

Jean-Claude Laleuf

Introduction à la théorie générale des processus et intégrales stochastiques

Cours et exercices corrigés



ellipses

Table des matières

1	Introduction	15
1.1	De l'intégrale de Riemann à l'intégrale stochastique	15
1.1.1	Processus stochastique, intégrales de Lebesgue et de Riemann	15
1.1.2	Intégrales de Riemann-Stieltjes, d'Ito-Stieltjes et de Lebesgue-Stieltjes	16
1.1.3	Mouvement brownien et intégrale stochastique d'Ito	18
1.1.4	Forme générale de l'intégrale stochastique	19
1.2	Contexte de l'intégrale stochastique	19
1.2.1	Tribu et filtration sur l'ensemble Ω des <i>aléas</i>	20
1.2.2	Temps d'arrêt sur l'ensemble Ω des <i>aléas</i>	20
1.2.3	Processus prévisible localement borné	21
1.2.4	Définition : martingale et martingale locale	22
1.2.5	Définition : semi-martingale	22
1.2.6	Décomposition de l'intégrale stochastique	22
1.3	Les grandes étapes : plan du livre	23
1.3.1	Dépendance des résultats	24
1.3.2	Le théorème de décomposition des martingales locales	24
1.3.3	La construction de l'intégrale	25
1.3.4	Le théorème de Doléans	26
1.3.5	Le théorème de section prévisible	26
1.3.6	Ensembles analytiques, capacités et théorème de Choquet	27
1.3.7	Covariation et formule d'Ito	27
2	Compléments sur l'intégration	29
2.1	Espace de probabilité filtré	29
2.1.1	Définition : tribu et espace mesurable, filtration et espace filtré	29
2.1.2	Définition : mesure et probabilité, espace de probabilités filtré	30
2.1.3	Définition : espace de probabilité filtré et conditions usuelles	30
2.1.4	Définition : tribu engendrée	31
2.2	Applications mesurables	31
2.2.1	Définition : applications mesurables	32
2.2.2	Proposition : critère de mesurabilité	33

2.2.3	Proposition : mesurabilité des limites	35
2.2.4	Proposition : approximation par les fonctions étagées	35
2.2.5	Définition : tribu engendrée par une famille d'applications	36
2.2.6	Proposition : factorisation des applications mesurables	37
2.3	Espérance d'une variable aléatoire réelle (VAR)	38
2.3.1	Définition : variable aléatoire	38
2.3.2	Définition : espérance mathématique	38
2.3.3	Définition : indépendance	44
2.4	Uniforme intégrabilité	46
2.4.1	Définition : famille de VAR uniformément intégrable	46
2.4.2	Définition : famille de VAR équi-intégrable	47
2.4.3	Proposition : critère d'uniforme intégrabilité	47
2.4.4	Théorème : convergence en probabilité et convergence dans L^1	48
2.5	Classes monotones	49
2.5.1	Définition : π -système	50
2.5.2	Définition : classe monotone ou δ -système	50
2.5.3	Lemme des classes monotones	51
2.5.4	Premier théorème des classes monotones (TCM1)	51
2.5.5	Deuxième théorème des classes monotones (TCM2)	52
2.6	Variation des fonctions	53
2.6.1	Définition : subdivision d'un segment	53
2.6.2	Définition : variation d'une fonction sur un segment	53
2.6.3	Définition : fonctions à variations finies	54
2.6.4	Proposition : continuité de la variation d'une fonction continue	54
2.6.5	Proposition : différence de deux applications croissantes	55
2.7	Intégrale de Lebesgue-Stieltjes des fonctions	56
2.7.1	Proposition et définition : intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction croissante	56
2.7.2	Proposition : continuité et variation de l'intégrale par rapport à une fonction croissante	57
2.7.3	Définition : intégrale de Lebesgue-Stieltjes par rapport à une fonction à variation finie	58
2.7.4	Proposition : continuité et variation de l'intégrale par rapport à une fonction à variation finie	58
2.8	Ensemble et processus progressivement mesurables	59
2.8.1	Proposition et définition : tribu des ensembles progressifs	59
2.8.2	Proposition : un processus <i>càd</i> ou <i>càg</i> est progressif	59
2.8.3	Proposition : adaptabilité de l'intégrale d'un processus progres- sivement mesurable par rapport à un processus croissant	60
2.8.4	Variation d'un processus	61
2.8.5	Proposition : adaptabilité et continuité de la variation d'un processus	61
2.8.6	Proposition : adaptabilité de l'intégrale d'un processus progres- sivement mesurable par rapport à un processus à variation finie	61

