

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

LA REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Saad Dahlab Blida 1

Institut d'Aéronautique et des Études Spatiales

Département Construction Aéronautique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Aéronautique

Option : Avionique

*Contrôle optimale et robuste du vol en  
formation des satellites*

Proposé et dirigé par :

*Dr. Dilmi*

Réalisé par :

Mlle. Haddad liza

*Promotion: 2022 / 2023*

## *Remerciement*

En premier lieu, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers ALLAH, le Tout-Puissant, qui m'a donné la force et la volonté de mener à bien ce modeste travail.

Je souhaite également exprimer ma sincère reconnaissance envers mon promoteur, Mr. DILMI SMAIN, qui a proposé et supervisé ce travail, pour ses précieux conseils et son suivi attentif.

Mes remerciements les plus chaleureux vont également à monsieur le président et aux membres du jury pour avoir évalué mon travail avec expertise et m'avoir honoré de leur présence.

Enfin, je tiens à exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail. Vos efforts ont été inestimables.

Que tous ceux et celles qui ont partagé ce voyage avec moi trouvent ici l'expression de mes remerciements les plus sincères.

## **Dédicace :**

*Enfin ce jour si attendue est venu hamdoulah, ce jours ou je peux dire que je suis devenue ingénieure en aéronautique grâce à la bonté divine mais aussi grâce aux prunelles de mes yeux ma maman et mon père.*

*Je dis un grand merci à dame d'acier 'd'Akbou ma maman Bassima, tu sais il n'était pas facile d'aller au bout de ce mémoire surtout que je n'avais pas reçu le soutien académique nécessaire mais quand je repensais aux nuits blanches que nous faisons ensemble pour faire de merveilleux projets quand j'étais enfant je ne pouvais pas renoncer à mon diplôme. Et hamdoulah aujourd'hui tu peux me voir comme ingénieure et dans pas longtemps ta pilote comme tu le voulais. Alors il est tout naturelle de te dédie ce travail à toi ma biche.*

*A toi mon papa mon héros Kamel , quand je pense aux centaines de kilomètres que tu faisais rien que pour me ramener à l'université à l'heure pour ne pas manquer à aucune de mes séances. Je te dis merci dûment.*

*Mon frère mon joyeux Amine merci d'avoir était présent avec moi durant ce mémoire malgré ton bac je suis très fière de t'avoir comme frère.*

*A mes sœurs Kamilia, Amel, Miral. Sans oublier mes neveux Abd el Moumen et Princesse Amira.*

---

## Listes des figures :

### Chapitre 1 :

Figure 1.1 : Vue d'ensemble de la composition d'un satellite.....19

Figure 1.2 : Comparaison de la masse et du coût de certains satellites. Les deux paramètres sont reliés par une relation presque linéaire.....21

### Chapitre 2 :

Figure 2.1 : Interactions gravitationnelles dans un référentiel inertiel.....31

Figure 2.2 : Dimensions géométriques communes à toutes les sections coniques.....38

Figure 2.3: les éléments orbitaux.....39

Figure 2.4 : représentation de l'anomalie vraie, excentrique, et l'anomalie moyenne.....40

Figure 2.5 : le référentielle LVLH.....43

Figure 2.6 : représentation de l'orbite du satellite chef et adjoint dans le repère ECI.....46

### Chapitre 3 :

Figure 3.1 : Algorithme de conception du contrôleur LQR.....58

Figure 3.2 : Contrôle LQR pour le Modèle Linéarisé du vol en formation des satellites.....59

Figure 3.3 : Les différents modes pour la trajectoire dans le plan de Phase.....62

Figure 3.4 : Principe de la commande en mode glissant avec commande équivalente.....64

Figure 3.5 : Représentation de la fonction « Sign».....65

Figure 3.6 : phénomène de chattering .....66

### Chapitre 4 :

Figure 4.1 : position ,vitesse ,force de contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....73

Figure 4.2 : position vitesse en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0$ )....74

Figure 4.3 : force de contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....74

Figure 4.4 : Trajectoire du DS dans le plan xy.....75

Figure 4.5 : trajectoire du DS en 3D (lqr) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....76

Figure 4.6 : vitesse en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....76

---

Figure 4.7 : position en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	77
Figure 4.8 : force de contrôle en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	77
Figure 4.9 : configuration 3D de la trajectoire du DS(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	78
Figure 4.10 : position, vitesse, contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	79
Figure 4.11 : Position du satellite suiveur SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0$ ).....	80
Figure 4.12:Vitesse en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	80
Figure 4.13 : force de contrôle en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	81
Figure 4.14 : trajectoire 3D du suiveur SMC( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	81
Figure 4.15 : trajectoire du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	82
Figure 4.16 : position en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	82
Figure 4.17 : vitesse du satellite en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	83
Figure 4.18 : force de contrôle en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ ).....	83
Figure 4.19 : trajectoire du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	84
Figure 4.20 : position en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	84
Figure 4.21 : vitesse du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	85
Figure 4.22 : force de contrôle du satellite adjoint SMC( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	85
Figure 4.23 : position du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	86
Figure 4.24 : vitesse du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ ).....	86
Figure 4.25 : force de contrôle du satellite SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ )....	87
Figure 4.26 : trajectoire en 3D du satellite suiveur SMC( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100\text{km}, e = 0.05$ ).....	87

---

## Liste des tableaux :

### Chapitre 1 :

Tableau 1.1 : Types d'architectures de missions distribuées.....21

### Chapitre 2 :

Tableau 2.1 : inclinaisons opérationnelles usuelles.....41

### Chapitre 4 :

Tableau 4.1 : les paramètres orbitaux du satellite chef .....70

Tableau 4.2 : Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ ).....70

Tableau 4.3: Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0$ ).....71

Tableau 4.4: Scénario du satellite adjoint( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ ) .....71

Tableau 4.5: Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ ) .....72

Tableau 4.6 : comparaison entre les différentes commandes.....88

### Abréviations :

SFF : Satellite Formation Flying.

DS : Deputy satellite.

NASA : National Aeronautics and Space Administration.

ESA : Agence Spatiale Européenne.

ESTRACK : European Space Tracking.

ISRO : Indian Space Research Organization.

GEO : geostationary earth orbit.

LEO : Low Earth Orbit .

LVLH: local Vertical Local Horizontal.

ECI: Earth-Centered Inertial

LQR: linear Quadratic Regulator

SMC: sliding mode control

HCW : Hill-Clohessy-Wiltshire

RAAN :Right Ascension of the Ascending Node.

GNC :Guidance, Navigation and Control

### Notations:

$\mu = GM_{\oplus} = 3.986004710^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$  : Paramètre gravitationnel standard de la Terre.

$J_2 = 1.08187410^{-3}$  Paramètre harmonique de degré deux calculé à partir du modèle de la Terre de référence - WGS84.

$\vec{\rho}$  : Vecteur de position relative du poursuivant par rapport à la cible.

$\vec{v}$  : Vecteur de vitesse relative du poursuivant par rapport à la cible.

$\vec{r}_{\#}$  : Vecteur de position du satellite #.

$\vec{\omega}$  : Vecteur de vitesse angulaire.

$\vec{h}$  : Moment cinétique orbital.

$p$  : Paramètre conique de la trajectoire du satellite.

$n$  : Mouvement orbital moyen.

$t_p$  : Date de transition du périégée.

$a$  : demi-grand axe d'une orbite elliptique.

$\Omega$  : Ascension droite du nœud ascendant (RAAN)

$\omega$  : Argument du périégée.

$i$  : Inclinaison de l'orbite du satellite

$e$  : Excentricité de l'orbite du satellite

$v$  : Anomalie vraie.

$M$  : Anomalie moyenne.

$E$  : Anomalie excentrique.



# Table des matières

<i>Listes des figures :</i>	4
<i>Liste des tableaux :</i>	6
<i>Abréviations :</i>	7
<i>Notations:</i>	7
<i>Résumé</i>	13
<i>Introduction générale:</i>	14
<i>Chapitre 1 : Généralité sur le vol en formation des satellites</i>	15
<i>1 Introduction :</i>	16
<i>2 Définition du vol en formation :</i>	16
<i>3 Avantages du vol en formation des satellites :</i>	16
<i>4 Composants Clés des Satellites : Une Vue d'Ensemble</i>	16
4.1 Structure mécanique :	16
4.2 Sous système de propulsion :	17
4.3 Sous-système de contrôle thermique :	17
4.4 Sous-système d'alimentation électrique :	17
4.5 Sous-système de télémétrie, suivi et commandes (TT&C) :	18
4.6 Système de Contrôle de l'Attitude et de l'Orbite :	18
4.7 Charge utile :	18
4.8 Antennes :	19
<i>5 Typologie des satellites selon leur masse :</i>	19
5.1 Satellites de grande taille (plus de 1 000 kg) :	19
5.2 Satellites de taille moyenne (500 à 1 000 kg) :	19
5.3 Mini-satellites ont une masse comprise entre 100 et 500 kg :	20
5.4 Microsatellites	20
5.5 Nanosatellites	20
5.6 Cubesats	20
5.7 Pico satellites :	20
5.8 Femto satellites :	20
<i>6 Architectures Distribuées des Satellites</i>	21
<i>7 Architectures de Guidage :</i>	22
7.1 Guidage basé au sol :	22
7.2 Guidage autonome :	22

7.3	Architecture centralisée :	22
7.4	Architecture décentralisée :	23
<b>8</b>	<b>Architectures de contrôle :</b>	<b>23</b>
8.1	leader-suiveur :	23
8.2	Contrôle de formation basé sur le comportement des Satellites :	23
8.3	Structure virtuelle :	23
8.4	Contrôle coordonné :	24
<b>9</b>	<b>Regard sur les missions Passées et les Perspectives Futures :</b>	<b>24</b>
9.1	Science de la terre :	24
9.2	Démonstration technologique :	25
9.3	Observation de la terre :	26
9.4	Science planétaire :	26
	<b>Conclusion :</b>	<b>27</b>
	<b>Les références</b>	<b>27</b>
	<b>Chapitre 2: la dynamique orbitale des satellites</b>	<b>30</b>
<b>1</b>	<b>Introduction :</b>	<b>31</b>
<b>2</b>	<b>Problème des Deux Corps Képlérien :</b>	<b>31</b>
<b>3</b>	<b>Solution képlérien au problème à deux corps :</b>	<b>34</b>
<b>4</b>	<b>Paramètres orbitaux</b>	<b>36</b>
4.1	Forme de l'Orbite :	37
4.2	Position de l'orbite :	38
4.3	Position du satellite sur son orbite :	39
<b>5</b>	<b>Classification des orbites :</b>	<b>40</b>
5.1	Selon l'altitude :	40
5.2	Selon l'inclinaison	41
5.3	Selon l'excentricité :	41
<b>6</b>	<b>Etude de la dynamique relative des satellites :</b>	<b>42</b>
6.1	Relation entre le Problème Képlérien et la Dynamique Relative :	42
6.2	Référentiel de Hill :	43
6.3	Mouvement relatif de Clohessy-Wiltshire dans le repère de Hill	44
6.4	Les équations de la formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée	46
6.5	Équation de Clohessy-Wiltshire linéarisée:	47
<b>7</b>	<b>Perturbations :</b>	<b>48</b>

7.1	Perturbations Gravitationnel :	_____	48
7.2	Perturbations non Gravitationnel :	_____	50
<b>Conclusion :</b>			<b>51</b>
<b>Les références :</b>			<b>51</b>
<b>Chapitre 3: les techniques de contrôle du vol en formation</b>			<b>53</b>
1	<b>Introduction :</b>	_____	<b>54</b>
2	<b>Aperçue du contrôleur LQR :</b>	_____	<b>54</b>
3	<b>Commande optimale :</b>	_____	<b>54</b>
4	<b>Synthèse de la loi de commande LQR :</b>	_____	<b>55</b>
4.1	Cas linéaire :	_____	55
4.2	Cas non-linéaire :	_____	59
5	<b>Aperçue de la méthode du sliding mode :</b>	_____	<b>60</b>
5.1	Commande par mode de glissement:	_____	61
5.2	Système à structure variable :	_____	61
5.3	Principe de la commande par mode de glissement	_____	61
5.4	Conception de la commande par mode de glissement	_____	62
5.5	Choix de la surface de glissement	_____	62
5.6	Etablissement des conditions d'existence de convergence et d'invariance :	_____	63
5.7	Détermination de la loi de commande :	_____	64
5.8	Phénomène de Chattering :	_____	65
<b>Conclusion :</b>			<b>66</b>
<b>Référence:</b>			<b>66</b>
<b>Chapitre 4 : Etude en simulation</b>			<b>69</b>
1	<b>Introduction :</b>	_____	<b>70</b>
2	<b>Configuration de simulation :</b>	_____	<b>70</b>
2.1	Paramètres orbitaux du satellite chef :	_____	70
2.2	Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée :	___	70
2.3	Vol en formation en orbite circulaire avec une faible distance relative souhaitée :	___	71
2.4	Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.	___	71
2.5	Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée.	___	72
3	<b>Application de la commande LQR :</b>	_____	<b>73</b>
3.1	Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée :	___	73
3.2	Vol en formation en orbite circulaire avec une faible distance relative souhaitée :	___	74

3.3	Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.	___	76
3.4	Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée.	___	78
<b>4</b>	<b>Application du sliding mode contrôle :</b>	<b>_____</b>	<b>79</b>
4.1	Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.	___	80
4.2	Vol en formation en orbite circulaire avec une petite distance relative souhaitée.	___	82
4.3	Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée.	___	84
4.4	Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée	___	86
<b>5</b>	<b>Etude comparative :</b>	<b>_____</b>	<b>87</b>
	<b>Conclusion :</b>	<b>_____</b>	<b>88</b>
	<b>Conclusion générale :</b>	<b>_____</b>	<b>89</b>
	<b>Perspectives :</b>	<b>_____</b>	<b>90</b>

---

---

## Résumé

Ce mémoire explore le développement et l'application d'approches de contrôle optimales et robustes pour le suivi du mouvement de translation relatif entre deux engins spatiaux dans une formation chef-suiveur. Nous examinons quatre systèmes dynamiques distincts, couvrant à la fois des scénarios non linéaires et linéaires.

Dans le domaine non linéaire, nous examinons deux cas : l'un impliquant un chef en orbite circulaire et l'autre en orbite elliptique, avec une séparation substantielle entre les deux satellites. Dans les cas linéaires, nous étudions des scénarios où l'orbite du chef est circulaire dans un cas et elliptique dans l'autre, avec de courtes distances séparant le chef et le suiveur. Notre étude est menée en supposant que ces modèles sont adaptés à l'orbite basse de la Terre et sont principalement soumis aux forces gravitationnelles.

## Abstract

This memory explores the development and application of optimal and robust control approaches for tracking the relative translational motion between two spacecraft in a leader-follower formation. We investigate four distinct dynamic systems, encompassing both nonlinear and linear scenarios.

In the nonlinear domain, we consider two cases: one involving a circular chief and the other an elliptical chief, with a substantial separation between the two satellites. In the linear cases, we examine scenarios where the chief's orbit is circular in one case and elliptical in the other, with small distances separating the leader and the follower. Our study is conducted under the assumption that these models pertain to low Earth orbit and are primarily subject to gravitational forces.

## ملخص

تستكشف هذه المذكرة تطوير وتطبيق أساليب التحكم المثلى والقوية لتتبع الحركة الانتقالية النسبية بين قمرين صناعيين في تشكيل القائد والتابع. نحن ندرس أربعة أنظمة ديناميكية متميزة، تغطي كلا من السيناريوهات غير الخطية والخطية.

في المجال غير الخطي، قمنا بدراسة حالتين: إحداهما تتعلق بقائد في مدار دائري والأخرى في مدار بيضاوي، مع وجود مسافة كبيرة بين القمرين الصناعيين. وفي الحالات الخطية، ندرس السيناريوهات التي يكون فيها مدار القائد دائرياً في حالة وبيضاوياً في الحالة الأخرى، مع وجود مسافات قصيرة تفصل بين القائد والتابع. تم إجراء دراستنا على افتراض أن هذه النماذج مناسبة للمدار الأرضي المنخفض وتخضع بشكل أساسي لقوى الجاذبية.

---

---

## Introduction générale:

Le vol en formation spatiale est actuellement un domaine de recherche important et en plein essor. Il présente de nombreux défis uniques dans le domaine de la dynamique des engins spatiaux, ainsi qu'une variété d'applications potentielles très utiles, à condition que ces défis puissent être relevés. L'un de ces défis majeurs réside dans la gestion du mouvement relatif au sein d'une formation de satellites, suscitant ainsi un intérêt particulier les missions spatiales conventionnelles se concentrent généralement sur le guidage d'un seul satellite pour atteindre une orbite souhaitée, le vol en formation implique une complexité accrue, car il nécessite de déterminer le mouvement relatif souhaité entre les différents engins spatiaux de la formation.

Cette complexité exige des algorithmes de guidage et de contrôle (G&C) performants, mais ces derniers doivent également être adaptés aux contraintes de ressources, telles que la limitation des capacités de traitement embarqué et de carburant. Le système de guidage est au cœur de cette démarche, responsable du calcul de la trajectoire de mouvement relative souhaitée pour le système de contrôle. Il doit accomplir cette tâche lors des manœuvres de reconfiguration, passant de la formation initiale actuelle à la formation souhaitée et future, définie par l'utilisateur. En outre, le système de guidage doit fournir un signal de référence précis pour guider les manœuvres de maintien de la formation. Il est crucial de noter que l'efficacité de ces manœuvres en termes d'utilisation du carburant est directement corrélée à la précision du système de guidage.

Pour aborder ces défis, cette thèse se divise en deux problèmes principaux liés au mouvement relatif : la dynamique et le contrôle. Notre étude vise à appliquer des commandes optimales et robustes au modèle (linéaire et non linéaire) du mouvement relatif du satellite suiveur. L'objectif ultime est de permettre au satellite adjoint de suivre précisément la trajectoire désirée. Pour ce faire, nous avons structuré ce mémoire en quatre chapitres distincts :

- Le premier chapitre présente les généralités sur le vol en formation des satellites, y compris la décomposition du satellite, les différentes structures distribuées, ainsi que les applications du vol en formation dans divers domaines.
- Le deuxième chapitre est dédié à l'obtention d'un modèle mathématique complet du système. Il commence par résoudre le problème képlérien à deux corps et se poursuit jusqu'à l'obtention du modèle du mouvement relatif des satellites.
- Le troisième chapitre explore les techniques de contrôle du vol en formation, notamment l'utilisation du contrôle optimal avec le LQR et du contrôle robuste grâce au sliding mode.
- Enfin, le quatrième chapitre sera consacré à la présentation des résultats de simulations, ainsi qu'à une analyse des différentes interprétations issues de l'application des stratégies de commande détaillées dans le troisième chapitre.

## **Chapitre 1 : Généralité sur le vol en formation des satellites**

## **1 Introduction :**

Le vol en formation des satellites (SFF) a parcouru un chemin fascinant depuis les premières études conceptuelles menées en 1977 par Sholomitsky, Prilutsky et Rodin. Leur proposition novatrice d'un interféromètre spatial pour l'imagerie à ouverture synthétique dans l'infrarouge a ouvert de nouvelles perspectives dans l'exploration spatiale [1]. Mais comment cette idée audacieuse a-t-elle évolué au fil des décennies pour devenir une technologie essentielle dans les missions spatiales d'aujourd'hui ? C'est le récit que nous explorerons dans ce chapitre, plongeant dans les détails clés du vol en formation des satellites. De ses origines à ses développements les plus récents, découvrez comment cette discipline passionnante façonne l'avenir de l'exploration spatiale.

## **2 Définition du vol en formation :**

Le SFF se réfère au déplacement coordonné d'un groupe de plusieurs engins spatiaux dont les états dynamiques sont liés par une loi de commande commune. Dans ce contexte, au moins un satellite, désigné comme agent de formation, suit l'état souhaité par rapport à un autre agent, et la loi de suivi est conçue pour minimiser sa dépendance à l'égard de l'état de cet autre agent.

## **3 Avantages du vol en formation des satellites :**

Cette évolution vers le vol en formation de satellites témoigne d'une transition significative dans les technologies spatiales, privilégiant les microsattelites autonomes volant en formation plutôt que la construction de gros satellites multi-missions. Cette approche présente de multiples avantages. Premièrement, elle permet d'atteindre une précision et une résolution de mesure radicalement améliorées en corrélant les signaux provenant des instruments scientifiques des microsattelites de la formation. Cette capacité à former une antenne synthétique à grande ouverture serait impossible à réaliser avec un seul satellite, nécessitant une structure coûteuse et de grande envergure. Deuxièmement, le vol en formation offre une flexibilité accrue pour ajuster la configuration géométrique des instruments en fonction des mesures spécifiques requises. Cette adaptabilité permet d'optimiser les observations en fonction des objectifs scientifiques de la mission. Enfin, cette approche réduit les risques d'échec des missions spatiales, car en cas de défaillance d'un satellite de la formation, la mission peut se poursuivre avec les autres satellites, évitant ainsi la compromission de l'ensemble de la mission [2].

## **4 Composants Clés des Satellites : Une Vue d'Ensemble**

Indépendamment de l'application prévue, qu'il s'agisse d'un satellite de communication, d'un satellite de prévision météorologique ou même d'un satellite de télédétection, différents sous-systèmes composant un satellite typique comprennent les éléments suivants [3] (voir figure 1.1):

### **4.1 Structure mécanique :**

Pèse entre 7 à 10% de la masse total du satellite au lancement, elle assure la liaison entre le satellite et le lanceur, elle sert de support à tous les équipements, de plus elle agit comme un écran protecteur contre les radiations énergétiques, la poussière et les micrométéorites dans



l'espace. Il est essentiel de concevoir une structure mécanique légère (réduction de coût) toutefois qui résiste aux accélérations mécanique et aux vibrations pour cela on utilise généralement des alliages d'aluminium, du magnésium, du titane, du béryllium, des fibres de Kevlar et des matériaux composites.

#### **4.2 Sous système de propulsion :**

Fournit les poussées nécessaires pour effectuer tous les changements de vitesse requis lors des différentes manœuvres tout au long de la durée de vie du satellite. Cela comprend les manœuvres majeures permettant de déplacer le satellite de son orbite de transfert vers l'orbite désirée, ainsi que les petites manœuvres de maintien de position nécessaires pendant toute la durée de vie du satellite.

Le système de propulsion utilise le principe d'expulsion d'une masse à une certaine vitesse dans une direction pour générer une poussée dans la direction opposée (3<sup>ème</sup> principe de Newton). Dans le cas des systèmes de propulsion solides et liquides, cela implique la création d'un gaz à haute pression par la décomposition à haute température des propergols, suivi de l'accélération de ce gaz à des vitesses supersoniques à travers une tuyère divergente-convergente. En revanche, la propulsion ionique génère de la poussée en accélérant un plasma chargé d'un gaz ionisé, tel que le xénon, à travers un champ électrique intense.

#### **4.3 Sous-système de contrôle thermique :**

Il est essentiel pour maintenir la plate-forme du satellite dans les limites de température de fonctionnement adaptées aux équipements à bord du satellite. Il garantit également une répartition de la température souhaitable dans toute la structure du satellite, ce qui est essentiel pour préserver la stabilité dimensionnelle et maintenir l'alignement de certains équipements critiques.

Les systèmes de contrôle thermique peuvent être passifs ou actifs. Les techniques passives comprennent l'utilisation de surfaces d'isolation multicouche qui absorbent ou réfléchissent les rayonnements produits internement ou générés par une source externe.

Les techniques actives sont généralement utilisées pour faire face à des changements soudains de température de magnitude relativement importante, tels que ceux rencontrés lors d'une éclipse où la température chute considérablement. Les systèmes actifs comprennent des caloducs à distance, des éléments chauffants contrôlés et des réfrigérateurs mécaniques. Les éléments chauffants et les réfrigérateurs sont contrôlés soit par des capteurs à bord, soit activés par des commandes au sol.

#### **4.4 Sous-système d'alimentation électrique :**

Collecte l'énergie solaire, la transforme en énergie électrique à l'aide de panneaux solaires et distribue cette énergie électrique aux autres composants et sous-systèmes du satellite. De plus, le satellite dispose également de batteries (exemple : les batteries nickel-cadmium) qui fournissent une alimentation électrique de secours pendant les périodes d'éclipse, lors d'autres situations d'urgence et également pendant la phase de lancement du satellite lorsque les panneaux solaires ne sont pas encore fonctionnels.

#### 4.5 Sous-système de télémétrie, suivi et commandes (TT&C) :

Surveille et contrôle le satellite dès son décollage jusqu'à la fin de sa durée de vie opérationnelle dans l'espace. La partie suivi du sous-système détermine la position du vaisseau spatial et suit son trajet en utilisant des informations d'angle, de distance et de vitesse. La partie télémétrie recueille des informations sur l'état de santé des différents sous-systèmes du satellite, encode ces informations et les transmet. L'élément de commande reçoit et exécute les commandes de contrôle à distance pour effectuer des modifications sur les fonctions, la configuration, la position et la vitesse de la plateforme.

#### 4.6 Système de Contrôle de l'Attitude et de l'Orbite :

Il contrôle la trajectoire orbitale, ce qui est nécessaire pour s'assurer que le satellite se trouve à l'emplacement correct dans l'espace afin de fournir les services prévus. Il assure également le contrôle de l'attitude, ce qui est essentiel pour éviter que le satellite bascule dans l'espace et pour s'assurer que les antennes restent pointées vers un point fixe à la surface de la Terre.

L'attitude d'un satellite, ou de tout engin spatial d'ailleurs, correspond à son orientation telle que déterminée par la relation entre ses axes (lacet, tangage et roulis) et un plan de référence. Le sous-système de contrôle d'attitude est utilisé pour maintenir une certaine attitude du satellite, à la fois lorsqu'il se déplace sur son orbite et pendant sa phase de lancement, deux types de systèmes de contrôle d'attitude sont couramment utilisés, à savoir la stabilisation par rotation et la stabilisation sur trois axes. Pendant la phase de lancement, le système de contrôle d'attitude maintient l'attitude correcte du satellite afin qu'il puisse maintenir la liaison avec la station terrestre et contrôle son orientation de manière à ce que le satellite soit dans la bonne direction pour une manœuvre orbitale. Lorsque le satellite est en orbite, le système de contrôle d'attitude maintient l'antenne du satellite pointée avec précision dans la direction souhaitée. La précision avec laquelle l'attitude doit être contrôlée dépend de la largeur du faisceau de l'antenne du satellite.

Le contrôle orbital est nécessaire pour corriger les effets des forces de perturbation qui peuvent altérer un ou plusieurs paramètres orbitaux. Le sous-système de contrôle orbital permet de corriger ces changements indésirables, généralement en utilisant des propulseurs. Pendant la phase de lancement, le système de contrôle orbital est utilisé pour effectuer certaines des principales manœuvres orbitales et déplacer le satellite vers l'emplacement souhaité.

Les manœuvres de maintien de position est-ouest et nord-sud sont effectuées toutes les deux semaines. Les manœuvres nord-sud nécessitent une plus grande consommation de carburant que toute autre correction orbitale.

#### 4.7 Charge utile :

C'est le sous-système le plus important de tout satellite. On peut considérer la charge utile comme le cerveau du satellite qui exécute sa fonction prévue. La charge utile transportée par un satellite dépend des exigences de la mission.

Par exemple :

- Le Transpondeurs pour un satellite de télécommunication.
- Caméra ou radar pour un satellite d'observation.
- Télescope pour un satellite d'observation astronomique.

#### 4.8 Antennes :

Elles sont utilisées à la fois pour recevoir des signaux des stations terrestres et pour les transmettre vers elles. Il existe une variété d'antennes disponibles pour une utilisation à bord d'un satellite. Le choix final dépend principalement de la fréquence de fonctionnement et du gain requis. Les types d'antennes couramment utilisés sur les satellites comprennent les antennes cornet, les réflecteurs paraboliques à alimentation centrale et décentrée, ainsi que les antennes à lentilles.

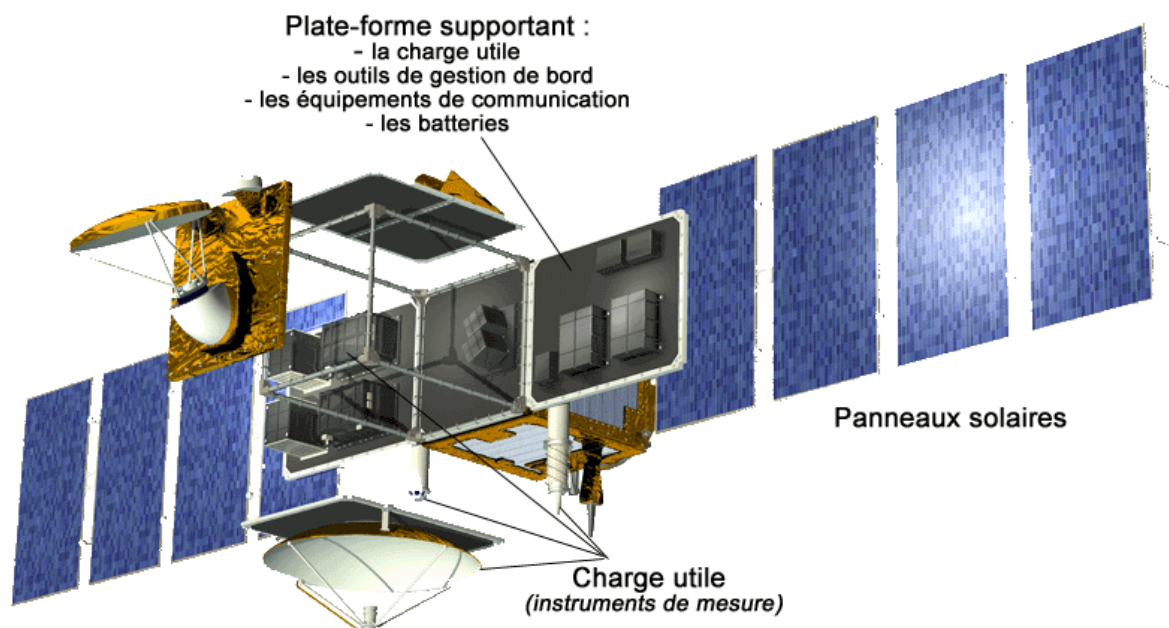


Figure 1.1 : Vue d'ensemble de la composition d'un satellite

### 5 Typologie des satellites selon leur masse :

La classification des engins spatiaux par masse est l'un des principaux critères permettant de définir la taille des lanceurs et les coûts de mise en orbite des satellites (voir Figure 1.2).

