

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE
L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en Fabrication
mécanique et productique

**Calcul du K_{III} avec la méthode de collocation de frontière avec
prise en compte des conditions aux limites
en déplacement.**

Promoteur :

P. Hicheme Ferdjani

Réalisé par :

Benhalla Redhouane

Bouarbi Mohamed Rafik

Promotion : 2022/2023

Résumé

L'objectif de cette étude est de calculer le facteur d'intensité de contrainte en mode III d'une section circulaire fissurée à l'aide de la méthode de collocation de frontière. Nous étudions une section circulaire avec fissure centrale et non centrale, avec deux types de conditions aux limites : contrainte imposée et déplacement imposé. Le calcul est réalisé à l'aide du logiciel Matlab. Les résultats ont montré une propagation instable de la fissure en contrainte imposée. En déplacement imposé, elle est instable pour les petites longueurs de fissure, puis se stabilise pour les grandes longueurs.

Mots clés : Facteur d'intensité de contrainte, Mode III, Mécanique de la rupture, Matlab, Méthode de collocation de frontière.

Abstract

The objective of this study is to calculate the mode III stress intensity factor of a cracked circular section using the boundary collocation method. We study a circular section with central and non-central crack, with two types of boundary conditions: imposed stress and imposed displacement. The calculation is performed using Matlab software. The results showed an unstable propagation of the crack under imposed stress. In imposed displacement, it is unstable for small crack lengths, then stabilizes for long lengths.

Keywords: Stress intensity factor, Mode III, Fracture mechanics, Matlab, Boundary collocation method.

ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو حساب عامل شدة الإجهاد للوضع الثالث لقسم دائري متصدع باستخدام طريقة ترتيب الحدود. ندرس مقطعاً دائرياً به صدع مركزي وغير مركزي ، مع نوعين من الشروط الحدودية: الإجهاد المفروض والإزاحة المفروضة. يتم إجراء الحساب باستخدام برنامج Matlab. أظهرت النتائج انتشار غير مستقر للشق تحت الضغط المفروض. في حالة الإزاحة المفروض ، يكون غير مستقر لأطوال الشقوق الصغيرة ، ثم يستقر لأطوال طويلة.

الكلمات المفتاحية: عامل شدة الإجهاد ، الوضع الثالث ، ميكانيكا الكسر ، Matlab ، طريقة ترتيب الحدود.

Remerciements

Nous tenions remercier notre dieu Allah tous puissent et miséricordieux pour nous avoir apporté la force, la patience, et la volonté de mener à bien nôtre projets.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire de fin d'étude en génie mécanique. Leur soutien inestimable et leur encouragement constant ont été d'une importance capitale pour mener à bien ce travail.

Nos vifs remerciements vont aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont manifesté, en acceptant de juger notre humble travail, et de l'enrichir par leurs propositions.

Tout d'abord, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères à mon père et ma mère. Leur amour, leur soutien indéfectible et leurs encouragements ont été mes sources d'inspiration et de motivation tout au long de mon parcours académique. Leur confiance en moi et leur soutien sans faille ont été les fondations solides sur lesquelles j'ai pu construire mes efforts.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude envers mon promoteur, **Pr. Hicheme Ferdjani**, pour son encadrement précieux et ses conseils avisés tout au long de ce projet. Ses connaissances approfondies, sa disponibilité et son engagement ont grandement contribué à l'avancement de nos recherches. Je le remercie également pour m'avoir accordé sa confiance et pour m'avoir poussé à repousser mes limites académiques.

Un grand merci à mon binôme, **Bouarbi Mohamed Rafik**, pour notre collaboration fructueuse tout au long de ce mémoire. Notre travail d'équipe, nos échanges constructifs et notre soutien mutuel ont rendu cette expérience enrichissante et mémorable. Je suis reconnaissant pour les moments de partage et d'apprentissage que nous avons vécu ensemble.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les enseignants du département de mécanique, notamment **Mr. Meghatria, Mr. Ouali et Mr. Takdenti**, pour leur dévouement et leur passion pour l'enseignement.

Leurs cours, conseils et expertise ont été fondamentaux pour l'acquisition des connaissances indispensables à la réalisation de ce mémoire. Je voudrais remercier chaleureusement ces professeurs attentionnés qui n'ont ménagé ni leur temps ni leurs efforts pour partager leurs connaissances étendues avec compétence et patience. Grâce à leur soutien pédagogique et leur transmission éclairée, j'ai pu consolider mes bases théoriques et méthodologiques et construire mon projet avec confiance. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude pour leurs enseignements éclairants et formatifs qui ont su me guider tout au long de cette aventure intellectuelle.

Enfin, j'adresse mes remerciements au chef du département de mécanique, **Mr. Omar Ketfi**, pour son soutien et son appui. Sa vision, sa bienveillance et son soutien ont créé un environnement propice à l'apprentissage et à l'épanouissement académique.

Benhalla Redhouane

Remerciements

Nous tenions remercier notre dieu Allah tous puissent et miséricordieux pour nous avoir apporté la force, la patience, et la volonté de mener à bien nôtre projets.

Au terme de ce mémoire de fin d'étude en génie mécanique, je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation. Leur soutien indéfectible et leur encouragement constant ont joué un rôle crucial dans la concrétisation de ce travail.

Tout d'abord, je souhaite adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes parents. Leur amour inconditionnel, leur soutien sans faille et leurs sacrifices ont été les piliers de ma réussite académique. Leur présence et leurs encouragements permanents m'ont donné la force et la détermination nécessaires pour surmonter les défis tout au long de mon parcours.

Je voudrais également exprimer ma profonde gratitude envers mon promoteur, Pr. Hicheme Ferdjani. Sa guidance experte, ses conseils éclairés et son engagement ont été essentiels à la réussite de ce projet. Je suis reconnaissant pour son accompagnement attentif, ses critiques constructives et sa disponibilité, qui ont grandement enrichi mon travail.

Un grand merci à mon binôme, **Benhalla Redhouane**. Notre collaboration a été une expérience stimulante et gratifiante. Les échanges d'idées, les discussions techniques et notre soutien mutuel ont contribué à l'aboutissement de ce mémoire. Je suis reconnaissant pour sa contribution précieuse et notre travail d'équipe fructueux.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers les enseignants du département de mécanique spécialement à **Mr. Mourad Abada**, et le chef de spécialité de fabrication mécanique, **Mr. Maghrawi** pour leur expertise, leur passion pour l'enseignement et leur dévouement envers leurs étudiants. Leurs cours, leurs encouragements et leur disponibilité ont joué un rôle clé dans mon apprentissage et ma formation académique.

Enfin, j'adresse mes remerciements aux trois chefs du département de mécanique **Mr. Mustapha Temmar**, **Mr. Omar Ketfi** et le défient **Mr. Abdelhalim Brahimi**. Pour leurs directions éclairées, leurs bienveillances et leurs soutiens ont créé un environnement propice à l'épanouissement académique. Je suis reconnaissant pour leurs appuis constants tout au long de mon parcours universitaire.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mon frère et ma sœur, qui ont toujours été présents pour me soutenir. Leur soutien moral, leurs encouragements ont été d'une aide inestimable dans la réalisation de ce mémoire.

Bouarbi Mohamed Rafik

Dédicace

À mon cher père Abderrahmane,

Il est difficile de mettre en mots toute la gratitude et l'amour que je ressens à ton égard. Tu as été mon roc, mon guide et mon modèle tout au long de ma vie, et je ne saurais jamais assez te remercier pour tout ce que tu as fait.

Depuis mon enfance, tu as été là pour m'encourager à poursuivre mes rêves, à croire en moi-même et à viser toujours plus haut. Ta confiance en mes capacités a été le carburant qui a alimenté ma détermination et mon succès malgré les nombreux obstacles que nous avons traversé ensemble tu restes toujours à mes côtés.

Aujourd'hui, je dédie ce mémoire à toi, cher papa, en signe de reconnaissance pour tout ce que tu as fait pour moi. Tu as été et tu es toujours ma plus grande source d'inspiration. C'est grâce à toi que je suis devenu la personne que je suis aujourd'hui.

Merci du fond du cœur, papa, pour ton amour inconditionnel, ta patience infinie et ton soutien indéfectible. Je suis honoré d'être ton enfant, et je suis rempli d'une profonde gratitude et d'un amour incommensurable à ton égard. Avec tout mon amour et ma reconnaissance.

Bouarbi Mohamed Rafik

À ma mère exceptionnelle,

Il est impossible de décrire pleinement à quel point ta présence et ton amour ont été essentiels dans ma vie. Tu es la source de ma force, de ma détermination et de ma joie, et je te suis infiniment reconnaissant pour tout ce que tu as fait pour moi.

Depuis mon tout premier souffle, tu as été là à chaque étape de ma vie. Tu as été ma première enseignante, m'apprenant l'amour, la gentillesse et la compassion. Tu m'as encouragée à être la meilleure version de moi-même, à poursuivre mes rêves et à ne jamais abandonner.

Tu as sacrifié tellement pour moi, mettant constamment mes besoins et mon bonheur avant les tiens. Ta dévotion inébranlable a été une source d'inspiration et de motivation sans fin. Je sais que je peux toujours compter sur toi, peu importe les circonstances.

Merci du fond du cœur, maman, pour ta bienveillance infinie, ton dévouement sans faille et ton amour inconditionnel. Je suis béni de t'avoir comme mère, et je te chéris au-delà des mots. Tu es bien plus qu'une mère, tu es l'âme la plus chère.

Je t'aime plus que tout

Bouarbi Mohamed Rafik

Liste des figures

Figure I-1 : Modes de rupture	03
Figure I.2a : Mode I	04
Figure I.2b : Mode II	04
Figure I.2c : Mode III	05
Figure I.3 : Etat de contrainte dans un solide fissuré	05
Figure II-1 : Champs de contraintes en mode III et coordonnées polaires	08
Figure II-2 : section fissurée et points de collocation	12
Figure III-1 Fissure centrale sous contrainte tangentielle imposée sur une section circulaire	14
Figure III.2 : Evolution de K_{III} en fonction de p	16
Figure III-3 : Fissure centrale sous déplacement imposé dans une section circulaire 17 ..	17
Figure III.4 : Evolution de K_{III} en fonction de p	19
Figure III-5 : Points de collocation dans une fissure non centrale dans une section	
circulaire sous chargement tangentielle	20
Figure III-6 : Evolution de K_{III} en fonction de f	22
Figure III-7 : Fissure non centrale dans une section circulaire avec un déplacement imposé	23
Figure III-8 : Points de collocation dans une fissure non centrale dans une section circulaire avec un déplacement imposé	23
Figure III-9 : Evolution de K_{III} en fonction de f	25
Figure A3-1.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.1$)	
Figure A3-2.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.2$)	
Figure A3-3.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.3$)	
Figure A3-4.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.4$)	
Figure A3-5.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.5$)	
Figure A3-6.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.6$)	
Figure A3-7.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.7$)	
Figure A3-8.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.8$)	

Figure A3-9.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.9)

Figure A3-10.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1)

Figure A3-11.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.1)

Figure A3-12.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.2)

Figure A3-13.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.3)

Figure A3-14.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.4)

Figure A3-15.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.5)

Figure A3-16.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.6)

Figure A3-17.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.7)

Figure A3-18.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.8)

Figure A3-19.a : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.9)

Figure A3-1.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.1)

Figure A3-2.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.1)

Figure A3-3.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.2)

Figure A3-4.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.3)

Figure A3-5.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.4)

Figure A3-6.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.5)

Figure A3-7.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.6)

Figure A3-8.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.7)

Figure A3-9.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=0.8)

Figure A3-10.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1)

Figure A3-11.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.1)

Figure A3-12.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.2)

Figure A3-13.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.3)

Figure A3-14.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.4)

Figure A3-15.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.5)

Figure A3-16.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.6)

Figure A3-17.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.7)

Figure A3-18.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.8)

Figure A3-19.b : Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de p (f=1.9)

Liste des tableaux

Tableau III-1 : KIII en fonction de p pour une fissure centrale sous contrainte imposée	16
Tableau III-2 : KIII en fonction de p pour une fissure centrale sous déplacement imposé	18
Tableau-III-3 : Valeurs de KIII pour différentes valeurs de f dans le cas d'un chargement Imposé.....	21
Tableau-III-4 : Valeurs de KIII pour différentes valeurs de f dans le cas d'un déplacement imposé.....	24
TableauA3-1.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.1)	
TableauA3-2.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.2)	
TableauA3-3.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.3)	
TableauA3-4.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.4)	
TableauA3-5.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.5)	
TableauA3-6.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.6)	
TableauA3-7.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.7)	
TableauA3-8.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.8)	
TableauA3-9.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.9)	
TableauA3-10.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1)	
TableauA3-11.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.1)	
TableauA3-12.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.2)	
TableauA3-13.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.3)	
TableauA3-14.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.4)	
TableauA3-15.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.5)	
TableauA3-16.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.6)	
TableauA3-17.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.7)	
TableauA3-18.a : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.8)	
TableauA3-1.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.1)	
TableauA3-2.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.2)	

TableauA3-3.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.3)

TableauA3-4.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.4)

TableauA3-5.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.5)

TableauA3-6.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.6)

TableauA3-7.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.7)

TableauA3-8.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.8)

TableauA3-9.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=0.9)

TableauA3-10.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1)

TableauA3-11.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.1)

TableauA3-12.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.2)

TableauA3-13.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.3)

TableauA3-14.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.4)

TableauA3-15.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.5)

TableauA3-16.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.6)

TableauA3-17.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.7)

TableauA3-18.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.8)

TableauA3-19.b : KIII en fonction des points de collocations p (f=1.9)

Liste des annexes

Annexe 1 : Les programmes de calcul du FIC pour fissure centrale

Annexe 2 : Les programmes de calcul du FIC pour fissure non centrale

Annexe 3 : Résultats pour le cas d'une fissure non centrale sous contrainte imposée dans une section circulaire

Nomenclatures

FIC : Facteur d'intensité des contraintes.

K : Le facteur d'intensité des contraintes dépendant du chargement et de la géométrie de la pièce.

K_I, K_{II}, K_{III} : Facteur d'intensité de contrainte respectivement en mode 1, 2, 3.

f : Longueur de la fissure.

m : Nombre de points de collocation.

T₃ : Composante de vecteur contrainte dans la direction x_3 .

p : Nombre de termes.

μ : Module de cisaillement.

x₁, x₂ : Composantes de repère cartésien.

r, θ : Les coordonnées du système de repère polaires.

n₁, n₂ : Les composantes de la normale unitaire suivant x_1 et x_2 .

π : le nombre ascendant 3,14.

σ_{ij} : Champ des contraintes.

Sommaire

Liste des figures

Liste des tableaux

Liste des annexes

Nomenclature

Introduction Générale 01

Chapitre I : Rappels Théorique

I.1.Introduction 03

I.2. Définition de la mécanique de la rupture 03

I.2.1 Modes de rupture 03

I.2.1.1. Mode I (Fig. 1.2a) 04

I.2.1.2. Mode II (Fig. I.2b) 04

I.2.1.3. Mode III (Fig. I.2b) 05

I.3. Facteur d'intensité des contraintes FIC 05

I.4. Rappel d'élasticité anti-plane 07

Chapitre II : Méthode de collocation de frontière

II.1. Introduction 08

II.2. Développement des contraintes et du déplacement en série infinie 08

II.2.1. Contraintes 08

II.2.2. Facteur d'intensité de contrainte K_{III} 10

II.2.3. Déplacement 11

II.3. Méthode de collocation de frontière 11

Chapitre III : Problèmes Traités

III.1. Introduction.....	13
III.2 Fissure Centrale dans une Section Circulaire	14
III.2.1 Cas d'une contrainte imposée	14
III.2.1.1 Résultats.....	15
III.2.1.2 Discussion des résultats	17
III.2.2 Cas d'un déplacement imposé.....	17
III.2.2.1 Résultats	18
III.2.2.2 Discussion des résultats	19
III.3 Fissure non Centrale Débouchant dans une Section Circulaire	19
III.3.1 Cas d'une contrainte imposée	19
III.3.1.1 Résultats	21
III.3.1.2 Discussion des résultats	22
III.3.2 Cas d'un déplacement imposé	22
III.3.2.1 Résultats	24
III.3.1.2 Discussion des résultats	25
Conclusion	26
Références bibliographiques	
Annexes	

INTRODUCTION GENERALE

Le sujet de la mécanique de la rupture fragile est l'étude de la dangerosité des fissures dans une structure élastique. En effet, la présence de ces fissures induit des contraintes très élevées au voisinage de leurs pointes, et ce même pour des chargements modérés. Ces contraintes peuvent provoquer la propagation de ces fissures, et donc la rupture des structures. Il existe un facteur noté K , appelé Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC), permettant de quantifier l'intensité des contraintes induites par les fissures. Ce facteur est utilisé dans les critères de propagation.