3	Martingales	63
3.1	Espérance conditionnelle	63
3.1.1	Proposition et définition : espérance conditionnelle	64
3.1.2	Proposition : condition d'orthogonalité	65
3.1.3	Définition : espérance conditionnée par une VAR	66
3.1.4	Définition : factorisation de l'espérance conditionnée	67
3.1.5	Proposition : propriétés de l'espérance conditionnelle	68
3.2	Temps d'arrêt	69
3.2.1	Définition : filtration et temps d'arrêt	69
3.2.2	Proposition et définition : tribu d'un temps d'arrêt	70
3.3	Arrêt et échantillonnage des martingales discrètes	71
3.3.1	Définition : martingales et S-martingales discrètes	71
3.3.2	Définition : processus arrêté et variable d'arrêt	72
3.3.3	Théorème : une S-martingale arrêtée est une S-martingale	72
3.3.4	Théorème : échantillonnage des S-martingales par des temps d'arrêt bornés	73
3.4	Convergence presque sûre des S-martingales discrètes	74
3.4.1	Définition : nombre de traversées montantes	74
3.4.2	Lemme des traversées	75
3.4.3	Théorème : convergence PS des S-martingales discrètes	76
3.5	Convergence dans L^1 des S-martingales discrètes	77
3.5.1	Définition : S-martingale fermée à droite	78
3.5.2	Théorème : convergence dans L^1 des S-martingales discrètes uniformément intégrables (UI)	79
3.5.3	Corollaire : convergence dans L^1 des martingales UI	79
3.6	Inégalité de Doob dans L^p	83
3.6.1	Proposition : inégalité de Doob dans L^p	83
3.6.2	Théorème : convergence des martingales dans L^p	85
3.7	Martingales en temps continu	85
3.7.1	Théorème : convergence PS des S-martingales <i>càdlàg</i> bornées dans L^1	86
3.7.2	Théorème : convergence dans L^1 des S-martingales <i>càdlàg</i> UI	87
3.7.3	Corollaire : cas particulier des martingales	88
3.7.4	Proposition : martingale définie par projections	88
3.7.5	Proposition : inégalité de Doob dans L^p	89
3.7.6	Proposition : convergence des martingales dans L^p	89
3.7.7	Théorème : une S-martingale arrêtée est une S-martingale	90
3.7.8	Théorème : échantillonnage des S-martingales <i>càdlàg</i> UI	90
3.7.9	Théorème : échantillonnage des S-martingales <i>càdlàg</i> par des temps d'arrêt bornés	90
3.7.10	Proposition : absorption en zéro d'une sur-martingale positive	90
3.8	Martingale de carré intégrable	91
3.8.1	Proposition : martingale continue à variation bornée	92
3.8.2	Exercices sur les martingales de carré intégrable	93