Les tendances actuelles découlant des progrès technologiques intenses des systèmes spatiaux nous permettent de subdiviser les satellites en 7 classes allant de milliers de tonnes à moins de 10 g [4].

#### 5.1 Satellites de grande taille (plus de 1 000 kg) :

Ils sont principalement conçus à des fins opérationnelles avec une durée de vie prolongée (cinq à dix ans). Ces satellites sont utilisés pour transporter des charges utiles de télédétection plus importantes ou un plus grand nombre de transpondeurs et d'antennes plus grandes à des fins de communication [5].

#### 5.2 Satellites de taille moyenne (500 à 1 000 kg) :

Ils sont une catégorie très inclusive peuplée de satellites ayant une grande variété de fonctions (ex : observation de la terre). Les satellites de taille moyenne peuvent être trouvés dans toutes les orbites, de l'orbite basse de la Terre à l'orbite moyenne jusqu'à l'orbite géostationnaire (GEO).

### **5.3 Mini-satellites ont une masse comprise entre 100 et 500 kg :**

Ils concurrencent les grands satellites dans de nombreuses applications. Beaucoup d'organismes spatiaux nationaux ont lancé des mini-satellites d'observation de la Terre et du Soleil au cours des dernières décennies.

### **5.4 Microsatellites**

Les microsatellites sont conçus pour des applications de durée moyenne (maximum deux ans). La masse des microsatellites varie de 10 kg à 100 kg avec différentes tailles.

### **5.5 Nanosatellites**

Les nanosatellites (1-10kg) sont utilisés pour des missions de durée relativement courte (six mois à un an). Ils sont limités à l'espace LEO, et certains nécessitent un "satellite mère" pour relayer les données vers les stations terrestres.

### **5.6 Cubesats**

Les Cubesats font partie de la catégorie des nanosatellites et microsatellites . Ils ont une taille standard de 10 x 10 x 11 cm et une masse pouvant varier entre 1 kg et 1,3 kg. À mesure que les besoins en capacité augmentent, les formats standards se sont étendus aux formats 1.5U, 2U, 3U, 3U+ et 6U. Cette standardisation permet aux lanceurs de disposer d'une interface satellite-lanceur standard et d'un système d'éjection.

### **5.7 Pico satellites :**

Les picosatellites (0.1-1kg) sont lancés à des fins expérimentales de courte durée. En raison de leur petite taille, ils peuvent ne pas générer suffisamment d'énergie pour fonctionner en mode continu. Normalement, ils fonctionnent avec des piles primaires.

### **5.8 Femto satellites :**

Les femto satellites (inférieure à 0.1kg) sont équipés d'un nombre très limité de systèmes pour effectuer une opération spécifique pendant une courte durée depuis les orbites terrestres basses. En général, ces pico satellites n'ont pas de panneaux solaires pour générer de l'énergie ni de système de contrôle de l'attitude et de l'orbite.

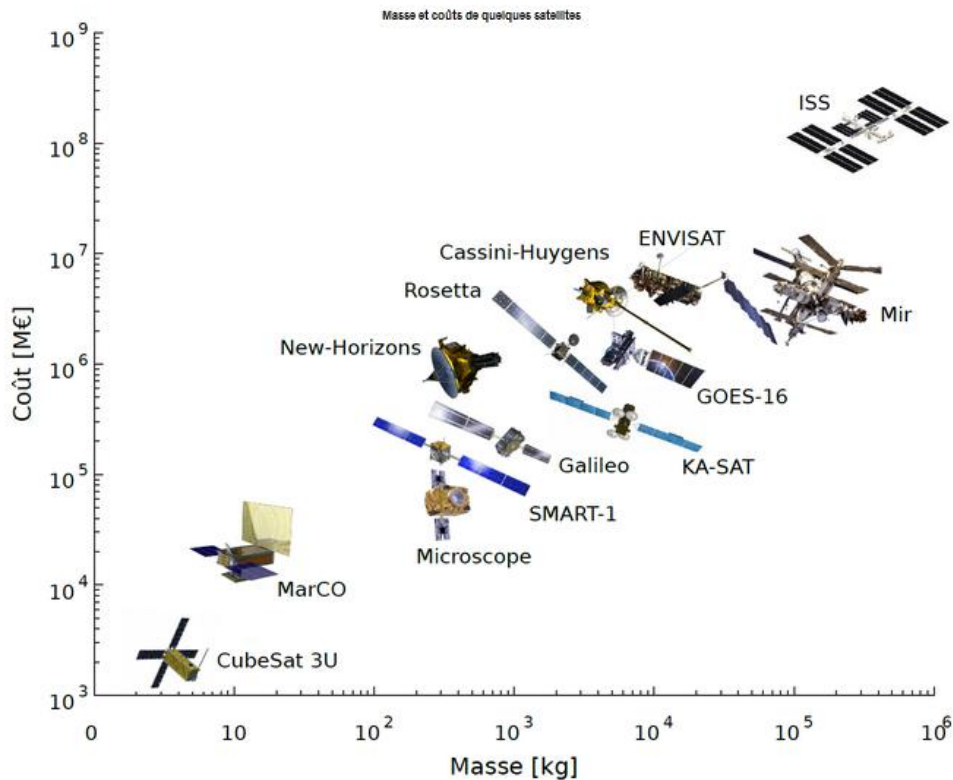


Figure 1.2 : Comparaison de la masse et du coût de certains satellites. Les deux paramètres sont reliés par une relation presque linéaire.

## 6 Architectures Distribuées des Satellites

Les Systèmes Satellitaires Distribués (DSS) sont définis comme des architectures de mission composées de plusieurs éléments spatiaux qui interagissent, coopèrent et communiquent entre eux, généralement entraînant de nouvelles propriétés systémiques et/ou des fonctions émergentes. En général, les architectures distribuées sont catégorisées par divers noms, y compris Constellations, Trains, Clusters, Essaims, Satellites Fractionnés et Satellites Fédérés (Tableau 1.1). Par exemple, la constellation est une approche traditionnelle où des satellites répartis sporadiquement sont utilisés pour maximiser la couverture. En revanche, les clusters sont délibérément positionnés à proximité les uns des autres pour améliorer ou créer de nouvelles capacités système, ce qui nécessite une détermination et un contrôle d'attitude très précis afin de maintenir la stabilité de la formation et d'éviter les collisions entre satellites. Les essaims sont approximativement comparables aux clusters, à la différence qu'ils impliquent un nombre beaucoup plus important de satellites généralement plus petits et moins coûteux. De plus, les essaims n'ont pas autant d'exigences strictes en matière de détermination et de contrôle d'attitude que les clusters [6].

L'homogénéité dans le Tableau 1.1 est définie comme le niveau de similitude entre les vaisseaux spatiaux individuels ou les fractions des vaisseaux spatiaux distribués, et l'autonomie est défini comme le niveau d'indépendance opérationnelle des vaisseaux spatiaux ou d'une fraction de vaisseaux spatiaux distribués

SSD	Objectif de la mission	Coopération	Homogénéité	Distance inter-satellitaire	L'autonomie
<b>Constellation</b>	Partagé (Iridium, GPS)	Coopération requise pour supporter la mission	Homogène, quelques différences sont possibles	Régionale	Autonome
<b>Trains</b>	Indépendant, mais peut être partagé	Opérationnelle à requise	Hétérogène	Locale	Autonome
<b>Cluster</b>	Partagé	requise	Homogène	Locale	Autonome à Co dépendant
<b>Essaims</b>	Partagé	requise	Homogène à hétérogène	Régionale à locale	Autonome à Co dépendant
<b>Fractionné</b>	Partagé	optionnelle à requise.	hétérogène	Locale	Autonome à Co dépendant
<b>Fédéré</b>	Indépendant	Ad-hoc optionnelle	hétérogène	Régionale à locale	Autonome à Co dépendant

Tableau 1.1 : Types d'architectures de missions distribuées.

## 7 Architectures de Guidage :

Pour assurer le vol en formation de satellites, différentes approches de guidage peuvent être utilisées, et elles peuvent être classées en fonction de leur mécanisation. On distingue notamment le guidage basé au sol et le guidage autonome, ainsi que le guidage centralisé et le guidage décentralisé. Chaque approche présente des avantages et des inconvénients spécifiques [7].

### 7.1 Guidage basé au sol :

Les paramètres orbitaux et les conditions actuelles des satellites sont communiqués aux stations terrestres, qui effectuent les calculs nécessaires pour générer les commandes de guidage. Ces commandes sont ensuite transmises aux satellites correspondants.

### 7.2 Guidage autonome :

Les informations sur les paramètres orbitaux et les conditions actuelles sont partagées entre les satellites. Chaque satellite effectue alors les calculs nécessaires à bord pour générer ses propres commandes de guidage. Le guidage basé au sol convient généralement lorsque les distances de séparation entre les satellites sont relativement importantes, tandis que le guidage autonome est préférable pour des missions avec des distances de séparation plus réduites.

### 7.3 Architecture centralisée :

Un satellite central effectue les calculs nécessaires et envoie les commandes de contrôle aux autres satellites de la formation. Cependant, pour les missions de vol en formation avec de petits satellites, l'architecture centralisée est moins préférée en raison des capacités de traitement limitées à bord de chaque satellite. Il convient de noter que l'architecture centralisée est principalement utilisée dans les missions comprenant un satellite principal et plusieurs petits satellites adjoints.

#### **7.4 Architecture décentralisée :**

Chaque satellite traite les informations disponibles et détermine ses propres commandes de guidage. Cette approche offre une modularité, ce qui signifie que l'ajout ou la suppression d'un satellite de la formation ne nécessite aucune modification de la conception du guidage. De plus, elle nécessite une communication minimale entre les satellites pour mettre à jour leur position relative. Ainsi, l'architecture décentralisée permet une plus grande flexibilité de mission.

### **8 Architectures de contrôle :**

Les architectures de contrôle du vol en formation sont primordiales pour coordonner les mouvements de plusieurs satellites dans le but de former une formation cohérente. Différentes approches, telles que le contrôle leader-suiveur, le contrôle basé sur le comportement, la structure virtuelle et le suivi cyclique, sont utilisées pour assurer la précision et la stabilité de ces formations [8].

#### **8.1 leader-suiveur :**

Le contrôle de formation leader-suiveur des satellites consiste à désigner certains satellites comme leaders et d'autres comme suiveurs. Les suiveurs suivent la trajectoire des leaders afin de maintenir une formation cohérente. Cela permet de transformer le problème de contrôle de formation en un problème de contrôle individuel des satellites suiveurs, qui doivent reproduire la position et l'attitude des leaders. Différentes structures de formation peuvent être utilisées, telles que la structure à un seul leader, la structure à plusieurs leaders ou la structure à leader virtuel.

#### **8.2 Contrôle de formation basé sur le comportement des Satellites :**

L'idée du contrôle de formation basé sur le comportement des satellites est de spécifier plusieurs comportements attendus pour chaque événement de contrôle dans l'ensemble du système, tels que l'évitement de collision, la reconfiguration de la formation, le maintien de la formation, le suivi de cible, etc. Chaque comportement a sa propre finalité ou tâche. Grâce à la conception des comportements de base des membres du satellite et des règles de contrôle local, le comportement global requis de la formation de satellites est atteint, où le problème clé réside dans la conception des comportements de base et des mécanismes de coordination de comportement efficaces (c'est-à-dire les problèmes de choix de comportement).

#### **8.3 Structure virtuelle :**

L'idée du contrôle de formation de structure virtuelle est de considérer l'ensemble du système comme une seule classe de structures rigides et de réaliser un contrôle ou une manœuvre globale. La relation géométrique relative entre les individus est maintenue, et la position et l'attitude de la formation souhaitée et du suivi sont réalisées. Pour appliquer la méthode de formation de structure virtuelle, la dynamique souhaitée de la structure virtuelle doit être définie. Ensuite, en fonction des informations locales ou globales, l'état souhaité de chaque satellite peut être obtenu, et un contrôle de suivi de satellite unique est utilisé pour suivre une trajectoire de référence.

La méthode de formation de structure virtuelle permet de spécifier facilement des comportements de formation sans leader explicite, et l'erreur de formation peut être introduite dans la conception de la loi de contrôle comme rétroaction pour atteindre une précision de

contrôle plus élevée. Étant donné que la méthode de formation de structure virtuelle ne dépend pas d'une unité réelle unique, elle présente une plus grande robustesse que la méthode de formation leader-suiveur. Elle est largement utilisée dans les problèmes de coordination de formation chez les robots autonomes, les véhicules aériens sans pilote et les véhicules sous-marins.

#### **8.4 Contrôle coordonné :**

Le contrôle coordonné implique la coordination entre les satellites dès le stade initial de configuration de la formation. Différentes méthodes de contrôle ont été utilisées pour résoudre les problèmes spécifiques liés au suivi, au maintien de formation et à la gestion des trajectoires orbitales cibles. Des approches telles que l'optimisation convexe, la programmation linéaire, le régulateur linéaire quadratique (LQR), le contrôle à structure variable en mode glissant et le contrôle flou ont été appliquées pour atteindre ces objectifs. Ces techniques permettent de rendre la formation de satellites stable et de minimiser la consommation de carburant, tout en prenant en compte les contraintes de communication et les perturbations du modèle.

### **9 Regard sur les missions Passées et les Perspectives Futures :**

Dans cette section, nous réalisons une revue exhaustive des missions spatiales lancées depuis les années 2000, ainsi que certaines missions futures. Nous nous efforçons d'examiner de manière complète et détaillée toutes les missions pertinentes, en prenant en compte leur diversité en termes de masse maximale des satellites (petits satellites, grands satellites, etc.) et de leurs objectifs principaux (science spatiale, observation de la Terre/téledétection, sciences de la Terre et démonstrations technologiques). Ainsi, notre étude vise à offrir une vue d'ensemble complète des différentes missions spatiales concernées [9].

#### **9.1 Science de la terre :**

L'objectif commun des missions scientifiques sur la Terre est de développer une compréhension scientifique du système terrestre et de sa réponse aux changements naturels et induits par l'homme afin d'améliorer la prédiction du climat, de la météo et des risques naturels pour les générations présentes et futures. Parmi les missions axées sur les sciences de la terre on trouve :

##### **9.1.1 Cluster :**

La mission Cluster comprend quatre satellites volant en formation pyramidale dans une orbite elliptique polaire. Les quatre engins spatiaux, nommés Rumba, Salsa, Samba et Tango, transportent chacun une seule charge utile composée de 11 instruments de pointe [10]. Ces satellites ont été lancés en deux missions distinctes, les 16 juillet et 9 août 2000. La mission Cluster, dirigée par la NASA, a pour objectif de recueillir des informations tridimensionnelles sur l'interaction entre le vent solaire et la magnétosphère terrestre, ainsi que son impact sur l'espace proche de la Terre et son atmosphère, notamment les aurores. Ces satellites de taille moyennes (masse d'environ 550 kg), continue à être opérationnelle et seront mis hors service en septembre 2024. [11]

##### **9.1.2 GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment):**



La mission GRACE était un projet conjoint entre la NASA et le DLR (Agence spatiale allemande), faisant partie du système international d'observation de la Terre par satellites [12]. GRACE fut lancée le 17 mars 2002 avec deux satellites identiques, GRACE-A et GRACE-B, dans le but de mesurer le champ gravitationnel de la Terre. Les positions relatives des deux satellites et les variations de leurs orbites sont utilisées pour évaluer l'évolution du champ gravitationnel dans la région survolée [13]. Ce type d'information permet aux scientifiques de mieux comprendre les processus naturels tels que la réduction de l'épaisseur des calottes glaciaires polaires, la circulation de l'eau dans les océans ou les grands bassins hydrographiques. La mission a pris fin le 27 octobre 2017 lorsque les satellites ont épuisé leur carburant et depuis le 22 Mai 2018 GRACE Follow-On (GRACE-FO) poursuit l'héritage de GRACE en offrant une vue unique sur le climat de la Terre [14].

### 9.1.3 QB50 :

QB50 est un réseau international de CubeSats destiné aux mesures in-situ multipoints dans la basse thermosphère et à la recherche sur la rentrée atmosphérique. Ce projet de l'Union européenne est géré par l'Institut von Karman (Rhode-Saint-Genèse, Belgique) [15]. Chaque CubeSat de 2U de cette mission transporte un ensemble de capteurs normalisés pour la recherche dans la basse thermosphère et la rentrée atmosphérique, en plus des instruments standard permettant d'assurer les fonctions habituelles des satellites. Ces CubeSats sont prévus pour être lancés en 2016 . La plupart des CubeSats QB50 seront placés en orbite basse terrestre quasi-circulaire (altitude de 380 km, inclinaison de 98 degrés). Un groupe plus restreint de satellites sera déployé en orbite basse terrestre elliptique (altitude de 380 à 700 km) [16].

## 9.2 Démonstration technologique :

Les missions de démonstration technologique comblent le fossé entre les besoins et les moyens, les défis scientifiques et techniques ainsi que les innovations technologiques nécessaires pour les surmonter, les tests de concept préliminaires et l'intégration finale de nouvelles technologies révolutionnaires et rentables dans les missions spatiales. On cite notamment :

### 9.2.1 Prisma (Prototype Research Instruments and Space Mission technology Advancement)

C'est une mission de l'agence spatiale suédoise lancée le 15 juin 2010 depuis le cosmodrome de Yasny par une fusée ukrainienne Dnepr et dont l'objectif est de démontrer et valider de nouvelles capacités en matière d'observation de la Terre en utilisant des technologies avancées de spectrométrie hyperspectrale. La mission est réalisée par deux satellites lancés simultanément : le satellite MANGO de 140 kg est le composant actif tandis que le satellite TANGO de 40 kg doit servir de cible.

### 9.2.2 CanX4-5 :

Les nano-satellites CanX-4 & 5 ont été lancés le 30 juin 2014 en tant que charges utiles secondaires à bord du véhicule PSLV-C23. Cette mission fut réalisée par l'UTIAS/SFL (University of Toronto, Institute for Aerospace Studies/Space Flight Laboratory) à Toronto, Canada. Son objectif principal était de démontrer que le vol en formation de satellites peut être réalisé avec une précision de suivi inférieure à un mètre et en utilisant des variations de vitesse

( $\Delta V$ ) minimales. Pour atteindre cet objectif, la mission développe des algorithmes de contrôle permettant le maintien et la reconfiguration autonomes de la formation, en tenant compte des perturbations orbitales [17].

### 9.2.3 Proba-3 : (PROject for On-Board Autonomy)

C'est la troisième mission à faible coût de l'Agence spatiale européenne de la série des PROBA, destinée au développement de nouvelles technologies spatiales. La mission, qui comprend deux mini-satellites, vise à valider différents aspects des vols en formation de satellites : les techniques de mesure de mouvement et de distance, les stratégies de guidage, ainsi que les algorithmes de contrôle et de navigation. L'objectif est de préparer les futures missions spatiales pour l'astronomie, les sciences et l'observation de la Terre, susceptibles de mettre en œuvre des constellations de satellites. La mission embarque également un coronographe dont le masque et la lentille sont situés entre les deux satellites, ce qui devrait fournir de nouvelles données sur la couronne solaire grâce à cette configuration. La mission devrait être lancée en 2024[18] [19].

## 9.3 Observation de la terre :

L'observation de la Terre fournit des bases importantes pour la prise de décisions en matière de protection de l'environnement, du climat, de l'utilisation des terres, de surveillance côtière, de gestion des catastrophes et du développement durable. A titre d'illustration citons :

### 9.3.1 SENTINEL 1A/1B :

Les satellites Sentinel-1A et Sentinel-1B ont été lancés dans le cadre du projet Copernicus (programme européen de surveillance de la Terre. Il s'agit d'une initiative conjointe de l'Union européenne (UE) et de l'Agence spatiale européenne (ESA)). Ces satellites, développés par la société "Thales Alenia Space", sont presque identiques sur le plan technique et travaillent en tandem en orbite. Ils sont équipés d'un radar à synthèse d'ouverture/C-SAR, permettant la fourniture d'images spatiales de haute qualité, indépendamment des conditions météorologiques. Leur déploiement a permis de couvrir plusieurs domaines d'application, tels que la détection et la surveillance des déversements de pétrole, la cartographie des glaces marines, la surveillance des mouvements de la surface terre...etc. Sentinel-1A a été lancé le 3 avril 2014 depuis le cosmodrome de Kourou, suivi par le lancement de Sentinel-1B le 26 avril 2016 [20].

## 9.4 Science planétaire :

L'objectif des missions de science planétaire est de comprendre les planètes et les petits corps qui peuplent notre système solaire, ainsi que les origines de la vie.

### 9.4.1 GRAIL (Gravity Recovery And Interior Laboratory):

La mission GRAIL de la NASA a fait voler deux engins spatiaux jumeaux en 2011, Ebb et Flow, en tandem autour de la Lune pour cartographier les variations du champ gravitationnel lunaire. Les sondes ont généré la carte de gravité à la résolution la plus élevée de tout corps céleste à ce jour. À la fin de la mission, les sondes ont été délibérément écrasées sur la Lune le 17 décembre 2012 [21].

### 9.4.2 EscaPADE (Escape and Plasma Acceleration and Dynamics Explorers):

Ce sont deux micro-sondes spatiales qui doivent être lancées en 2024 et doivent étudier les caractéristiques de la magnétosphère de la planète Mars et le processus d'échappement atmosphérique de la planète. Le projet est piloté par l'Université de Berkeley et financé par l'agence spatiale américaine, la NASA, dans le cadre de son programme SIMPLEx [22].

### 9.4.3 LISA (Laser Interferometer Space Antenna)

C'était un observatoire d'ondes gravitationnelles établi conjointement par la NASA et l'ESA. Il a été introduit en 1998. En 2011, la NASA s'est retirée du développement pour des raisons de financement. L'ESA a simplifié la configuration de la mission, réduisant la longueur des côtés de 5 millions de kilomètres à 1 million de kilomètres, et l'a renommée programme eLISA. L'objectif de ce projet est de détecter les ondes gravitationnelles, en mettant l'accent sur la détection des fusions entre des binaires naines blanches profondes et des trous noirs. LISA est composée de trois engins spatiaux d'une hauteur de 1,8 mètre, équipés d'interféromètres laser pour former un triangle. Ils sont positionnés en orbite héliocentrique, suivant la Terre autour du soleil pour détecter les caractéristiques des ondes gravitationnelles, avec une précision de mesure de 1 µm. Les trois engins spatiaux effectuent indépendamment des mesures d'état relatives et assurent la maintenance de la formation [23].

L'étude des ondes gravitationnelles offre un potentiel énorme pour découvrir des parties de l'univers qui sont invisibles par d'autres moyens, comme les trous noirs, le Big Bang et d'autres objets encore inconnus. LISA viendra compléter nos connaissances sur l'origine, l'évolution et la structure de notre univers le lancement est prévu pour 2034 d'après le CNES (centre nationale d'études spatiale) [24].

## Conclusion :

Le vol en formation des satellites incarne une étape cruciale dans le développement des missions spatiales, illustrant notre aptitude à repousser les frontières technologiques et à tirer parti des synergies entre les satellites pour des avancées scientifiques et des applications concrètes. Le SFF continuera de jouer un rôle essentiel dans l'exploration spatiale, contribuant ainsi à enrichir notre compréhension de l'univers et à ouvrir la voie à de passionnantes découvertes et réalisations futures.

---

## Les références

[1] Scharf, D. P., Hadaegh, F. Y., & Ploen, S. R. (2004). A survey of spacecraft formation flying guidance and control. Part II: control. Proceedings of the 2004 American Control Conference. doi:10.23919/acc.2004.1384365 .

[2] Vincent Simard Bilodeau, (2008), " LOIS DE COMMANDE PREDICTIVES AUTONOMES POUR VOL EN FORMATION DE SATELLITES TERRESTRES " , université de SHERBRROKE.

[3] [Anil K, Maini](#) ,[Varsha Agrawal](#)," Satellite Technology: Principles and Applications" ,(2007),Wiley,ISBN-13: 978-0-470-03335-7

- [4] Botelho A. S., R.C. and Xavier Jr., A.L. (2019) “A Unified Satellite Taxonomy Proposal Based on Mass and Size”. *Advances in Aerospace Science and Technology*, 4, 57-73.
- [5] Palani M, Yogyata A, (2020), “Small Satellites Applications, Classification and Technologies”, *International Journal of Science and Research*, DOI: 10.21275/SR20723213825
- [6] A. Poghosyan et al, (2020), “Unified Classification for Distributed Satellite Systems”, project: “Operational Network of Individual Observation Nodes”.
- [7] Mathavaraj, S.; Padhi, R. *Satellite Formation Flying: High Precision Guidance Using Optimal and Adaptive Control Techniques*; Springer Nature: Berlin/Heidelberg, Germany, 2021. [[Google Scholar](#)]
- [8] Liu, G.-P., & Zhang, S. (2018). *A Survey on Formation Control of Small Satellites. Proceedings of the IEEE*, 106(3), 440–457. doi:10.1109/jproc.2018.2794879
- [9] Di Mauro, G., Lawn, M., & Bevilacqua, R. (2018). Survey on Guidance Navigation and Control Requirements for Spacecraft Formation-Flying Missions. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 41(3), 581–602. doi:10.2514/1.g002868
- [10] [https://www.esa.int/Space\\_in\\_Member\\_States/France/La\\_mission\\_Cluster\\_20\\_annees\\_d\\_etude\\_de\\_la\\_magnetosphere\\_terrestre](https://www.esa.int/Space_in_Member_States/France/La_mission_Cluster_20_annees_d_etude_de_la_magnetosphere_terrestre)
- [11] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Cluster\\_\(satellite\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Cluster_(satellite))
- [12] <https://earth.esa.int/eogateway/missions/grace>
- [13] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Gravity\\_Recovery\\_and\\_Climate\\_Experiment](https://fr.wikipedia.org/wiki/Gravity_Recovery_and_Climate_Experiment)
- [14] <https://gracefo.jpl.nasa.gov/>
- [15] Bandyopadhyay, S., Foust, R., Subramanian, G. P., Chung, S.-J., & Hadaegh, F. Y. (2016). Review of Formation Flying and Constellation Missions Using Nanosatellites. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 53(3), 567–578. doi:10.2514/1.a33291
- [16] Bandyopadhyay, S., Subramanian, G. P., Foust, R., Morgan, D., Chung, S.-J., & Hadaegh, F. (2015). A Review of Impending Small Satellite Formation Flying Missions. 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting. doi:10.2514/6.2015-1623 .
- [17] <https://www.eoportal.org/satellite-missions/canx-4-5#canx-4--5-canadian-advanced-nanospace-experiment-4--5>
- [18] <https://fr.wikipedia.org/wiki/PROBA-3#:~:text=ordre%20du%20millim%C3%A8tre,-.Concept%20de%20la%20mission,%C3%A0%2060500%20km%20d'altitude.>
- [19] [https://www.esa.int/Enabling\\_Support/Space\\_Engineering\\_Technology/Proba\\_Missions/Proba-3\\_Mission3](https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Engineering_Technology/Proba_Missions/Proba-3_Mission3)
- [20] <https://innoter.com/en/satellites/sentinel-1a-1b/>
- [21] <https://solarsystem.nasa.gov/missions/grail/in-depth/>
- [22] <https://fr.wikipedia.org/wiki/EscaPADE>

[23] Schütze, D.; Stede, G.; Müller, V.; Gerberding, O.; Mahrtdt, C.; Sheard, B.; Heinzl, G.; Danzmann, K. LISA-like Laser Ranging for GRACE Follow-on. Proceedings of 9th LISA Symposium, Paris, France, 21–25 May 2012.

[24] <https://lisa.nasa.gov/>

## **Chapitre 2: la dynamique orbitale des satellites**

## 1 Introduction :

L'étude des mouvements et des interactions des objets célestes, tels que les satellites, en orbite autour d'un corps central comme la Terre, est au cœur de la dynamique orbitale. Bien qu'étroitement liée à la mécanique orbitale, cette discipline se concentre sur des aspects spécifiques qui apportent une perspective unique sur le comportement dynamique des satellites et des formations spatiales.

Ce chapitre vise à introduire les concepts fondamentaux de la dynamique orbitale, en mettant l'accent sur les mouvements relatifs des satellites en formation et ceux à travers l'étude approfondie du problème à deux corps, des éléments orbitaux et des équations de Clohessy-Wiltshire qui offrent une modélisation mathématique précise du mouvement relatif, facilitant ainsi la conception de stratégies de contrôle pour maintenir une formation spatiale désirée.