Il existe plusieurs méthodes numériques de détermination du FIC. Dans ce travail, nous utilisons la méthode de collocation de frontière. Cette méthode consiste à utiliser les conditions aux limites (contraintes et déplacements) du problème en un certain nombre de points de la frontière pour calculer une valeur approchée du FIC. Il existe trois types de conditions aux limites :

1. Contraintes imposées sur toute la frontière.
2. Déplacements imposés sur toute la frontière.
3. Contraintes imposées sur une partie de la frontière, et déplacements imposés sur la partie complémentaire.

Plusieurs travaux ont été réalisés avec la méthode de collocation de frontière, sous la direction du Professeur Ferdjani. Tous ces travaux concernent le premier type de conditions aux limites :

- En mode III, Mezouani [8] a calculé le FIC pour une section circulaire avec une fissure centrale en utilisant « la méthode de collocation de frontière ». Il a utilisé deux méthodes de résolution : avec et sans les moindres carrés. Il a constaté qu'avec un nombre de termes suffisant, les deux méthodes convergent vers la même valeur. Il a également étudié l'influence de la répartition des points de collocation sur la frontière, en comparant les résultats obtenus avec des répartitions sur une partie de la frontière et avec une répartition sur toute la frontière. En comparant avec la valeur obtenue par A. Zehnder [7], il a conclu qu'il faut utiliser toute la frontière. La valeur adimensionnelle obtenue est de 2,1278.
- En mode III, pour une section circulaire avec fissure centrale avec la méthode de collocation de frontière, Izza et Benatallah [9] ont étudié l'influence d'une répartition non uniforme des points de collocation sur la frontière. Ils sont arrivés à la conclusion que pour assurer la convergence, il faut que la répartition soit uniforme. Ils ont également calculé le FIC pour une section rectangulaire avec une fissure latérale.
- En mode I, Bouras et Bouza [4] ont calculé le FIC pour une section circulaire sous chargement radial dans les cas d'une fissure centrale et non centrale. Dans le cas de la fissure centrale, deux cas de chargement ont été considérés : uniforme et non uniforme.

Dans le cas de la fissure non centrale, seulement le chargement uniforme a été considéré.

- En mode I, en utilisant la méthode de collocation de frontière, Belhadj et Mekkaoui [3] ont calculé le FIC pour une section elliptique sous chargement normal dans les cas d'une fissure centrale et non centrale. Des expressions analytiques pour le FIC ont été proposées et validées.
 - En mode III, Serghini et Tefiani [10] ont calculé le FIC d'une section circulaire avec une fissure centrale et non centrale, ainsi que pour une section carrée avec une fissure centrale. Des expressions analytiques pour le FIC ont été déduites et validées par comparaison avec les résultats obtenus.
 - Slamani et Ouansa [6] ont calculé utilisé la « méthode de collocation de frontière » pour calculer le FIC K_{III} d'une section circulaire dans le cas d'une fissure centrale et non centrale. La méthode de résolution utilisée est la SVD-régulière. Cette méthode a permis de calculer le FIC pour un intervalle de longueurs de fissures plus grand que celui de Serghini et Tefiani [10].
- Chaouati et Moates [2] ont calculé, en mode III, en utilisant la méthode SVD-régulière et la méthode d'inversion matricielle, le FIC pour une section elliptique fissurée avec plusieurs longueurs de fissure, ainsi que plusieurs valeurs du rapport « grand axe/petit axe » de l'ellipse. La comparaison entre les deux méthodes a montré que les deux méthodes sont à peu près équivalentes avec un léger avantage, au niveau de la stabilité, pour la méthode d'inversion matricielle.

L'objet du présent travail est de calculer le FIC K_{III} pour une section circulaire fissurée avec le type et le second type, et comparer les résultats obtenus. Les cas de fissure centrale et non centrale sont considérés. Le mémoire se divise en trois chapitres :

- Le premier chapitre expose les concepts clés de la mécanique de la rupture qui sont pertinents pour notre projet. Ceux-ci comprennent les modes de rupture, rappel d'élasticité anti-plane, et le facteur d'intensité de contrainte.
- Le deuxième chapitre présente la méthode de collocation de frontière en mode III.
- Le troisième chapitre est consacré aux applications. Nous considérons quatre cas :
 - ◆ Fissure centrale avec des conditions aux limites de type 1 et 2.
 - ◆ Fissure non centrale avec des conditions aux limites de type 1 et 2.

Nous comparons les résultats obtenus.

Enfin, une conclusion générale récapitule les résultats de l'étude.

Chapitre I

Rappels Théoriques

I.1. Introduction :

Dans ce premier chapitre, nous allons explorer les concepts clés de notre étude, divisés en deux parties :

- La première partie concernera les principales notions de la mécanique de la rupture fragile.
- La deuxième partie détaillera les équations de l'élasticité anti-plane.

I.2. Définition de la mécanique de la rupture [1] :

Le mécanisme de rupture est un processus mécanique produisant au sein d'un matériau une discontinuité locale de matière appelée *fissure*. On distingue deux types de rupture :

- Rupture fragile : la rupture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique dans la structure.
- Rupture ductile : dans ce type de rupture, la déformation plastique macroscopique est en général importante.

I.2.1. Modes de rupture [5] :

L'ouverture d'une fissure est une combinaison de trois modes (Figure I.1).

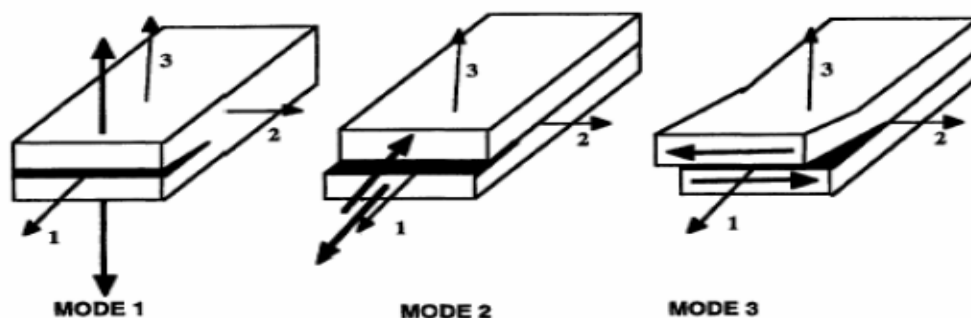


Figure I.1 : Modes de rupture [5]

I.2.1.1. Mode I (Fig.1.2a):

Les faces se déplacent perpendiculairement au plan de la fissure. Ce mode est le plus dangereux :

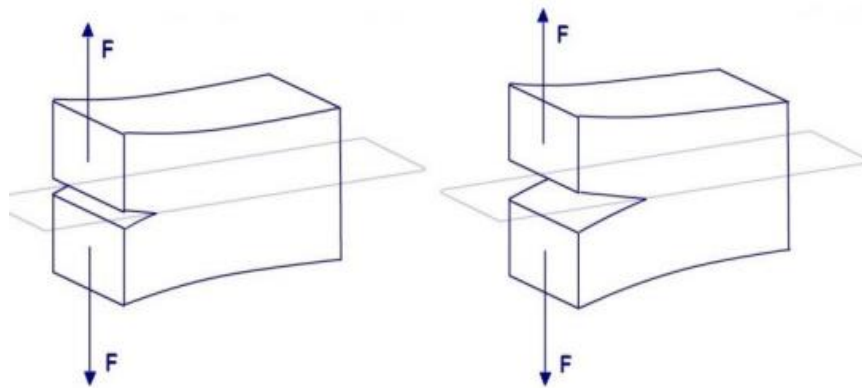


Figure I.2a : Mode I.

I.2.1.2. Mode II (Fig.I.2b):

Les faces se déplacent parallèlement au plan de la fissure.

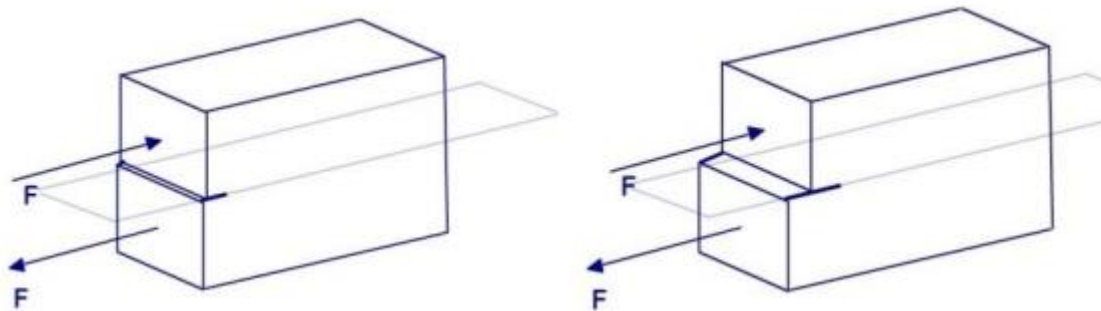


Figure I.2b : Mode II.

I.2.1.3. Mode III (Fig.I.2c) :

Les faces se déplacent parallèlement au front de fissure.

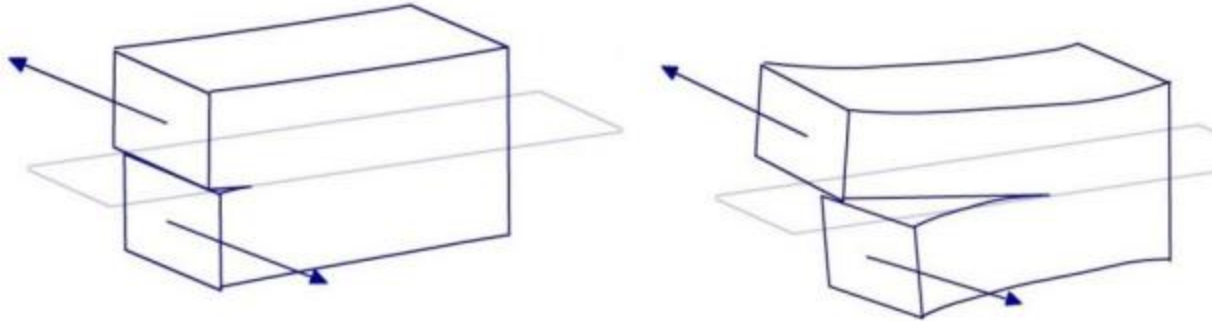


Figure I.2c : Mode III

I.3. Facteur d'intensité des contraintes FIC [11] :

Dans la zone proche de la pointe (ou du front), le champ de contraintes présente une singularité en $r^{-1/2}$ (Figure I-3). L'intensité de la singularité est caractérisée par les paramètres appelés facteurs d'intensité de contraintes, notés K_I K_{II} K_{III} pour chacun des modes élémentaires. A l'aide de la théorie de l'élasticité, Irwin a montré que les contraintes σ_{ij} dans cette zone singulière peuvent être exprimées en fonction des facteurs d'intensité de contraintes :

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} f_{ij}(\theta) \quad (I-1)$$

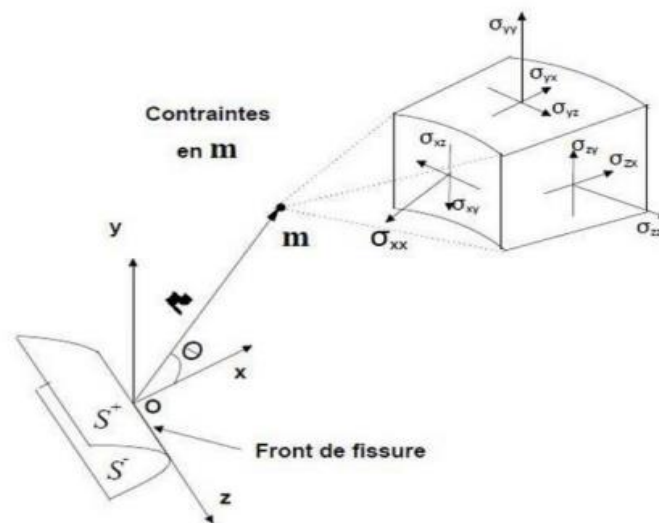


Figure I.3 : Etat de contrainte dans un solide fissuré

Où :

σ_{ij} : Tenseur des contraintes.

r et θ : coordonnées polaires (Figure I.3)

K : Le facteur d'intensité des contraintes dépendant du chargement et de la géométrie de la pièce.

$f_{ij}(\theta)$: Une fonction adimensionnelle dépendant du mode de chargement.

En mode I, II et III, l'équation (I.2) devient :

$$\text{Mode I : } \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{I-3})$$

$$\text{Mode II : } \begin{cases} \sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (\text{I-4})$$

$$\text{Mode III : } \begin{cases} \sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

Dans les formules précédentes σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , σ_{13} , σ_{23} sont les composants du tenseur des contraintes. Les FIC K_I , K_{II} et K_{III} s'expriment en MPa \sqrt{m} .

I.4. Rappel d'élasticité anti-plane [6] :

Le problème qui sera traité dans ce travail est un problème de fissure en mode III.

Le mode III existe dans le cadre de l'élasticité anti-plane. Nous présentons ci-dessous les équations correspondantes.

On est en situation anti-plane, dans le plan (x_1, x_2) , si le champ de déplacement $\vec{U}(x)$ de composantes (U_1, U_2, U_3) est de la forme :

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 0 \\ U_3 = U_3(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{I-6})$$

Le champ des petites déformations se déduit de (I-6), on obtient :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = 0 \\ \epsilon_{13} = \frac{1}{2} U_{3,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \epsilon_{23} = \frac{1}{2} U_{3,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{I-7})$$

La loi de comportement élastique donne le champ de contrainte suivant :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = \mu U_{3,1} = \mu \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \sigma_{23} = \mu U_{3,2} = \mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{I-8})$$

Où μ est le module de cisaillement.

Les équations d'équilibre, sans forces de volume, se réduisent à :

$$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} = \mu \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} \right) = 0 \leftrightarrow \Delta U_3 = 0 \quad (\text{I-9})$$

Où Δ est l'opérateur Laplacien. Cela veut dire que $U_3(x_1, x_2)$ est une fonction harmonique [1].

Elle peut donc être prise comme la partie réelle d'une fonction holomorphe $F(z)$ ($z = x_1 + ix_2$) :

$$\mu U_3 = \text{Re } F(z) \quad (\text{I-10})$$

En utilisant (I-8) et les relations de Cauchy-Riemann, on peut montrer la relation suivante [1] :

$$\sigma_{31} - i\sigma_{32} = F'(z) \quad (\text{I-11})$$

Chapitre II

Méthode de collocation de frontière

II.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous introduisons la méthode de collocation des frontières. Cette méthode se base sur le développement des contraintes et déplacements en élasticité anti-plane.

II.2. Développement des contraintes et du déplacement en série infinie [6] :

II.2.1 Contraintes

En mode III, on est dans le cas de l'élasticité anti-plane. Nous rappelons que dans ce cas, toutes les contraintes sont nulles sauf σ_{31} et σ_{32} [1]. Considérons une structure quelconque avec une fissure droite (Figure II-1). Isolons une partie entourant la pointe afin d'y déterminer la forme générale des contraintes.

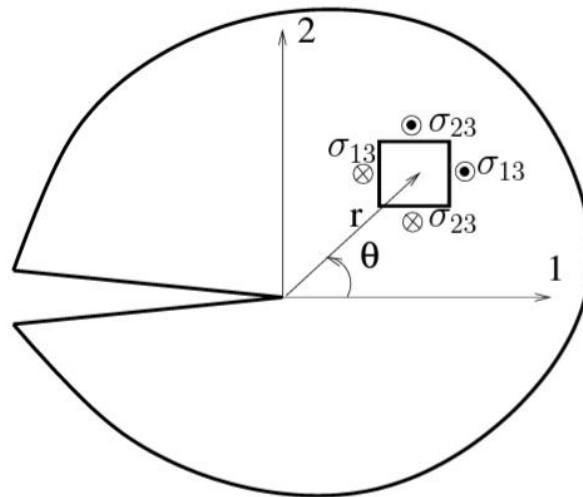


Figure II-1 : Champs de contraintes en mode III et coordonnées polaires [1].