4	Topologie	97
4.1	Espaces topologiques	97
4.1.1	Définition : topologie et espace topologique	97
4.1.2	Définition : fermés	99
4.1.3	Définition : voisinages	99
4.1.4	Définitions : adhérence, fermeture, points d'accumulation et points isolés	100
4.1.5	Proposition : adhérence et fermeture	100
4.1.6	Proposition : fermeture et points d'accumulation	100
4.1.7	Définition : intérieur	101
4.2	Continuité, topologie initiale	101
4.2.1	Définition : application continue	101
4.2.2	Lemme : composition des images et images réciproques	102
4.2.3	Définition : topologie initiale	102
4.2.4	Proposition : continuité et topologie initiale	103
4.2.5	Définition : topologie produit	103
4.2.6	Proposition : séparation d'un espace produit	104
4.2.7	Proposition : produit dénombrable d'espaces métriques	105
4.3	Espace compact	106
4.3.1	Définition : espace compact	106
4.3.2	Proposition : forme équivalente de la définition d'un compact	106
4.3.3	Définition : sous-espaces topologiques	106
4.3.4	Définition : sous-espaces compacts	106
4.3.5	Proposition : caractérisation des compacts de E	106
4.3.6	Proposition : un compact est fermé	107
4.3.7	Proposition : un fermé d'un compact est compact	107
4.3.8	Proposition : base de voisinages fermés dans un compact	108
4.3.9	Proposition : propriété de la classe des compacts	109
4.3.10	Théorème de Bolzano-Wierstrass	109
4.4	Filtres et ultrafiltres	110
4.4.1	Définition : filtres	110
4.4.2	Proposition et définition : base de filtre	110
4.4.3	Proposition et définition : filtre image	111
4.4.4	Proposition et définition : ultrafiltre	112
4.4.5	Proposition : caractérisation d'un ultrafiltre	112
4.4.6	Proposition : image d'un ultrafiltre	113
4.5	Convergence des filtres et limites des applications	113
4.5.1	Définitions : convergence des filtres et limites des applications	113
4.5.2	Proposition : formes équivalentes de la définition d'une limite	114
4.5.3	Proposition : unicité de la limite	115
4.5.4	Proposition : limite et continuité	115
4.6	Adhérence des filtres	115
4.6.1	Définition : adhérence des filtres	115
4.6.2	Proposition : caractérisation de l'adhérence d'un filtre	116
4.6.3	Définition : valeur d'adhérence d'une application	116
4.6.4	Proposition : limites et valeurs d'adhérence	117

4.6.5	Proposition : adhérence et continuité	118
4.6.6	Définition : limite supérieure et inférieure d'une application	118
4.6.7	Proposition : caractérisation des limites supérieure et inférieure	119
4.7	Filtres et topologie initiale	119
4.7.1	Proposition : convergence dans la topologie initiale	119
4.7.2	Lemme technique : convergence de l'image d'un filtre	120
4.8	Théorème de Tychonov	121
4.8.1	Proposition : compacité et ultrafiltre	121
4.8.2	Théorème de Tychonov	122
4.8.3	Définition : topologie faible	123
4.8.4	Théorème de Banach-Alaoglu	123
4.9	Compactification	124
4.9.1	Définition : espace localement compact	124
4.9.2	Proposition : base de voisinages compacts	124
4.9.3	Proposition : sous-espaces localement compacts	124
4.9.4	Théorème d'Alexandrov	125
4.10	Espaces métrisables localement compacts	126
4.10.1	Définitions : topologie à base dénombrable, espace métrisable, espace séparable	127
4.10.2	Proposition : espace topologique à base dénombrable	127
4.10.3	Définition : espace dénombrable à l'infini	127
4.10.4	Définition : espace relativement compact	127
4.10.5	Proposition : espace topologique métrisable localement compact	128
4.10.6	Proposition : espace topologique localement compact à base dénombrable	128
4.10.7	Proposition et définition : somme d'espaces topologiques	129
5	Ensembles analytiques et capacités	131
5.1	Pavage et pavages compacts	131
5.1.1	Définitions : pavage, pavage produit et pavage somme	131
5.1.2	Définition : pavage compact	132
5.1.3	Proposition : stabilité des pavages compacts par union finie et intersection quelconque	133
5.1.4	Proposition : le produit de pavages compacts est compact	133
5.1.5	Proposition : la somme de pavages compacts est compacte	134
5.2	Ensembles analytiques	136
5.2.1	Définition : ensembles analytiques	137
5.2.2	Lemme : deux propriétés immédiates des ensembles analytiques	137
5.2.3	Proposition : stabilité des ensembles analytiques par union et intersection dénombrable	137
5.2.4	Proposition : produit d'ensembles analytiques	139
5.2.5	Proposition : projection d'ensembles analytiques	140
5.2.6	Proposition : maximalité de la classe des ensembles analytiques	140
5.2.7	Proposition : critère d'inclusion de $\sigma(F)$ dans $\mathcal{A}(F)$	141
5.2.8	Proposition : les ensembles mesurables sont analytiques	141