## 2 Problème des Deux Corps Képlérien :

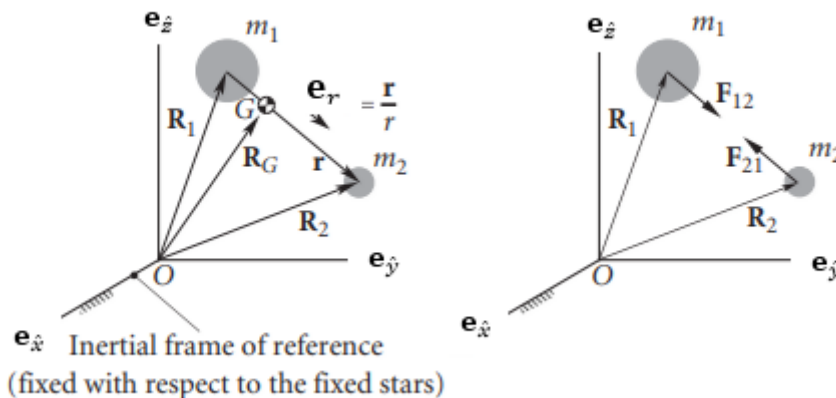
La figure 2.1 montre les deux corps célestes  $B_1$  et  $B_2$  avec les masses  $m_1$  et  $m_2$ , respectivement, se déplaçant sous l'influence gravitationnelle l'une de l'autre dans le référentiel inertiel  $(\mathbf{e}_{\hat{x}}, \mathbf{e}_{\hat{y}}, \mathbf{e}_{\hat{z}})$ . L'origine du référentiel inertiel reste fixe ou peut se déplacer à vitesse constante (par rapport aux étoiles fixes), mais les axes  $(\mathbf{e}_{\hat{x}}, \mathbf{e}_{\hat{y}}, \mathbf{e}_{\hat{z}})$  ne tournent pas.  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  représentent les vecteurs de position du centre de masses des deux corps dans le référentiel inertiel avec  $(\hat{x}_1, \hat{y}_1, \hat{z}_1)$  et  $(\hat{x}_2, \hat{y}_2, \hat{z}_2)$  étant leurs coordonnées de position respectives. D'où  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \hat{x}_1 \mathbf{e}_{\hat{x}} + \hat{y}_1 \mathbf{e}_{\hat{y}} + \hat{z}_1 \mathbf{e}_{\hat{z}} \\ \mathbf{R}_2 &= \hat{x}_2 \mathbf{e}_{\hat{x}} + \hat{y}_2 \mathbf{e}_{\hat{y}} + \hat{z}_2 \mathbf{e}_{\hat{z}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ensuite, le vecteur de position relative de  $B_2$  par rapport à  $B_1$  est défini par  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ . En utilisant l'éq. (2.1), le vecteur position relative s'écrit :

$$\mathbf{r} = (\hat{x}_2 - \hat{x}_1) \mathbf{e}_{\hat{x}} + (\hat{y}_2 - \hat{y}_1) \mathbf{e}_{\hat{y}} + (\hat{z}_2 - \hat{z}_1) \mathbf{e}_{\hat{z}} \quad (2.2)$$

Figure 2.1 : Interactions gravitationnelles dans un référentiel inertiel



Le corps  $B_1$  est soumis à l'attraction gravitationnelle du corps  $B_2$ . Cette force d'attraction gravitationnelle  $\mathbf{F}_{12}$  agit le long de la ligne joignant le centre des deux corps dans la direction de  $B_1$  à  $B_2$ . Le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_r$  le long de cette direction peut être défini comme

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (2.3)$$

En utilisant la loi de gravitation universelle de Newton, qui suppose que les masses sont concentrées au centre de masse respectif des deux corps, la force gravitationnelle qui agit sur  $B_1$  par  $B_2$  peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.4)$$

Où  $G = 6.672 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$  est la constante gravitationnelle universelle. De même, la force gravitationnelle agissant sur  $B_2$  par rapport à  $B_1$  peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2} (-\mathbf{e}_r) \quad (2.5)$$

Qui est conforme à la troisième loi du mouvement de Newton (c'est-à-dire que les forces d'action et de réaction sont égales et opposées).

Il faut cependant remarquer que la force gravitationnelle n'est pas la seule force qui agit sur les objets célestes. Il peut y avoir des forces de perturbation supplémentaires (expliquer ultérieurement dans ce chapitre). Dans les objets fabriqués par l'homme (tels que les satellites artificiels), il peut également contenir la «force de contrôle», qui peut être manipulée intelligemment pour atteindre certains objectifs souhaités spécifiques à la mission. En tenant compte de ces réalités et en utilisant la deuxième loi du mouvement de Newton, la force absolue sur le corps  $B_1$  dans le référentiel inertiel peut s'écrire

$$\mathcal{F}_{12} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{1c} + \mathbf{F}_{1p} = m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 \quad (2.6)$$

Où  $\mathbf{F}_{1c}$  est la force de commande et  $\mathbf{F}_{1p}$  est la force de perturbation. En utilisant les éq. (2.4)-(2.6), la force absolue peut être réécrite comme

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \mathbf{e}_r + \mathbf{F}_{1c} + \mathbf{F}_{1p} \quad (2.7)$$

De même, en écrivant l'ensemble d'équations ci-dessus pour le corps  $B_2$  on obtient

$$m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \mathbf{e}_r + \mathbf{F}_{2c} + \mathbf{F}_{2p} \quad (2.8)$$

En divisant les deux côtés de l'équation. (2.7) par  $m_1$  et les des deux côtés de l'Eq. (2.8) par  $m_2$ , ces équations se réécrivent comme suit :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_1 &= \frac{Gm_2}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{F}_{1c}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_{1p}}{m_1} \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 &= -\frac{Gm_1}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{F}_{2c}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{2p}}{m_2} \end{aligned} \quad (2.9)-(2.10)$$



L'utilisation des éq. (2.9) et (2.10), permet d'écrire l'accélération relative entre les corps  $B_1$  et  $B_2$  comme suit

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_1}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{F}_{2c}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{2p}}{m_2} - \frac{Gm_2}{r^2} \mathbf{e}_r - \frac{\mathbf{F}_{1c}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{1p}}{m_1} \quad (2.11)$$

La réécriture de l'équation ci-dessus en combinant les termes donne

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1+m_2)}{r^2} \mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{F}_{2c}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{2p}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{1c}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{1p}}{m_1} \quad (2.12)$$

Le centre de masse  $G$  des deux corps  $B_1$  et  $B_2$  à partir de l'origine du référentiel inertiel (voir Fig. 2.1) est calculé comme

$$\mathbf{R}_G = \frac{(m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.13)$$

Par conséquent, la vitesse absolue et l'accélération absolue de  $G$  sont

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_G &= \frac{(m_1 \dot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{R}}_2)}{m_1 + m_2} \\ \ddot{\mathbf{R}}_G &= \frac{(m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (2.14)-(2.15)$$

Si la force de contrôle et de perturbation est supposée négligeable, alors il ressort clairement des équations. (2.7) et (2.8) que

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = 0 \quad (2.16)$$

Cela signifie que  $\ddot{\mathbf{R}}_G = 0$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'accélération agissant au centre de masse  $G$  des deux corps  $B_1$  et  $B_2$ . Ce centre de masse  $G$  est connu sous le nom de barycentre. Puisqu'il s'agit d'un point non accélérateur, il peut également être traité comme l'origine du référentiel inertiel.

Considérons ensuite ce référentiel, où l'origine est le barycentre du système à deux corps. On définit  $r_1$  comme la distance entre  $B_1$  et le centre  $G$  et  $r_2$  comme la distance entre  $B_2$  et le centre  $G$ . Ensuite, l'éq (2.13) peut s'écrire :

$$\mathbf{0} = \frac{(m_1(-\mathbf{r}_1) + m_2 \mathbf{r}_2)}{m_1 + m_2} \quad (2.17)$$

Ce qui implique à son tour

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}_2 \quad (2.18)$$

Ensuite, concentrons-nous sur le cas spécifique où l'un des corps est très grand par rapport à l'autre. Le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre en est un exemple typique. Dans ce contexte, le corps le plus grand est la Terre et le corps le plus petit est le satellite. Notez que la masse de la Terre est  $m_1 = m_E = 5.972 \times 10^{24}$  kg, alors que la masse typique d'un satellite est de  $m_2 = m_S = 5 \times 10^4$  kg. Il est donc tout à fait évident de négliger  $m_s$  devant  $m_E$ .

On peut supposer alors que  $m_1 + m_2 \approx m_1$ . De plus, dans le cas où l'un tourne autour de l'autre,  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$  sont finis. Ainsi, à partir de l'éq. (2.18) il est évident que  $\mathbf{r}_1 \approx 0$ , c'est-à-dire que le centre du système de coordonnées n'est rien d'autre que le centre du plus grand corps.

La force de contrôle et de perturbation sur Terre sont évidemment négligeable. (par rapport à celle du satellite). Avec ces hypothèses, Eq. (2.12) pour la paire Terre-satellite peut être simplifié comme suit :

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_E}{r^2}\mathbf{e}_r + \frac{\mathbf{F}_{2c}}{m_S} + \frac{\mathbf{F}_{2p}}{m_S} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{u} + \mathbf{a}_p \quad (2.19)$$

Où  $\mu \triangleq Gm_E = 398,601 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$ ,  $\mathbf{u} \triangleq \frac{\mathbf{F}_{2c}}{m_S}$ ,  $\mathbf{a}_p \triangleq \frac{\mathbf{F}_{2p}}{m_S}$

### 3 Solution képlérien au problème à deux corps :

Dans la partie précédente, nous avons dérivé l'équation de mouvement pour un petit corps en orbite autour d'un corps plus grand. L'équation (2.19) est une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre. Obtenir une solution analytique fermée en tenant compte des effets de contrôle et de perturbation est généralement une tâche difficile. Cependant, lorsque les forces de contrôle et de perturbation sont négligées, il est possible d'obtenir une solution analytique fermée pour l'équation (2.19). Dans ce cas, l'équation peut être simplifiée de la manière suivante [1]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad (2.20)$$

Dans ce contexte, le moment cinétique spécifique du plus petit corps, est donné par :

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

Ensuite, en prenant le produit croisé des deux côtés de l'équation. (2.20) avec le moment cinétique spécifique  $\mathbf{h}$  donne

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \times \mathbf{h} \quad (2.22)$$

Cependant, comme  $\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}} = 0$  (puisque  $\dot{\mathbf{h}} = 0$ ), le membre de gauche de l'Eq. (2.22) peut être simplifié comme

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) - \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \quad (2.23)$$

De même, le membre de droite de l'Eq. (2.22) peut être simplifié comme

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{h}] &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\
 &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] \\
 &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{r}) - \dot{\mathbf{r}}r^2] \\
 &= \frac{1}{r^2} [\mathbf{r}\dot{r} - \dot{\mathbf{r}}r] \\
 &= -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right)
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Substitution d'éqs. (2.23) et (2.24) dans l'équation. (2.22) donne

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{d}{dt} \left( \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \tag{2.25}$$

Qui peut être réécrite comme

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = 0 \tag{2.26}$$

L'équation (2.26) conduit évidemment à

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{c} \tag{2.27}$$

Où  $\mathbf{c}$  est un vecteur constant.

L'équation (2.27) devient :

$$\frac{1}{\mu} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \tag{2.28}$$

Où le vecteur sans dimension  $\mathbf{e} = \mathbf{c}/\mu$  est appelé vecteur d'excentricité. Pour obtenir une expression scalaire, en prenant le produit scalaire des deux côtés par rapport à  $r$  implique :

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} \tag{2.29}$$

En utilisant l'éq. (2.21), membre gauche de l'Eq. (2.29) donne

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2 \tag{2.30}$$

En remplaçant l'éq. (2.30) dans l'éq. (2.29) donne :

$$\frac{h^2}{\mu} = r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r + re \cos \theta \tag{2.31}$$

Où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur d'excentricité  $\mathbf{e}$  et le vecteur de position  $\mathbf{r}$ , connu sous le nom d'anomalie vraie. Et l'excentricité  $e$  est définie comme la grandeur du vecteur d'excentricité  $\mathbf{e}$ .

Compte tenu de la discussion ci-dessus, les paramètres orbitaux du plus petit corps autour du plus grand corps sous l'influence de la gravité du plus grand corps sont contraints comme

$$r = \frac{h^2}{\mu} \left( \frac{1}{1 + e \cos \theta} \right) \quad (2.32)$$

Ensuite, pour calculer la vitesse du plus petit corps à un emplacement donné, en prenant le produit scalaire de l'équation. (2.20) avec  $\dot{\mathbf{r}}$  des deux côtés donne

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (2.33)$$

Cependant,

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) \quad (2.34)$$

De la même manière,

$$\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} r \cdot \dot{r} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu}{r} \right) \quad (2.35)$$

Substitution d'éqs. (2.34) et (2.35) dans l'équation. (2.33) donne

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (2.36)$$

C'est à dire

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \quad (2.37)$$

Où  $\varepsilon$  est une constante et  $v$  est la magnitude du vecteur vitesse  $\mathbf{v}$ . Les équations (2.32)-(2.37) décrivent le mouvement complet du plus petit corps en orbite sous l'influence de la gravité du plus grand corps. L'équation 2.37 est une affirmation de la conservation de l'énergie, à savoir que l'énergie mécanique spécifique est la même en tous points de la trajectoire. L'équation 2.37 est également connue sous le nom d'équation vis-viva (« force vivante »).

## 4 Paramètres orbitaux

Les satellites se déplacent autour de la Terre le long de trajectoires répétitives prédéterminées appelées orbites. Pour décrire précisément la position d'un satellite sur une orbite terrestre, il faut un certain nombre de paramètres, appelés éléments Képlériens. Les premiers d'entre eux décrivent l'orbite elle-même par rapport à la terre et au soleil. Les seconds décrivent les coordonnées du satellite sur cette orbite.

#### 4.1 Forme de l'Orbite :

Pour caractériser la forme d'une orbite, deux paramètres sont utilisés [2]:

- **Le demi-grand axe  $a$  :**

la moitié de la distance qui sépare le péricentre de l'apocentre (le plus grand diamètre de l'ellipse). Ce paramètre définit la taille absolue de l'orbite. Il n'a de sens en réalité que dans le cas d'une trajectoire elliptique ou circulaire (le demi-grand-axe est infini dans le cas d'une parabole ou d'une hyperbole)

- **L'excentricité  $e$  :**

Une ellipse est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes, les foyers (F et F' sur la figure), est constante. L'excentricité mesure le décalage des foyers par rapport au centre de l'ellipse ; c'est le rapport de la distance centre-foyer au demi-grand-axe  $e = \frac{c}{a}$ . Le type de trajectoire dépend de l'excentricité (voir la figure 2.2) :

$e = 0$  : trajectoire circulaire ;

$0 < e < 1$  : trajectoire elliptique caractérisé par ces formules

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2} \\
 \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} &= -\frac{\mu}{2a} \\
 T &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} \\
 e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \\
 \dot{v} &= \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{r^2} \\
 \ddot{v} &= \frac{-2\mu e (1 + e \cos v)^3 \sin v}{a^3 (1 - e^2)^3}
 \end{aligned}$$

$e = 1$  représente une parabole (trajectoire des lanceurs)

$e > 1$  une hyperbole (passage dans la zone d'influence d'un astre).

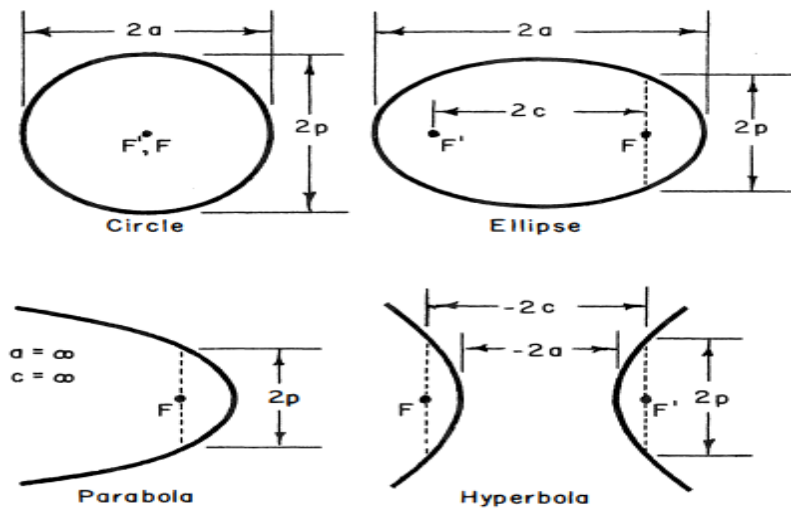


Figure 2.2 : Dimensions géométriques communes à toutes les sections coniques.

#### 4.2 Position de l'orbite :

Afin d'exprimer la position de l'orbite dans l'espace, trois nouveaux paramètres sont requis (voir figure 2.3)

- l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan de l'équateur terrestre, notée  $i$ .  
Les intersections entre cette orbite inclinée et l'équateur s'appellent "nœud ascendant" et "nœud descendant". Le nœud ascendant est celui qui correspond au passage du satellite de l'hémisphère sud à l'hémisphère nord, tandis que le nœud descendant correspond au passage de l'hémisphère nord à l'hémisphère sud.
- l'ascension droite du nœud ascendant, notée  $\Omega$ . Elle correspond à l'angle le long de l'équateur terrestre entre la direction du point vernal et le point d'intersection entre le plan de l'équateur et le plan orbital (passage montant du satellite).
- de l'argument du périégée, noté  $\omega$ . C'est l'angle le long du plan orbital entre le nœud ascendant et la direction du périégée.

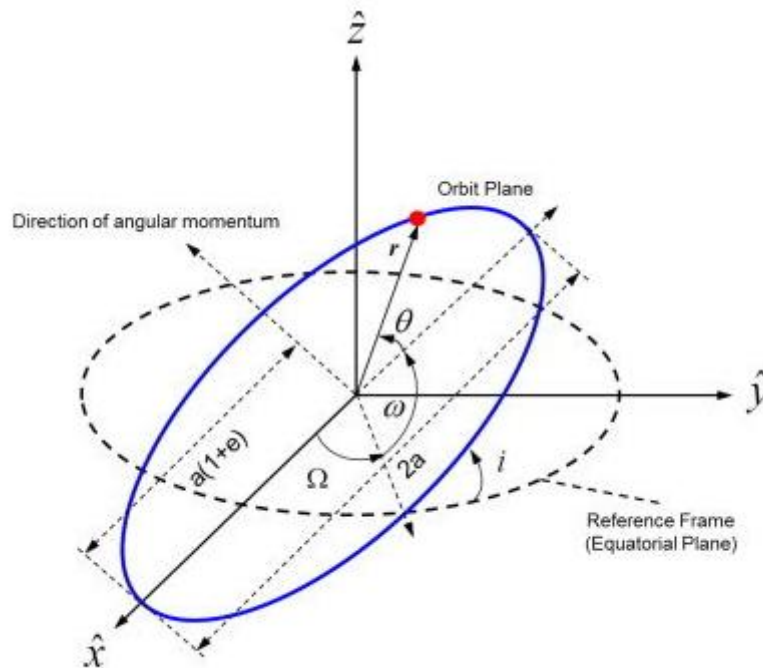


Figure 2.3: les éléments orbitaux

### 4.3 Position du satellite sur son orbite :

Un seul paramètre angulaire est nécessaire pour décrire la position d'un satellite sur une trajectoire elliptique.

**Anomalie vraie ( $\Theta$ ) :** L'angle entre le périhélie (le point le plus proche de la Terre) et la position actuelle du satellite est appelé anomalie vraie, notée  $v$ . L'équation de la trajectoire peut être exprimée comme suit :  $r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos(\theta))}$

, où  $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse et  $e$  est l'excentricité.

**Anomalie excentrique ( $E$ ) :** Une autre manière de représenter la position du satellite est d'utiliser l'angle  $E$ , centré au point  $O$  (le centre de l'ellipse) et mesurant l'angle entre le périhélie et la projection du satellite sur le grand cercle de l'ellipse. L'équation de la trajectoire devient alors :  $r = a(1 - e\cos(E))$

Ces deux paramètres angulaires permettent de décrire la position d'un satellite sur une trajectoire elliptique. Le choix entre l'anomalie vraie et l'anomalie excentrique dépend des préférences et des besoins spécifiques de l'analyse orbitale. Une troisième alternative consiste à utiliser une grandeur fictive appelée anomalie moyenne (voir la figure 2.4) pour décrire la position d'un satellite sur son orbite.

**Anomalie moyenne ( $M$ ) :** L'anomalie moyenne représente l'angle entre le périhélie (le point le plus proche de la Terre) et un point fictif  $S''$ . Ce point  $S''$  serait un mobile hypothétique, confondu avec le satellite au périhélie, se déplaçant à une vitesse uniforme sur le grand cercle de l'orbite réelle. L'anomalie moyenne  $M$  varie linéairement avec le temps et nous donne la position réelle du satellite sur son orbite.

L'équation de l'anomalie moyenne est donnée par :  $M = n(t-t_p)$ ,

Où  $t$  représente le temps actuel,  $t_p$  est la date de passage au périhélie, et  $n$  est la pulsation de l'orbite elliptique, définie par  $n = 2\pi/T$ , où  $T$  est la période du mouvement sur l'orbite réelle.

Selon la troisième loi de Kepler,  $n$  peut être calculé comme  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ , où  $\mu = G.M_T$  est la constante gravitationnelle de la Terre ( $\mu = 398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$ ) et  $a$  est le demi-grand axe de l'orbite.

Pour passer de l'anomalie excentrique ( $E$ ) à l'anomalie moyenne ( $M$ ), on utilise l'équation de Kepler :  $M = E - e \cdot \sin(E)$

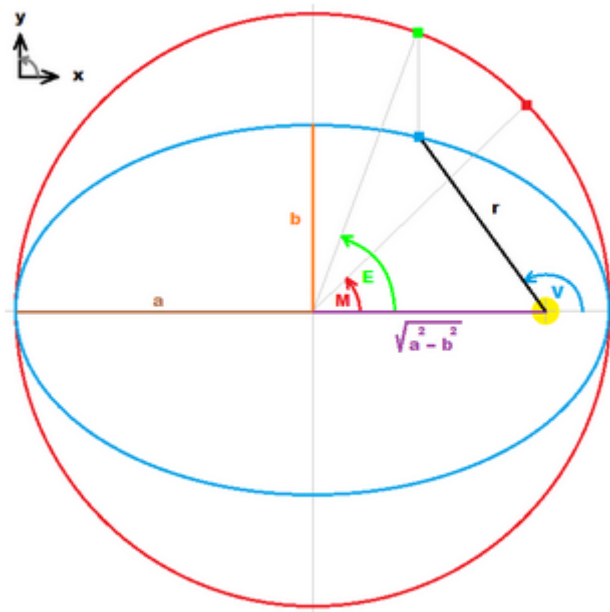


Figure 2.4 : représentation de l'anomalie vraie, excentrique, et l'anomalie moyenne.

## 5 Classification des orbites :

### 5.1 Selon l'altitude :

D'après l'association UCS (Union of concerned Scientists) 5465 satellites sont opérationnels au 30 Avril 2022.[3]

- 4700 satellites sont envoyés en **orbite basse (LEO : Low Earth Orbit**, située entre 500 et 1.000 kilomètres d'altitude et **SSO : Sun Synchronous orbit** à 800 kilomètres). Ces orbites sont utilisées notamment pour les systèmes de télécommunication, d'imagerie terrestre ou de météorologie.
- 565 satellites naviguent sur une **orbite géostationnaire (GEO : à 36.000 kilomètres d'altitude)**. Elle sert notamment pour la météo ou les services de communication comme la télévision, le satellite restent à tout moment au-dessus du même point. L'orbite GTO (Orbite de Transfert Géostationnaire) est l'orbite qui permet d'amener les satellites sur l'orbite GEO.



- Le reste est sur une **orbite moyenne (MEO: Medium Earth Orbit**, située entre 2.000 et 36.000 kilomètres), servant essentiellement aux satellites de localisation.
- Une minorité s'échappe de l'orbite terrestre (Libération) pour aller explorer l'Univers.

## 5.2 Selon l'inclinaison

L'angle d'inclinaison  $i$  de l'orbite (angle de nutation  $\theta$  pour les angles d'Euler) est défini entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ .

Si  $i$  est inférieur à  $90^\circ$ , l'orbite est dite directe (prograde), si  $i$  est supérieur à  $90^\circ$ , l'orbite est dite rétrograde. Dans le cas  $i = 90^\circ$ , l'orbite est polaire, pour  $i$  est compris entre  $80^\circ$  et  $100^\circ$ , l'orbite est strictement polaire. Si  $i = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ , on parle d'orbite équatoriale. Le tableau ci-dessous représente quelques inclinaisons opérationnelles usuelles [4].

Tableau 2.1 : inclinaisons opérationnelles usuelles

$i=0^\circ$	Orbite équatoriale, essentiellement l'orbite géostationnaire.
$i=28^\circ$	Inclinaison habituelle des orbites des vols Navette US.
$i=63^\circ.4'$	inclinaison orbitale fréquemment utilisée par les satellites soviétiques (Molniya et Tundra) car c'est une valeur qui leur permet de pallier la perturbation due à J2.
$i=90^\circ$	Orbites polaires pratiquées par les satellites météorologiques en orbite basse, leur permettant de suivre 15 fois par jour les masses d'air polaire.
$i=98^\circ.7'$	Inclinaison choisie par les satellites de la famille SPOT, gravitant vers 822 km du sol, travaillant en imagerie spatiale et utilisant grâce à une valeur bien choisie de $i$ , la propriété d'héliosynchronisme. Vu du nœud ascendant, le satellite se déplace vers l'Ouest, contrairement à 90% des satellites.
$i=5^\circ$	Inclinaison de l'orbite lunaire.
$i=23^\circ 27'$	Inclinaison de l'orbite décrite par le soleil vu de la Terre, avec passage au nœud ascendant au moment du printemps.

## 5.3 Selon l'excentricité :

### 5.3.1 Orbites circulaires :

Les orbites circulaires polaires ou inclinées ne sont considérées qu'à des altitudes basses (LEO : low earth orbit entre 500 et 2000 km) ou intermédiaires (MEO : Medium Earth Orbit vers 10000 km). L'orbite circulaire la plus répandue est celle du satellite géostationnaire (GEO).

De telles orbites réduisent la distance du satellite aux stations sol avec deux conséquences:

1. L'une sur le bilan de liaison.
2. L'autre sur le temps de propagation.

### 5.3.2 Orbites elliptiques :

Les orbites elliptiques sont utilisées pour réaliser une couverture régionale à des latitudes moyennes (de  $40^\circ$  à  $70^\circ$ ) sous un angle de site élevé (entre  $60^\circ$  et  $90^\circ$ ).

La période de l'orbite est choisie de telle sorte que le satellite revienne à l'apogée lorsque la zone de service se retrouve sous l'apogée. Cela impose une période d'orbite en relation avec celle de la rotation de la Terre.

## 6 Etude de la dynamique relative des satellites :

Ces dernières années, la recherche a suscité un fort intérêt pour le développement d'un modèle dynamique simple et précis permettant la conception, le guidage et le contrôle de formations de satellites. Plusieurs modèles dynamiques ont ainsi été élaborés pour répondre à diverses applications. De manière générale, ces modèles peuvent être classés en trois catégories distinctes. La première catégorie regroupe les modèles d'équations différentielles ordinaires directes (ODE), qui sont principalement des extensions ou des modifications des équations CW. Étant donné que ces modèles sont formulés sous forme d'équations différentielles, ils trouvent des applications essentielles dans la conception de contrôleurs. La deuxième catégorie comprend les modèles indirects, qui sont généralement exprimés en termes de différences entre les éléments orbitaux. Cette catégorie de modèles est plus appropriée pour la conception de formations satellitaires, car elle décrit directement la géométrie de la formation. La troisième catégorie est constituée des modèles basés sur les solutions, généralement sous la forme d'une matrice de transition d'état (STM). L'utilisation de STM, bien que complexe, permet de générer directement les mouvements relatifs des satellites[5].

Dans cette section une structure leader-follower est adopté où l'un des satellites en orbite est appelé satellite cible ou satellite chef, tandis que l'autre est appelé satellite poursuivant ou satellite adjoint. Dans le contexte de ce mémoire, le satellite chef est supposé passif ou non manœuvrable. En revanche, le satellite adjoint est supposé être activement contrôlé et effectuer la manœuvre requise pour se placer dans la formation désirée par rapport au satellite chef.

### 6.1 Relation entre le Problème Képlérien et la Dynamique Relative :

L'étude de la dynamique du vol en formation des satellites peut être considérée comme un cas particulier du problème képlérien à deux corps en raison de certaines similitudes dans la manière dont les deux systèmes sont modélisés.

1. Interaction gravitationnelle : Dans le problème képlérien à deux corps, on considère deux objets massifs, généralement une étoile (comme le Soleil) et une planète, qui interagissent uniquement par la force de gravité. De même, dans le vol en formation des satellites, on considère plusieurs satellites en orbite autour de la Terre, et leur principale interaction est également la force de gravité exercée par la Terre.
2. Influence mutuelle négligeable : Dans le problème képlérien à deux corps, on suppose généralement que la masse de la planète est beaucoup plus grande que celle de l'objet en orbite (la planète est considérée comme fixe). De même, dans le vol en formation des satellites, on suppose souvent que les masses des satellites sont relativement petites par rapport à la masse de la Terre, de sorte que l'influence mutuelle des satellites est négligeable.
3. Mouvement relatif : Dans les deux cas, on s'intéresse au mouvement relatif des objets par rapport à un référentiel fixe. Dans le problème képlérien, on observe la trajectoire de la planète par rapport à l'étoile (ou du satellite par rapport à la planète centrale), tandis que dans le vol en formation des satellites, on examine la trajectoire de chaque satellite par rapport à la Terre.

Cependant, il y a aussi des différences importantes entre les deux problèmes. Par exemple, dans le problème képlérien à deux corps, les trajectoires sont généralement des ellipses, des

paraboles ou des hyperboles, en fonction de l'énergie totale du système. Dans le vol en formation des satellites, les trajectoires sont souvent des orbites circulaires ou légèrement elliptiques, car les satellites sont généralement en orbite autour de la Terre, ou d'autres applications.

## 6.2 Référentiel de Hill :

En général, la distance relative entre les satellites en orbite est si élevée que la prise en compte de la dynamique orbitale dans le référentiel ECI n'est pas pratique. Au lieu de cela, la dynamique relative entre les satellites en orbite est définie dans le référentiel de Hill. Ce dernier est utilisé pour décrire le mouvement d'un vaisseau spatial spécifique appelé "Deputy" par rapport à un vaisseau spatial fictif appelé "Chief" qui se déplace le long d'une orbite de référence définie. L'origine du cadre de Hill se situe au centre de masse de ce vaisseau spatial fictif "Chief" et se déplace avec lui le long de la trajectoire prédéfinie de l'orbite de référence (voir figure2.5)

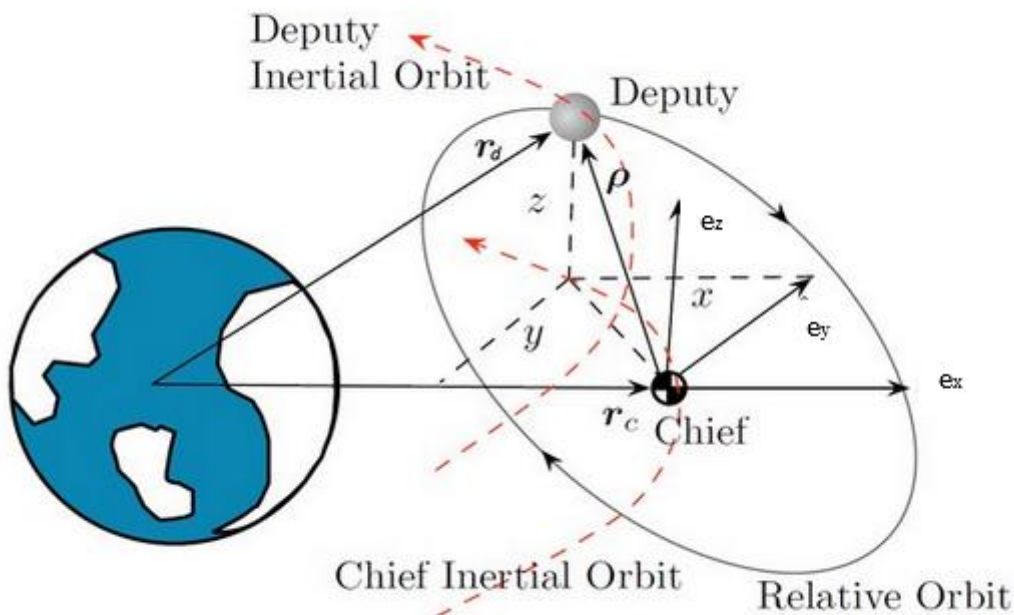


Figure2.5 : le référentielle LVLH

L'axe x de ce repère ( $e_x$ ) est orienté le long du vecteur de rayon  $r_c$ , qui va du centre de la Terre au centre de ce repère. L'axe z ( $e_z$ ) pointe dans la direction du vecteur moment angulaire orbital ( $h$ ), qui est perpendiculaire au plan de l'orbite du satellite chef. Enfin, l'axe y ( $e_y$ ) complète le trièdre [6].