Nous reprenons la formule (I-11) avec :

$$F(Z) = C Z^{\alpha+1} \quad (\text{II-1})$$

Où C est un nombre complexe, et α un coefficient réel.

Et $Z = r e^{i\theta}$ avec r et θ les coordonnées polaires.

En dérivant $F(z)$ on obtient :

$$F'(Z) = (\alpha + 1) C Z^{\alpha} \quad (\text{II-2})$$

En remplaçant $C=B_\alpha + iA_\alpha$ et $Z= re^{i\theta}$ dans (II-2), on obtient :

$$F'(Z) = (\alpha + 1) (B_\alpha + iA_\alpha)r^\alpha(\cos(\alpha\theta) + i \sin(\alpha\theta))$$

En séparant les parties réelle et imaginaire :

$$F'(Z) = (\alpha + 1) r^\alpha [B_\alpha \cos(\alpha\theta) - A_\alpha \sin(\alpha\theta)] + i (\alpha + 1) r^\alpha [B_\alpha \sin(\alpha\theta) + A_\alpha \cos(\alpha\theta)] \quad (\text{II-3})$$

En identifiant avec (I-11), on aura :

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \Re F'(Z) = (\alpha + 1)[B_\alpha \cos(\alpha\theta) - A_\alpha \sin(\alpha\theta)]r^\alpha \\ \sigma_{32} = -\Im F'(Z) = -(\alpha + 1)[B_\alpha \sin(\alpha\theta) + A_\alpha \cos(\alpha\theta)]r^\alpha \end{cases}$$

Pour satisfaire les conditions aux limites sur les lèvres de la fissure (Figure II-1), il vient :

$$\sigma_{32} = 0 \text{ pour } \theta = \pm\pi.$$

En supposant $\alpha \neq -1$, on en déduit les deux équations à deux inconnues suivantes :

$$B_\alpha \sin(\alpha\pi) + A_\alpha \cos(\alpha\pi) = 0$$

$$-B_\alpha \sin(\alpha\pi) + A_\alpha \cos(\alpha\pi) = 0$$

Qui peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{cases} B_\alpha \sin(\alpha\pi) = 0 \\ A_\alpha \cos(\alpha\pi) = 0 \end{cases}$$

Si α n'est ni entier ni demi-entier, $\sin(\alpha\theta) \neq 0$ et $\cos(\alpha\theta) \neq 0$ d'où $A_\alpha = B_\alpha = 0$. La solution obtenue est triviale sans intérêt[1]. Nous devons considérer les cas où α est entier ou demi-entier [12]:

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha \text{ entier, } \sin(\alpha\theta) = 0, \text{ donc } A_\alpha = 0 \text{ et } B_\alpha \text{ quelconque.} \\ \text{Si } \alpha \text{ demi-entier, } \cos(\alpha\theta) = 0, \text{ donc } B_\alpha = 0 \text{ et } A_\alpha \text{ quelconque.} \end{cases} \quad (\text{II-4})$$

En se basant sur l'hypothèse de l'énergie élastique finie, on peut montrer que $\alpha > -1$ [13].

Puisque α est entier ou demi-entier, nous devons avoir $\alpha \geq -\frac{1}{2}$. Ce qui justifie l'hypothèse précédente ($\alpha \neq -1$).

Puisque toutes les valeurs de $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ entières ou demi-entières sont admissibles, les contraintes peuvent être écrites comme des sommes infinies de termes, chaque terme correspondant à une valeur de α [12]:

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \sum_{\alpha=-\frac{1}{2}}^{+\infty} r^\alpha (\alpha + 1) [B_\alpha \cos(\alpha\theta) - A_\alpha \sin(\alpha\theta)] \\ \sigma_{32} = \sum_{\alpha=-\frac{1}{2}}^{+\infty} -r^\alpha (\alpha + 1) [B_\alpha \sin(\alpha\theta) + A_\alpha \cos(\alpha\theta)] \end{cases} \quad (\text{II-5})$$

Avec :

- Le coefficient α est soit entier soit demi-entier.
- Les constantes A_α et B_α , sont reliées par les relations (II-4).

En élasticité anti-plane, le vecteur contrainte possède une seule composante selon x_3 :

$$\mathbf{T}_3 = \sigma_{31} \mathbf{n}_1 + \sigma_{32} \mathbf{n}_2 \quad (\text{II-5b})$$

Où n_1 et n_2 sont les composantes de la normale unitaire suivant x_1 et x_2 .

En reportant (II-5) dans (II-11), on obtient :

$$\mathbf{T}_3 = \sum_{\alpha=-\frac{1}{2}}^{+\infty} r^\alpha (\alpha + 1) [A_\alpha (-\sin(\alpha\theta) \mathbf{n}_1 + \cos(\alpha\theta) \mathbf{n}_2) + B_\alpha (\cos(\alpha\theta) \mathbf{n}_1 + \sin(\alpha\theta) \mathbf{n}_2)] \quad (\text{II-5c})$$

II.2.2 Facteur d'intensité de contrainte K_{III}

Lorsque $r \rightarrow 0$, le terme proportionnel à $r^{-\frac{1}{2}}$ devient dominant par rapport aux autres. Donc L'expression des contraintes (II-5) peut se réduire au terme proportionnel à $r^{-\frac{1}{2}}$ (les autres termes sont négligés). L'expression obtenue est appelée expression asymptotique des contraintes.

On prend $\alpha = -\frac{1}{2}$ et en posant

$$A_{-\frac{1}{2}} = -\frac{2K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (\text{II-5d})$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} \sigma_{31} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{32} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Ces expressions sont identiques à l'équation (I-5) du Chapitre 1.

II.2.3 Déplacement

La seule composante non nulle est u_3 . En utilisant (II-2) et (I-10), on obtient :

$$\mu u_3 = \sum_{\alpha=-\frac{1}{2}}^{+\infty} r^{\alpha+1} [B_\alpha \cos((\alpha + 1)\theta) - A_\alpha \sin((\alpha + 1)\theta)] \quad (\text{II-5d})$$

II.3. Méthode de collocation de frontière [12]:

La méthode de collocation de frontière est une méthode de calcul du facteur d'intensité de contrainte basée sur le développement des contraintes et déplacements en série infinie (II-5).

L'idée générale est qu'étant donné les conditions aux limites pour un problème, on exprime ces données en un nombre fini de positions sur la frontière, appelés points de collocation. Nous obtenons un système d'équations dont les inconnues sont les constantes contenues dans le développement. Après résolution, la valeur du coefficient correspondant au terme $r^{-\frac{1}{2}}$ est le facteur d'intensité de contrainte recherché. Nous détaillons, ci-dessous, la procédure pour le cas de l'élasticité anti-plane.

On commence par remplacer l'indice réel α par l'indice entier $N \geq 1$:

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha \text{ est entier, on pose } \alpha = N - 1 \\ \text{Si } \alpha \text{ est demi - entier, on pose } \alpha = N - \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

En reportant (II-7) dans (II-5c) en tenant compte de (II-4) et en regroupant les cas entier et demi-entier pour chaque valeur de N , on obtient l'expression suivante du vecteur contrainte :

$$T_3 = \sum_{N=1}^{+\infty} [Nr^{N-1}B_N(\cos((N-1)\theta)n_1 + \sin((N-1)\theta)n_2) + (N-1/2)r^{N-3/2}A_N(-\sin((N-3/2)\theta)n_1 + \cos((N-3/2)\theta)n_2)] \quad (\text{II-8})$$

Et l'expression suivante pour le déplacement :

$$\mu u_3 = \sum_{N=1}^{+\infty} [r^N B_N \cos N\theta - r^{N-1/2} A_N \sin((N-1/2)\theta)] \quad (\text{II-8b})$$

Au lieu des séries infinies (II-8) et (II-8b), on utilise les séries tronquées suivantes :

$$T_3 \approx \sum_{N=1}^P [Nr^{N-1}B_N(\cos((N-1)\theta)n_1 + \sin((N-1)\theta)n_2) + (N - \frac{1}{2})r^{N-\frac{3}{2}}A_N(-\sin((N-\frac{3}{2})\theta)n_1 + \cos((N-\frac{3}{2})\theta)n_2)] \quad (\text{II-9})$$

$$\mathbf{u}_3 \approx \sum_{N=1}^P [r^N \mathbf{B}_N \cos N\theta - r^{N-1} \mathbf{A}_N \sin((N - 1/2)\theta)] \quad (\text{II-9b})$$

Où P est appelé nombre de termes.

À partir de (II-5d), on obtient l'expression du FIC :

$$\mathbf{K}_{\text{III}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbf{A}_1 \quad (\text{II-10})$$

Soit une section quelconque fissurée dont la frontière est soumise à un chargement connu.

On choisit m points de collocation sur la frontière (Figure II-2) où :

- \vec{n}^q Représente la normale extérieure unitaire en q.
- (r_q, θ_q) Représentent les coordonnées polaires du point q.

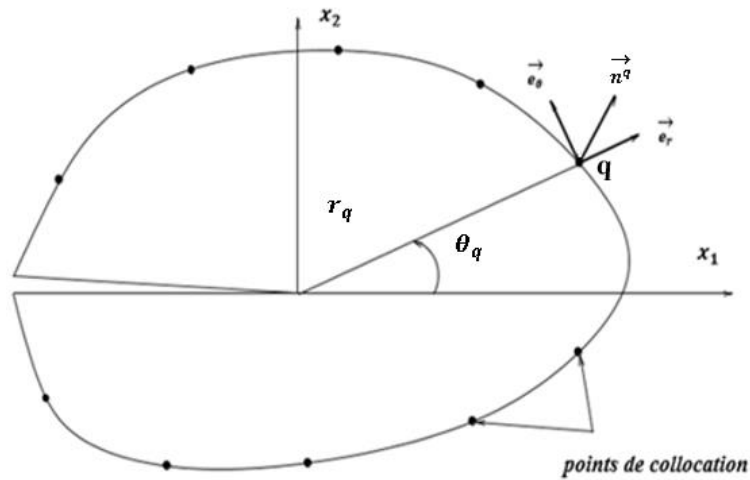


Figure II-2 : section fissurée et points de collocation. [12]

On suppose que le vecteur contraint est donné en certains points de collocation, et que le vecteur déplacement est donné sur les autres points. En utilisant (II-9) et (II-9b),

On obtient le système de 2p équations à 2p inconnues suivant :

$$\mathbf{T}_3^q = \sum_{N=1}^P \left(-\mathbf{A}_N r_q^{N-\frac{3}{2}} (N - 1/2) [\sin((N - 3/2)\theta) \mathbf{n}_1^q + \cos((N - 3/2)\theta) \mathbf{n}_2^q] + \right. \\ \left. \mathbf{B}_N r_q^{N-1} N [\cos((N - 1)\theta) \mathbf{n}_1^q - \sin((N - 1)\theta) \mathbf{n}_2^q] \right) \quad \text{Si le vecteur contrainte est}$$

donné (II-12)

$$\mu \mathbf{u}_3^q = \sum_{N=1}^P [r_q^N \mathbf{B}_N \cos N\theta - r_q^{N-1/2} \mathbf{A}_N \sin((N - 1/2)\theta)] \quad \text{Si le déplacement est donné}$$

$q = 1 \dots\dots 2p$

Après résolution, \mathbf{K}_{III} est donné par l'équation (II-10).

Chapitre III :
Problèmes Traités

III.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va calculer le facteur d'intensité de contrainte K_{III} dans le cas d'une fissure centrale et non centrale dans une section circulaire. Pour chaque cas, deux types de chargement sont considérés : contrainte imposée et déplacement imposé.

Adimensionnalisation :

Nous avons effectué des calculs adimensionnels. On définit ci-dessous les variables adimensionnelles utilisées :

$$R' = \frac{R}{R} = 1, \quad T' = \frac{T}{T} = 1, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu} = 1, \quad f' = \frac{f}{R}, \quad u'_3 = \frac{u_3}{u_3} = 1,$$

avec :

- R : est le rayon de la section,
- μ : module de cisaillement,
- f : longueur de la fissure,
- T : contrainte imposée,
- u_3 : déplacement imposé.

Nous reprenons l'équation (II-11) :

$$\sigma_{31} \mathbf{n}_1 + \sigma_{32} \mathbf{n}_2 = \mathbf{T}$$

Cette équation est adimensionnalisée en la divisant par T :

$$\frac{\sigma_{31}}{T} \mathbf{n}_1 + \frac{\sigma_{32}}{T} \mathbf{n}_2 = \frac{\mathbf{T}}{T} = 1$$

L'équation précédente nous permet de définir les contraintes adimensionnelles :

$$\sigma'_{31} = \frac{\sigma_{31}}{T}, \quad \sigma'_{32} = \frac{\sigma_{32}}{T}$$

En divisant l'expression asymptotique de la contrainte par T, on obtient :

$$\sigma'_{32} = \frac{\sigma_{32}}{T} = \frac{K_{III} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{T \sqrt{2\pi r' \sqrt{R}}} = \frac{K'_{III}}{\sqrt{2\pi r'}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

L'expression précédente permet de définir le FIC adimensionnel K_{III}' :

$$K_{III}' = \frac{K_{III}}{T \sqrt{R}}.$$

Dans la suite du mémoire, on travaillera avec les quantités adimensionnelles : T' , f' , R' , et K_{III}' .
 Pour simplifier la rédaction, l'indice (') sera omis ainsi que la mention « adimensionnel ».

Choix des points de collocation

Pour tous les calculs effectués, nous considérons des points de collocation \mathbf{p} répartis uniformément sur la frontière du cercle (Figure III-1). L'angle θ_q pour chaque point est calculé par la formule suivante :

$$\theta_q = \frac{2\pi q}{m+1} - \pi, q = 1 \dots 2p (\theta \in] - \pi, \pi[) \quad (\text{III.3})$$

On observe dans (III-3) que $-\pi < \theta_q < \pi$. Les angles $-\pi$ et $+\pi$ sont évités car ce sont des points anguleux où la normale n n'est pas définie.

III.2 Fissure Centrale dans une Section Circulaire :

III.2.1-Cas d'une contrainte imposée :

On considère une section circulaire de rayon R . La section contient une fissure droite de longueur R et dont la pointe est située en son centre. La frontière du cercle est soumise à un chargement tangentiel dans la direction x_3 , $T_3 = T \sin \theta$ Figure (III-1).

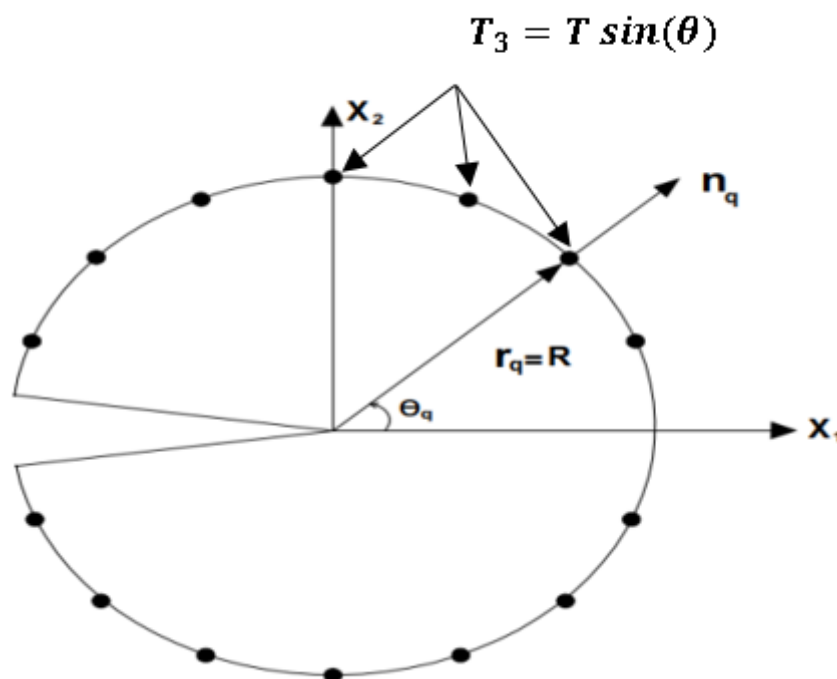


Figure III-1 Fissure centrale sous contrainte tangentielle imposée sur une section circulaire.