5.2.9	Corollaire	141
5.2.10	Lemme topologique	142
5.2.11	Théorème : projection de $\mathcal{B} \otimes \mathcal{F}$	142
5.3	Capacités, théorème de Choquet	143
5.3.1	Définition : capacités et ensembles capacitables	143
5.3.2	Théorème de Choquet	144
5.3.3	Lemme : $A \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$ est capacitable	144
5.3.4	Lemme : propriété du pavage $\mathcal{H} = (\mathcal{E} \times \mathcal{F})_{\cup f}$	144
5.4	Fonction d'ensembles et capacité extérieure	146
5.4.1	Définition : fonction d'ensembles	146
5.4.2	Définition : capacité extérieure	148
5.4.3	Théorème : propriétés des capacités extérieures	148
5.5	Fonctions d'ensembles additives	151
5.5.1	Définition : fonction d'ensembles additive	152
5.5.2	Proposition : fonction d'ensembles additive	152
5.5.3	Proposition : fonction d'ensembles finie additive sur une algèbre	153
5.5.4	Corollaire : théorème de Carathéodory	154
5.6	Probabilité extérieure	154
5.6.1	Définition : probabilité extérieure	155
5.6.2	Proposition : la tribu engendrée par une algèbre est analytique	155
5.6.3	Théorème : mesurabilité des ensembles analytiques	156
5.7	Mesurabilité des débuts et théorème de section	158
5.7.1	Théorème : Mesurabilité des débuts (Meyer)	158
5.7.2	Définition : section mesurable et transverse	159
5.7.3	Théorème de section mesurable (Meyer)	159
6	Temps d'arrêt, tribus de temps d'arrêt	161
6.1	Généralités sur les temps d'arrêt	161
6.1.1	Proposition : temps d'arrêt relatif à une filtration augmentée	163
6.1.2	Théorème : le début d'une partie progressive est un temps d'arrêt (Meyer)	163
6.1.3	Corollaire : les temps d'entrée sont des temps d'arrêt	164
6.2	Propriétés des tribus de temps d'arrêt	164
6.2.1	Définition : tribus d'un temps d'arrêt	165
6.2.2	Proposition : inclusions des tribus de temps d'arrêt	165
6.2.3	Définition : variable d'arrêt	166
6.2.4	Proposition : mesurabilité de la variable d'arrêt	167
6.2.5	Exercices : propriétés des tribus de temps d'arrêt	167
6.2.6	Proposition : sup et inf de temps d'arrêt	170
6.3	Tribu optionnelle	171
6.3.1	Définition : intervalles stochastiques	171
6.3.2	Définition : tribu optionnelle, processus optionnel	172
6.3.3	Proposition : propriétés de la tribu optionnelle	172
6.4	Tribu prévisible	176