Les vecteurs unitaires le long de ces axes peuvent être définis comme suit :

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_c}{|\mathbf{r}_c|} \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z$$

### 6.3 Mouvement relatif de Clohessy-Wiltshire dans le repère de Hill

Dans cette section, l'hypothèse est que le satellite principal n'est sous l'influence d'aucune force de contrôle. Ensuite, selon l'Eq. (2.19), l'équation du mouvement du satellite principal dans le référentiel inertiel est donnée par

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \mathbf{a}_{p_c} \quad (2.39)$$

où  $\mathbf{r}_c$  est le rayon vecteur du « satellite principal » mesuré à partir du centre de la Terre et  $\mathbf{a}_{p_c}$  est l'accélération de la perturbation sur le satellite principal. Pour l'orbite de référence circulaire,  $|\mathbf{r}_c|$  est une valeur constante, alors que pour les orbites elliptiques, le rayon instantané est calculé à l'aide de l'équation. (2.32) comme suit :

$$|\mathbf{r}_c| = \frac{a_c(1 - e_c^2)}{(1 + e_c \cos v_c)} \quad (2.40)$$

Où  $a_c$  est le demi-grand axe du satellite principal et  $e_c$  est l'excentricité de l'orbite du satellite principal.

De même, pour le satellite adjoint, l'équation du mouvement dans le référentiel inertiel s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{r}}_d = -\frac{\mu}{r_d^3}\mathbf{r}_d + \mathbf{u} + \mathbf{a}_{p_d} \quad (2.41)$$

où  $\mathbf{a}_{p_d}$  est l'accélération de la perturbation sur le satellite adjoint. Notez que la séparation spatiale entre le chef et le satellite adjoint est définie comme  $\rho = \mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c$ . En prenant la double dérivée et en substituant pour  $\ddot{\mathbf{r}}_c$  et  $\ddot{\mathbf{r}}_d$  à partir des équations. (2.39) et (2.41), respectivement, donnent :

$$\ddot{\rho} = -\frac{\mu}{(r_c + \rho)^3}(\mathbf{r}_c + \rho) + \frac{\mu}{r_c^3}\mathbf{r}_c + \mathbf{u} + \mathbf{a}_{p_r} \quad (2.42)$$

où

$\mathbf{r}_c$  est le rayon vecteur du satellite principal,

$\mathbf{r}_d = (\mathbf{r}_c + \rho)$  est le rayon vecteur du satellite adjoint, et

$\mathbf{a}_{p_r} = \mathbf{a}_{p_d} - \mathbf{a}_{p_c}$

Ensuite, le vecteur d'accélération relative est écrit dans le référentiel de Hill non inertiel comme suit :

$$\ddot{\rho} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)^{\mathcal{H}} + 2\omega_f^{\mathcal{H}} \times \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{\mathcal{H}} + \left(\frac{d\omega_f^{\mathcal{H}}}{dt}\right) \times \rho + \omega_f^{\mathcal{H}} \times (\omega_f^{\mathcal{H}} \times \rho) \quad (2.43)$$

où  $\omega_f^{\mathcal{H}} = [0 \quad 0 \quad \dot{v}_c]^T$  désigne la vitesse angulaire du référentiel de Hill par rapport au référentiel inertiel. En remplaçant l'éq. (2.43) dans l'éq. (2.42) donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)^{\mathcal{H}} + 2\omega_J^{\mathcal{H}} \times \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{\mathcal{H}} + \left(\frac{d\omega_J^{\mathcal{H}}}{dt}\right) \times \rho + \omega_J^{\mathcal{H}} \times (\omega_J^{\mathcal{H}} \times \rho) \\ - \frac{\mu}{r_c^3} \mathbf{r}_c + \frac{\mu}{r_d^3} \mathbf{r}_d - (\mathbf{u} + \mathbf{a}_{p_r}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.44)$$

où  $\rho = [x \ y \ z]^T$ ,  $\mathbf{r}_c = [r_c \ 0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{r}_d = \rho + \mathbf{r}_c$  et  $\mathbf{u} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  Ici  $x, y$  et  $z$  sont les trois composantes du vecteur de position relatif  $\rho$  et  $a_x, a_y$  et  $a_z$  sont les accélérations de commande appliquées. Le terme  $\mathbf{a}_{p_r} = [a_{p_x} \ a_{p_y} \ a_{p_z}]^T$  inclut les forces de perturbation externes telles que la perturbation gravitationnelle, la pression de rayonnement solaire et la traînée atmosphérique dans le cadre de référence de Hill non inertiel. En effectuant les simplifications nécessaires sur l'Eq (2.44), les équations non linéaires suivantes sont obtenues de la formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée sont obtenues :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{v}_c \dot{y} + \ddot{v}_c y + \dot{v}_c^2 x - \frac{\mu(r_c + x)}{\gamma} + \frac{\mu}{r_c^2} + a_{p_x} \\ -2\dot{v}_c \dot{x} - \ddot{v}_c x + \dot{v}_c^2 y - \frac{\mu y}{\gamma} + a_{p_y} \\ -\frac{\mu z}{\gamma} + a_{p_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (2.45)$$

L'équation de mouvement non linéaire ci-dessus est écrite sous forme d'espace d'état affine au contrôle comme suit:  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + B\mathbf{u}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ 2\dot{v}_c x_4 + \ddot{v}_c x_3 + \dot{v}_c^2 x_1 - \frac{\mu}{\gamma} (x_1 + r_c) + \frac{\mu}{r_c^2} + a_{p_x} \\ x_4 \\ -2\dot{v}_c x_2 - \ddot{v}_c x_1 + \dot{v}_c^2 x_3 - \frac{\mu}{\gamma} x_3 + a_{p_y} \\ x_6 \\ -\frac{\mu}{\gamma} x_5 + a_{p_z} \end{bmatrix}}_{f(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \mathbf{u} \quad (2.46)$$

Où

$$\gamma \triangleq |r_c + \rho|^3 = [(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \gamma &= [(r_c + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}} \\ &= r_c^3 \left[ 1 + \frac{2x}{r_c} + \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2} + \frac{z^2}{r_c^2} \right]^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

En utilisant l'expansion de la série de puissance, Eq. (2.48) peut s'écrire

$$\gamma = r_c^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{2x}{r_c} + \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2} + \frac{z^2}{r_c^2} \right) + \dots + HOT \right]$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur (HOT) et en utilisant l'hypothèse  $\rho \ll r_c$ , il est évident que  $(x^2/r_c^2) \approx 0$ ,  $(y^2/r_c^2) \approx 0$ ,  $(z^2/r_c^2) \approx 0$ . Avec la simplification, le terme non linéaire s'écrit

$$\gamma = r_c^3 \left( \frac{r_c + 3x}{r_c} \right) \quad (2.49)$$

#### 6.4 Les équations de la formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée

Dans cette configuration, nous considérons que les satellites chef et déposé évoluent sur des orbites inclinées de  $63^\circ 4'$ . Ce choix permet de minimiser les perturbations liées à la forme de la Terre. Bien que ces orbites soient de type LEO (Low Earth Orbit), nous sélectionnons des altitudes spécifiques qui nous permettent de négliger les effets de perturbation dus à l'atmosphère terrestre (voir figure 2.6).

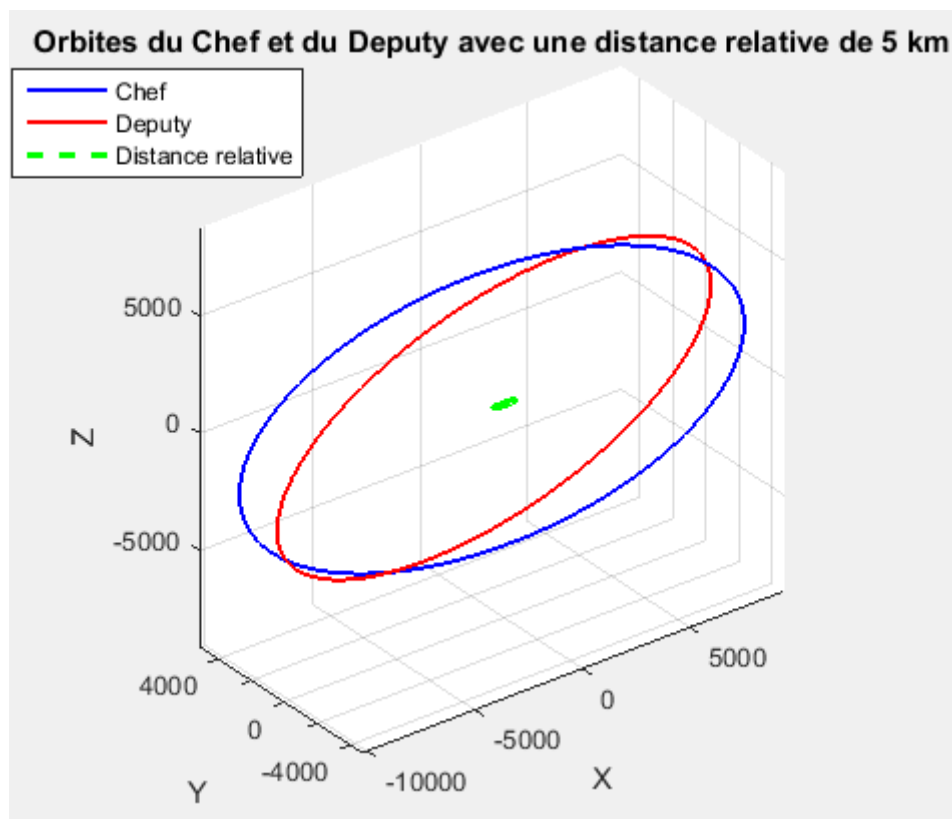


Figure 2.6 : représentation de l'orbite du satellite chef et adjoint dans le repère ECI

Cela implique que les composantes du vecteur accélération relative  $\mathbf{a}_{pr}$  sont nulles :  $\mathbf{a}_{pr} = [a_{px} \ a_{py} \ a_{pz}]^T = [0 \ 0 \ 0]^T$

Tenant compte de ces hypothèses et en remplaçant l'équation (2.49) dans l'équation (2.45), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= 2 \dot{v}_c \dot{y} + \ddot{v}_c y + x(\dot{v}_c^2 + 2 \frac{\mu}{r_c^3}) \\
 \ddot{y} &= -2 \dot{v}_c \dot{x} - \ddot{v}_c x + y(\dot{v}_c^2 - \frac{\mu}{r_c^3}) \\
 \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r_c^3} \\
 \text{avec : } \dot{v}_c &= \frac{\sqrt{\mu a (1 - e^2)}}{r_c^2} \\
 \ddot{v}_c &= \frac{-2\mu e (1 + e \cos(v_c))^3 \sin(v_c)}{a^3 (1 - e^2)^3}
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

### 6.5 Équation de Clohessy-Wiltshire linéarisée:

L'équation de Hill est la forme linéarisée de l'équation de Clohessy-Wiltshire du mouvement relatif de deux satellites dans le cadre de Hill. La linéarisation de l'Eq. (2.45) est effectuée sous les hypothèses suivantes :

- (i) l'orbite du satellite principale autour de la Terre est circulaire, c'est-à-dire La vitesse angulaire du satellite principal est constante.  $\ddot{v}_c = 0$   $\omega = \dot{v}_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_c^3}}$
- (ii) La séparation radiale entre les satellites chef et adjoint ( $\rho$ ) est très petite par rapport au rayon vecteur  $\mathbf{r}_c$  du satellite chef par rapport au centre de la Terre ( $\rho \ll r_c$ ).
- (iii) Aucune perturbation externe agissant sur les satellites principaux et adjoints, c'est-à-dire  $\mathbf{a}_{pr} = \mathbf{0}$

En utilisant la définition de  $\gamma$  et  $\ddot{v}_c = 0$ , l'équation de Clohessy-Wiltshire Eq. (2.45) se simplifie en :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} &= 2\omega \dot{y} + 3\omega^2 x \\
 \ddot{y} &= -2\omega \dot{x} \\
 \ddot{z} &= -\omega^2 z
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

En définissant le vecteur d'état comme précédemment (voir Eq. (2.46)), l'équation de Hill peut être écrite comme

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_B \mathbf{u} \tag{2.52}$$

qui prend la forme d'espace d'état standard, c'est-à-dire  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$

Pour l'équation de Hill, sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de force de contrôle, c-à-d  $\mathbf{u} = 0$ , il existe une solution de forme fermée qui est la suivante :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \rho \sin(\omega t + \phi) + C_a \\
 x_2 &= 2\rho \cos(\omega t + \phi) - \frac{3\omega}{2} C_a t + C_b \\
 x_3 &= C_m \rho \sin(\omega t + \phi) + 2C_n \rho \cos(\omega t + \phi) \\
 x_4 &= \rho \cos(\omega t + \phi) \\
 x_5 &= -2\rho \omega \sin(\omega t + \phi) - \frac{3\omega}{2} C_a \\
 x_6 &= C_m \rho \omega \cos(\omega t + \phi) - 2C_n \rho \omega \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Où  $C_a$  et  $C_b$  sont le décalage central de l'ellipse tracée par le satellite adjoint par rapport au satellite principal,  $\phi$  est l'angle du vecteur de position du satellite adjoint par rapport au vecteur vitesse du satellite principale.  $C_m$  et  $C_n$  sont les pentes de la ligne formée par la rotation autour du petit et du grand axe, respectivement. Notez que l'éq. (2.53) relie les paramètres d'état du satellite adjoint dans le référentiel de Hill à la distance de séparation radiale  $\rho$  et à la vitesse angulaire du satellite principal pour toute configuration de vol en formation de satellites.

## 7 Perturbations :

Une fois placé sur son orbite, le satellite subit divers couples perturbateurs qui entraînent des variations de ses paramètres orbitaux avec le temps. Cela comprend les forces gravitationnelles exercées par d'autres corps, telles que l'attraction solaire et lunaire, l'interaction avec le champ magnétique, la pression de radiation solaire, l'asymétrie du champ gravitationnel terrestre, etc. En raison de ces facteurs, l'orbite du satellite a tendance à dériver et son orientation change, de sorte que l'orbite réelle du satellite diffère de celle définie par les lois de Kepler. La position du satellite doit donc être contrôlée à la fois dans la direction est-ouest et nord-sud. La position est-ouest doit être maintenue pour éviter les interférences radioélectriques avec les satellites voisins. Il convient de mentionner qu'en cas de satellite géostationnaire, une dérive de 1 degré vers l'est ou l'ouest équivaut à une dérive d'environ 735 km le long de l'orbite.

On distingue principalement deux types de perturbation :

### 7.1 Perturbations Gravitationnel :

Les accélérations perturbatrices d'origine gravitationnelle sont des forces qui influencent le mouvement d'un satellite et qui ne peuvent pas être contrôlées. Ces perturbations sont déterminées par le gradient d'une fonction scalaire appelée potentiel, et elles ne dépendent ni de la masse du satellite ni de ses caractéristiques de surface. En raison de leur nature inhérente à la gravité, ces perturbations gravitationnelles ne permettent aucune possibilité de pilotage direct.

#### 7.1.1 Potentiel terrestre :



Le potentiel terrestre fait référence à la distribution de masse de la Terre qui crée un champ gravitationnel attractant les objets situés à proximités, mais du fait que la terre n'est pas une sphère parfaite, (légèrement aplatie aux pôles en raison de sa rotation). L'attraction terrestre n'est pas dirigée exactement vers le centre de la Terre provoquant ainsi une variation de la longitude du nœud ascendant. Ce mouvement est dirigé vers l'Ouest pour les orbites directes, et vers l'Est pour les orbites rétrogrades.

On décrit le potentiel terrestre sous forme d'un développement en harmoniques sphériques donné par la formule suivantes :

$$G^p = -\frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{R_e}{r} \right)^n J_n P_n + \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos \varphi + S_{nm} \sin \varphi) P_{nm}(\sin \phi_e) \right] \right\}$$

Où:

$r$  : distance géocentrique,

$\lambda_e$  mesure géographique de la longitude à partir du premier méridien,

$\phi_e$  la latitude géocentrique du satellite mesurée à partir de l'équateur,

$R_e$  est le rayon équatorial moyen de la Terre,

$\omega_e$  est le taux de rotation de la Terre,

$t_e$  est le temps écoulé depuis que le méridien de Greenwich s'est aligné avec l'axe  $\mathbf{e}_x$  de ECI,

$J_n$  sont les harmoniques zonales de degré  $n$  et d'ordre zéro,

$P_n(\sin \phi_e)$  est la fonction polynomiale de Legendre de degré  $n$  et d'ordre 0,

$P_{nm}(\sin \phi_e)$  est la fonction polynomiale de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m$ ,

$C_{nm}$  est le coefficient harmonique tessérale pour  $n \neq m$ ,

$S_{nm}$  est le coefficient harmonique sectoriel pour  $n = m$ , et

$\varphi \triangleq m\lambda_e + \omega_e t_e$ .

On voit sur ce développement que les coefficients  $J_n$  sont liés à la latitude, ce sont les harmoniques zonaux. Pour éclairer, la première harmonique  $J_2$  représente l'aplatissement de la terre, la seconde  $J_3$  la dissymétrie Nord-Sud. Par rapport à la force centrale, la première harmonique zonal  $J_2$  est de l'ordre de  $10^{-3}$ , alors que les autres coefficients sont de l'ordre inférieur à  $10^{-6}$ .

Si localement ces termes perturbateurs n'influent que peu sur le satellite, à la longue on peut apercevoir une dérive significatrice de l'orbite se comptant en centaines voire en milliers de kilomètres sur la position du satellite.

Ces phénomènes de perturbation des orbites sont parfois exploités de manière stratégique pour obtenir des avantages spécifiques, par exemple, pour une orbite héliosynchrone, on prendra une inclinaison voisine de  $98^\circ$  (comme le cas d'ALsat-1), afin d'assurer que la vitesse de précession de la longitude du nœud ascendant soit voisine de  $1^\circ$  par jour. En effet, comme la Terre tourne autour du Soleil ( $360^\circ$ ) en un an (365 jours), on s'assure ainsi que le satellite restera constamment orienté en direction du Soleil.

### 7.1.2 Irrégularités du champ de gravité terrestre : effets subtils sur l'orbite des satellites :

Le champ de gravité terrestre présente d'autres irrégularités que celles dues aux déformations au pôle et à l'équateur : elles sont liées à des variations de densité (réplétions) du sous-sol terrestre (croûte et manteau). Celles-ci sont particulièrement nombreuses sur la Lune. Pour les satellites terrestres les variations du champ de gravité finissent par perturber l'orbite avec un ordre de grandeur beaucoup moins important que celui dû à l'aplatissement du globe terrestre.

### 7.1.3 Attraction de la lune et du soleil :

Ces deux astres ont une influence sur la trajectoire d'un satellite artificiel. Le Soleil malgré sa taille a une influence plus faible que la Lune du fait de son éloignement. La perturbation est d'autant plus forte que l'altitude de l'apogée est élevée : elle est nulle pour les satellites en orbite basse et faible pour les satellites géostationnaires.

## 7.2 Perturbations non Gravitationnel :

Les accélérations perturbatrices d'origine non gravitationnelle sont des forces qui dépendent des caractéristiques massiques et surfaciques spécifiques du satellite. Elles résultent généralement des échanges microscopiques de quantité de mouvement qui se produisent localement à la surface externe du satellite. Contrairement aux perturbations gravitationnelles, ces perturbations non gravitationnelles offrent des possibilités de pilotage du satellite. Cela signifie qu'il est possible de prendre en compte ces perturbations dans la conception du système de contrôle et de les compenser ou les atténuer à l'aide de techniques de commande appropriées.

### 7.2.1 Forces aérodynamiques :

Si le corps céleste autour duquel gravite le satellite possède une atmosphère (Terre, Mars, Vénus) celle-ci exerce une force de traînée proportionnelle à la vitesse du satellite et à la densité de l'atmosphère : la vitesse du satellite est progressivement réduite. Si l'orbite est elliptique le premier effet de la résistance de l'atmosphère est de la rendre circulaire (l'apogée est modifiée et le périhélie reste invariant) puis l'orbite circulaire est elle-même progressivement abaissée. Le satellite finit par être détruit en rentrant dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Dans le cas d'un satellite tournant autour de la Terre sur une orbite circulaire sa durée de vie moyenne est égale à (compte tenu de l'impact d'un vent solaire moyen détaillé plus loin) :

- quelques jours pour une orbite de 200 km ;
- quelques semaines à 300 km ;
- quelques années à 600 km ;
- un siècle à 800 km (c'est l'orbite des satellites de télédétection, comme la famille Spot) ;
- plusieurs siècles à 1 000 km (ce sont les orbites des constellations des satellites de télécommunications, comme Globalstar et Iridium) ;
- un million d'années à 36 000 km (ce sont les satellites géostationnaires, ou ceux qui ont terminé leur service opérationnel et ont été désorbités, vers une orbite de rebut).

Les satellites artificiels sont généralement positionnés sur des orbites basses situées au-dessus de 300 km afin d'assurer une durée de vie prolongée. Cependant, dans certaines applications telles que la surveillance ou les missions scientifiques, il peut être nécessaire de choisir une orbite encore plus basse, de manière permanente ou temporaire, afin d'améliorer la précision des observations.

### 7.2.2 Influence du vent solaire

L'effet du vent solaire sur les satellites en orbite basse est significatif. Le vent solaire est un flux de plasma, composé principalement d'ions et d'électrons, qui sont éjectés de la haute atmosphère du Soleil. Ce flux peut provoquer une augmentation temporaire de la traînée exercée sur les satellites [8]. La vitesse et la température du vent solaire varient dans le temps en fonction de l'activité solaire, qui suit un cycle de 11 ans.

Lors des éruptions solaires, le réchauffement de l'ionosphère entraîne une dilatation des couches supérieures de l'atmosphère vers le haut. Entre 300 et 500 km d'altitude, la densité peut être multipliée par  $10^8$ , ce qui se traduit par une augmentation proportionnelle de la force de traînée. Certains satellites peuvent ainsi perdre plus de 10 km d'altitude en seulement quelques jours en raison de ces effets.

Ces variations de traînée sont particulièrement problématiques pour les satellites d'observation de la Terre, tels que le satellite Spot, car leur position doit être connue avec une grande précision.

### 7.2.3 Radiations solaires :

Les radiations solaires désignent les diverses formes de rayonnement émis par le Soleil, y compris les rayons ultraviolets (UV), les rayons X et les rayons gamma. Ce rayonnement est généré par les réactions nucléaires qui se produisent au cœur du Soleil. Les radiations solaires peuvent avoir des effets divers sur les objets spatiaux. Par exemple, les rayons X et les rayons gamma peuvent être dangereux pour l'électronique (effet de dose, effet de la charge d'espace, effet sur les mémoires) et les matériaux sensibles.

## Conclusion :

Ce chapitre offre une compréhension approfondie des principes fondamentaux et des outils mathématiques nécessaires pour étudier le mouvement relatifs des satellites. En combinant la résolution du problème à deux corps, l'analyse des éléments orbitaux, les équations de Clohessy-Wiltshire, ainsi que l'inclusion des perturbations, nous serons en mesure de saisir la complexité des mouvements orbitaux et de concevoir des stratégies de contrôle précises.

---

## Les références :

- [1] Curtis, H.D. 2010. Orbital mechanics for engineering students. Elsevier.[Livre]
- [2] Abdellah,I.(2020)'Conception d'un système de contrôle d'Attitude d'un satellite de télécommunication'[Mémoire de Magistère, Université Mohamed Boudia Oran].
- [3] <https://meprises-du-ciel.fr/sources-artificielles/satellites/>

[4]Rahal,W.(2013)'' ETUDE DE L'ORBITOGRAPHIE DES SATELLITES ARTIFICIELS ET EXPLOITATION DE LEURS DONNEES »[Mémoire de Doctorat, Mohamed Boudia Oran].

[5] Wang, D., Wu, B., & Poh, E. K. (2017). *Satellite Formation Flying. Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering*. doi:10.1007/978-981-10-2383-

[6] Alfriend, K., S.R. Vadali, P. Gurfil, J. How, and L. Brege. 2010. Spacecraft formation flying: Dynamics, control, and navigation. Elsevier Astrodynamics Series.

[7] ] Mathavaraj, S.; Padhi, R. *Satellite Formation Flying: High Precision Guidance Using Optimal and Adaptive Control Techniques*; Springer Nature: Berlin/Heidelberg, Germany, 2021. [[Google Scholar](#)]

[8] Chobotov, V.A. 2002. *Orbital mechanics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

## **Chapitre 3: les techniques de contrôle du vol en formation**

## 1 Introduction :

L'évolution des exigences en matière de contrôle automatique pousse les systèmes à devenir plus vastes et complexes, exigeant des performances accrues en termes de temps de réponse et de réduction des erreurs. Quel que soit leur domaine, améliorer les performances tout en optimisant les coûts et l'efficacité devient une nécessité incontournable. La montée en puissance des microprocesseurs facilite ces avancées, mais exige une analyse approfondie de la dynamique des systèmes pour anticiper les réactions, évaluer les changements proposés et apporter les ajustements nécessaires.

Ce chapitre se concentre sur l'application de ces principes à des systèmes à trois degrés de liberté. Plus spécifiquement, il explore le contrôle en formation de satellites (SFF), et pour cela, il s'appuie sur une gamme de techniques de contrôle, notamment le contrôle linéaire quadratique (LQR), le contrôle par mode de glissement (Sliding Mode). Ces stratégies seront appliquées aux systèmes linéaires et non linéaires développés dans le chapitre 2, dans le but d'atteindre des performances optimales et robustes.

## 2 Aperçue du contrôleur LQR :

L'optimalité a été un objectif naturel de recherche pour plusieurs contributeurs, car la consommation de carburant embarqué joue un rôle essentiel dans la durabilité d'une mission spatiale. Plus précisément, la théorie classique du contrôle optimal linéaire quadratique (LQ) a été exploitée dans plusieurs articles. L'une des premières approches du vol en formation utilisant le contrôle LQ a été rapportée dans Vaasar et Sherwood [1], où un modèle dynamique de position relative a été dérivé, discrétisé et utilisé pour concevoir un contrôleur. Ce résultat a été étendu au contrôle de suivi de point de consigne dans Redding et al. [2], en utilisant une combinaison de techniques de contrôle en boucle fermée et en boucle ouverte. Le maintien relatif de la formation par le contrôle LQ a également été étudié dans Ulybyshev et Kapila et al. [3,4]. Dans Sparks [5], une loi de contrôle LQ en temps discret basée sur les équations de Clohessy-Wiltshire a été présentée pour surmonter les perturbations J2 en orbite. De même, dans Starin et al. [6], un contrôleur LQ avec un nombre réduit de paramètres d'entrée pour le même problème de contrôle a été présenté, basé sur l'idée que la poussée appliquée coplanaire à l'horizon local pourrait être utilisée pour modifier la position radiale d'un engin spatial en raison de son mouvement képlérien. Le contrôle LQ a également été la méthode de conception choisie pour Kong et Miller [7].

## 3 Commande optimale :

Le défi de la commande optimale réside dans la quête de la solution qui minimise un critère défini. Ce problème a été abordé dès le XIXe siècle par l'intermédiaire du calcul des variations, et il continue de jouer un rôle central dans les domaines de l'ingénierie et du contrôle. Une illustration majeure de l'impact de la commande optimale réside dans son application au programme Apollo pendant les années 1960. Cette section est consacrée à la synthèse de la loi de commande linéaire quadratique (LQR) pour un système linéaire et non-linéaire.

## 4 Synthèse de la loi de commande LQR :

### 4.1 Cas linéaire :

De nombreux didacticiels orientés vers les applications se concentrent principalement sur des cas simplifiés où le point de consigne correspond à un état nul, également appelé point d'équilibre. Néanmoins, moins d'attention a été portée au défi de réguler l'état d'un système vers des points de consigne non nuls, c'est-à-dire des états souhaités [8].

Dans ce contexte, l'espace d'état est défini par l'équation suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B \mathbf{u} \quad (3.1)$$

La première étape consiste à déterminer l'entrée de commande  $\mathbf{u}_d$  qui produira l'état souhaité  $\mathbf{x}_D$  en régime permanent. Puisque  $\mathbf{x}_D$  est constant, en substituant  $\mathbf{x}$  par  $\mathbf{x}_D$ , et  $\mathbf{u}$  par  $\mathbf{u}_D$  dans (3.1), on obtient l'équation suivante

$$0 = A\mathbf{x}_D + B\mathbf{u}_D \quad (3.2)$$

Où  $\dot{\mathbf{x}}_D = 0$  puisque  $\mathbf{x}_D$  est un état stationnaire constant. En supposant que la matrice  $B$  a un rang de colonne complet, à partir de (3.2), nous avons l'entrée de commande souhaitée  $\mathbf{u}_D$ , produisant l'état stationnaire souhaité  $\mathbf{x}_D$  donnée par

$$\mathbf{u}_D = -(B^T B)^{-1} B^T A \mathbf{x}_D \quad (3.3)$$

En principe, nous pouvons contrôler le système en appliquant l'entrée de contrôle constante  $\mathbf{u}_D$  et en attendant que le système se stabilise dans l'état d'équilibre souhaité  $\mathbf{x}_D$ . Cependant, il existe plusieurs problèmes avec ce type de contrôle qui peuvent être exagérés pour les systèmes non amortis. À savoir, le système peut présenter un dépassement important pendant sa réponse transitoire ou son comportement oscillatoire. Ces phénomènes peuvent compromettre la sécurité ou les performances du système. De plus, le système peut être soumis à des perturbations externes qui peuvent sérieusement détériorer la précision et les performances de la commande. Ces faits motivent le développement de l'algorithme de contrôle de rétroaction du point de consigne. L'idée est d'améliorer la réponse transitoire du système et le rejet des perturbations à l'aide d'un algorithme de contrôle par rétroaction.