On reprend la formule (II-12) :

$$\mathbf{T}_3^q = \sum_{N=1}^p \left(-\mathbf{A}_N r_q^{N-\frac{3}{2}} (N-1/2) [\sin((N-3/2)\theta) \mathbf{n}_1^q + \cos((N-3/2)\theta) \mathbf{n}_2^q] + \mathbf{B}_N r_q^{N-1} N [\cos((N-1)\theta) \mathbf{n}_1^q - \sin((N-1)\theta) \mathbf{n}_2^q] \right), \quad q = 1 \text{ à } 2p \quad (\text{III.1})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_3^q = \sin\theta_q \\ r_q = 1 \\ \mathbf{n}_1^q = \cos\theta_q, \quad \mathbf{n}_2^q = \sin\theta_q \end{array} \right\} \quad (\text{III.2})$$

La résolution du système (III-1) en tenant compte de (III-2), permet d'obtenir les \mathbf{A}_N et \mathbf{B}_N .
Après résolution, \mathbf{K}_{III} est donné par l'équation (II-10).

III.2.1.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'**Annexe 1**.

Nous effectuons plusieurs calculs, en augmentant à chaque fois le nombre de terme N jusqu'à convergence.

Les résultats sont présentés dans le **Tableau III.1** et la **Figure III.2** ci-dessous.

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.3416	75	2.1282
2	2.6356	80	2.1281
4	2.2647	83	2.1281
10	2.1517	87	2.1280
15	2.1387	90	2.1280
20	2.1340	93	2.1280
30	2.1305	96	2.1280
40	2.1293	98	2.1280
55	2.1285	99	2.1280
65	2.1283	100	2.1280

Tableau III-1 : K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale sous contrainte imposée.

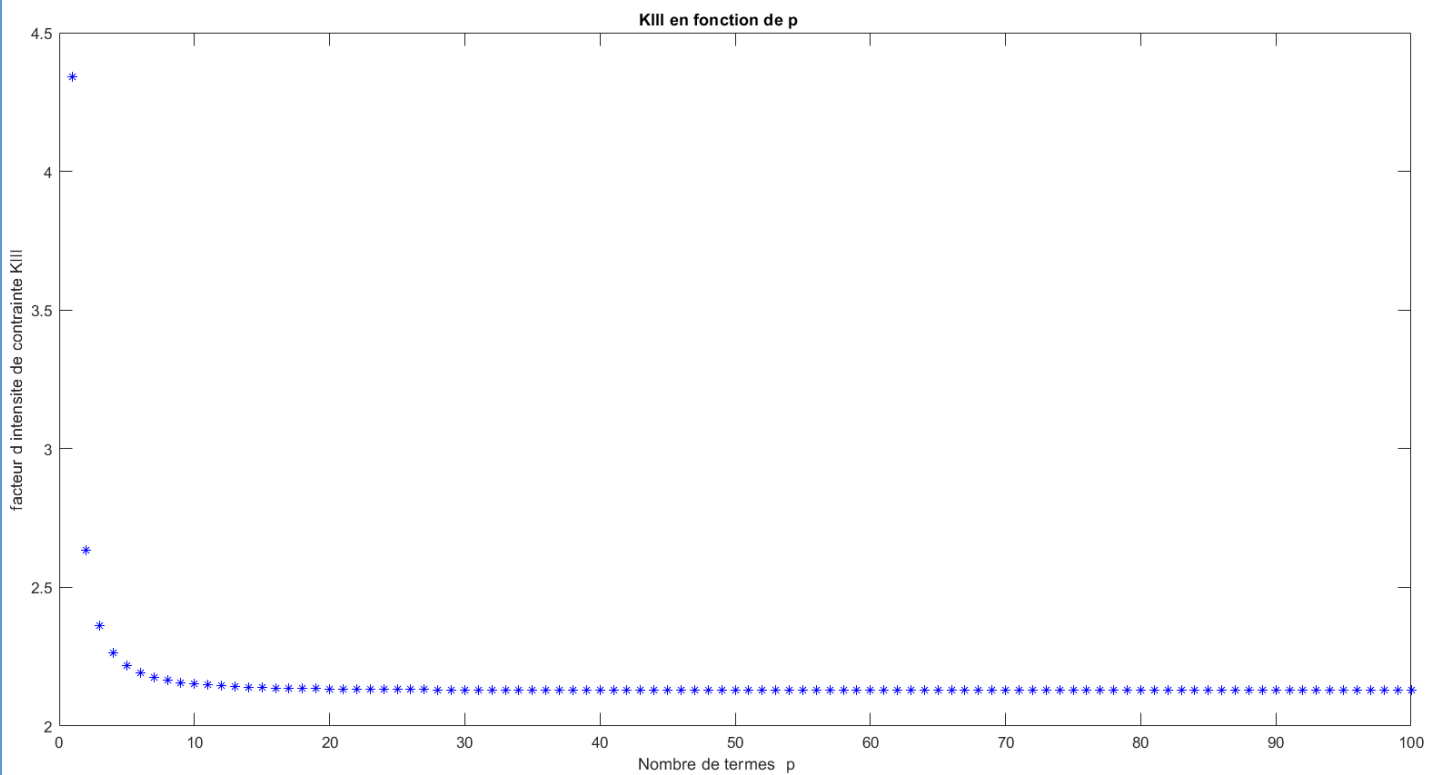


Figure III.2 : Evolution de K_{III} en fonction de p

III.2.1.2 Discussion des résultats :

On constate sur le tableau III-1 et la figure III-2, que le facteur d'intensité des contraintes K_{III} converge à partir de $p=87$ vers la valeur de **2.1280**. Nous signalons que ce calcul a déjà été effectué par Zehnder [7], Mezouani [8], et Serghini [10]. Les valeurs trouvées sont respectivement 2.13, 2.1278, et 2,1278 ce qui confirme la validité de notre modélisation.

III.2.2 Cas d'un déplacement imposé:

On considère une section circulaire de rayon R. La section contient une fissure centrale de longueur R. La frontière du cercle est soumise à un déplacement imposé $U_3 = 0$ Figure (III-3).

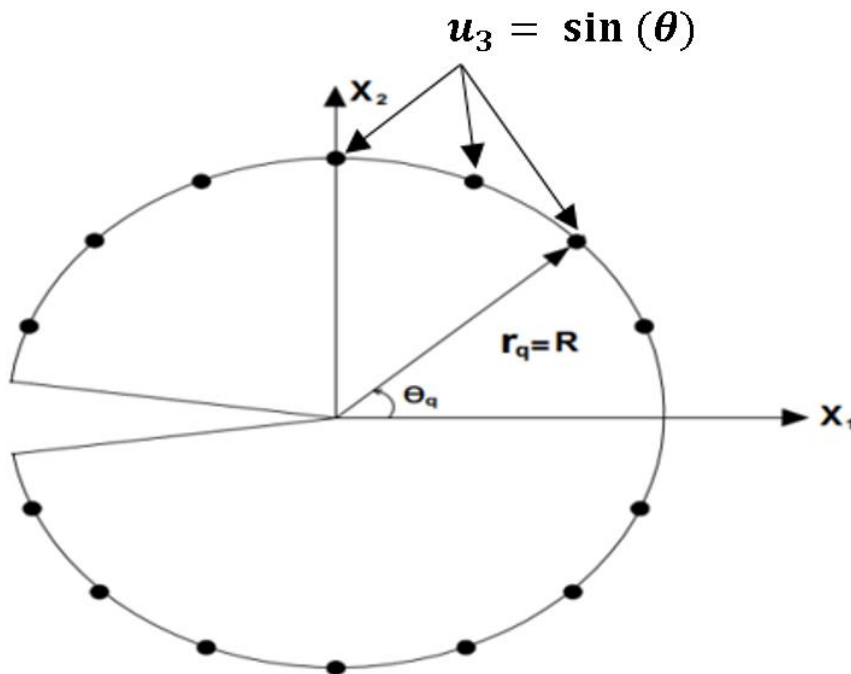


Figure III-3 : Fissure centrale sous déplacement imposé dans une section circulaire.

On reprend la formule (II-12b) :

$$\mu u_3^q = \sum_{N=1}^P [r_q^N B_N \cos N\theta - r_q^{N-1/2} A_N \sin((N-1/2)\theta)] \quad (\text{III.4})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_3^q = \sin\theta_q \\ r_q = 1 \\ \mu = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{III.5})$$

La résolution du système (III-4) en tenant compte de (III-5), permet d'obtenir les A_N et B_N . Le facteur d'intensité de contrainte est donné par (II-10).

III.2.2.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'**Annexe 1**.

Nous effectuons plusieurs calculs, en augmentant à chaque fois le nombre de terme N jusqu'à convergence.

Les résultats sont présentés dans le **Tableau III.2** et la **Figure III.4** ci-dessous.

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.1708	75	1.0641
2	1.3178	80	1.0640
4	1.1323	83	1.0640
10	1.0759	87	1.0640
15	1.0693	90	1.0640
20	1.0670	93	1.0640
30	1.0653	96	1.0640
40	1.0646	98	1.0640
55	1.0643	99	1.0640
65	1.0642	100	1.0640

Tableau III-2: K_{III} en fonction de p pour une fissure centrale sous déplacement imposé.

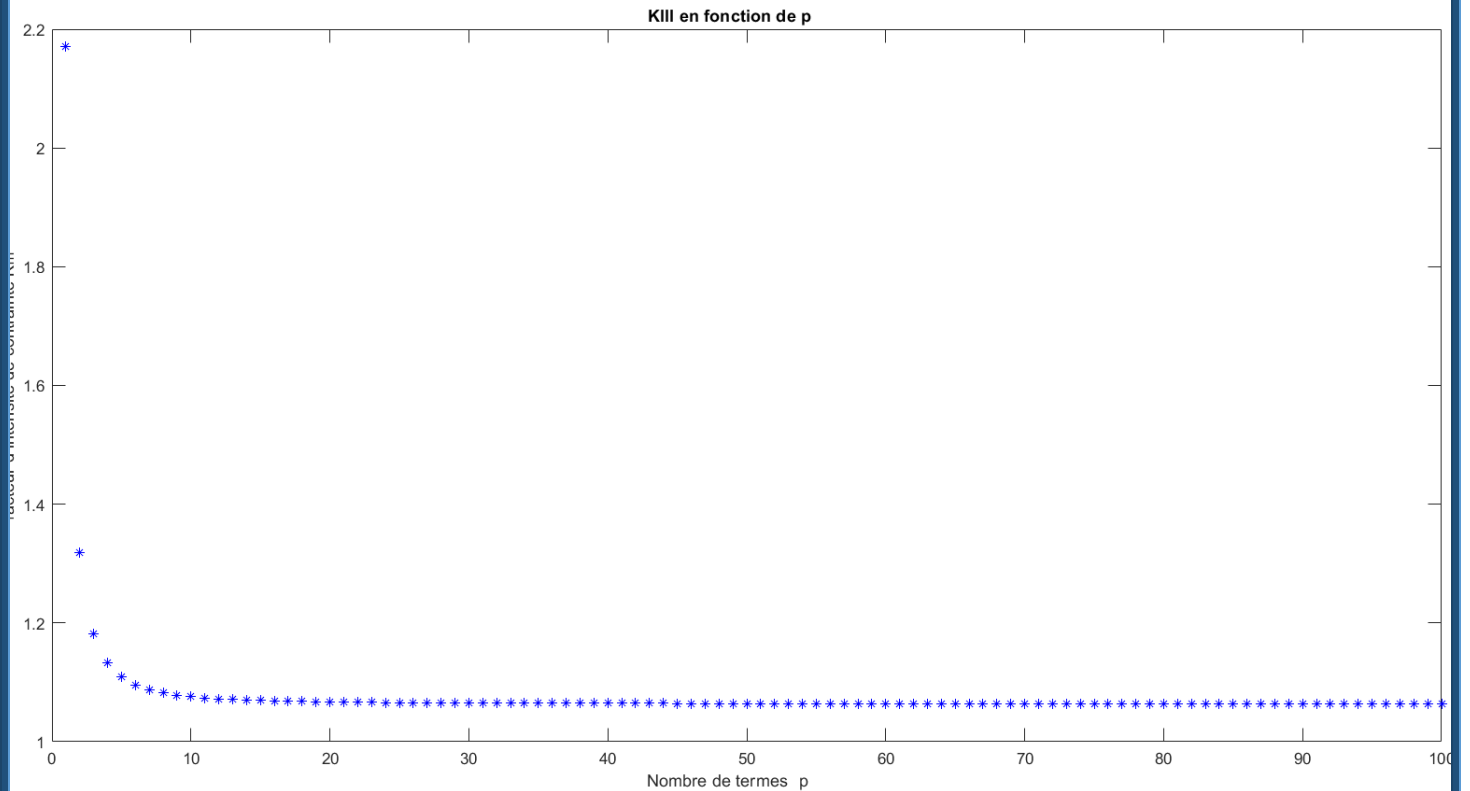


Figure III.4 : Evolution de K_{III} en fonction de p

III.2.2.2 Discussion des résultats :

On constate sur le tableau III-3 et la figure III-4, que le facteur d'intensité des contraintes K_{III} converge à partir de $p=80$ vers la valeur de 1.0640. À notre connaissance, ce calcul n'a pas été effectué précédemment.

III.3 -Fissure non Centrale Débochant dans une Section Circulaire :

Dans cette partie, la répartition des points de collocation est donnée par la formule suivante :

$$\theta_0^q = \frac{2\pi q}{m+1} - \pi, q = 1 \dots 2p (\theta \in] - \pi, \pi[) \quad (\text{III.10})$$

où θ_0 est défini sur la Figure III-5.

III.3.1-Cas d'une contrainte imposée :

On considère une section circulaire de rayon R. La section comporte une fissure non centrale de longueur f, sous chargement tangentiel $T_3 = T \sin \theta_0$ ($T=1$) à la frontière de la section Figure (III-5).

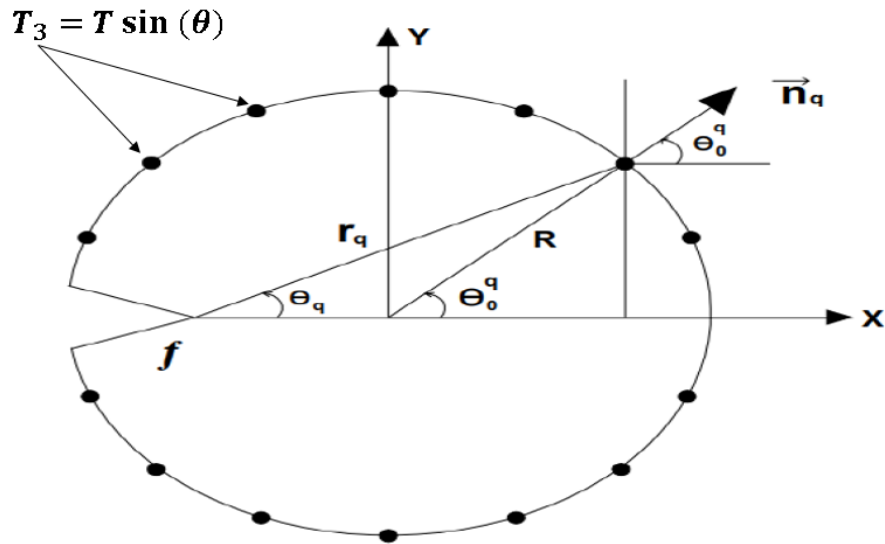


Figure III-5 : Points de collocation dans une fissure non centrale dans une section circulaire sous chargement tangentielle.

La coordonnée radiale du point q est donnée par (SERGHINI [8]):

$$r_q = \sqrt{(R - f + R \cos(\theta_0^q))^2 + (R \sin(\theta_0^q))^2} \quad (\text{III.7})$$

L'angle θ_q est calculé par l'expression suivante (SERGHINI [8]):

$$\theta_q = \text{atan2}(R \sin(\theta_0^q), R - f + R \cos(\theta_0^q)) \quad (\text{III.8})$$

Les composantes radiales et tangentielles de la normale n_q sont données par :

$$n_1^q = \cos(\theta_0^q), \quad n_2^q = \sin(\theta_0^q) \quad (\text{III.9})$$

La résolution du système (III-1) en tenant compte de (III-7), (III-8) et (III-9) permet d'obtenir les A_N et B_N . Le facteur d'intensité de contrainte est donné par (II-10).

