods and Quantitative Analysis*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton FL, 2015.

[24] M. Ružicka, *Electrorheological Fluids : Modeling and Mathematical Theory*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2000.

[25] V.V. Zhikov, *On the density of smooth functions in Sobolev-Orlicz spaces*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **310** (2004), 67-81.

[26] L. Sun, Y. Ren, W. Gao, *Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources*. Comput Math Appl. 71 (1) (2015), 267-277.

[27] E. Zuazua, *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems*. Assymptotic Analysis.,1 :161-185, 1988.