Pour développer l'algorithme de contrôle, nous introduisons les variables d'erreur comme suit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_D, & \Rightarrow \mathbf{x} &= \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_D \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_D, & \Rightarrow \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_D \end{aligned} \quad (3.4)$$

En différenciant ces expressions et en substituant (3.4) dans (3.1), on obtient

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_D = A(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_D) + B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_D) \quad (3.5)$$

Ici, il faut garder à l'esprit que puisque  $\mathbf{x}_D$  est constant, nous avons  $\dot{\mathbf{x}}_D = 0$ . En substituant ceci dans (3.5), on obtient

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}} + A\mathbf{x}_D + B\mathbf{u}_D \quad (3.6)$$

Par contre, en substituant (3.2) dans (3.6), on obtient

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = A\tilde{\mathbf{x}} + B\tilde{\mathbf{u}} \quad (3.7)$$

Ayant cette forme de dynamique, nous pouvons appliquer directement l'algorithme LQR qui est dérivé sous l'hypothèse d'un état souhaité nul. L'algorithme LQR optimise la fonction de coût suivante

$$J(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_{t=0}^{t=\infty} (\tilde{\mathbf{x}}^T Q \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{u}}^T R \tilde{\mathbf{u}} + 2\tilde{\mathbf{x}}^T N \tilde{\mathbf{u}}) dt \quad (3.8)$$

où  $Q$ ,  $R$ , et  $N$  sont les matrices de pondération. La fonction de coût est contrainte par la dynamique du système (3.7).

#### 4.1.1 Contrôlabilité et Observabilité :

##### 4.1.1.1 Définition de la contrôlabilité :

Un système est contrôlable s'il existe une commande finie  $u(t)$  qui peut changer l'état du système  $x(t)$  de l'état initial à l'état final arbitraire.

Pour un système d'ordre  $n$ , le système est contrôlable si la matrice  $\delta$  a pour rang  $n$ .

$$\delta = [BA \ B \ A^2 \ B \ \dots \ A^{n-1} \ B].$$

##### 4.1.1.2 Définition de l'observabilité :

On dit qu'un état  $x(t_0)$  est observable, s'il peut être identifié à partir de la connaissance de l'entrée  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$  sur un intervalle de temps fini  $[t_0, t_1]$ . Le système est dit complètement observable si  $\forall x(t_0) \in a$  à l'espace d'état, il est possible de restituer ou identifier sa valeur à partir de la seule connaissance de  $u(t)$  et  $y(t)$  [9].

Nous avons :

$$\dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \text{ et } Y = C \cdot x(t)$$

Ce système est observable si la matrice  $\theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$  est de rang  $n$ . où  $n$  est le rang de la matrice  $A$

#### 4.1.2 Choix des matrices de pondérations $Q$ et $R$ et $N$ :

Les matrices de pondération doivent être sélectionnées par l'utilisateur et elles doivent satisfaire quelques hypothèses (ainsi que les matrices systèmes Le couple  $\{A, B\}$  doit être contrôlable et observable) pour que la solution du problème LQR existe). La matrice  $Q$  pénalise l'erreur de contrôle et, d'une manière générale, des valeurs plus élevées de  $Q$  augmenteront la vitesse de réponse du système. Cependant, le compromis est que plus d'énergie de contrôle sera dépensée pour diriger le système vers l'état zéro. En revanche, la matrice  $R$  pénalise l'énergie de commande. Des valeurs plus élevées de  $R$  minimisera



généralement l'énergie de commande, cependant, au prix d'une réduction de la vitesse de réponse du système. Dans nos simulations, nous supposons que  $N$  s'agit d'une matrice nulle. De plus, pour simplifier la conception du contrôle, nous supposons que les matrices de pondération sont diagonales. C'est-à-dire que nous supposons que

$$Q = q \cdot I, R = r \cdot I \quad (3.9)$$

où  $I$  est une matrice identité, et  $q > 0$  et  $r > 0$  sont des nombres réels positifs. La solution qui optimise la fonction de coût ( 3.8 ) est la loi d'asservissement de la forme suivante

$$\tilde{\mathbf{u}} = -K\tilde{\mathbf{x}} \quad (3.10)$$

où la matrice  $K$  est définie par

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T) \quad (3.11)$$

où  $S$  est la solution de la matrice algébrique de l'équation de Riccati :

$$A^T S + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0 \quad (3.12)$$

Nous n'avons pas besoin d'écrire notre propre code pour résoudre l'équation de Riccati. Nous utiliserons la fonction MATLAB `lqr()` pour calculer la matrice de contrôle  $K$ . En remplaçant (3.10) dans (3.7), on obtient le système en boucle fermée

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - BK)\tilde{\mathbf{x}} \quad (3.13)$$

L'algorithme de contrôle LQR rendra la matrice  $A - BK$  asymptotiquement stable (toutes les valeurs propres de  $A - BK$  sont dans la moitié gauche du plan complexe). Cela signifie que l'erreur d'état du point de consigne  $\tilde{\mathbf{x}}$  s'approchera asymptotiquement de zéro. Autrement dit, en régime permanent, l'état du système  $\mathbf{x}$  deviendra  $\mathbf{x}_D$ . A partir de (3.13), nous avons

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (A - BK)\tilde{\mathbf{x}} - (A - BK)\mathbf{x}_D \quad (3.14)$$

L'équation (3.14) peut être utilisée pour simuler le système en boucle fermée.

En tenant compte des variables d'erreur (3.4), nous pouvons écrire la commande de rétroaction (3.10), comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D - K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_D) \quad (3.15)$$

## 4.1.3 Organigramme de calcul de la loi de commande LQR :

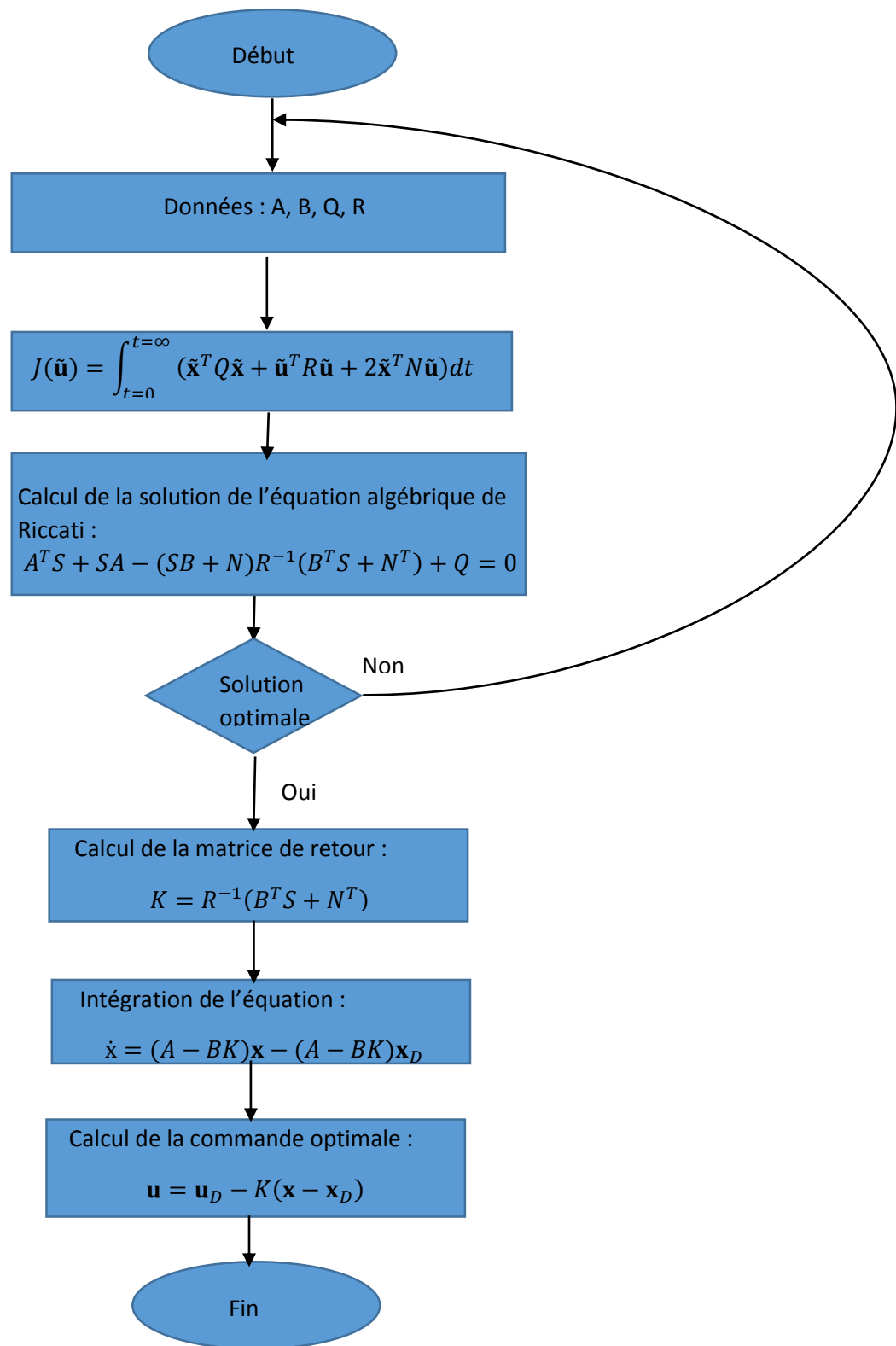


Figure3.1 : Algorithme de conception du contrôleur LQR

## 4.2 Cas non-linéaire :

Les systèmes non linéaires violent la première hypothèse d'un régulateur quadratique linéaire ; que le système est linéaire. Cela ne signifie pas que nous ne pouvons pas l'appliquer, cela signifie simplement qu'il ne sera pas optimal. La mauvaise performance du LQR dépend de quelques éléments, deux facteurs importants étant la non-linéarité réelle de la dynamique du système et la fréquence à laquelle vous pouvez mettre à jour la matrice de gain de rétroaction  $K$  [10].

### 4.2.1 Linéarisation et Conception LQR :

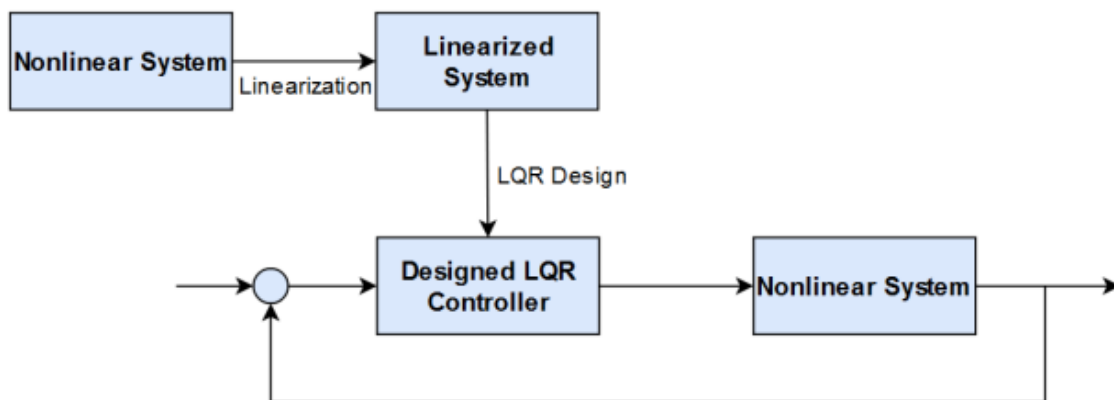


Figure 3.2 : Contrôle LQR pour le Modèle Linéarisé du vol en formation des satellites

La Figure 3.2 illustre la procédure de conception de contrôle adoptée. En commençant par le système non linéaire, les équations de mouvement sont linéarisées, ce qui produit un modèle de système linéarisé. Le processus aboutit ensuite à la conception d'un régulateur linéaire quadratique (LQR) basé sur le modèle linéarisé du mouvement relatif du satellite député par rapport au satellite chef. Grâce à la conception LQR, une solution optimale a été obtenue. Ensuite, les gains optimaux du système linéarisé ont été réinjectés dans le système non linéaire d'origine pour produire un contrôle "sub-optimal" stable, ainsi que pour prouver la stabilité globale du système non linéaire [11].

### 4.2.2 Linéarisation autour d'un point de fonctionnement [12] :

Soit le système non linéaire donné par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) \\ y(t) = h(x, u) \end{cases}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p \quad (3.16)$$

Soit  $(x_0, u_0)$  le point d'équilibre pour ce système, afin de linéariser ce système, on introduit les variables d'écarts suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_0 \\ \tilde{u} &= u - u_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

On effectue la linéarisation en développant  $f$  en série de Taylor du premier ordre :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \tilde{x}(t) + \dot{x}_0(t) \\
&= f(\tilde{x}(t) + x_0(t), \tilde{u}(t) + u_0(t)) \\
&= f(x_0(t), u_0(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u}
\end{aligned} \quad (3.18)$$

Si on choisit  $u = \tilde{u}$  c'est-à-dire  $u_0 = 0$  et en développant de la même manière l'équation de sortie, on trouve le système linéarisé autour du point d'équilibre suivant:

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u} \\
\tilde{y} &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{x} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \tilde{u}
\end{aligned} \quad (3.19) \quad \text{Si } f(x_0, u_0) = 0$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \end{cases}$$

$$\text{Avec} \\
A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} ; D = \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0}} \quad (3.20)$$

A et B représente respectivement les matrices jacobienes de  $f$  suivant  $x$  et  $u$ . C et D représente respectivement les matrices jacobienes de  $h$  suivant  $x$  et  $u$ . Le modèle linéaire obtenu n'est valable que localement, c'est uniquement autour du point de fonctionnement choisit. Néanmoins, si le système possède plusieurs points d'équilibre, il est possible de changer ce point afin de constituer un nouveau système linéaire local.

## 5 Aperçue de la méthode du sliding mode :

Le contrôle par mode de glissement (Sliding Mode Control ou SMC) a attiré beaucoup d'attention, notamment pour son insensibilité aux incertitudes paramétriques et aux perturbations externes, sa faible charge de calcul, sa réponse rapide et sa mise en œuvre aisée. Le caractère discontinu du contrôle et le gain élevé sont des caractéristiques du SMC conventionnel, qui permettent de placer précisément les trajectoires du système sur la surface de glissement pour surmonter les incertitudes. Yeh et al. [13] ont proposé des lois de contrôle discontinues basées sur le SMC en supposant des propulseurs de type impulsif. Cependant, en raison de l'assomption de l'amplitude constante des impulsions, la mise en œuvre d'un contrôle précis et fin est limitée. Varma et Kumar [14] ont développé une méthodologie de contrôle sans carburant en utilisant le glissement différentiel entre les satellites, basée sur le SMC, dans laquelle une loi adaptative est intégrée pour estimer les incertitudes de la force de traînée. Pour éviter le problème dit de "chattering" résultant de l'utilisation du contrôle discontinu, généralement considéré comme le principal inconvénient du SMC, l'approche de la couche limite [15] a été introduite. Cependant, comme mentionné dans la référence [16], cette approche ne supprime pas toujours complètement le phénomène de "chattering". De plus, cette approche de couche limite introduit généralement des pertes de précision dans le système en raison de son approximation continue. Par conséquent, trois approches différentes de SMC continu, comprenant le SMC augmenté d'un observateur de

perturbations en mode glissant, un algorithme de super-twisting et le SMC utilisant des surfaces de glissement intégrales, ont été proposées dans la référence [17]. Udwadia et al. [18] ont utilisé diverses fonctions continues pour contrôler efficacement le mouvement relatif sans "chattering". Bien qu'elles ne convergent pas exactement vers zéro, les erreurs peuvent être réduites de manière arbitrairement petite. Cependant, dans les références [17] et [18], la borne supérieure des incertitudes était supposée connue, ce qui est difficile à évaluer avec précision en pratique. Une autre limitation pratique est que la saturation de la commande d'entrée n'a pas été prise en compte. Godard et Kumar [19] ont proposé des lois de contrôle adaptatif tolérant les défaillances (avec saturation des propulseurs) dans lesquelles une connaissance précise des limites d'incertitude n'est pas nécessaire et deux surfaces de glissement différentes (SMC conventionnel et SMC terminale non singulière) sont conçues et comparées.

### 5.1 Commande par mode de glissement:

Les commandes conçues restent, cependant, très dépendantes du point de fonctionnement considéré et surtout du taux de variation des non-linéarités du modèle de la formation des satellites. Si ces non-linéarités deviennent très prononcées, la linéarisation de premier ordre n'est donc plus valable et les commandes perdent automatiquement leurs performances et peuvent rendre le système instable. C'est dans ce contexte que les chercheurs ont ressenti le besoin de se tourner vers des méthodes plus sophistiquées pour surmonter ces défis. L'une de ces avancées majeures est la commande par mode de glissement, ancrée dans la théorie de la géométrie différentielle. Cette approche offre des solutions plus robustes et adaptatives pour les systèmes soumis à des non-linéarités prononcées.

### 5.2 Système à structure variable :

Nous pouvons définir les systèmes dits à structure variable de la manière suivante : Un système à structure variable est un système dont la structure change pendant son fonctionnement, Il est caractérisé par le choix d'une fonction et d'une logique de commutation, ce choix permet au système de commuter d'une surface à une autre à tout instant ,de plus un tel système peut avoir de nouvelles propriétés qui n'existent pas dans chaque structure , dans ces systèmes les paramètres du régulateur peuvent prendre deux valeurs, la commutation d'une valeur à une autre s'effectue à la traversée d'une hyper surface de l'espace de phase du système de façon à contraindre le point représentatif du mouvement du système à rester sur cette hyper surface d'où le nom de régime glissant.

### 5.3 Principe de la commande par mode de glissement

La technique de la commande par (MG) consiste à ramener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une logique de commutation appropriée jusqu'au point d'équilibre. Cette trajectoire est constituée de trois parties distinctes (voir figure 3.3)

- **Mode de convergence (MC):** durant lequel la variable à réguler se déplace à partir de n'importe quel point du plan de phase vers la surface de commutation  $S(x) = 0$  et l'atteint dans un temps fini. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.

- **Mode de glissement (MG)**: durant lequel la variable d'état a atteint la surface glissante et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique dans ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x)=0$ .
- **Mode de régime permanent (MRP)**: il est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre. Il caractérise la qualité et la performance de la commande. Il est utilisé spécialement pour l'étude des systèmes non linéaires.

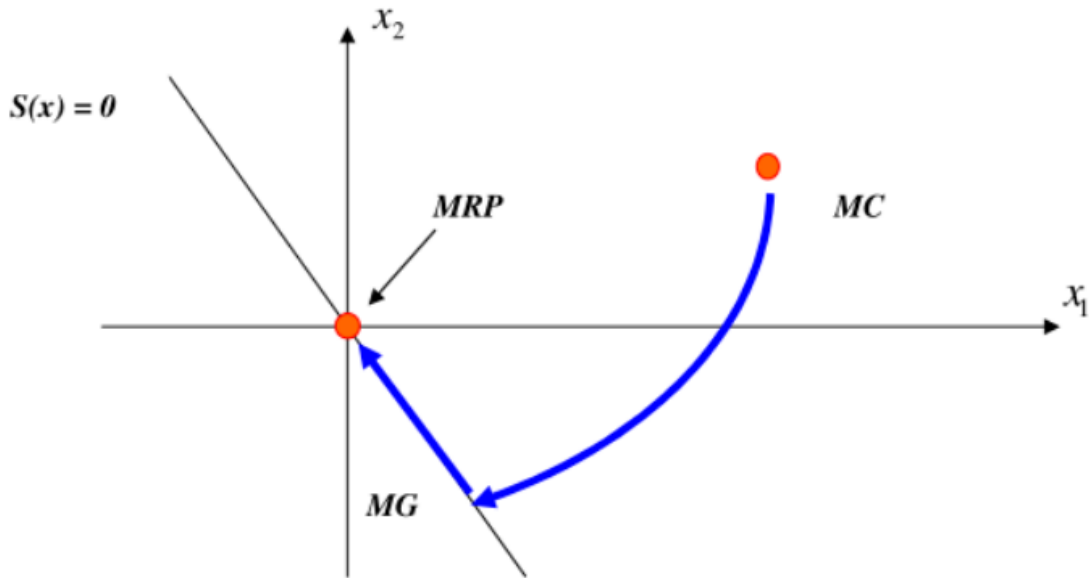


Figure 3.3 : Les différents modes pour la trajectoire dans le plan de Phase.

#### 5.4 Conception de la commande par mode de glissement

La conception des régulateurs par les modes glissants prend en charge les problèmes de stabilité et des performances désirées d'une façon systématique. La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes

- 1-Le choix de la surface ;
- 2-L'établissement des conditions d'existence de la convergence ;
- 3-La détermination de la loi de commande.

#### 5.5 Choix de la surface de glissement

Le choix de la surface de glissement concerne non seulement le nombre nécessaire de ces surfaces, mais également leurs formes en fonction de l'application et de l'objectif visé. Généralement, le nombre des surfaces de glissement est choisi égal à la dimension du vecteur de commande.

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'état désiré du système. Il existe plusieurs formes de la surface de glissement qui ont été proposées, mais la surface la plus utilisée pour garantir la convergence vers l'état désiré du système est donnée par Soltine .

La forme générale de la surface de glissement qui permet d'assurer la convergence d'une variable vers sa valeur désirée :

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \alpha \right)^{r-1} e \quad (3.21)$$

Avec:

$e$  : représente l'erreur entre la valeur actuelle et désirée.

$\alpha$  : est un constante positif.

$r$  : représente le degré relatif, qui est égale au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie du système pour faire apparaître la commande.

L'objectif de cette technique de commande est de maintenir la surface de glissement à zéro  $S = 0$ . Par exemple, si  $r = 2$ , l'expression de la surface de glissement devient  $S = \dot{e} + \alpha e$ . Cette dernière est une équation différentielle linéaire dont l'unique solution est  $e = e(0)e^{-\alpha t}$ . Pour un choix convenable du paramètre  $\alpha$ , ceci revient à un problème de poursuite de trajectoire.

## 5.6 Etablissement des conditions d'existence de convergence et d'invariance :

### 5.6.1 Principe d'invariance :

Une propriété essentielle du fonctionnement en mode glissant est présentée: l'insensibilité ou la robustesse vis `à vis d'une certaine classe d'erreurs de modélisation ou de perturbations. Le modèle différentiel du système en mode glissant peut ainsi être complètement indépendant d'éventuelles erreurs de modélisations ou d'éventuels perturbations. On dit alors que le système vérifie la propriété d'invariance [20].

### 5.6.2 Conditions de convergence et d'existence :

Ses conditions sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et de rester indépendamment de la perturbation, on cite deux approches [20]:

#### 5.6.2.1 Approche directe :

Cette approche est la plus ancienne, proposée par UTKIN ,il l'exprime sous la forme :

$$\dot{S}(x) \cdot S(x) < 0 \quad (3.22)$$

#### 5.6.2.2 Approche de LYAPUNOV :

La fonction de LYAPUNOV est une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$ , pour les variables d'état du système qui impose un choix de la commande qui fera décroître cette fonction  $\dot{V}(x) < 0$  .cette approche est utilisée pour améliorer les performances de la commande, l'étude de la robustesse et de la stabilité des systèmes non linéaires.

la structure de la commande comporte deux parties (voir figure 3.4) ,une première concernant la linéarisation exacte correspond à la commande équivalente  $u_{eq}$ , elle sert à maintenir la variable à Controller sur la surface de glissement  $S(x)$ ,elle est déduite en considérant que la dérivé de la surface est nul  $\dot{S}(x) = 0$  et peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commander lors de la commutation rapide entre les valeurs  $U_{max}$  , $U_{min}$  ,et une deuxième stabilisante  $u_N$  ,déterminée pour vérifier la condition de convergence ,cette dernière est très importante dans la technique de commande par mode glissant car elle est utilisée pour éliminer les effets

d'imprécision du modèle et de rejeter les perturbations extérieures, alors la commande totale est donnée par :

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_N \quad (3.23)$$

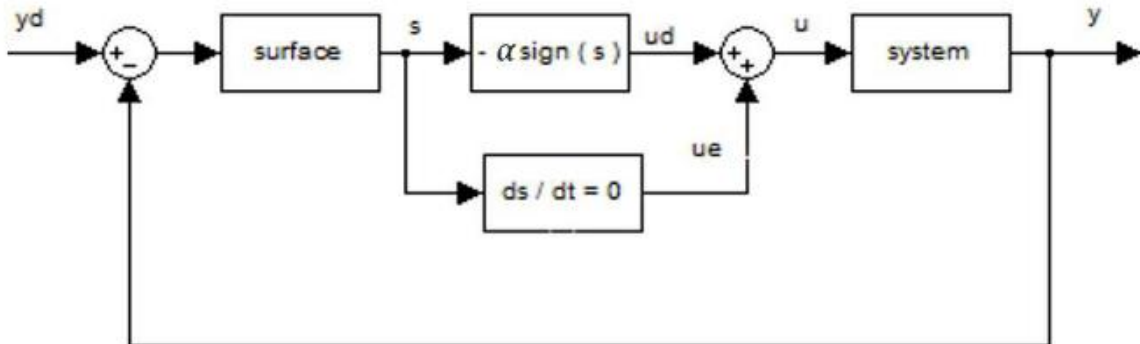


Figure 3.4 : Principe de la commande en mode glissant avec commande équivalente

### 5.7 Détermination de la loi de commande :

Une fois que la surface de glissement est choisie, ainsi que le critère de convergence, il reste à déterminer la condition nécessaire pour ramener la variable à contrôler vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant le mode de glissement. Autrement dit nous allons nous intéresser au calcul de la commande équivalente et par la suite à la commande attractive du système défini dans l'espace d'état par l'équation

$$\dot{x}(t) = f(x, t) + g(x, t)u(t) \quad (3.24)$$

Le vecteur  $u$  est composé de deux grandeurs :  $u_{eq}$  et  $u_N$  soit :

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_N$$

Nous avons :

$$\dot{S}(x) = \frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x} \{f(x, t) + g(x, t)u_{eq}(t)\} + \frac{\partial s}{\partial x} \{g(x, t)u_N\} \quad (3.25).$$

En mode de glissement et en régime permanent, la dérivée de la surface est nulle (car la surface est égale à zéro) .Ainsi, nous obtenons :

$$u_{eq} = \left\{ \frac{\partial s}{\partial x} g(x, t) \right\}^{-1} \left\{ \frac{\partial s}{\partial t} f(x, t) \right\} u_N = 0 \quad (3.26)$$

Durant le mode de convergence, en remplaçant le terme  $u_{eq}$  par sa valeur (3.26) dans l'équation (3.25).Donc, nous obtenons une nouvelle expression de la dérivée de la surface, soit :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} \{g(x, t)u_N\} \quad (3.27)$$



Le problème revient à trouver  $u_N$  qui permet de garantir l'attractivité de la variable à contrôler vers la surface de glissement et satisfaire la condition de convergence tel que :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = S(x) \frac{\partial s}{\partial x} \{g(x, t)u_N\} < 0 \quad (3.28)$$

La solution la plus simple est de choisir  $u_N$  sous la forme de relais (Figure 3.5). Dans ce cas, la commande s'écrit comme suit :  $u_N = -k \text{sign}(s(x))$  (3.29)

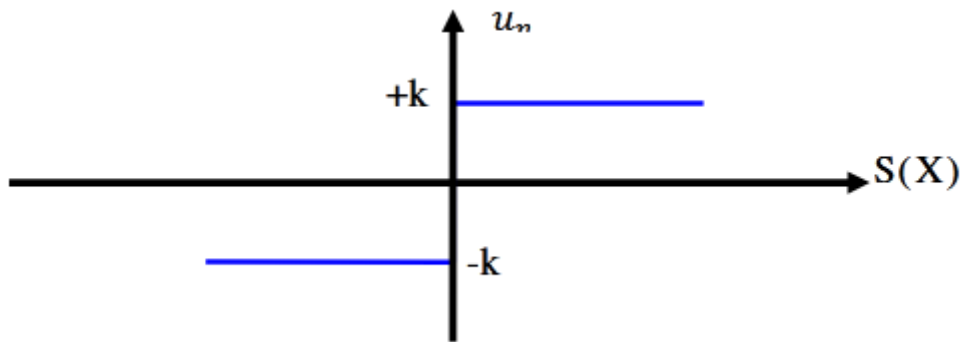


Figure 3.5 : Représentation de la fonction « Sign »

En remplaçant l'expression (3.29) dans (3.28) on obtient :

$$S(x) \cdot \dot{S}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} g(x, t)k|s(x)| < 0 \quad (3.30)$$

Où le facteur  $\frac{\partial s}{\partial x} g(x, t)$  est toujours négatif pour la classe des systèmes que nous considérons.

Le gain  $K$  est choisi positif pour satisfaire la condition (3.30).

Le choix de ce gain est très influent sur la commande car, s'il est très petit le temps de réponse sera très long et s'il est choisi très grand, nous aurons de fortes oscillations au niveau de l'organe de la commande. Ces oscillations peuvent exciter les dynamiques négligées (phénomène de Chattering), ou même détériorer l'organe de commande.

### 5.8 Phénomène de Chattering :

Un régime glissant idéal requiert une commande pouvant commuter à une fréquence infinie. Ainsi, durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entraîner un phénomène de broutement, appelé réticence ou "chattering" (voir figure 3.6). Celui-ci se caractérise par de fortes oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement. Les principales raisons à l'origine de ce phénomène sont les limitations des actionneurs ou les retards de commutation au niveau de la commande. Ces commutations détériorent la précision de la commande et peuvent s'avérer néfastes pour l'organe de commande en provoquant une détérioration prématurée des systèmes mécaniques et une élévation de température dans les systèmes électriques (perte d'énergie non négligeable) [21].