III.3.1.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'**Annexe 2**.

Nous effectuons des calculs pour $f \in [0.1, 1.8]$. Pour chaque valeur de f , nous augmentons le nombre de points de collocation jusqu'à convergence du K_{III} .

Les résultats détaillés, pour chaque valeur de f sont présentés dans l'**Annexe 3**. Nous présentons dans le Tableau III-3 sur la Figure III-6, ci-dessous, un récapitulatif des résultats obtenus.

Remarque :

Pour $f > 1.8$, les calculs sont instables et les résultats non précis il n'y a pas de convergence (voir annexe 3).

f	K_{III}	f	K_{III}
0.1	0.5672	1	2.1280
0.2	0.8137	1.1	2.3048
0.3	1.0096	1.2	2.4987
0.4	1.1831	1.3	2.7176
0.5	1.3445	1.4	2.9731
0.6	1.4993	1.5	3.2850
0.7	1.6517	1.6	3.6889
0.8	1.8052	1.7	4.260
0.9	1.9628	1.8	5.190

Tableau-III-3 : Valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f dans le cas d'un chargement imposé.

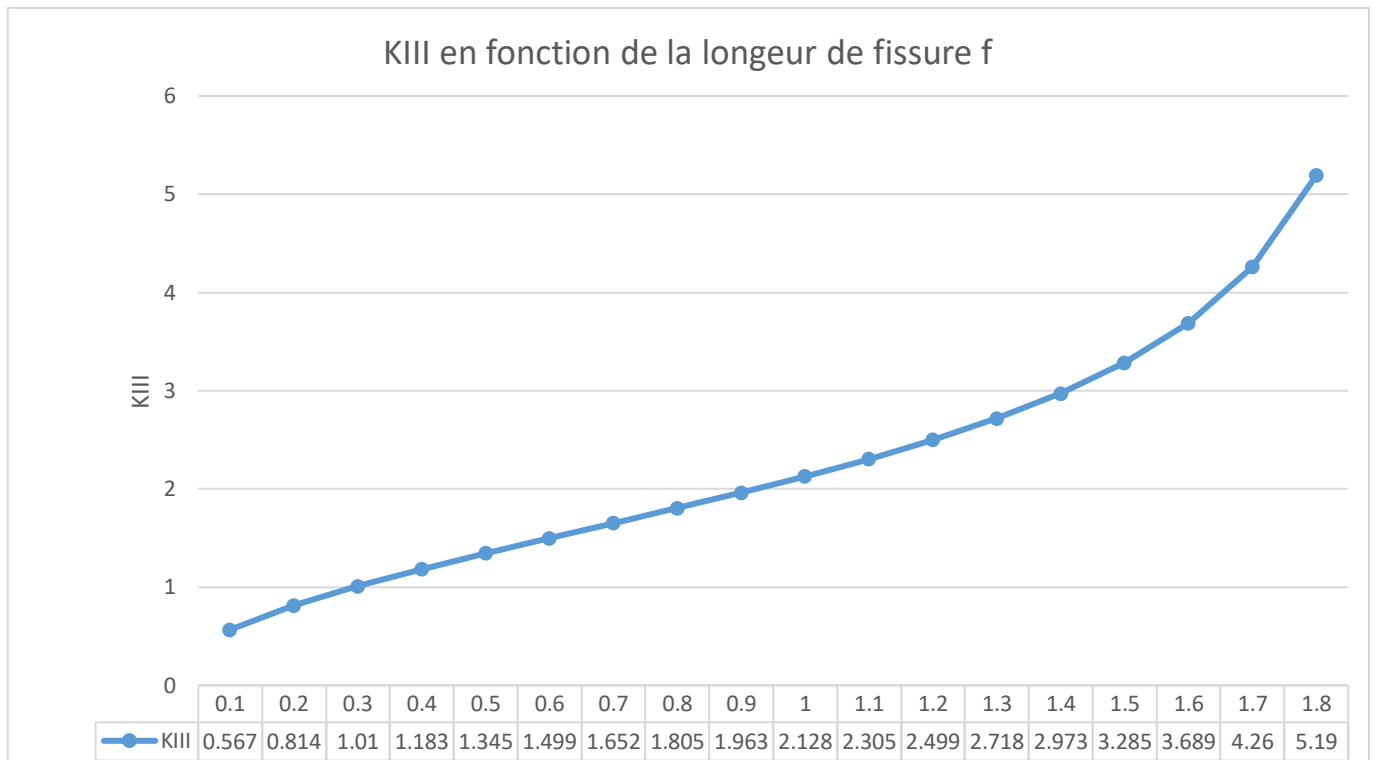


Figure III-6 : Evolution de K_{III} en fonction de f

III.3.1.2 Discussion des résultats :

D'après la figure III-6 et le Tableau III-3, nous remarquons que K_{III} est une fonction croissante de la longueur de la fissure f sur tout le domaine de f. On remarque que le FIC croît avec la longueur, ce qui veut dire que la propagation est instable [1].

Nous observons initialement une légère convexité pour les longueurs de fissure f comprises entre [0.1 – 0.6] [ensuite une tendance presque linéaire de la courbe pour les valeurs de longueur de fissure f comprises entre [0.6 et 1.1]. Ensuite, elle adopte une forme concave pour les longueurs plus importantes (f ∈ [1.2 – 1.8]). Cette évolution révèle que la fissure devient de plus en plus dangereuse à mesure qu'elle s'allonge.

III.3.2-Cas d'un déplacement imposé :

On considère une section circulaire de rayon R. La section comporte une fissure non centrale de longueur f. La frontière du cercle est soumise à un déplacement imposé $U_3 = \sin \theta$ Figure (III-7).

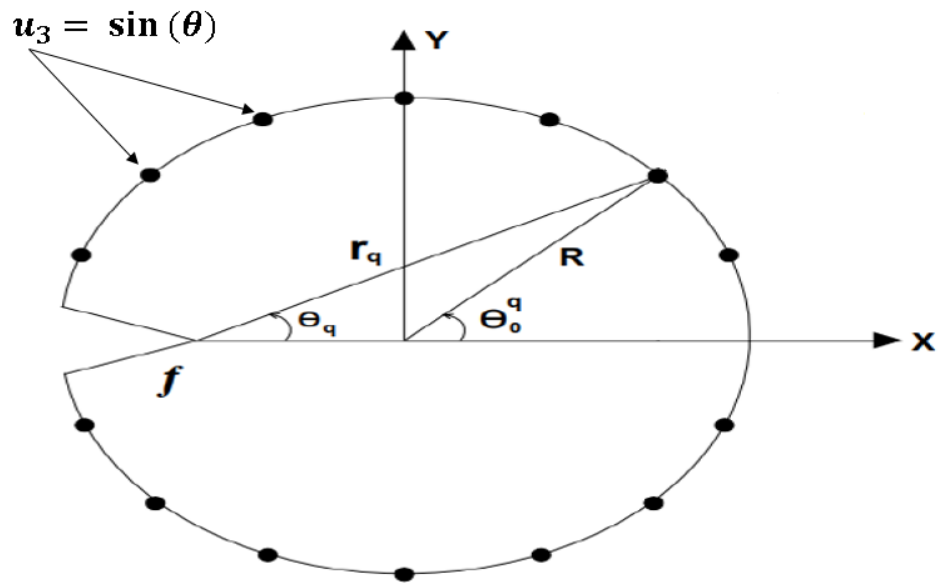


Figure III-7 : Fissure non centrale dans une section circulaire avec un déplacement imposé.

On reprend les formules suivantes (III.7), (III.8), (III.9) et (III.10)

La résolution du système (III-4) en tenant compte de (III-7), (III-8) et (III-9) permet d'obtenir les A_N et B_N . Le facteur d'intensité de contrainte est donné par :

$$K_{III} = -A_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Nous considérons des points de collocation \mathbf{p} répartis uniformément sur la frontière du cercle (Figure III-8). L'angle θ_q pour chaque point est calculé par la formule (III-10)

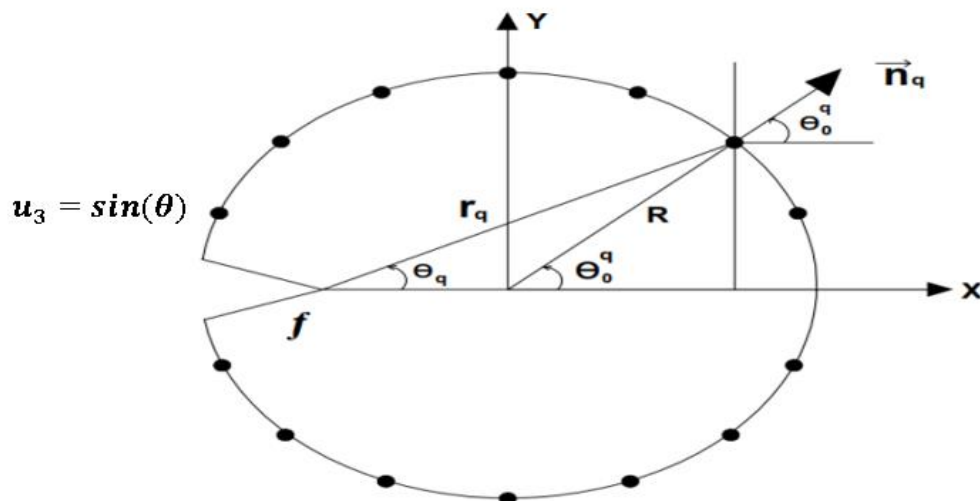


Figure III-8 : Points de collocation dans une fissure non centrale dans une section circulaire avec un déplacement imposé.

III.3.2.1 Résultats

Le système d'équations est résolu numériquement à l'aide du logiciel Matlab. Le programme correspondant est présenté dans l'**Annexe 2**.

Nous effectuons des calculs pour $f \in [0.1, 1.9]$. Pour chaque valeur de f , nous augmentons le nombre de points de collocation jusqu'à convergence du K_{III}

Les résultats détaillés, pour chaque valeur de f sont présentés dans l'**Annexe 4**. Nous présentons dans le Tableau III-4 et la figure III-9 ci-dessous, les valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f .

f	K_{III}	f	K_{III}
0.1	0.37	1.1	1.1039
0.2	0.51	1.2	1.1385
0.3	0.61	1.3	1.1671
0.4	0.703	1.4	1.1888
0.5	0.782	1.5	1.2019
0.6	0.851	1.6	1.2034
0.7	0.9126	1.7	1.1872
0.8	0.9685	1.8	1.1402
0.9	1.0189	1.9	1.0210
1	1.0640		

Tableau-III-4 : Valeurs de K_{III} pour différentes valeurs de f dans le cas d'un déplacement imposé.

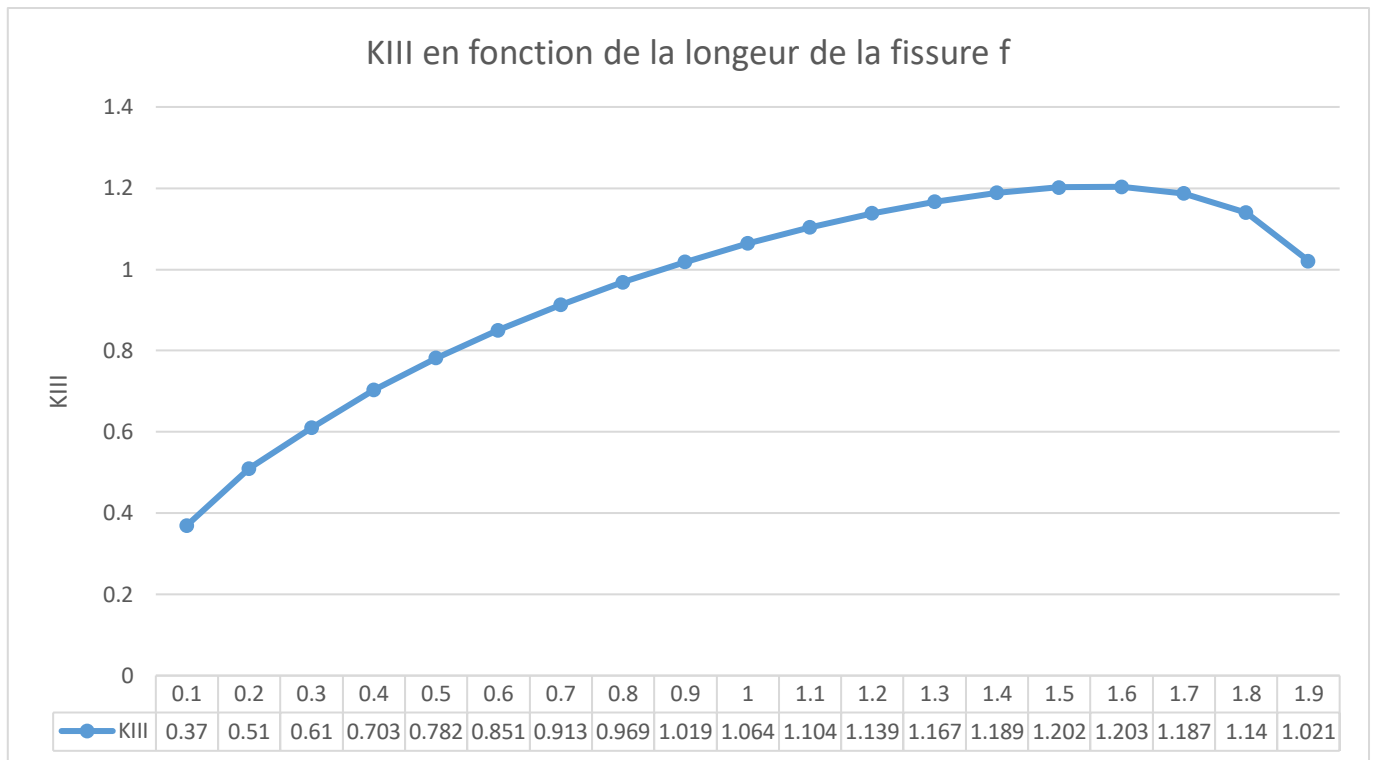


Figure III-9 : Evolution de K_{III} en fonction de f

III.3.2.2 Discussion des résultats :

D'après la figure III-10 et le tableau III-4, nous observons une augmentation de K_{III} en fonction de la longueur de la fissure f sur l'intervalle [0.1 - 1.6] (propagation instable). Par contre, on constate que pour les valeurs de f comprises entre [1.7 - 1.9], K_{III} diminue (propagation stable).

En examinant la courbe, nous remarquons qu'elle présente initialement une légère convexité pour les longueurs de fissure f comprises entre [0.1 - 1]. Ensuite, elle devient pratiquement linéaire pour les longueurs moyennes ($f \in [1 - 1.2]$). Finalement, elle adopte une forme convexe pour les longues longueurs ($f \in [1.2 - 1.9]$).

Contrairement au cas de la contrainte imposée, où la propagation est toujours instable, en déplacement imposé, la propagation est instable au début. Cette instabilité diminue, puisque le taux de croissance du FIC baisse, jusqu'à se stabiliser pour les grandes longueurs de fissure.

Conclusion

Ce travail est une application de la méthode de collocation de frontière en élasticité anti-plane au cas d'une section circulaire fissurée sous contrainte imposée et sous déplacement imposé. Deux cas ont été considérés : fissure centrale et non centrale. Les principaux résultats de ce travail sont les suivants :

- Dans le cas de la fissure centrale le facteur d'intensité de contrainte K_{III} a été calculés pour un chargement tangentiel et pour un déplacement imposé. Les calculs se révèlent stables et convergent rapidement.
- Dans le cas de la fissure non centrale, le facteur d'intensité de contrainte K_{III} a été calculés pour un chargement tangentiel et pour un déplacement imposé.
- Dans le cas de la fissure non centrale avec contrainte imposé, K_{III} a été calculés pour $f \in [0.1, 1.8]$. Les calculs sont instables pour de $f > 1.8$. Le K_{III} croit avec la fissure. Les résultats obtenus sont identique à ceux trouvés par Serghini et Tefiani [10] pour $f \in [0.1, 1.6]$.
- Dans le cas de la fissure non centrale avec déplacement imposé, K_{III} a été calculé pour $f \in [0.1, 1.9]$. K_{III} est croissant pour $f \in [0.1, 1.6]$ et décroissant pour $f > 1.6$.
- La propagation est toujours instable en contrainte imposée. Par contre en déplacement imposé, elle est instable pour les petites longueurs de fissure et stables pour les grande longueurs.
- Nous avons constaté une certaine instabilité des calculs pour certaines valeurs de longueur de fissure.