6.4.1	Définition : tribu prévisible, processus prévisible	177
6.4.2	Proposition : propriétés de la tribu prévisible	177
6.5	Un exemple d'espace filtré	182
7	Temps d'arrêt prévisibles	187
7.1	Temps d'arrêt prévisible	187
7.1.1	Définition : temps d'arrêt prévisible	188
7.1.2	Proposition : sup et inf de temps d'arrêt prévisibles	189
7.1.3	Proposition : D_A est un temps d'arrêt prévisible	189
7.1.4	Proposition : sauts d'un processus prévisible <i>càdlàg</i>	189
7.1.5	Proposition : T_A est un TAP	190
7.2	Temps d'arrêt équitables et annonçables	191
7.2.1	Définition : temps d'arrêt équitable et annonçable	191
7.2.2	Proposition : tribu d'un temps d'arrêt annonçable	191
7.2.3	Proposition : arrêt annonçable d'une martingale	192
7.2.4	Théorème PEA	194
7.3	Applications du théorème PEA	202
7.3.1	Proposition : $\mathcal{P} = \sigma\{[S, T[, S \leq T \text{ TAP}\}$	202
7.3.2	Proposition : arrêt prévisible d'une martingale	203
7.3.3	Proposition : continuité des martingales prévisibles	203
7.4	Temps d'arrêt accessible et inaccessible	205
7.4.1	Définition : temps d'arrêt accessible et inaccessible	205
7.4.2	Proposition : décomposition d'un temps d'arrêt	205
8	Théorèmes de sections et de projections	207
8.1	Section optionnelle	208
8.1.1	Théorème de section optionnelle (Dellacherie-Meyer)	209
8.1.2	Proposition : premier critère d'indistinguabilité des processus optionnels	212
8.1.3	Définition : processus fortement intégrable	213
8.1.4	Proposition : second critère d'indistinguabilité des processus optionnels	213
8.2	Projection optionnelle	214
8.2.1	Proposition et définition : projection optionnelle	215
8.2.2	Proposition : caractérisation de la projection optionnelle	215
8.2.3	Proposition : propriétés de la projection optionnelle	216
8.3	Section prévisible	218
8.3.1	Théorème de section prévisible (Dellacherie-Meyer)	219
8.3.2	Proposition : premier critère d'indistinguabilité des processus prévisibles	220
8.3.3	Proposition : second critère d'indistinguabilité des processus prévisibles	220
8.3.4	Corollaire : variante du second critère d'indistinguabilité	221
8.4	Projection prévisible	221
8.4.1	Proposition et définition : projection prévisible	222
8.4.2	Proposition : caractérisation de la projection prévisible	222

8.4.3	Proposition : propriétés de la projection prévisible	222
8.4.4	Théorème : projection prévisible d'une martingale	224
8.5	Mesure de Doléans associée à un processus	224
8.5.1	Définition : classes de processus à variation finie	225
8.5.2	Définition : mesure de Doléans associée à un processus de \mathcal{CI}_0 brut	226
8.5.3	Proposition : caractérisation des mesures de Doléans	227
8.6	Théorème de Doléans	229
8.6.1	Théorème de Doléans : première partie	229
8.6.2	Théorème de Doléans : deuxième partie	232
8.7	Projection duale prévisible	236
8.7.1	Proposition : projection duale prévisible	237
8.7.2	Proposition : caractérisation du compensateur prévisible	237
8.7.3	Proposition : compensateur prévisible d'un processus arrêté	238
8.7.4	Proposition : sauts d'un compensateur prévisible	238
9	Décomposition des martingales	241
9.1	Classes de processus	242
9.1.1	Classes de processus à variation finie (rappel)	242
9.1.2	Classes de martingales (rappel)	243
9.1.3	Classes de mesurabilité (rappel)	243
9.1.4	Composition des notations	243
9.2	Localisation	243
9.2.1	Définition : classe localisée	243
9.2.2	Définition : classe stable par arrêt	244
9.2.3	Définition : extension standard à la classe localisée \mathcal{H}_{loc} d'une application définie sur une classe \mathcal{H}	244
9.2.4	Proposition : démonstration par localisation	246
9.3	Martingale locale	246
9.3.1	Définition : martingale locale	247
9.3.2	Proposition : localisation en martingales UI	247
9.3.3	Proposition : martingale locale continue à variation finie	247
9.3.4	Proposition : continuité des martingales locales prévisibles	248
9.3.5	Proposition : projection prévisible d'une martingale locale	248
9.4	Décomposition de Doob-Meyer	248
9.4.1	Définition : classe \mathcal{D}	248
9.4.2	Théorème de Doob-Meyer (TDM)	249
9.4.3	Proposition : crochet de Meyer de $M \in \mathcal{M}_0^2$	253
9.5	Extension du crochet de Meyer	254
9.5.1	Proposition : crochet de Meyer d'un processus arrêté	254
9.5.2	Définition : crochet de Meyer de $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$	254
9.5.3	Proposition : caractérisation du crochet de Meyer de $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$	254
9.6	Extension du compensateur prévisible	255
9.6.1	Définition : compensateur prévisible de $A \in \mathcal{VI}_{0,loc}$	255