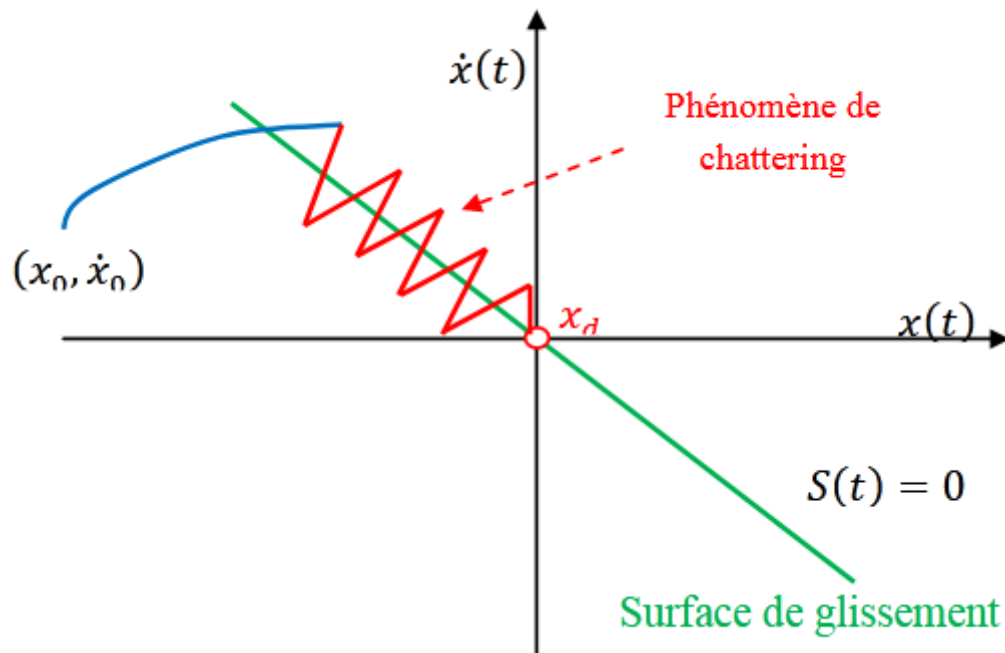


Figure 3.6 : phénomène de chattering .

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées, comme la solution de couche limite (remplacer la fonction sign par une approximation continue comme la fonction sat), fuzzy sliding mode, mode glissant d'ordre supérieur, lois d'approche, etc.....

### Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs techniques de contrôle du vol en formation. Nous avons commencé par explorer la commande optimale LQR pour la poursuite de trajectoire désirée, en l'appliquant à un modèle linéaire. Ensuite, nous avons démontré comment adapter la commande LQR à un système non linéaire. Nous avons ensuite abordé la commande robuste par mode de glissement (sliding mode), qui tient davantage compte de la non-linéarité inhérente au système.

### Référence:

[1] R.H. Vassar, R.B. Sherwood, Formationkeeping for a pair of satellites in a circular orbit, AIAA Journal of Guidance, Navigation and Control 8 (2) (1985) 235–242.

[2] D.C. Redding, N.J. Adams, E.T. Kubiak, Linear-quadratic stationkeeping for the STS orbiter, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 12 (1989) 248–255.

[3] Y. Ulybyshev, Long-term formation keeping of satellite constellation using linear-quadratic controller, AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 21 (1) (1998) 109–115.

[4] V. Kapila, A.G. Sparks, J. Buffington, Q. Yan, Spacecraft formation flying: dynamics and control, in: Proceedings of the American Control Conference, San Diego, CA, 1999.

- [5] A. Sparks, Satellite formationkeeping control in the presence of gravity perturbations, in: Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois, 2000.
- [6] S.R. Starin, R.K. Yedavalli, A. Sparks, Design of a LQR controller of reduced inputs for multiple spacecraft formation flying, in: Proceedings of the American Control Conference, Arlington, VA, 2001. [7] E.M.C. Kong, D.W. Miller, Optimal spacecraft reorientation for Earth orbiting clusters: applications to Techsat 21, Acta Astronautica 53 (2003) 863–877.
- [8] <https://aleksandarhaber.com/compute-and-simulate-linear-quadratic-regulator-lqr-in-matlab-for-set-point-tracking/>
- [9] Sedairia, R. (2020). *Etude Des Performances De La Commande Lqg Appliquée Aux Systèmes Linéaires Multivariables* [Mémoire de Master, Université Larbi Tebessi - Tebessa].
- [10] <https://studywolf.wordpress.com/2015/11/10/linear-quadratic-regulation-for-non-linear-systems-using-finite-differences/>
- [11] Stanfield, K.; Bani Younes, A. Dual-Quaternion Analytic LQR Control Design for Spacecraft Proximity Operations. Sensors 2021, 21, 3597. <https://doi.org/10.3390/s21113597>
- [12] Titouche, K. & Yahmi, L. (2011). *Linéarisation Approximation Par Bouclage Et Commande Par Mode Glissant D'un Pendule Inversé* [Autre, Université Mouloud Mammeri - Tizi Ouzou].
- [13] Yeh, H., Nelson, E., and Sparks, A., “Nonlinear Tracking Control for Satellite Formations,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 2, 2002, pp. 376-386.
- [14] Varma, S. and Kumar, K. D., “Multiple Satellite Formation Flying Using Differential Aerodynamic Drag,” Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 49, No. 2, 2012, pp. 325-336.
- [15] Burton, J. A. and Zinober, A. S., “Continuous Approximation of Variable Structure Control,” International Journal of Systems Science, Vol. 17, No. 6, 1986, pp. 875–885.
- [16] Li, M., Wang, F., and Gao, F., “PID-Based Sliding Mode Controller for Nonlinear Processes,” Industrial and Engineering Chemistry Research, Vol. 40, No. 12, 2001, pp. 2660-2667.
- [17] Massey, T., and Shtessel, Y., “Continuous Traditional and High-Order Sliding Modes for Satellite Formation Control,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 28, No. 4, 2005, pp. 826–831.
- [18] Udawadia, F. E., Wanichanon, T., and Cho, H., “Methodology for Satellite Formation-keeping in the Presence of System Uncertainties,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 37, 2014, pp. 1611-1624.
- [19] Godard and Kumar, K. D., “Fault Tolerant Reconfigurable Satellite Formations Using Adaptive Variable Structure Techniques,” Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 33, 2010, pp. 969-984.
- [20] Bendali, R. (2012). “*Commande par mode glissant de la machine asynchrone*” [Mémoire de Master, Université Mouloud Mammeri – Tizi-ouzou].

[21] Deghboudj, I. & Boutamina, B. (2017). *Commande Des Systemes Non Lineaires Par Mode Glissant D'ordre Superieur* [Mémoire de Magister, Université Frères Mentouri - Constantine 1].

## **Chapitre 4 : Etude en simulation**

## 1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous mettrons en application les commandes exposées au chapitre trois sur notre modèle décrivant le mouvement relatif du satellite adjoint par rapport au satellite chef, exprimé dans le repère de Hill. Nous présenterons ensuite les résultats de nos simulations à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée, en utilisant l'environnement MATLAB.

Au cours de cette analyse, nous nous focaliserons sur des paramètres essentiels, notamment les positions et les vitesses du satellite adjoint par rapport au satellite chef sur les trois axes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). De plus, nous examinerons la trajectoire du satellite adjoint depuis son orbite initiale jusqu'à l'orbite de référence.

## 2 Configuration de simulation :

Pour mettre en évidence l'efficacité de notre modèle dynamique et des techniques de contrôle, nous utiliserons les conditions initiales et finales décrites dans cette section.

### 2.1 Paramètres orbitaux du satellite chef :

Les paramètres orbitaux choisis pour le satellite principal sont supposés avoir un demi-grand axe de 10 000 km et une excentricité de 0,05 comme indiqués dans le (tableau 4.1)

Tableau 4.1 : les paramètres orbitaux du satellite chef

	Cas circulaire	Cas elliptique
<b>Paramètres orbitaux</b>	Valeurs	Valeurs
<b>Demi-grand axe (a)</b>	10000 km	10000 km
<b>Excentricité (e)</b>	0	0.05
<b>Inclinaison de l'orbite (i)</b>	63,4°	63.4°
<b>Argument du périégée (<math>\omega</math>)</b>	0	0
<b>Longitude du nœud ascendant (<math>\Omega</math>)</b>	0	0
<b>Anomalie vraie initiale (<math>\nu</math>)</b>	0	0

### 2.2 Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée :

Les états de la dynamique relative correspondants dans le référentiel de Hill sont répertoriés dans le Tableau 4.2

Tableau 4.2 : Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.05$ ) :

États relatifs	Condition Initiale	Condition Finale
$x$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$-3.66 \times 10^0$
$\dot{x}$ (km/s)	$-2.48 \times 10^{-4}$	$1.70 \times 10^{-3}$
$y$ (km)	$-8.45 \times 10^{-1}$	$9.20 \times 10^0$

$\dot{y}$ (km/s)	$1.06 \times 10^{-3}$	$4.19 \times 10^{-3}$
$z$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$5.30 \times 10^0$
$\dot{z}$ (km/s)	$-2.48 \times 10^{-4}$	$7.18 \times 10^{-3}$

### 2.3 Vol en formation en orbite circulaire avec une faible distance relative souhaitée :

La position relative du satellite adjoint est supposée évoluer de la valeur initiale 1 km à la valeur finale 5 km. Les états de dynamique relative correspondants dans le référentiel de Hill sont répertoriés dans le Tableau 4.3.

Tableau 4.3: Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0$ ) :

États relatifs	Condition Initiale	Condition Finale
$x$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$-2.32 \times 10^0$
$\dot{x}$ (km/s)	$-2.67 \times 10^{-4}$	$2.79 \times 10^{-3}$
$y$ (km)	$-8.45 \times 10^{-1}$	$8.85 \times 10^0$
$\dot{y}$ (km/s)	$1.14 \times 10^{-3}$	$2.93 \times 10^{-3}$
$z$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$5.37 \times 10^0$
$\dot{z}$ (km/s)	$-2.67 \times 10^{-4}$	$7.13 \times 10^{-3}$

### 2.4 Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.

La position relative du satellite adjoint est supposée évoluer de la valeur initiale 1 km à la valeur finale 100 km. Les états de dynamique relative correspondants dans le référentiel de Hill sont répertoriés dans le Tableau 4.4.

Tableau 4.4: Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.0$ ) :

États relatifs	Condition initiale	Condition Finale
$x$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$-4.68 \times 10^1$
$\dot{x}$ (km/s)	$-2.67 \times 10^{-4}$	$5.55 \times 10^{-2}$
$y$ (km)	$-8.45 \times 10^{-1}$	$1.76 \times 10^2$
$\dot{y}$ (km/s)	$1.14 \times 10^{-3}$	$5.77 \times 10^{-2}$
$z$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$1.09 \times 10^2$

$\dot{z}$ (km/s)	$-2.67 \times 10^{-4}$	$1.43 \times 10^{-1}$
------------------	------------------------	-----------------------

### 2.5 Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée.

La position relative du satellite adjoint est supposée évoluer de la valeur initiale 1 km à la valeur finale 100 km. Les états de dynamique relative correspondants dans le référentiel de Hill sont répertoriés dans le Tableau.

Tableau 4.5: Scénario du satellite adjoint ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.05$ ) :

États relatifs	Condition initiale	Condition Finale
$x$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$-7.39 \times 10^1$
$\dot{x}$ (km/s)	$-2.48 \times 10^{-4}$	$3.30 \times 10^{-2}$
$y$ (km)	$-8.45 \times 10^{-1}$	$1.83 \times 10^2$
$\dot{y}$ (km/s)	$1.06 \times 10^{-3}$	$8.29 \times 10^{-2}$
$z$ (km)	$-9.06 \times 10^{-1}$	$1.08 \times 10^2$
$\dot{z}$ (km/s)	$-2.48 \times 10^{-4}$	$1.44 \times 10^{-1}$



### 3 Application de la commande LQR :

#### 3.1 Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée :

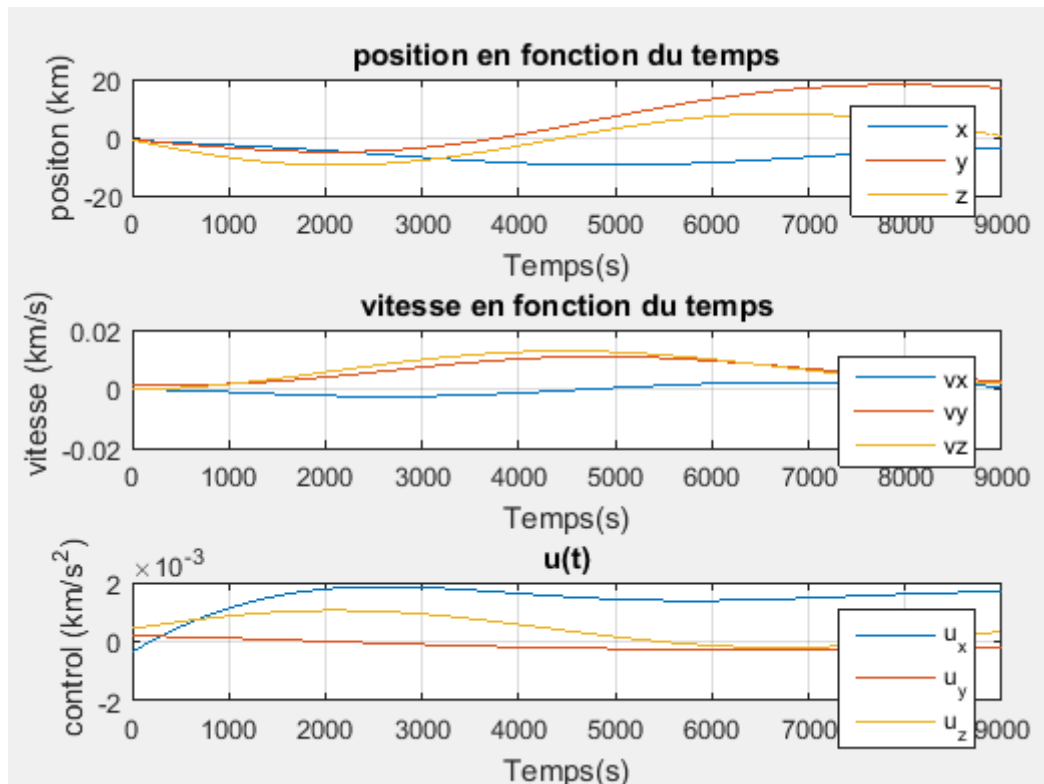


Figure 4.1 : position ,vitesse ,force de contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.05$ )

Nous pouvons observer à partir de (la figure 4) que la position le long de l'axe x converge vers la valeur désirée, tandis que pour les positions selon les axes y et z, nous constatons des déviations par rapport aux valeurs souhaitées. Cette différence est attribuable à la négligence de la non-linéarité du système et à l'approximation de l'équation de l'anomalie vraie et de ses dérivées.

En ce qui concerne les vitesses, nous observons une convergence, mais elle survient après une longue période de transition. Cette particularité est principalement due au choix des matrices de pondération. Nous avons opté pour une matrice Q relativement petite, ce qui signifie que nous accordons moins d'importance à la réduction de l'erreur d'état. Cette approche permet au système de tolérer une certaine erreur d'état tout en minimisant l'effort de commande.

Parallèlement, la matrice R a été choisie relativement grande dans le but de minimiser la consommation d'ergol, ce qui contribue à la préservation de nos ressources. Ce choix se traduit par des commandes plus douces, avec des forces de contrôle appliquées de l'ordre de  $10^{-3}$ .

3.2 Vol en formation en orbite circulaire avec une faible distance relative souhaitée :

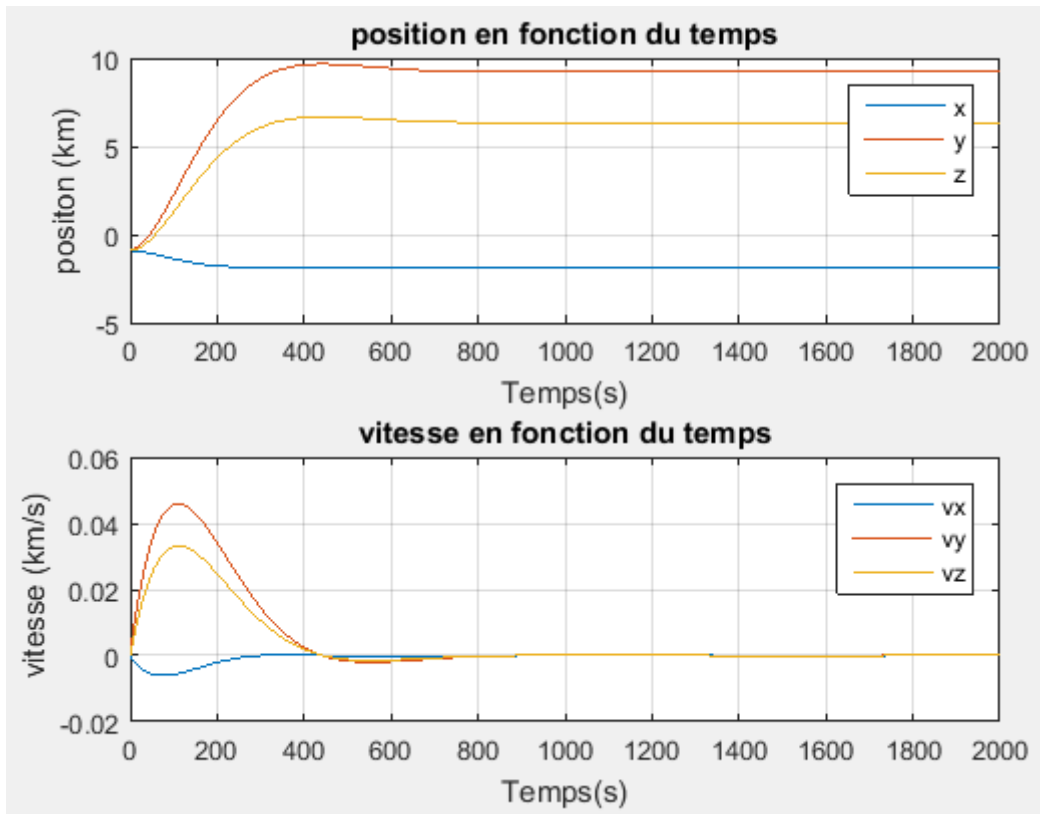


Figure 4.2 : position vitesse en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0$ )

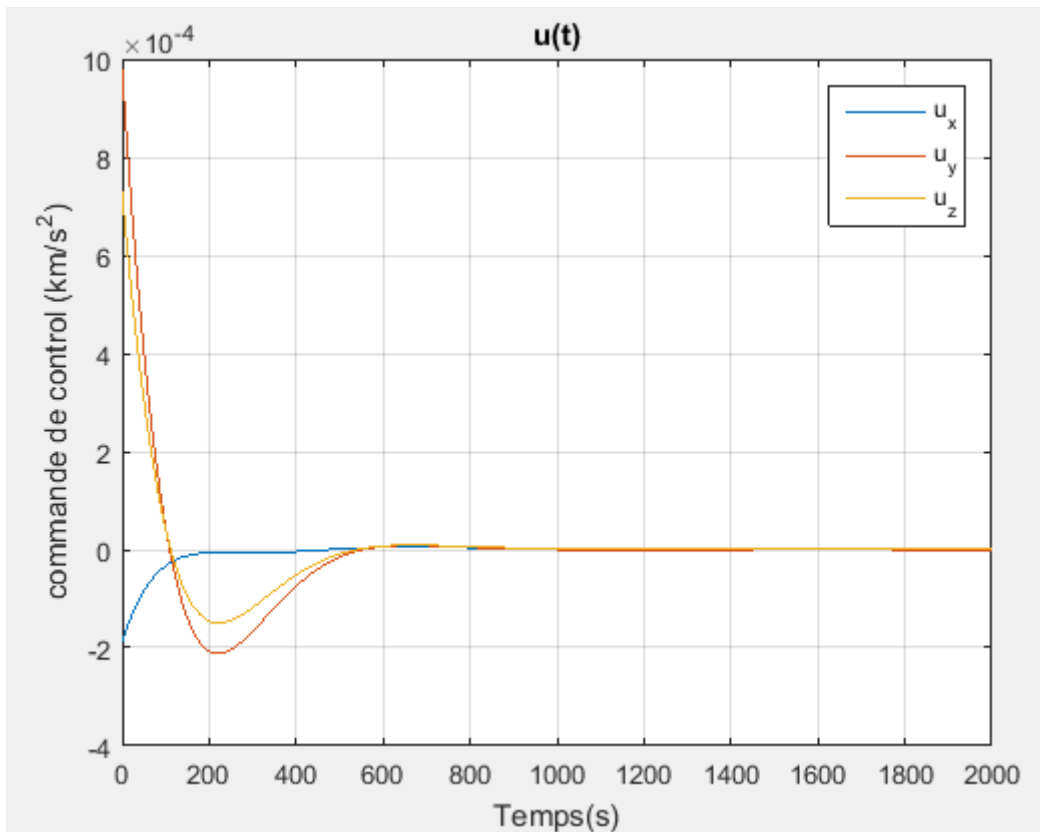


Figure 4.3 : force de contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.05$ )

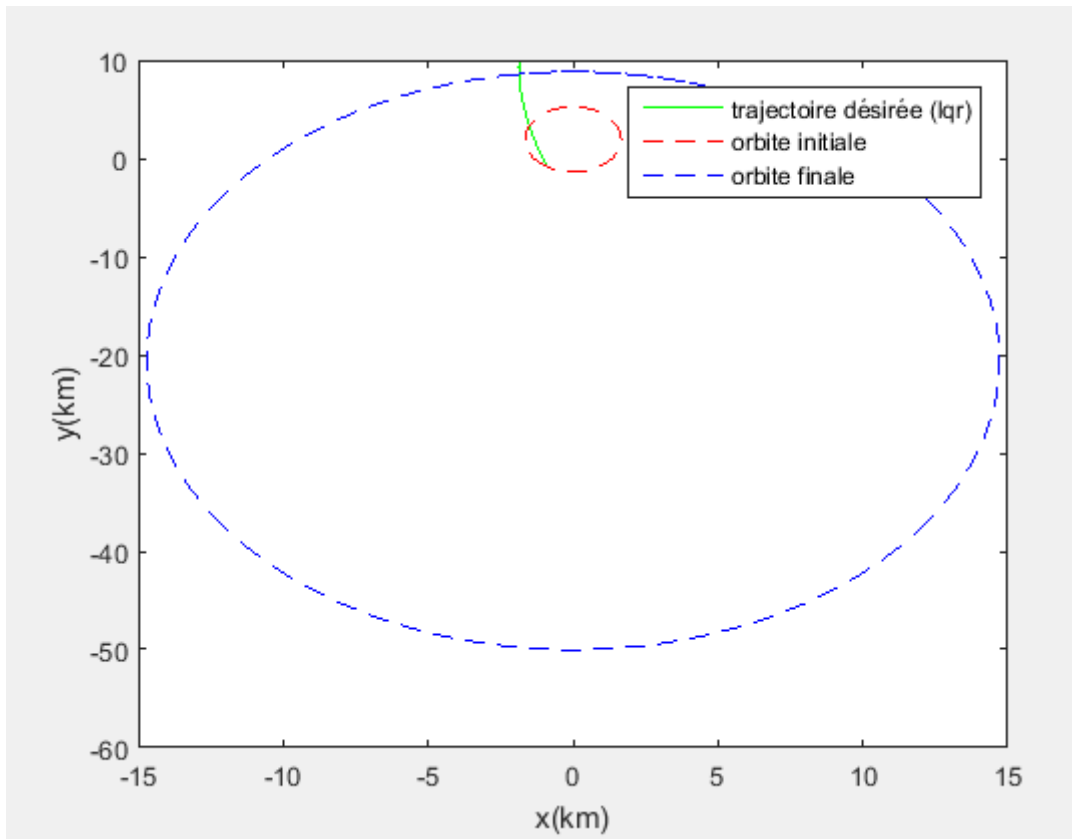


Figure 4.4 : Trajectoire du DS dans le plan xy.

D'après la figure 4.4 le satellite adjoint entame sa mission depuis la trajectoire relative initiale interne et reçoit l'ordre de se déplacer vers l'orbite relative externe. Il est important de noter que la méthode LQR démontre une efficacité remarquable pour atteindre les états relatifs souhaités du satellite adjoint. Cette réussite est attribuable aux conditions sous-jacentes, à savoir que le satellite chef évolue en orbite circulaire et que la distance relative entre le chef et l'adjoint est faible. De plus, dans ce cas, le modèle dynamique est purement linéaire, ce qui favorise les performances de la méthode LQR, que ce soit pour le suivi des positions ou des vitesses (voir figure 4.2). Les composantes de commande convergent de manière significative les unes vers les autres et finissent par converger vers zéro, correspondant ainsi à l'équilibre recherché (figure 4.3).

3.3 Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.

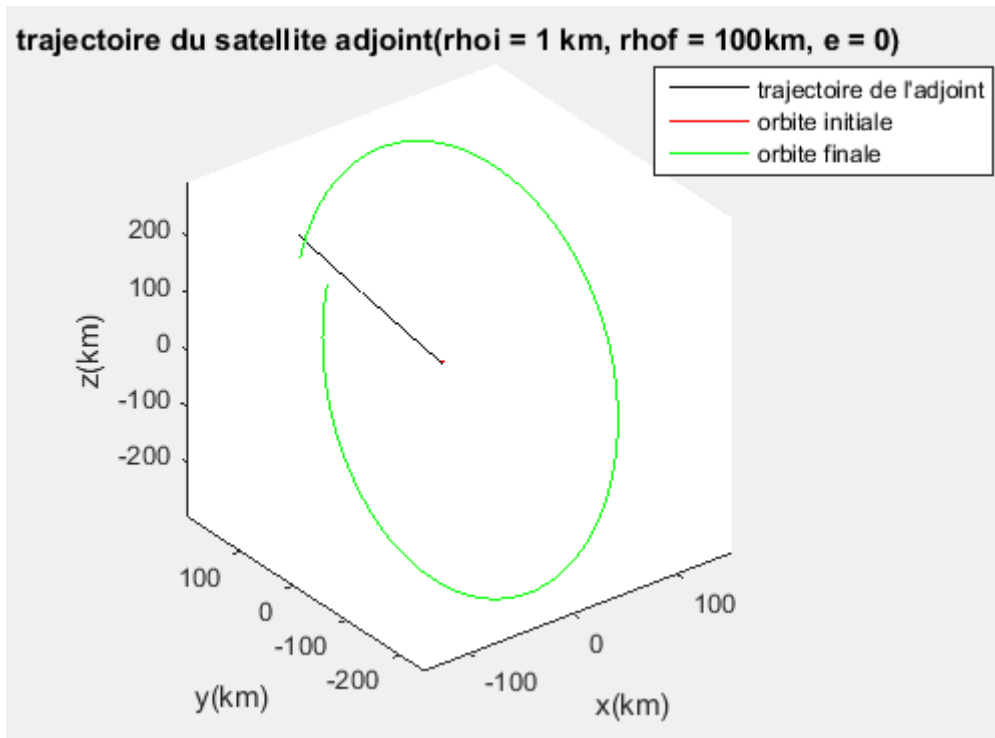


Figure 4.5 : trajectoire du DS en 3D (lqr) ( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 100 \text{ km}$ ,  $e = 0.0$ )

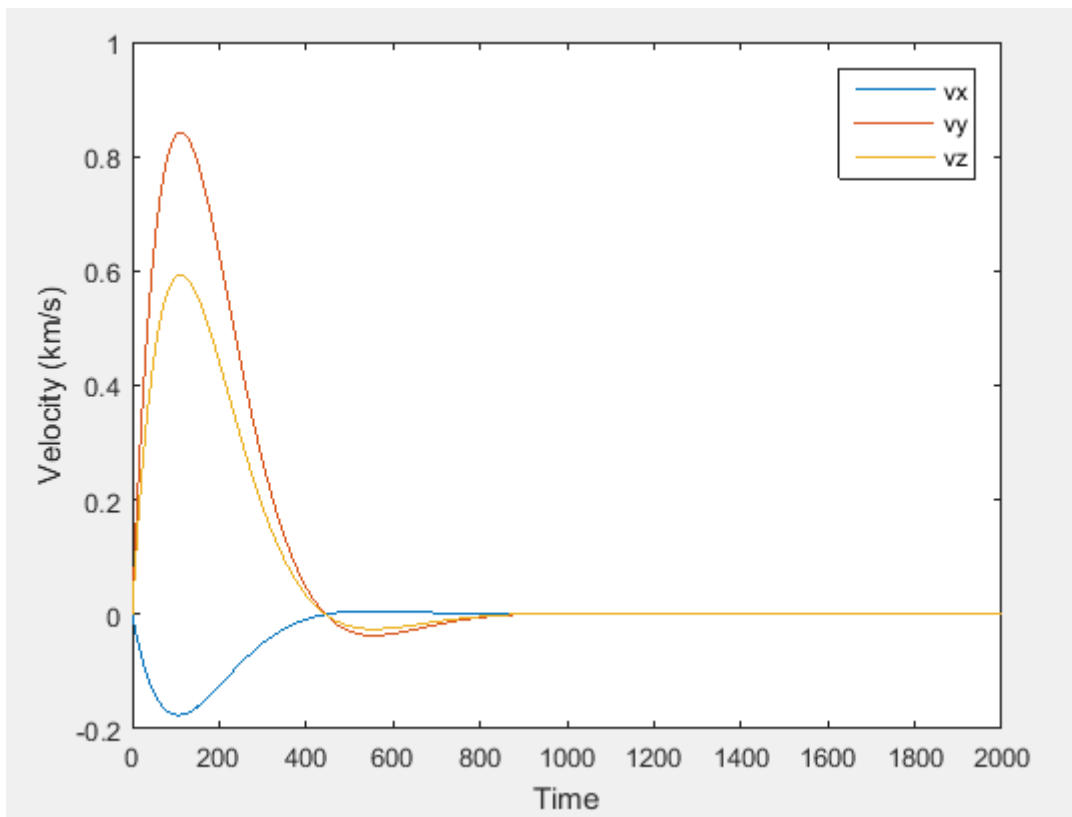


Figure 4.6 : vitesse en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 100 \text{ km}$ ,  $e = 0.0$ )