Comme perspective, nous envisageons de :

- Considérer d'autres géométries en élasticité anti-plane.
- Reprendre ce travail en élasticité plane.
- Trouver une solution pour le problème de l'instabilité, en résolvant le système avec les moindres carrés.

Annexe 1

Les programmes de calcul du
FIC pour fissure centrale

Contrainte imposé

```
clc
Clear
Pmax=input('nombre de termes maximal= ');
r=1
For p=1 : Pmax ; %nombre de termes
    m=2*p; %nombre de points de collocation
    For q=1 :m

        teta(q)=q*2*pi/(m+1)-pi;
        T(q)=sin(teta(q));
        n1=cos((teta(q)));
        n2=sin((teta(q)));

        For N=1:p

            u(q,N)=r^((-3/2)+N)*(cos(((3/2)+N)*teta(q)))*n2+sin(((3/2)+N)*teta(q))*n1;
            e(q,N)=r^((N-1))*-sin((N-1)*teta(q))*n2+(cos((N-1)*teta(q))*n1);
            H=[u,e];

        End
    End

    %résolution système linéaire par la méthode directe
    C=inv(H)*T';

    %calcul du FIC KIII
    KIII(p)=C(1)*sqrt(2*pi)
    End
    KIII
    p=1:pmax;

    Figure('Name','KIII','NumberTitle','off')
    Plot(p,KIII(p),'b*')
    Title('KIII en fonction de Pmax')
    xlabel('Nombre de termes "Pmax"')
    ylabel('facteur d'intensité de contrainte KIII')
```

Déplacement imposé

%programme pour le calcul du facteur d'intensité de contrainte pour le cercle sans la méthode

clc

Clear

%construire un système d'équation linéaire

Pmax=input('Nombre de terme = ');

r=1;mu=1;

For p=1: Pmax %nombre de termes

m=2*p; %nombre de points de collocation

For N=1 : p

For q=1 :m

theta=q*2*pi/(m+1)-pi;

T(q)=sin(theta);

A(q,N)=-r^(-1/2+N)*sin((-1/2+N)*theta)/mu;

B(q,N)=r^N*cos(N*theta)/mu;

End

End

H=[A,B];

%résolution système linéaire par la méthode directe

C=inv(H)*T';

%calcul du FIC KIII

KIII(p)=-C(1)*sqrt(pi/2)

End

p=1:pmax;

figure('Name','KIII','NumberTitle','off')

plot(p,KIII(p),'b*')

title('KIII en fonction de Pmax')

xlabel('Nombre de termes "Pmax"')

ylabel('facteur d'intensité de contrainte KIII')

Annexe 2

Les programmes de calcul du
FIC pour fissure non centrale

Cas chargement imposé

```
clc
clear
%converge pour 0.1<=f<=1.8
Pmax=input('nombre de termes maximal = ');
R=1 ;
f=input ('longueur de la fissure f = ');
For p=1 : Pmax ;
    m=2*p;
    For q=1:m

        theta0=q*2*pi/(m+1)-pi;
        x=R*cos(theta0)+R-f; y=R*sin(theta0);
        r=sqrt(power(x,2)+power(y,2));
        theta=atan2(y,x);
        T(q)=sin(theta0);
        nx=cos(theta0);
        ny=sin(theta0);

    For N=1:p
        u(q,N)=r^(N-3/2)*(cos((N-3/2)*theta)*ny+sin((N-3/2)*theta)*nx);
        e(q,N)=r^(N-1)*(-sin((N-1)*theta)*ny+cos((N-1)*theta)*nx);
    H=[u,e];

    End
End
%résolution système linéaire par la méthode directe
C=inv(H)*T';
%calcul le FIC KIII
KIII(p)=C(1)*sqrt(2*pi);
End
KIII
    p=1:pmax;

Figure('Name','KIII','NumberTitle','off')
Plot(p,KIII(p),'b*')
Title('KIII en fonction de Pmax')
xlabel('Nombre de termes "Pmax"')
ylabel('facteur d'intensité de contrainte KIII')
```


Déplacement imposé

```
clc
Clear
%converge pour 0.1 <=f< =1.9
Pmax=input('nombre de termes maximal = ');
R=1; mu=1;
f=input('longueur de la fissure f = ');
For p=1 : Pmax ;
    m=2*p;
    For q=1:m

        theta0=q*2*pi/(m+1)-pi;
        x=R*cos(theta0)+R-f; y=R*sin(theta0);
        r=sqrt(power(x,2)+power(y,2));
        theta=atan2(y,x);
        T(q)=sin(theta0);
        nx=cos(theta0);
        ny=sin(theta0);

    For N=1:p
        u(q,N)=-r^(-1/2+N)*sin((-1/2+N)*theta)/mu;
        e(q,N)=r^N*cos(N*theta)/mu;
        H=[u,e];
    End
End
%résolution d'un système linéaire par la méthode directe%
C=inv(H)*T';
%calcul le FIC KIII
KIII(p)=-C(1)*sqrt(pi/2);
End
KIII
p=1:pmax;

Figure('Name','KIII','NumberTitle','off')
Plot(p,KIII(p),'b*')
title('KIII en fonction de Pmax')
xlabel('Nombre de termes "Pmax"')
ylabel('facteur d'intensité de contrainte KIII')
```

Annexe 3

Résultats pour le cas d'une
fissure non centrale sous
contrainte imposée dans une
section circulaire

Contrainte imposée

Résultats pour $f=0.1$

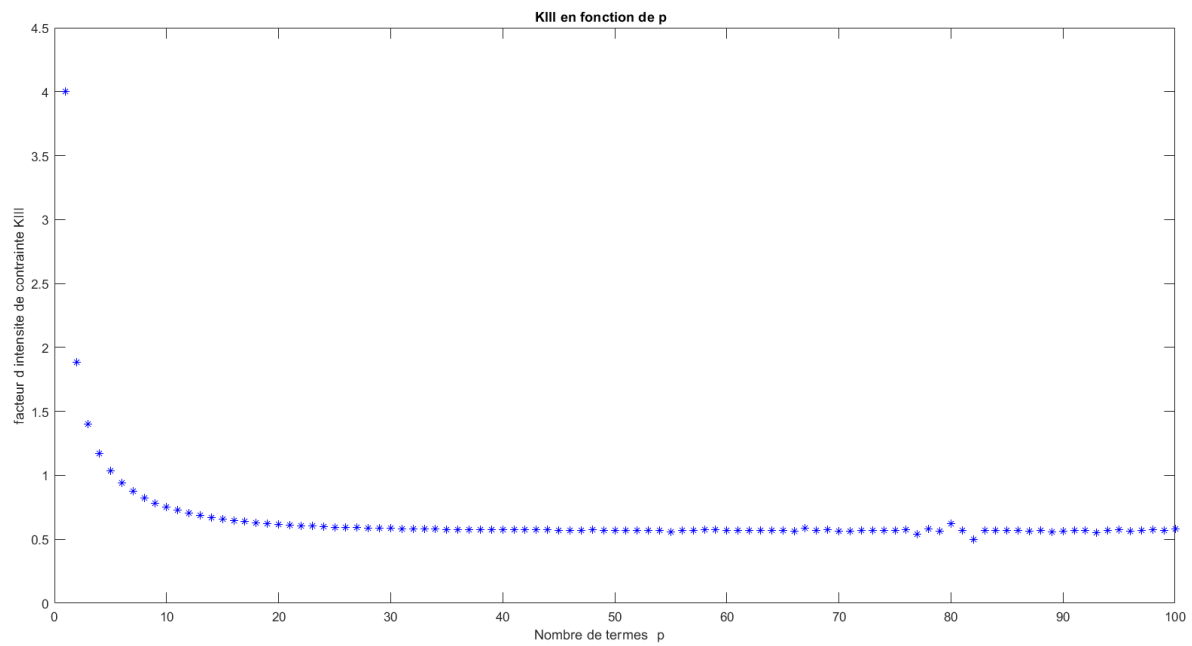


Figure A3-1.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.1$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.0001	35	0.6803
2	1.8830	51	0.5708
3	1.3986	61	0.5703
7	1.1695	63	0.5702
10	1.0325	76	0.5677
13	0.9403	81	0.5672
15	0.8737	85	0.5672
19	0.7807	86	0.5672
22	0.7506	93	0.5672
26	0.7405	95	0.5672

TableauA3-1.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.1$)

Résultats pour $f=0.2$

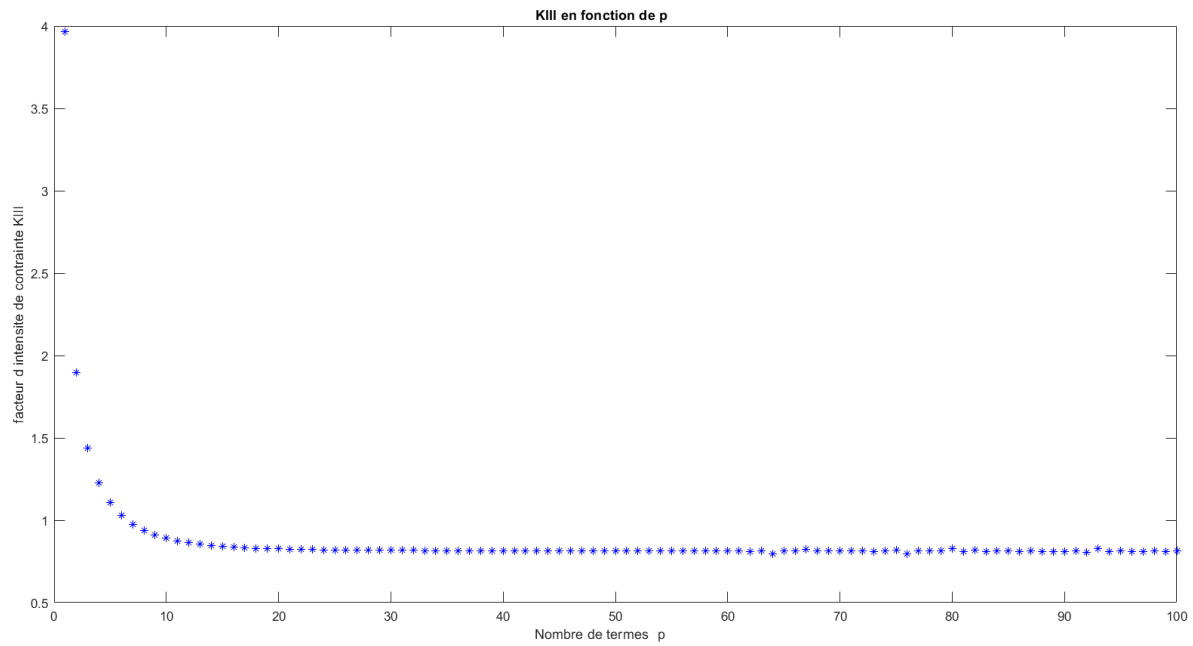


Figure A3-2.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.2$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9660	35	0.8183
2	1.8966	42	0.8148
3	1.4367	44	0.8146
7	0.9768	47	0.8143
10	0.8913	50	0.8139
13	0.8713	53	0.8138
15	0.8513	54	0.8137
19	0.8413	66	0.8137
22	0.8313	89	0.8137
26	0.8201	99	0.8137

TableauA3-2.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.2$)

Résultats pour $f=0.3$

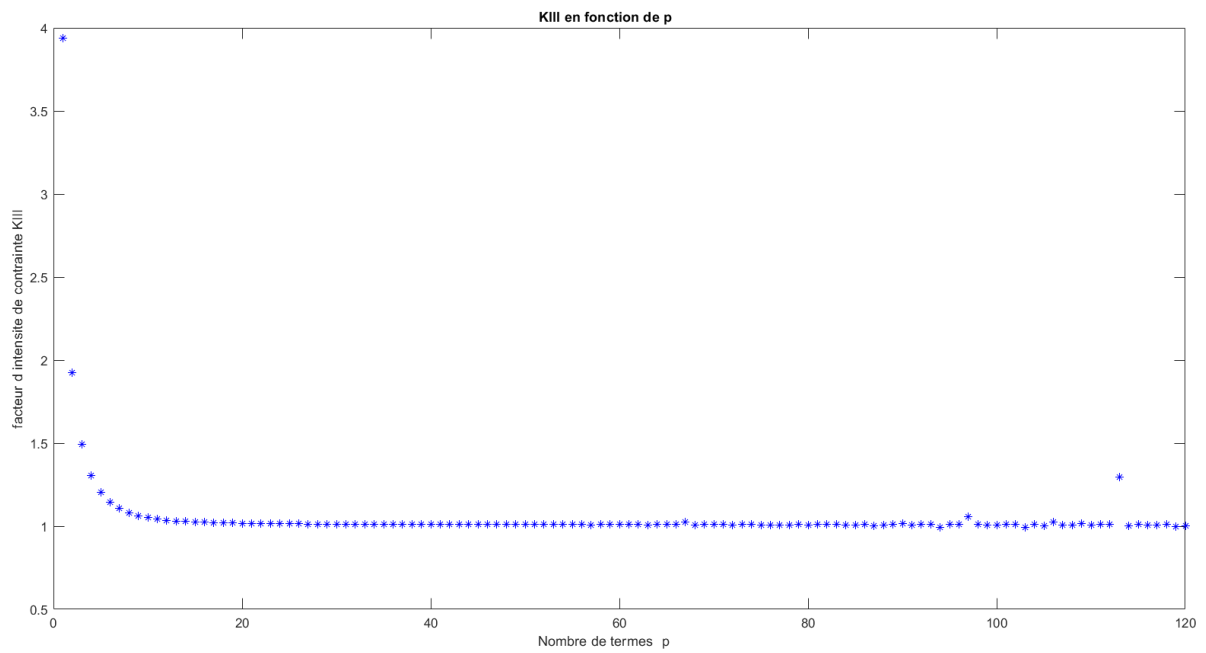


Figure A3-3.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.3$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9396	43	1.0106
2	1.9228	50	1.0099
3	1.4923	53	1.0098
7	1.1065	54	1.0097
10	1.0516	56	1.0096
13	1.0416	62	1.0096
15	1.0368	64	1.0096
19	1.0306	70	1.0096
22	1.0260	77	1.0096
26	1.0212	80	1.0096

TableauA3-3.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.3$)

Résultats pour $f=0.4$

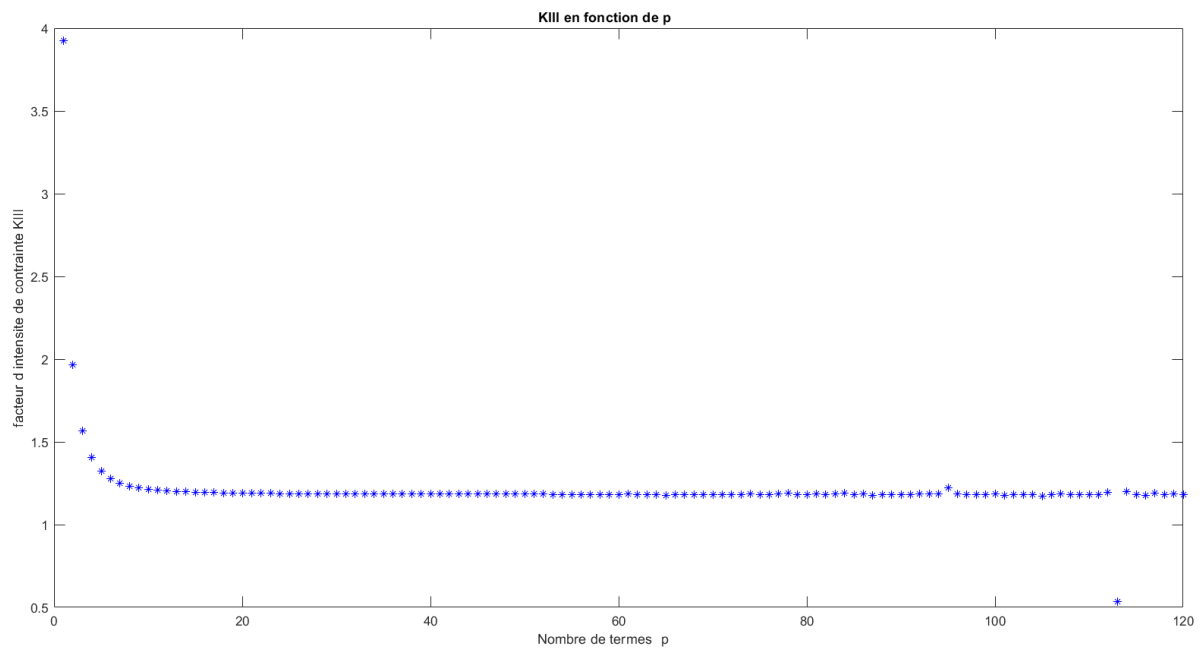


Figure A3-4.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.4$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9235	39	1.1844
2	1.9640	40	1.1843
3	1.5670	42	1.1841
7	1.2510	50	1.1836
10	1.2140	54	1.1834
13	1.1986	63	1.1832
15	1.1961	64	1.1831
19	1.1938	67	1.1831
22	1.1907	95	1.1831
26	1.1890	96	1.1831