9.6.2	Proposition : caractérisation du compensateur prévisible de $A \in \mathcal{VI}_{0,loc}$	255
9.6.3	Proposition : sauts d'un compensateur prévisible	255
9.7	Décomposition des martingales	257
9.7.1	Théorème de décomposition des martingales locales	257
9.7.2	Proposition : $M'' \in b\mathcal{M}_{0,loc}$	259
10	Intégrale stochastique : cas général	261
10.1	Processus localement bornés	262
10.1.1	Définition : processus borné et localement borné	263
10.1.2	Proposition : processus adaptés <i>càdlàg</i> ou <i>càglàd</i> localement bornés	264
10.1.3	Rappel : tribu et processus prévisibles	265
10.2	Semi-martingales	266
10.2.1	Rappel : martingale locale	266
10.2.2	Rappel : décomposition des martingales locales	266
10.2.3	Corollaire : décomposition des martingales locales - suite	266
10.2.4	Définition : semi-martingale	266
10.2.5	Proposition : décomposition d'une semi-martingale	267
10.3	Processus prévisibles simples	267
10.3.1	Processus prévisibles simples	267
10.3.2	Définition : processus prévisible en escalier	268
10.3.3	Définition : intégrale stochastique des processus prévisibles simples et des processus prévisibles en escalier	268
10.3.4	Proposition : conservation du caractère martingale	269
10.3.5	Lemme : condition de martingale	269
10.4	Définition générale de l'intégrale stochastique	269
10.4.1	Théorème : définition générale de l'intégrale stochastique (IS)	270
10.4.2	Proposition : six propriétés générales de l'IS	271
10.5	Sommes d'Ito	272
10.5.1	Lemme : approximation en probabilité de l'IS (cas $H_0 = 0$)	273
10.5.2	Proposition : approximation en probabilité de l'IS	274
10.6	Intégrale de $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ par rapport à $A \in \mathcal{V}_0$	274
10.6.1	Théorème de convergence dominée pour les intégrales de Lebesgues-Stieltjes	275
10.6.2	Propriétés générales de l'IS dans le cas $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ et $A \in \mathcal{V}_0$	276
11	Intégrale stochastique : cas martingale	281
11.1	Notations et objectifs	281
11.2	Intégrale stochastique de $H \in b\mathcal{E}$ par $M \in \mathcal{M}_0^2$	283
11.2.1	Rappel : définition de $H.M$ pour $H \in b\mathcal{E}$	283
11.2.2	Théorème : définition de $H.M$ pour $H \in b\mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{M}_0^2$	284
11.3	Espace \mathcal{M}_0^2	284
11.3.1	Définition : mesure μ associée à $M \in \mathcal{M}_0^2$	285