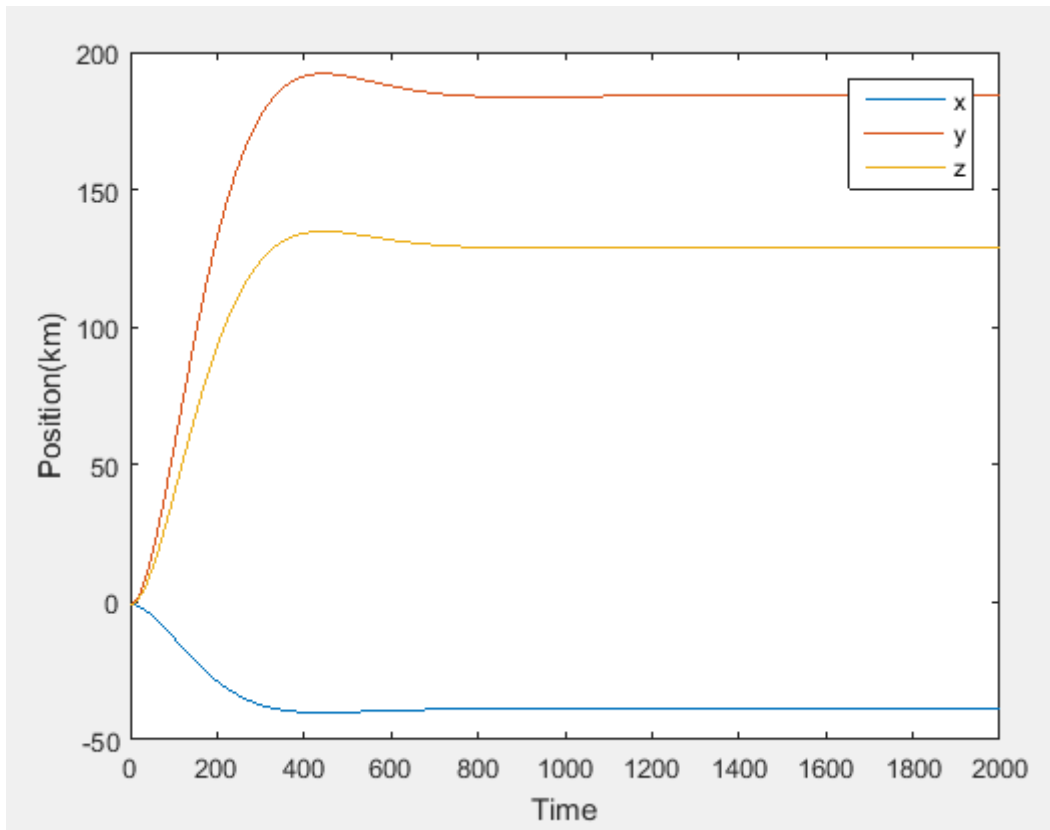


Figure 4.7 : position en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ )

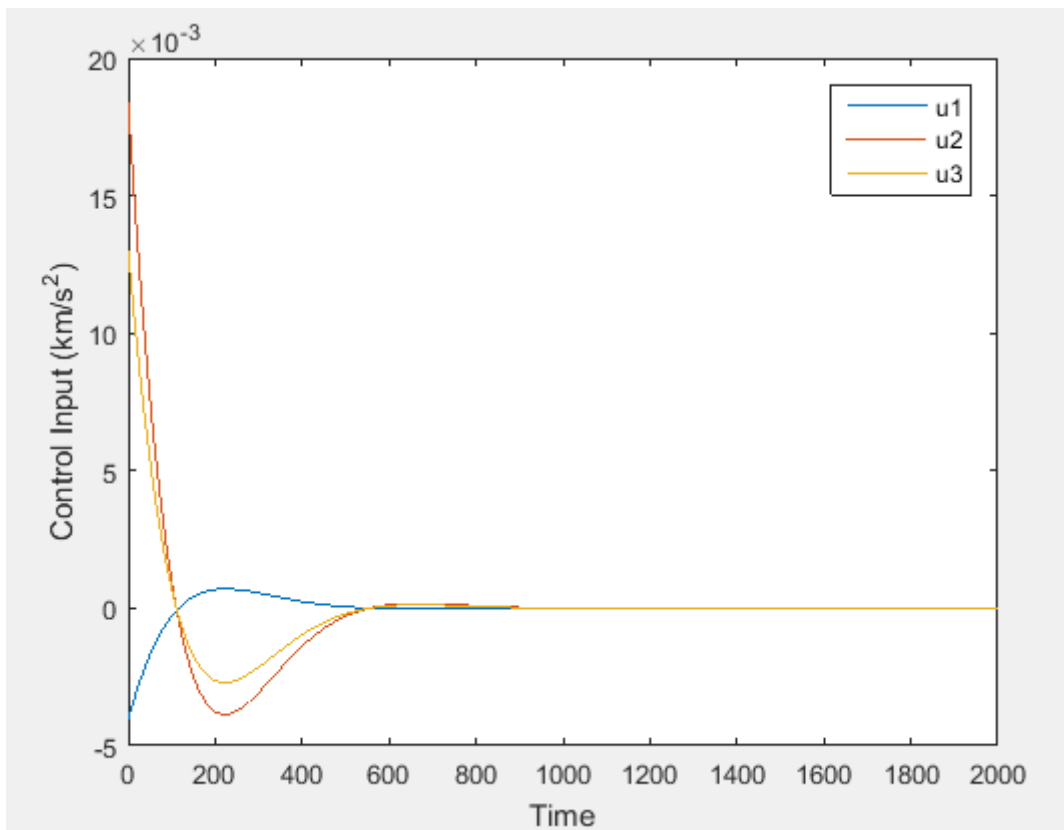


Figure 4.8 : force de contrôle en fonction du temps(LQR) ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ )

Les positions illustrées dans la figure 4.7 ainsi que la représentation en 3D de la trajectoire désirée (figure 4.5) mettent en évidence que le système ne converge pas vers la trajectoire souhaitée. Cette divergence est attribuée à la violation de la linéarité en raison de la grande distance entre le satellite chef et l'adjoint. Malgré la linéarisation du système, la commande LQR n'a pas pu compenser les perturbations dues aux termes non linéaires. En conséquence, les vitesses ne convergent pas vers les valeurs souhaitées, mais tendent vers zéro (voir figure 4.6), et la commande met un temps considérable pour revenir à l'équilibre (figure 4.8). Ainsi, il apparaît que le guidage basé sur la théorie LQR n'est pas approprié dans cette configuration.

### 3.4 Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée.

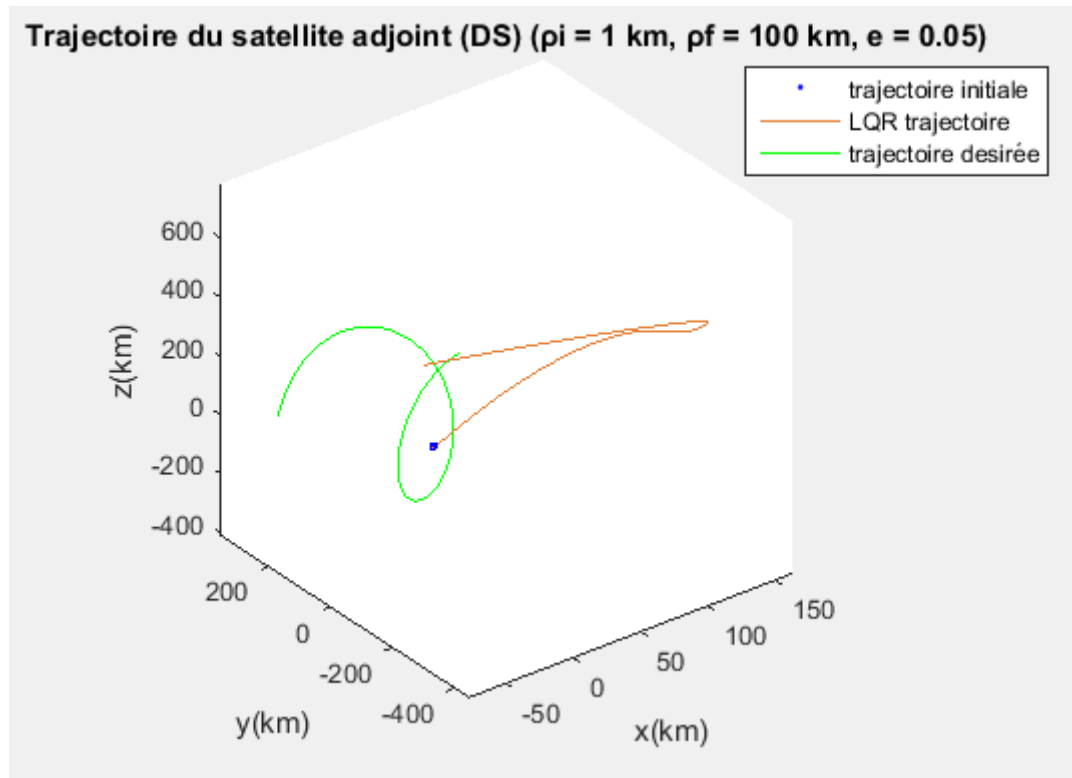


Figure 4.9 : configuration 3D de la trajectoire du DS(LQR) ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.05$ )

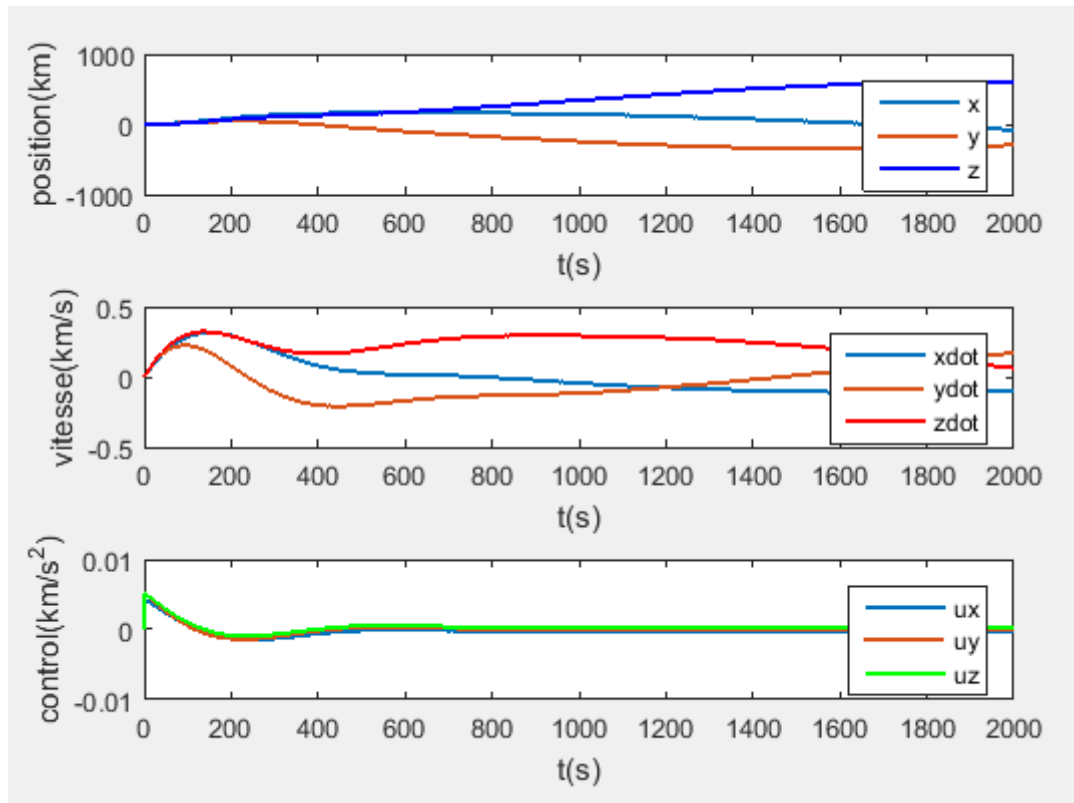


Figure 4.10 : position, vitesse, contrôle en fonction du temps (LQR) ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.05$ )

En se basant sur les observations des figures 4.9 et 4.10, il est évident que le système présente une divergence par rapport à la trajectoire désirée. Cette divergence est particulièrement prononcée en raison du caractère fortement non linéaire du système. Il est important de noter que la commande LQR n'a pas réussi à amener le système vers les positions et vitesses souhaitées.

La tentative de linéarisation du système autour de son point de fonctionnement n'a pas été couronnée de succès dans ce contexte. La linéarisation, conçue pour simplifier la commande en supposant que le système est approximativement linéaire autour de ce point, ne parvient pas à prendre en compte les non-linéarités significatives du système lorsque celui-ci s'éloigne considérablement de son point de fonctionnement nominal.

#### 4 Application du sliding mode contrôle :

4.1 Vol en formation en orbite circulaire avec une grande distance relative souhaitée.

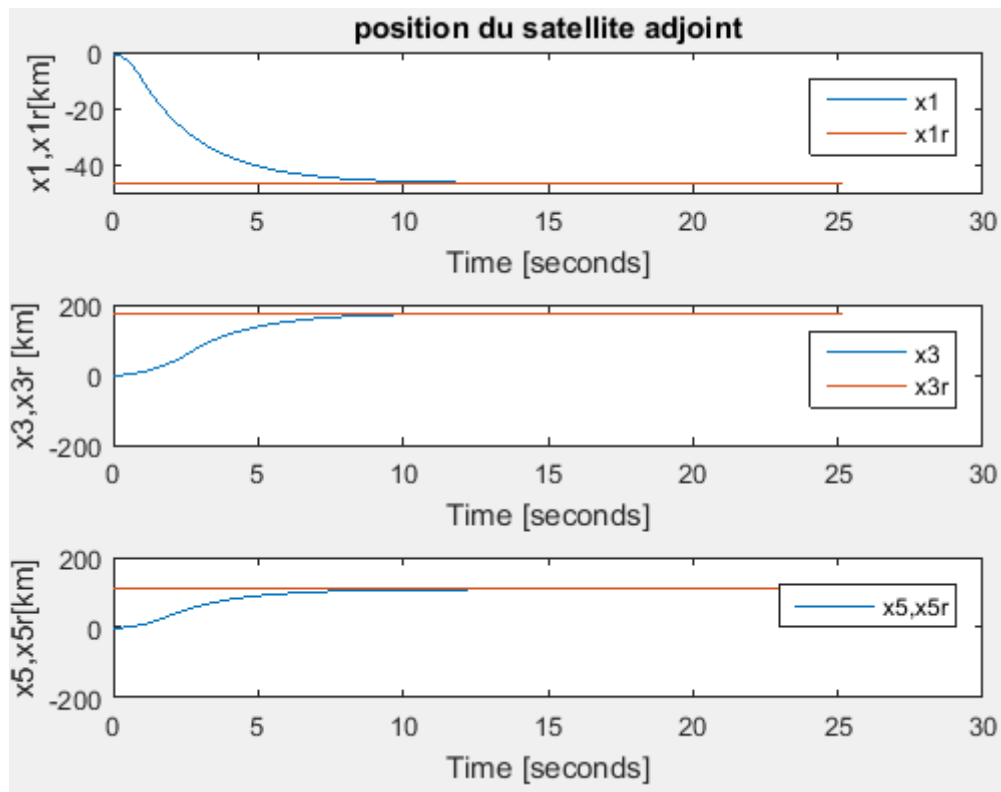


Figure 4.11 : Position du satellite suiveur SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0$ )

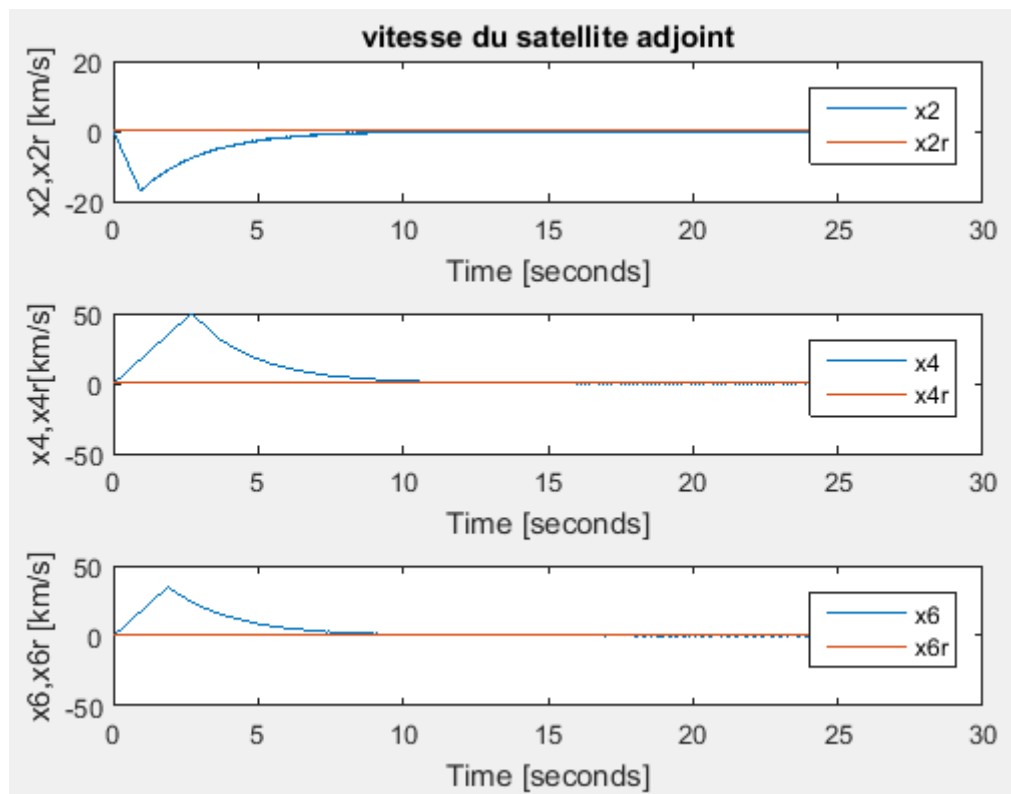


Figure 4.12 : vitesse en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.0$ )



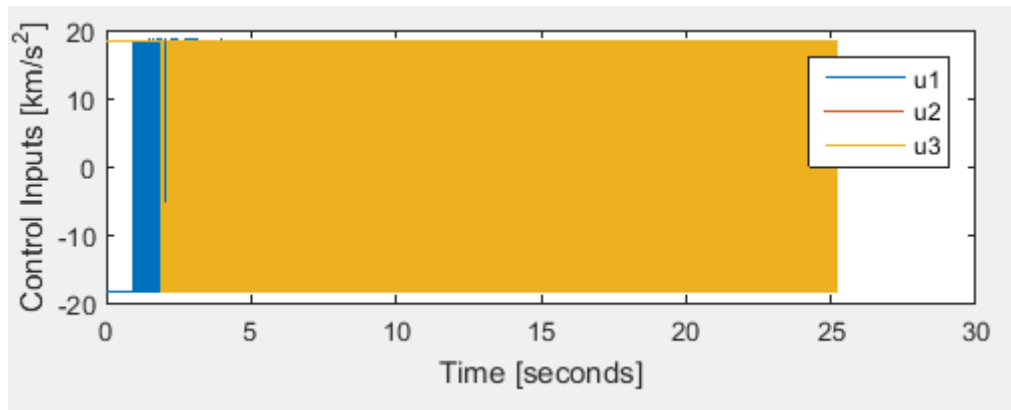


Figure 4.13 : force de contrôle en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.0$ )

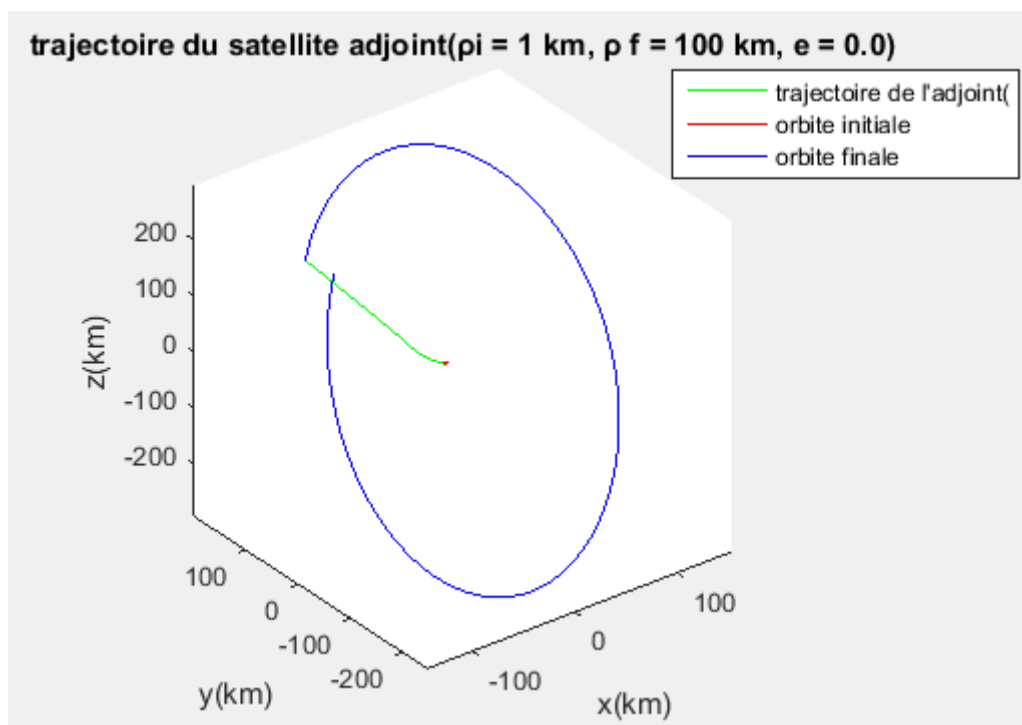


Figure 4.14 : trajectoire 3D du suiveur SMC( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 100$  km,  $e = 0.0$ )

Les résultats illustrés dans la figure 4.14 montrent clairement que le satellite adjoint atteint avec succès son orbite finale. La réponse du système, que ce soit en termes de position (comme illustré dans la figure 4.11) ou de vitesse (comme le montre la figure 4.12), est réalisée en un temps remarquablement court, soit en moins de 10 secondes. Cette rapidité de convergence démontre l'efficacité du système de contrôle en mode glissant.

De plus, il est important de noter que le système est asymptotiquement stable, Il convient également de mentionner que le sliding mode control parvient à capturer de manière adéquate la non-linéarité inhérente au système. Cependant, il est à noter que la commande de contrôle est sujette au phénomène de "bavardage" (chattering), ce qui peut se traduire par des oscillations indésirables dans le signal de contrôle. Ces oscillations sont une caractéristique intrinsèque du sliding mode control en raison de sa nature de commutation rapide. Bien que

ce bavardage puisse affecter la commande il n'empêche pas le système d'atteindre ses objectifs de manière efficace et stable.

**4.2 Vol en formation en orbite circulaire avec une petite distance relative souhaitée.**

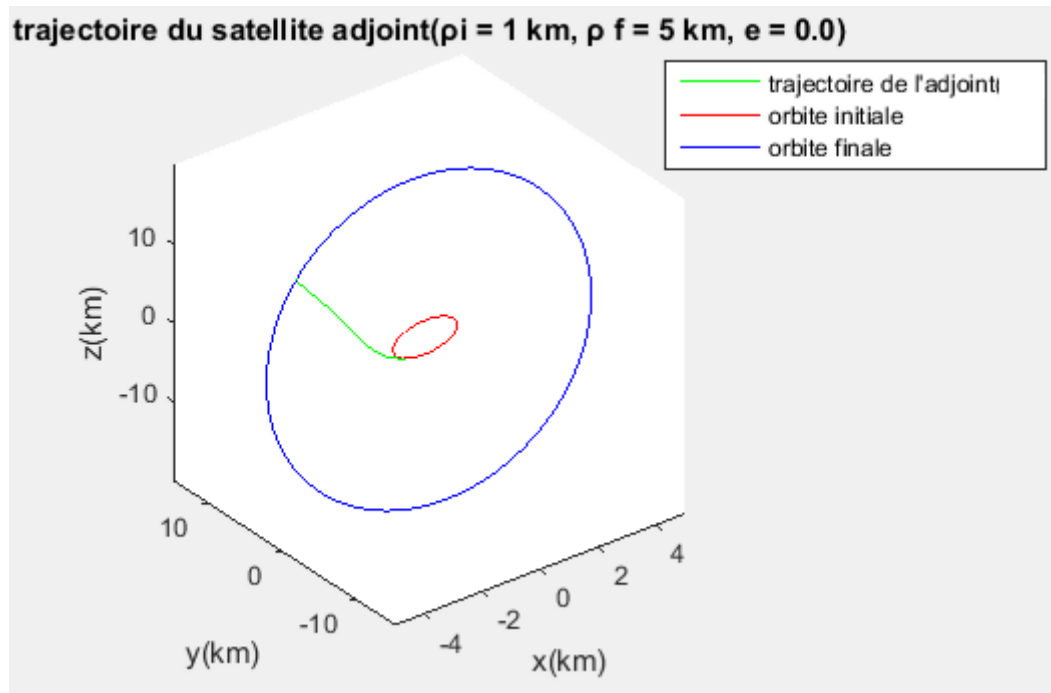


Figure 4.15 : trajectoire du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ )

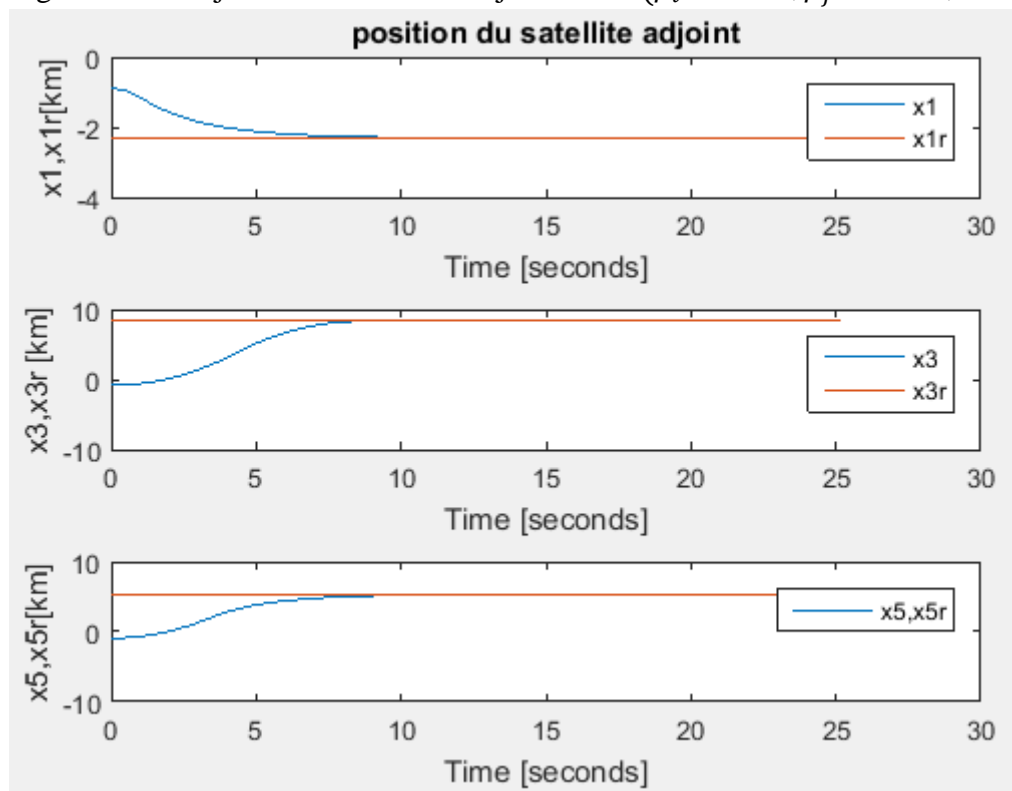


Figure 4.16 : position en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 5 \text{ km}, e = 0.0$ )

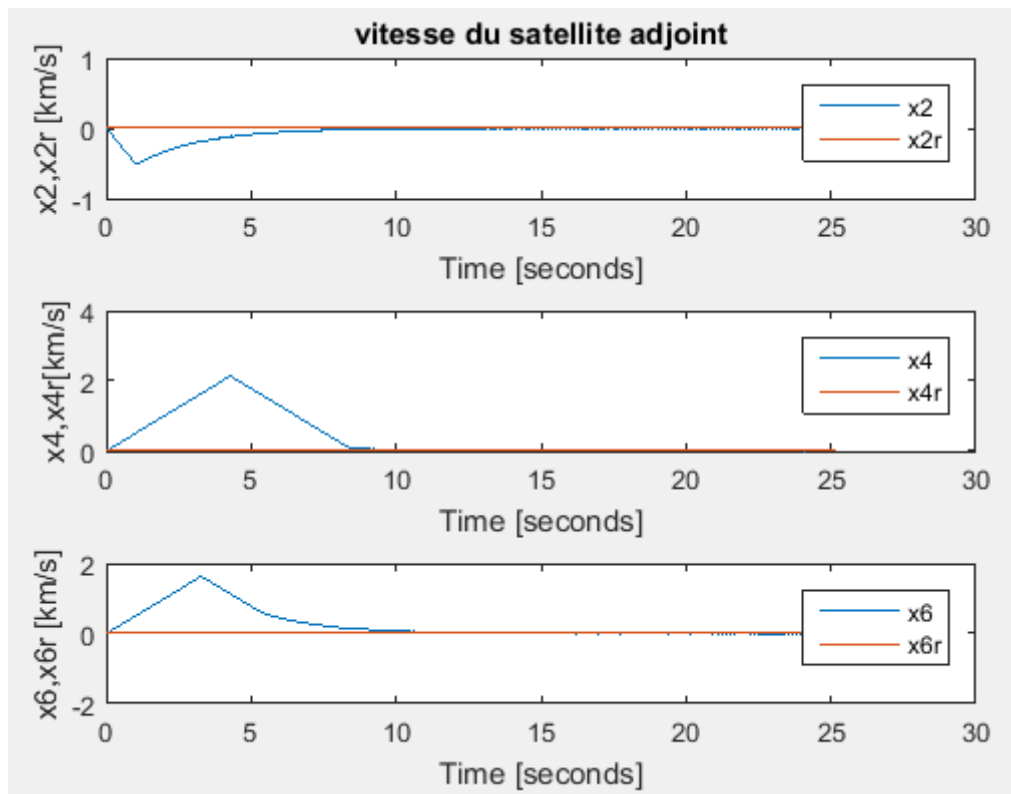


Figure 4.17 : vitesse du satellite en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.0$ )

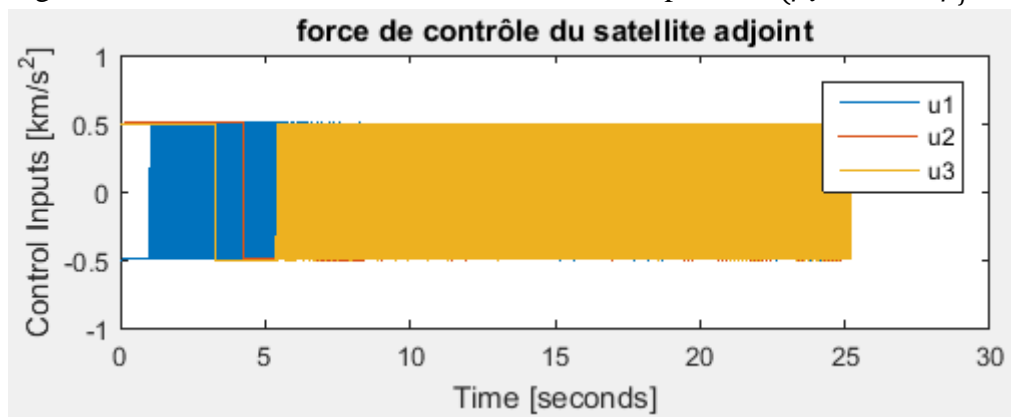


Figure 4.18 : force de contrôle en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.0$ )

Indéniablement, l'observation révèle que le système atteint une convergence rapide et précise en direction de la trajectoire de référence (figure 4.15). Cependant, il est à noter que des phénomènes de dépassement et de sous-dépassement surviennent (figure 4.16 et 4.17), résultant des impératifs de commutation de la commande entre deux valeurs extrêmes, nécessaires pour maintenir le système dans son mode glissant caractéristique. Par ailleurs, l'effort de contrôle (figure 4.18) demeure minimisé, du fait de la nature linéaire du système, engendrant ainsi une économie notable de carburant. Néanmoins, il convient de souligner que des oscillations résiduelles, typiques du bavardage, persistent.