TableauA3-4.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.4$)

Résultats pour $f=0.5$

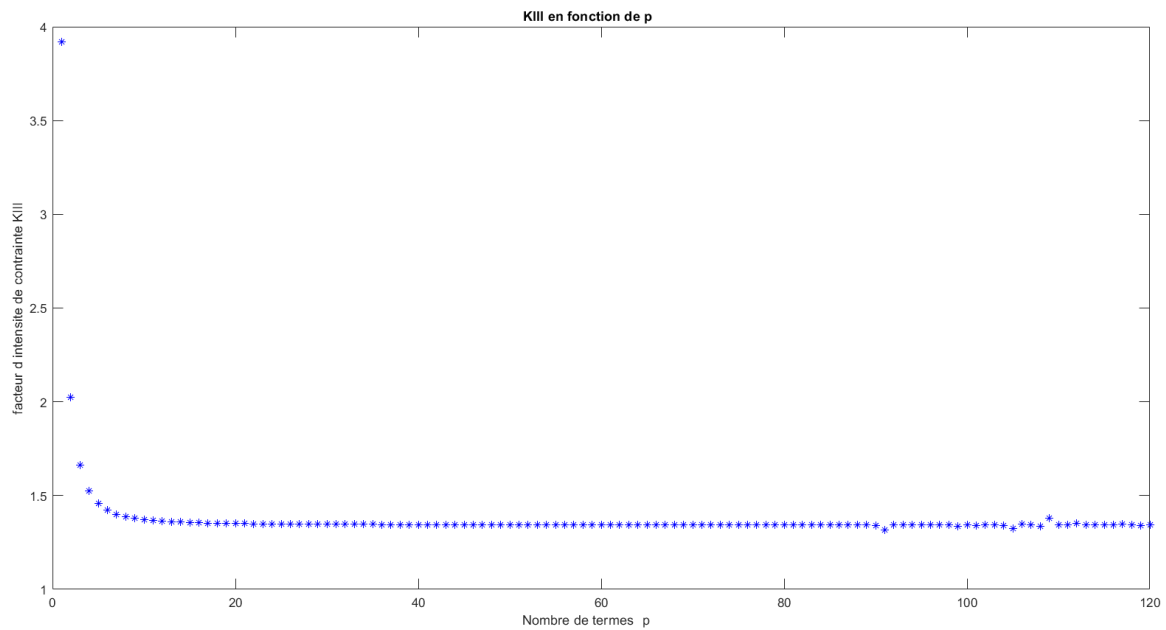


Figure A3-5.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.5$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9208	44	1.3452
2	2.0230	48	1.3450
3	1.6613	50	1.3449
7	1.5233	52	1.3448
10	1.5233	55	1.3447
13	1.4980	58	1.3446
15	1.4653	59	1.3445
19	1.4357	66	1.3445
22	1.4001	73	1.3445
26	1.3830	96	1.3445

TableauA3-5.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.5$)

Résultats pour $f=0.6$

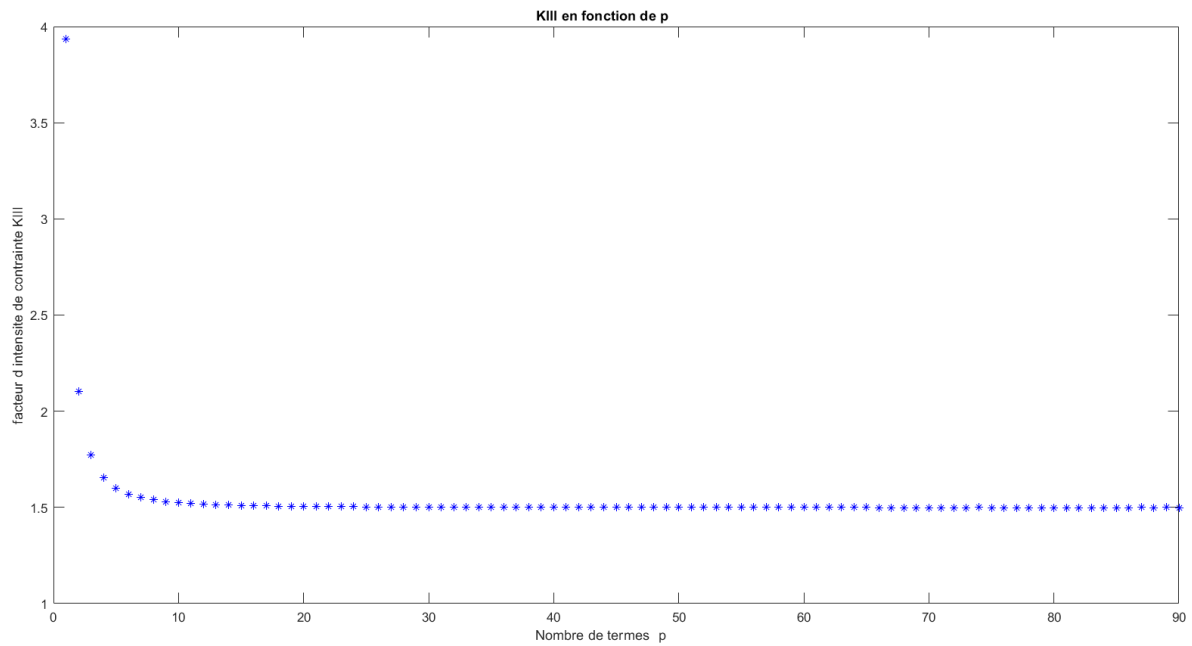


Figure A3-6.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.6$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9361	49	1.4999
2	2.1020	51	1.4998
3	1.7740	54	1.4997
7	1.5508	56	1.4996
10	1.5249	60	1.4995
13	1.5200	65	1.4994
15	1.5187	66	1.4993
19	1.5179	67	1.4993
22	1.5149	68	1.4993
26	1.5131	73	1.4993

TableauA3-6.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.6$)

Résultats pour $f=0.7$

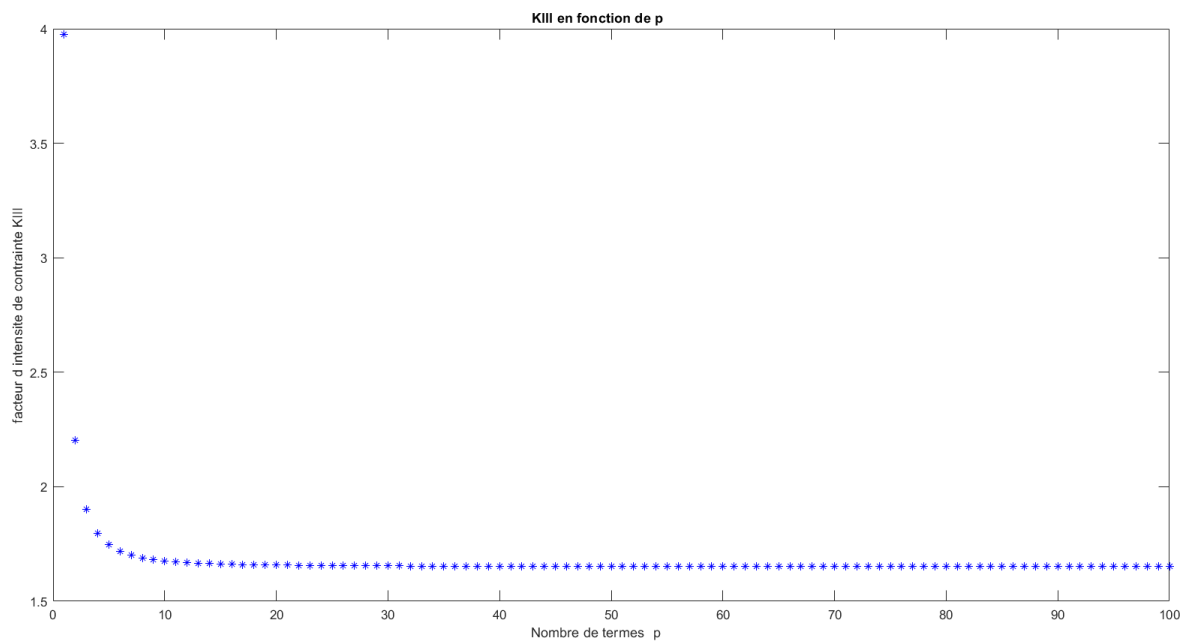


Figure A3-7.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.7$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.9753	53	1.6523
2	2.2030	55	1.6522
3	1.9028	61	1.6521
7	1.7011	65	1.6520
10	1.6765	71	1.6519
13	1.6740	79	1.6518
15	1.6731	80	1.6517
19	1.6717	91	1.6517
22	1.6705	92	1.6517
26	1.6685	94	1.6517

TableauA3-7.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.7$)

Résultats pour $f=0.8$

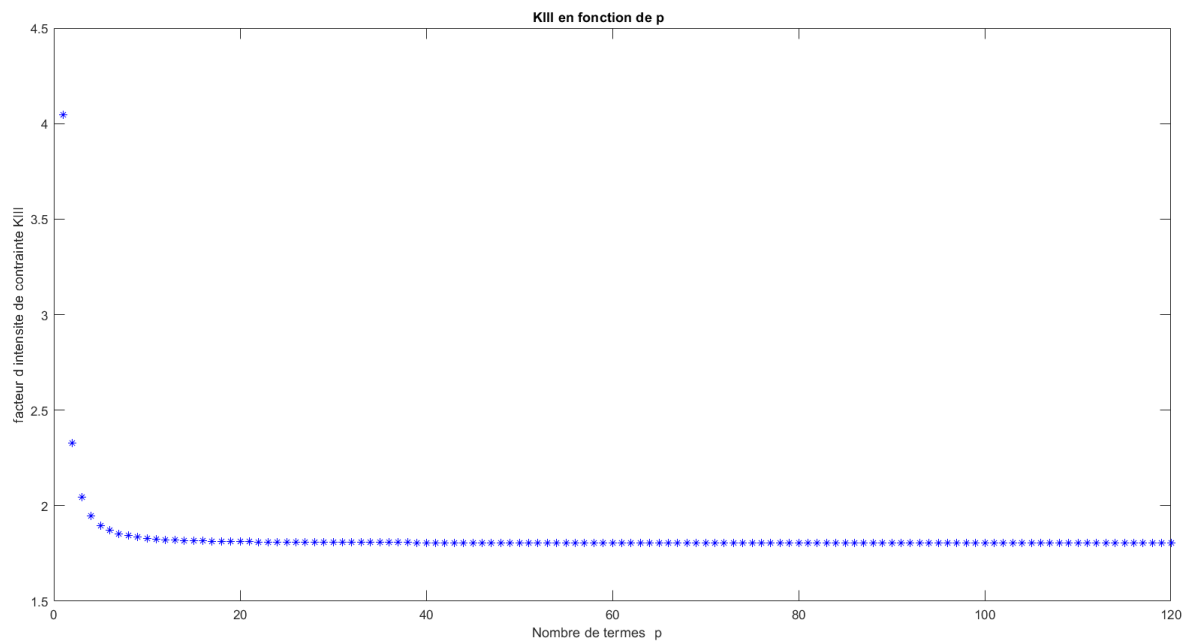


Figure A3-8.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.8$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.0470	54	1.8058
2	2.3264	57	1.8057
3	2.0449	62	1.8056
7	1.8534	67	1.8055
10	1.8294	74	1.8054
13	1.8271	84	1.8053
15	1.8256	85	1.8052
19	1.8230	97	1.8052
22	1.8208	98	1.8052
26	1.8192	99	1.8052

TableauA3-8.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.8$)

Résultats pour $f=0.9$

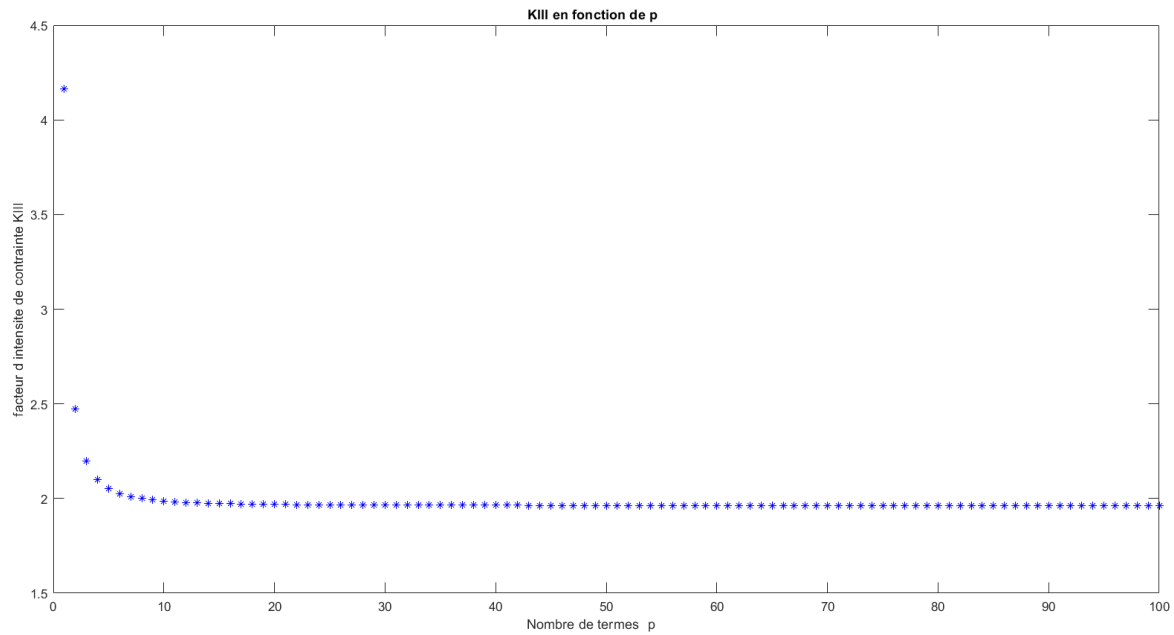


Figure A3-9.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.9$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.1633	56	1.9634
2	2.4715	60	1.9633
3	2.1983	64	1.9632
7	2.0103	70	1.9631
10	1.9867	87	1.9630
13	1.9859	90	1.9629
15	1.9847	91	1.9628
19	1.9823	98	1.9628
22	1.9802	99	1.9628
26	1.9780	100	1.9628

TableauA3-9.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.9$)