11.3.2	Proposition : masse totale de μ	285
11.4	Espace $L^2(M)$	285
11.4.1	Définition : espace $L^2(M)$	285
11.4.2	Théorème fondamental : isométrie de \mathcal{E} dans \mathcal{M}_0^2	286
11.5	Prolongement de l'IS de $b\mathcal{E}$ à $b\mathcal{P}$	287
11.5.1	Proposition : densité de $b\mathcal{E}$ dans $b\mathcal{P}$	287
11.5.2	Proposition : prolongement de l'IS de $b\mathcal{E}$ à $b\mathcal{P}$	288
11.5.3	Proposition : linéarité de $H \rightarrow H.M$	289
11.5.4	Théorème : convergence dominée dans \mathcal{M}_0^2	289
11.5.5	Proposition : isométrie de $L^2(M)$ dans \mathcal{M}_0^2	290
11.5.6	Propriétés générales de l'IS dans le cas $H \in b\mathcal{P}$ et $M \in \mathcal{M}_0^2$	291
11.6	Intégrale de $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ par $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$	295
11.6.1	Définition : IS de $H \in b\mathcal{P}_{loc}$ par $M \in b\mathcal{M}_{0,loc}$	295
11.6.2	Théorème de convergence dominée dans $b\mathcal{M}_{0,loc}$	297
12	Variation quadratique	301
12.1	Covariation et variation quadratique	301
12.1.1	Définition : covariation et variation quadratique	303
12.1.2	Proposition : formule de <i>polarisation</i>	304
12.1.3	Proposition : sauts de la covariation	304
12.1.4	Proposition : convergence des sommes d'Ito (rappel)	305
12.1.5	Proposition : approximation de la covariation	305
12.1.6	Proposition : la covariation est à variation finie	305
12.1.7	Proposition : formule d'arrêt	306
12.1.8	Proposition : caractérisation de la covariation de martingales locales	306
12.1.9	Corollaire : crochet de Meyer et variation quadratique	307
12.2	Partie continue d'une covariation	307
12.2.1	Notation : partie continue d'une covariation	308
12.2.2	Proposition : covariation nulle	308
12.2.3	Proposition : expression de la partie continue d'une covariation	309
12.2.4	Corollaire : covariation nulle (suite)	309
12.2.5	Proposition : covariation d'intégrales stochastiques	310
12.3	Approximation polynomiale	310
12.4	Formule d'Ito	313
12.4.1	Proposition : formule d'Ito, cas d'un processus à variation finie	314
12.4.2	Proposition : formule d'Ito, cas d'une semi-martingale continue	315
12.4.3	Proposition : formule d'Ito, cas d'une semi-martingale	316
12.4.4	Proposition : formule d'Ito, cas d'un vecteur de semi-martingales (cas général)	318
	Bibliographie	327
	Index	329

Introduction à la théorie générale des processus et intégrales stochastiques

La théorie générale des processus et de l'intégrale stochastiques est rarement enseignée en master 1 ou en école d'ingénieurs. Cependant la modélisation stochastique a de plus en plus souvent besoin de modèles discontinus faisant appel à cette théorie. Par ailleurs, si on extrait des grands traités les seules notions de théorie générale nécessaires à la construction de l'intégrale stochastique et à l'obtention de la formule d'Ito, on aboutit à un texte qui peut être à la fois de taille raisonnable et abordable au niveau du master.

Rendre plus accessible un domaine jusque-là réservé aux seuls spécialistes, par des démonstrations très détaillées et commentées et la présence de nombreux exercices corrigés, est l'ambition de cet ouvrage.

Après une introduction situant le contexte et donnant les grandes lignes de la construction de l'intégrale stochastique, trois chapitres présentent des rappels et des compléments sur l'intégration classique, les martingales et la topologie générale. Le vrai point de départ de la théorie est le théorème de capacité de Choquet. Les théorèmes de sections optionnelles et prévisibles de Meyer en découlent facilement. On peut alors définir les projections optionnelles et prévisibles, établir leurs propriétés et démontrer le célèbre théorème de Doob-Meyer. Ce dernier résultat, avec celui concernant la décomposition des martingales locales, constitue la clé de la définition de l'intégrale stochastique. La covariation des semimartingales et la formule d'Ito (donc le calcul stochastique) dérivent à leur tour de l'existence et des propriétés de l'intégrale stochastique.

Jean-Claude Laleuf est ingénieur de l'École supérieure d'électricité et docteur en mathématiques. Il est ingénieur chercheur senior à la direction de la recherche et du développement d'Électricité de France. Après avoir enseigné les processus et les intégrales stochastiques à l'École centrale de Paris pendant quatorze années, il a publié un cours sur le sujet aux éditions Ellipses.



9 782340 011540



www.editions-ellipses.fr