4.3 Vol en formation en orbite elliptique avec une petite distance relative souhaitée.

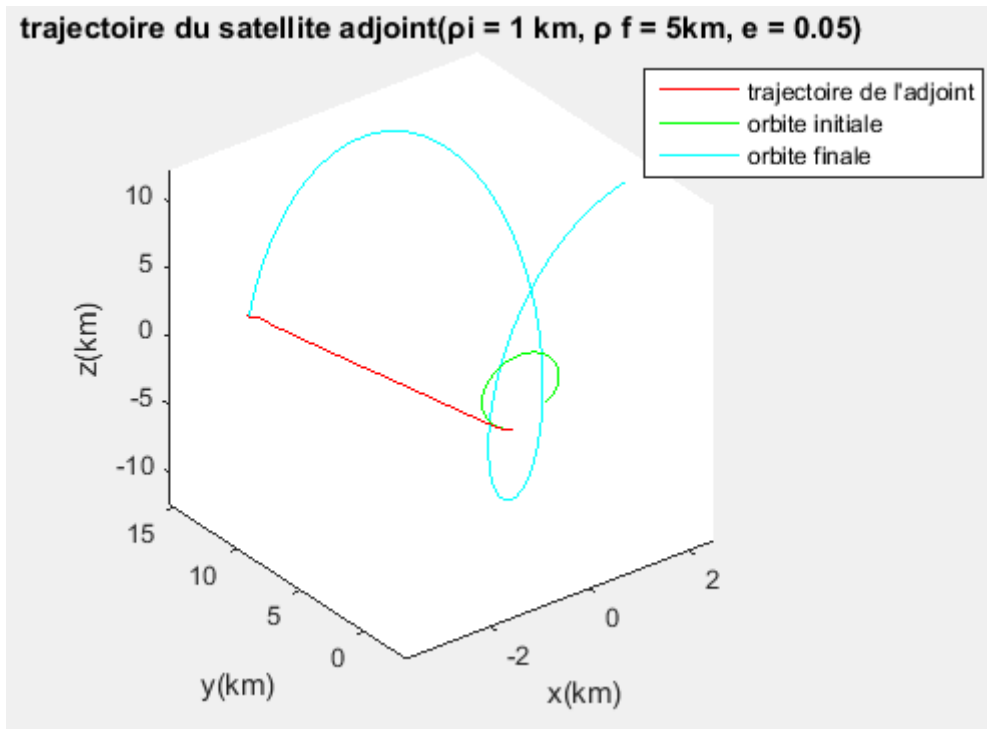


Figure 4.19 : trajectoire du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 5 \text{ km}$ ,  $e = 0.05$ )

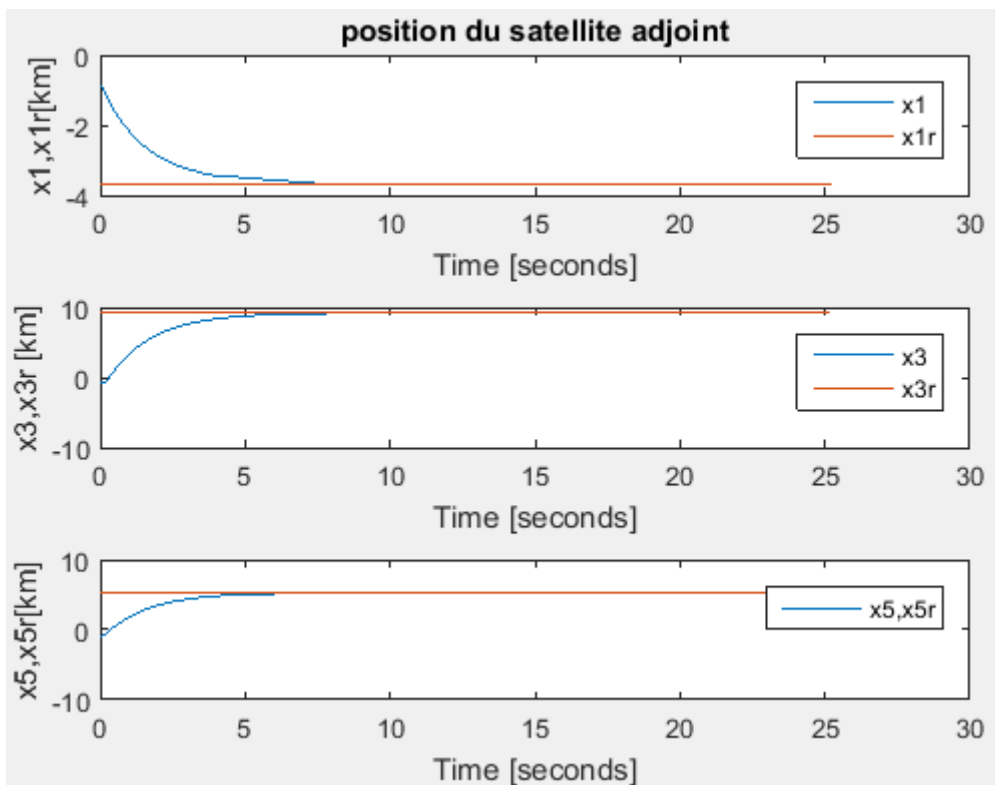


Figure 4.20 : position en fonction du temps SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 5 \text{ km}$ ,  $e = 0.05$ )

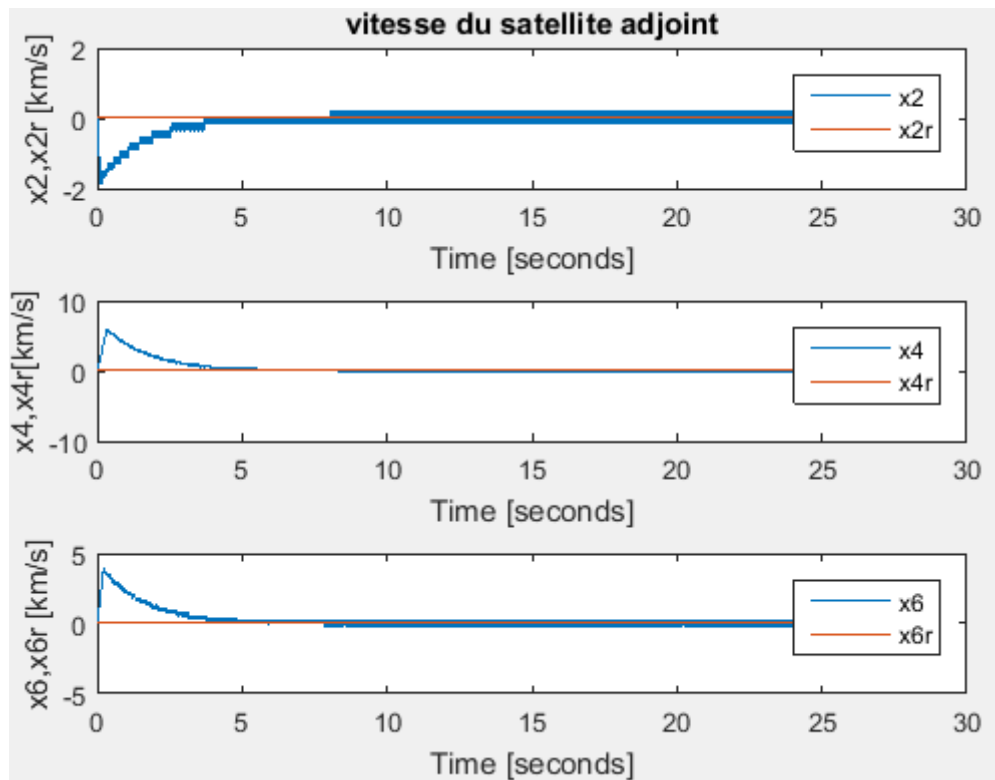


Figure 4.21 : vitesse du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.05$ )

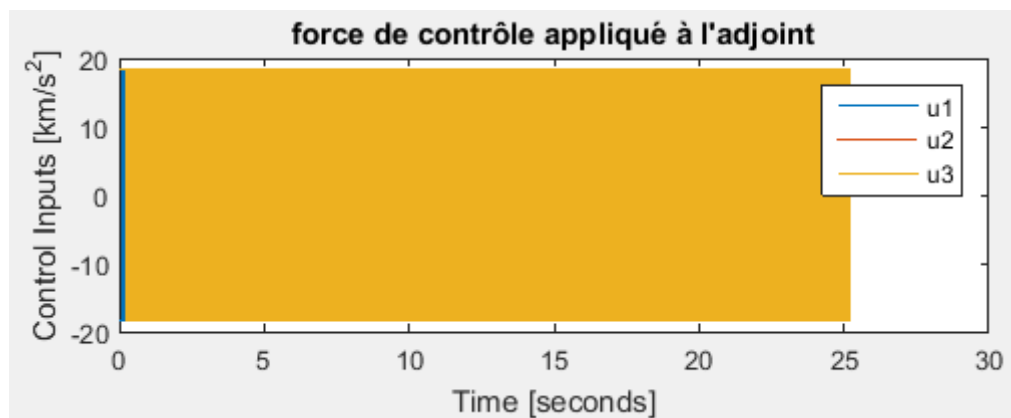


Figure 4.22 : force de contrôle du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1$  km,  $\rho_f = 5$  km,  $e = 0.05$ )

Les positions et les vitesses convergent vers les valeurs désirées (figure 4.20 et 4.21), mais on remarque que le chattering est prononcé. Cela signifie que les surfaces de glissement présentent des oscillations lorsqu'on essaie de ramener le système vers les surfaces de glissement.

Dans le cas d'un vol en formation avec une orbite elliptique et une petite distance entre le satellite chef et le satellite assistant (deputy), il est important de prendre en compte les effets des forces d'inertie, notamment la force centrifuge et la force de Coriolis. Un système avec une grande inertie nécessitera un effort de contrôle plus important, ce qui est reconnu dans notre cas, où l'on voit que la force appliquée est grande, surtout sur l'axe  $z$  (voir figure 4.22).

4.4 Vol en formation en orbite elliptique avec une grande distance relative souhaitée

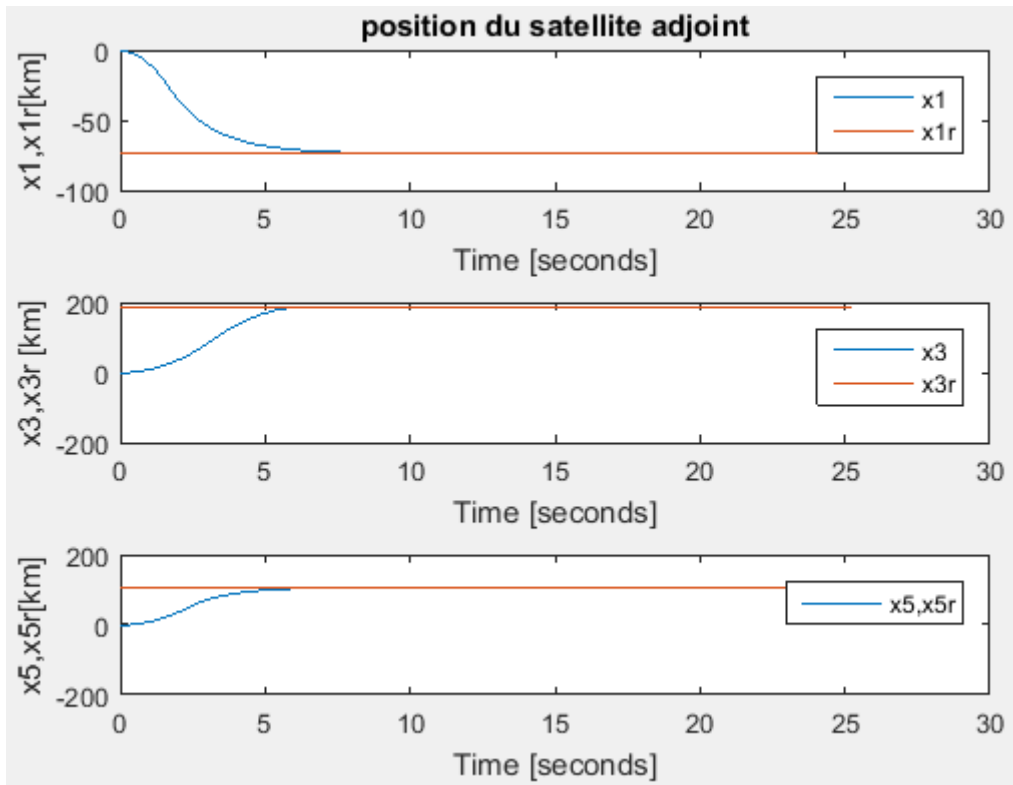


Figure 4.23 : position du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ )

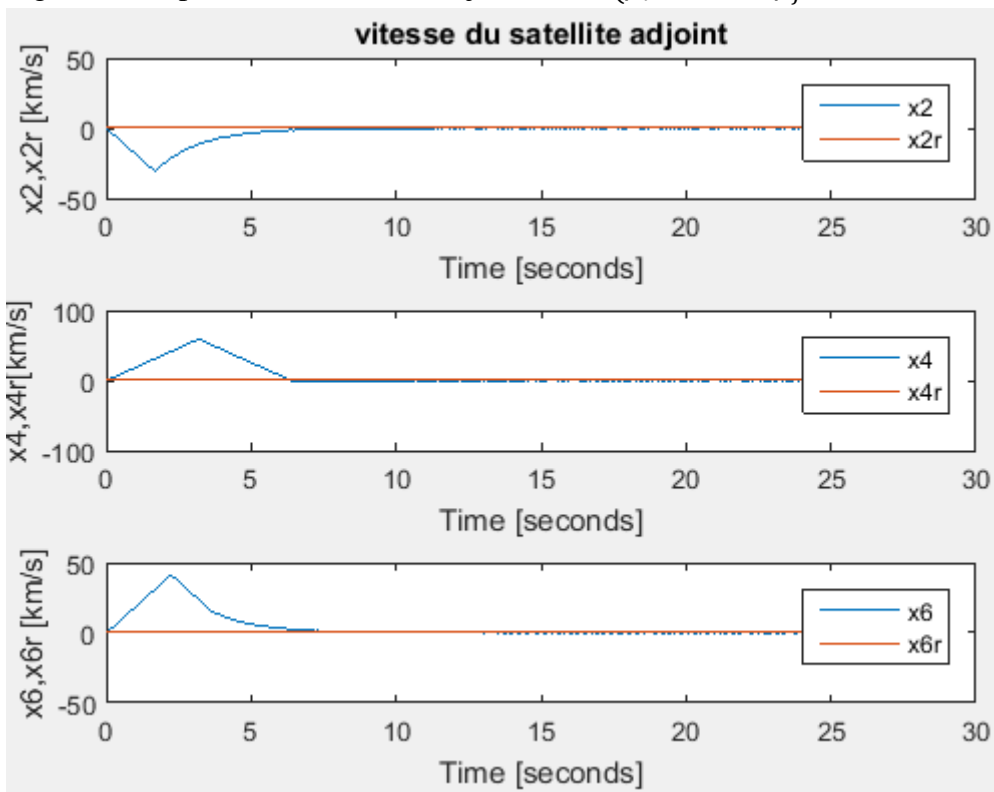


Figure 4.24 : vitesse du satellite adjoint SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}, \rho_f = 100 \text{ km}, e = 0.05$ )

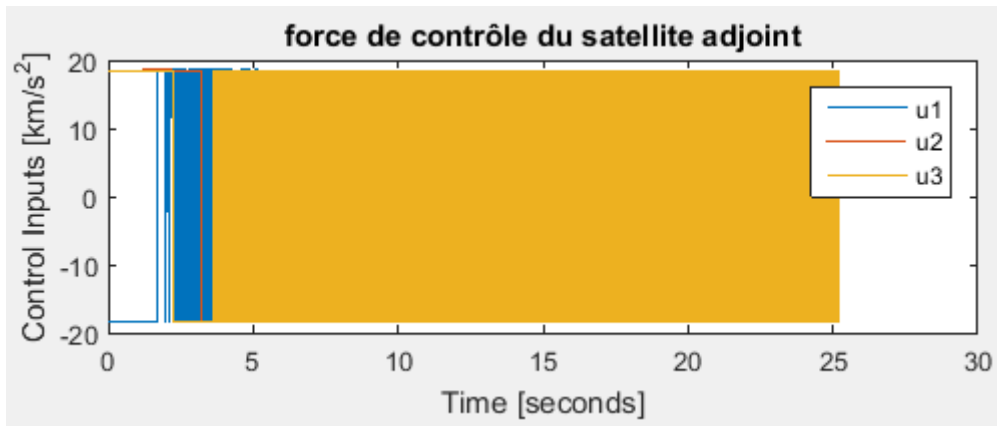


Figure 4.25 : force de contrôle du satellite SMC ( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 100 \text{ km}$ ,  $e = 0.05$ )

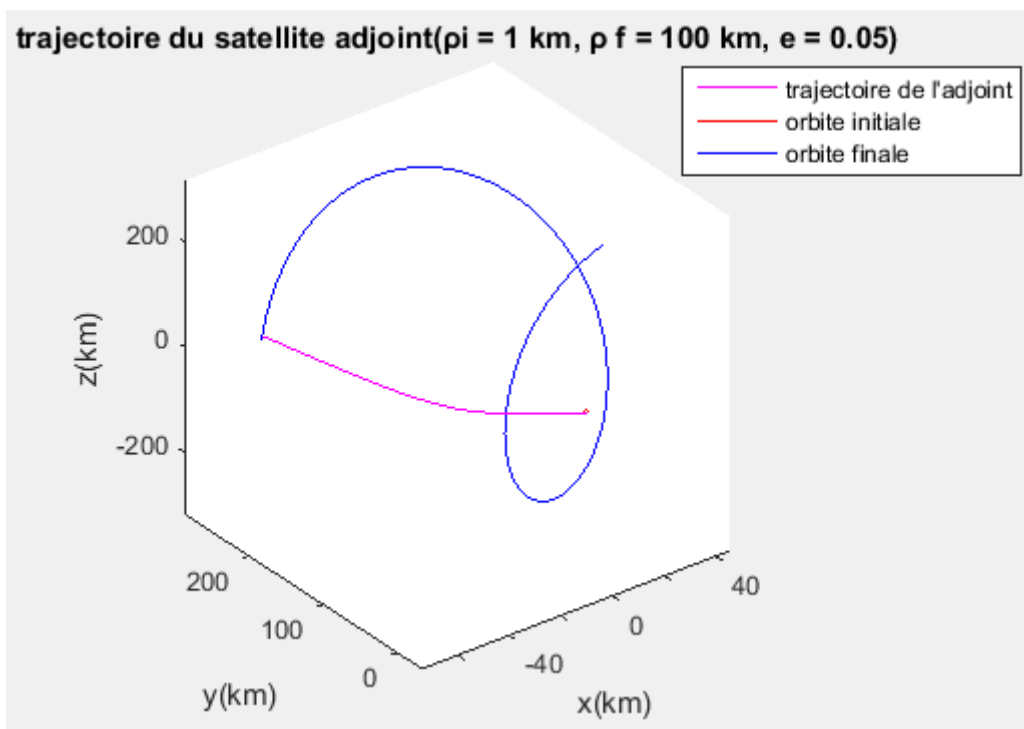


Figure 4.26 : trajectoire en 3D du satellite suiveur SMC( $\rho_i = 1 \text{ km}$ ,  $\rho_f = 100 \text{ km}$ ,  $e = 0.05$ )

D'après les figures [4.23 jusqu'à 4.26], On voit que le système converge vers le point de référence en moins de 10 S, le système est asymptotiquement stable, malgré que le système est fortement non linéaire le sliding mode a pu capturer les incertitudes fonctionnelles.

## 5 Etude comparative :

Le tableau 4.6 ci-dessous présente l'erreur relative entre la trajectoire réalisée et la trajectoire souhaitée pour différentes configurations de formation.

Tableau 4.6 : comparaison entre les différentes commandes

	Méthode LQR						Méthode du sliding mode					
	$\Delta x$	$\Delta \dot{x}$	$\Delta y$	$\Delta \dot{y}$	$\Delta z$	$\Delta \dot{z}$	$\Delta x$	$\Delta \dot{x}$	$\Delta y$	$\Delta \dot{y}$	$\Delta z$	$\Delta \dot{z}$
Elliptique avec petite distance	1.592 $\times 10^{-1}$	- 8.484 $9 \times 10^{-4}$	7.857 $7 \times 10^0$	-1.4 $10^{-3}$	- 4.794 $9 \times 10^0$	-5.5 $10^{-3}$	- 3.97 $10^{-2}$	- 1.15 $10^{-1}$	-6.6 $10^{-3}$	-1.8 $10^{-1}$	1.07 $10^{-2}$	- 1.92 $10^{-1}$
Elliptique avec grande distance	- 3.172 $7 \times 10^0$	- 1.354 $\times 10^{-1}$	- 477.4 $790 \times 10^0$	8.76 $10^{-2}$	505.2 $578 \times 10^0$	- 8.20 $10^{-2}$	1.19 $10^{-1}$	- 7.88 $10^{-2}$	9.76 $10^{-2}$	- 6.31 $10^{-2}$	- 2.25 $10^{-2}$	3.84 $10^{-2}$
Circulaire avec petite distance	4.04 $10^{-1}$	-2.8 $10^{-3}$	3.79 $10^{-1}$	-2.9 $10^{-3}$	9.84 $10^{-1}$	-7.1 $10^{-3}$	1 $10^{-2}$	-4.7 $10^{-3}$	7.2 $10^{-3}$	-3.2 $10^{-3}$	1.66 $10^{-2}$	-2.5 $10^{-3}$
Circulaire avec grande distance	7.95 $10^0$	-5.5 $5 \times 10^{-2}$	8.06 $10^0$	-5.7 $7 \times 10^{-2}$	20.21 $\times 10^0$	-1.4 $3 \times 10^{-1}$	1.27 $10^{-1}$	- 1.66 $10^{-1}$	- 9.49 $10^{-2}$	- 1.26 $10^{-1}$	3.23 $10^{-1}$	- 3.30 $10^{-1}$

La méthode LQR s'avère performante pour le cas d'une formation circulaire avec une petite distance relative, puisque notre système est parfaitement linéaire. La configuration elliptique avec une petite distance présente des résultats moins satisfaisants, bien que le système soit également linéaire. Cela est dû à la dynamique, à la stabilité intrinsèque et aux propriétés physiques du système, influençant ainsi les performances du contrôleur.

Pour les modèles elliptiques avec une grande distance souhaitée et les modèles circulaires avec une grande distance désirée, la technique du LQR a échoué à ramener le satellite adjoint vers l'orbite finale, car la commande n'est pas robuste aux incertitudes provoquées par la non-linéarité.

Pour les systèmes circulaires et elliptiques avec une petite distance, la méthode du sliding mode a permis de minimiser les erreurs d'état en utilisant une surface de glissement bien appropriée. Pour les modèles circulaires et elliptiques avec une grande distance, le sliding mode garantit parfaitement la robustesse aux perturbations, la stabilité des systèmes et la poursuite du satellite adjoint sur sa trajectoire désirée.

## Conclusion :

En guise de synthèse de ce chapitre, nous pouvons récapituler les principales constatations comme suit :

Nous avons examiné deux approches de contrôle, à savoir la méthode LQR et la méthode du sliding mode, en analysant leur performance dans différents contextes de systèmes. Il est clair que la méthode LQR repose sur des modèles linéaires et excelle lorsque le système peut être approximé de manière linéaire autour d'un point de fonctionnement donné. Cependant, pour les systèmes non linéaires ou fortement non linéaires, cette approche montre ses limites. Dans de tels cas, la méthode du sliding mode se révèle plus appropriée, bien que certaines situations puissent la rendre sujette à des oscillations indésirables, souvent appelées "bavardage".

Pour atténuer ces oscillations et renforcer la robustesse du contrôle, des techniques avancées telles que l'exploration de la solution de la couche limite peuvent être envisagées. Ces ajustements permettent d'exploiter au mieux les avantages du sliding mode tout en minimisant ses inconvénients.



---

---

## Conclusion générale :

L'objectif principal de cette étude était d'explorer le contrôle du mouvement de translation dans le contexte du vol en formation de deux satellites en orbite basse de la Terre (LEO). Notre objectif ultime était de ramener les positions et les vitesses du satellite adjoint vers des valeurs désirées, notamment pour des scénarios de reconfiguration orbitale. Pour ce faire, nous avons examiné deux types de lois de commande : la technique du LQR (Linear Quadratic Regulator) et le sliding mode.

Au départ, nous avons présenté un aperçu général dans le premier chapitre, couvrant les fondamentaux de la formation des satellites, les missions passées et futures, ainsi que les avancées technologiques dans le domaine des petits satellites. De plus, nous avons discuté des diverses techniques de contrôle qui jouent un rôle essentiel dans le vol en formation.

Dans le deuxième chapitre, nous avons effectué un développement mathématique approfondi du modèle du mouvement relatif du satellite suiveur. Notre modèle a pris en compte les forces gravitationnelles dues à l'attraction terrestre, tout en négligeant les effets des perturbations extérieures. Cette représentation d'état nous a ensuite permis d'élaborer des lois de commande visant à stabiliser le système et à guider le satellite adjoint vers la trajectoire souhaitée.

En utilisant le modèle que nous avons obtenu et les deux lois de commande élaborées, nous avons réalisé des simulations pour évaluer la réponse du système. Les simulations en boucle ouverte ont été cruciales pour déterminer les orbites de départ et finale dans nos scénarios.

La commande optimale LQR a été la première méthode appliquée, montrant des résultats prometteurs, en particulier pour les systèmes linéaires. Toutefois, en raison de la sensibilité du système aux perturbations, nous avons également eu recours à la commande par mode glissant, basée sur la commutation de fonctions de variables d'état. Cette approche, bien qu'efficace, a présenté l'inconvénient du "bavardage", un phénomène de variation rapide des commandes. Pour atténuer ce bavardage, nous pouvons explorer l'utilisation de l'intégrale sliding mode.

En conclusion, cette étude a contribué à mieux comprendre le contrôle du mouvement relatif dans le vol en formation de satellites en LEO. Nos résultats ont montré les avantages et les limites des méthodes de contrôle que nous avons examinées. À l'avenir, des recherches supplémentaires pourraient être axées sur l'optimisation des performances de ces méthodes de contrôle et leur adaptation à des scénarios plus complexes et variés.

---

---

## Perspectives :

En regard des résultats de cette étude, nous souhaitons maintenant mettre en avant les orientations de recherche et les domaines d'exploration qui s'offrent aux futurs travaux.

En ce qui concerne le modèle :

- Une étape cruciale à envisager pour les futurs travaux est l'introduction de perturbations extérieures, telles que la perturbation J2 et la traînée atmosphérique, dans le modèle. Cette démarche permettra une analyse plus approfondie de l'impact de ces facteurs sur le vol en formation des satellites.
- Nous pourrions également envisager d'étudier l'attitude du vol en formation. Une étape logique consisterait à explorer le couplage entre le système de translation et le système de rotation, afin de mieux comprendre les interactions entre ces deux aspects du mouvement spatial.

Du point de vue de la commande :

- Bien que nos simulations aient montré que la méthode de Sliding Mode offre une bonne précision, elle peut être sensible au bavardage. Pour atténuer ce phénomène, une avenue intéressante à explorer serait d'examiner l'utilisation de la commande en mode glissant intégral.
- L'utilisation du contrôle adaptatif pour capturer les incertitudes du système est une approche prometteuse pour améliorer la précision de la poursuite du satellite adjoint. Cela permettrait de tenir compte des variations et des incertitudes dans le modèle du système, ce qui est souvent essentiel dans des environnements spatiaux complexes.