Résultats pour $f=1.0$

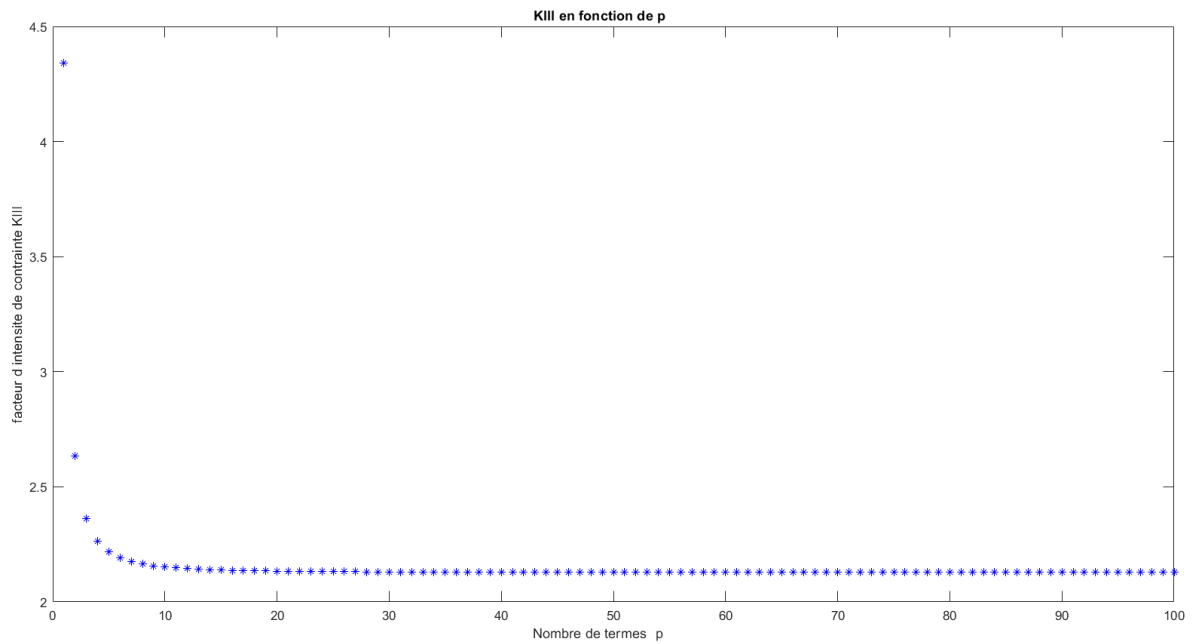


Figure A3-10.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.0$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.3416	75	2.1282
2	2.6356	80	2.1281
4	2.2647	83	2.1281
10	2.1517	87	2.1280
15	2.1387	90	2.1280
20	2.1340	93	2.1280
30	2.1305	96	2.1280
40	2.1293	98	2.1280
55	2.1285	99	2.1280
65	2.1283	100	2.1280

TableauA3-10.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.0$)

Résultats pour f=1.1

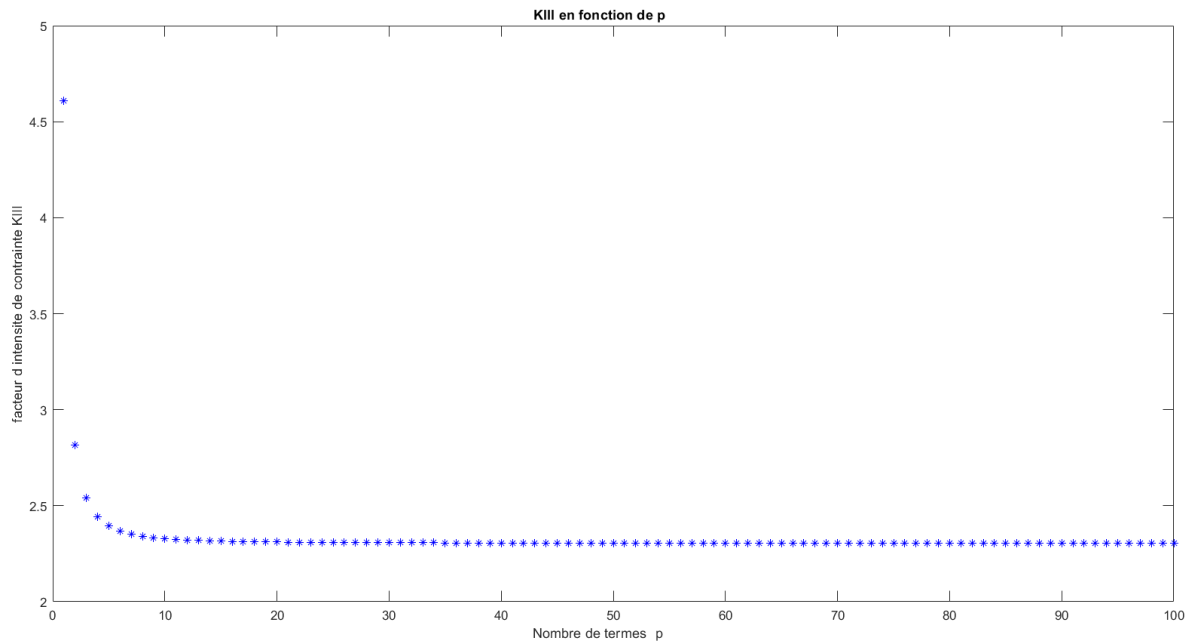


Figure A3-11.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.1$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	4.6078	55	2.3054
2	2.8149	59	2.3053
3	2.5414	63	2.3052
7	2.3524	69	2.3051
10	2.3287	76	2.3050
13	2.3270	86	2.3049
15	2.3259	87	2.3048
19	2.3244	98	2.3048
22	2.3229	99	2.3048
26	2.3215	100	2.3048

TableauA3-11.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.1$)

Résultats pour f=1.2

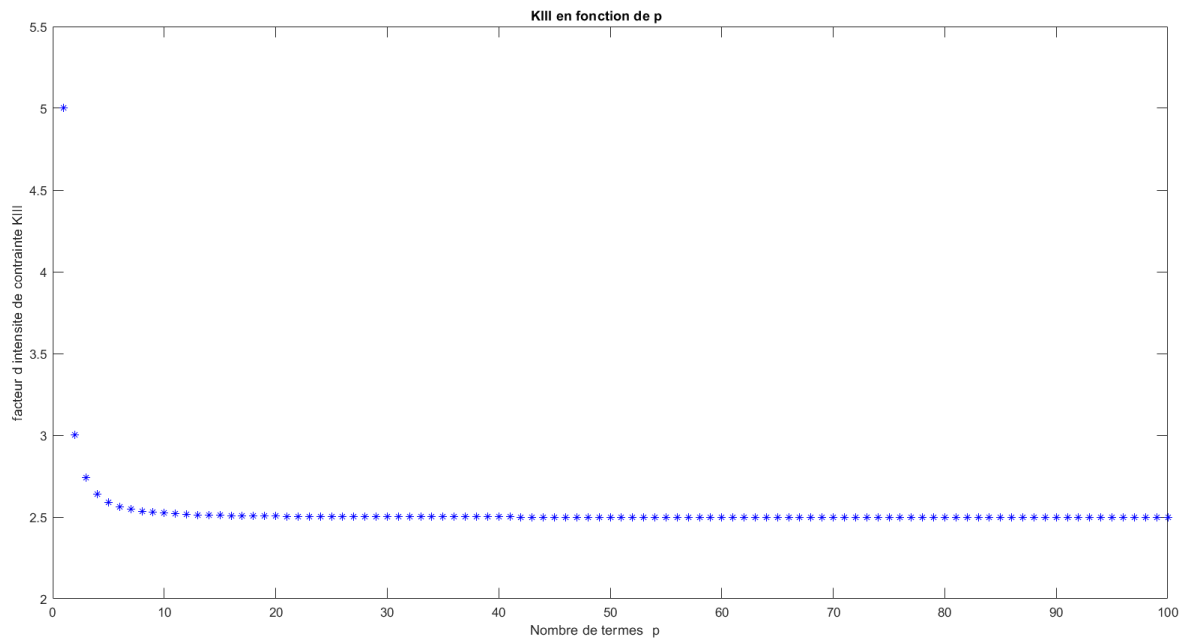


Figure A3-12.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.2$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	5.0012	56	2.4993
2	3.0045	61	2.4992
3	2.7416	66	2.4991
7	2.5470	72	2.4990
10	2.5230	81	2.4989
13	2.5223	93	2.4988
15	2.5218	94	2.4987
19	2.5137	98	2.4987
22	2.5106	99	2.4987
26	2.5030	100	2.4987

TableauA3-12.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.2$)

Résultats pour $f=1.3$

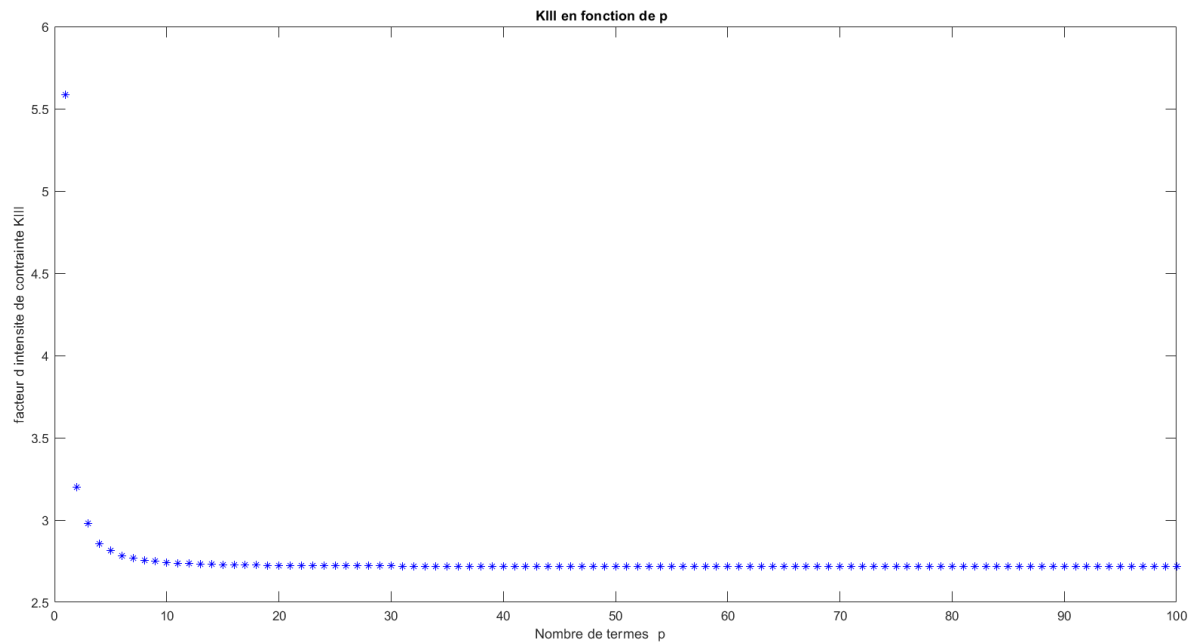


Figure A3-13.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.3$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	5.5836	55	2.7182
2	3.1998	57	2.7181
3	2.9786	62	2.7180
7	2.7673	66	2.7179
10	2.7425	74	2.7178
13	2.7419	83	2.7177
15	2.7417	84	2.7176
19	2.7404	98	2.7176
22	2.7352	99	2.7176
26	2.7328	100	2.7176

TableauA3-13.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.3$)

Résultats pour $f=1.4$

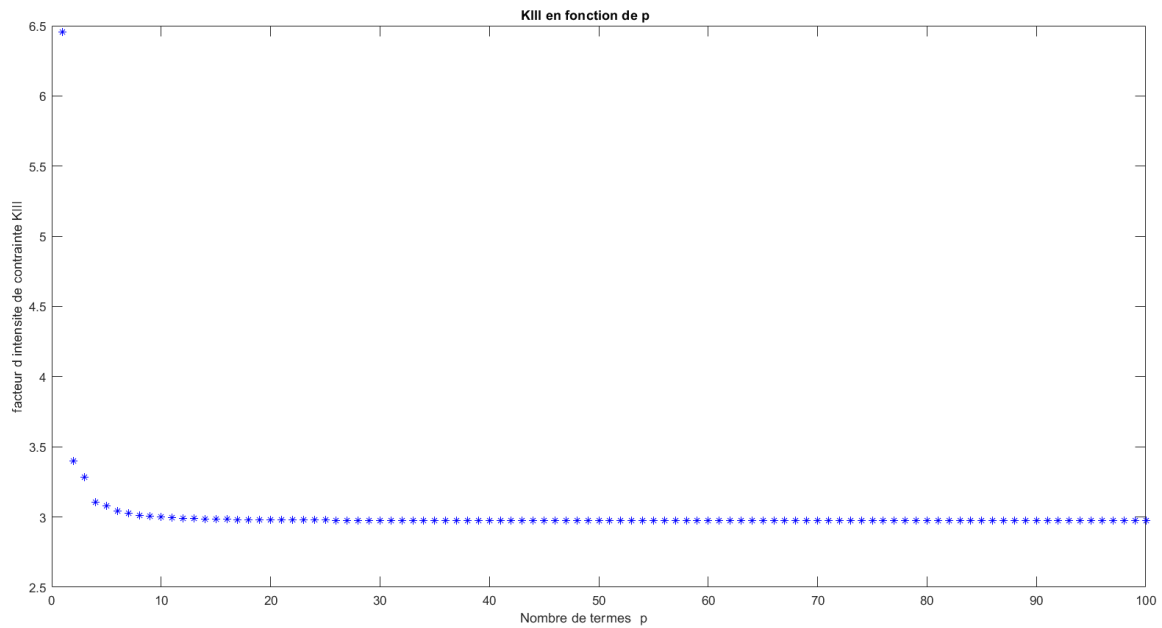


Figure A3-14.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.4$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	6.4574	56	2.9737
2	3.3982	61	2.9736
3	3.2821	65	2.9735
7	3.0256	73	2.9734
10	2.9990	84	2.9733
13	2.9985	88	2.9732
15	2.9954	89	2.9731
19	2.9930	98	2.9731
22	2.9915	99	2.9731
26	2.9902	100	2.9731

TableauA3-14.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.4$)

Résultats pour $f=1.5$

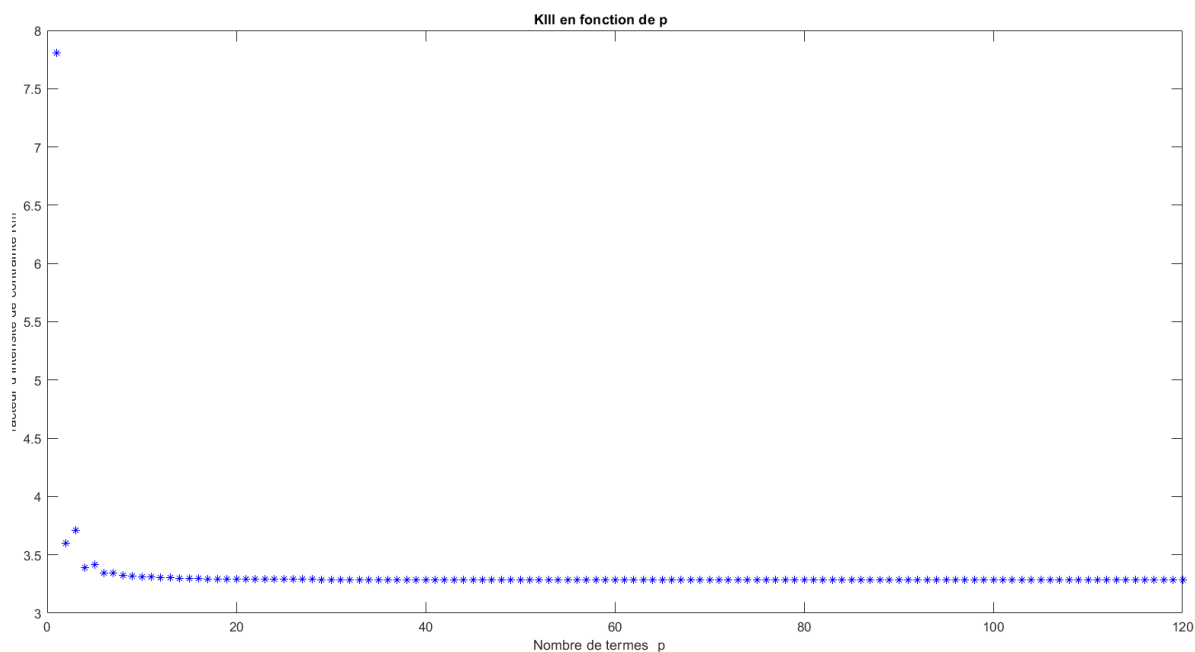


Figure A3-15.a: Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.5$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	7.8053	57	3.2856
2	3.6015	60	3.2855
3	3.7117	64	3.2854
7	3.3455	70	3.2853
10	3.3118	79	3.2852
13	3.3107	88	3.2851
15	3.3099	89	3.2850
19	3.3072	98	3.2850
22	3.3037	99	3.2850
26	3.3021	100	3.2850

TableauA3-15.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.5$)

Résultats pour $f=1.6$

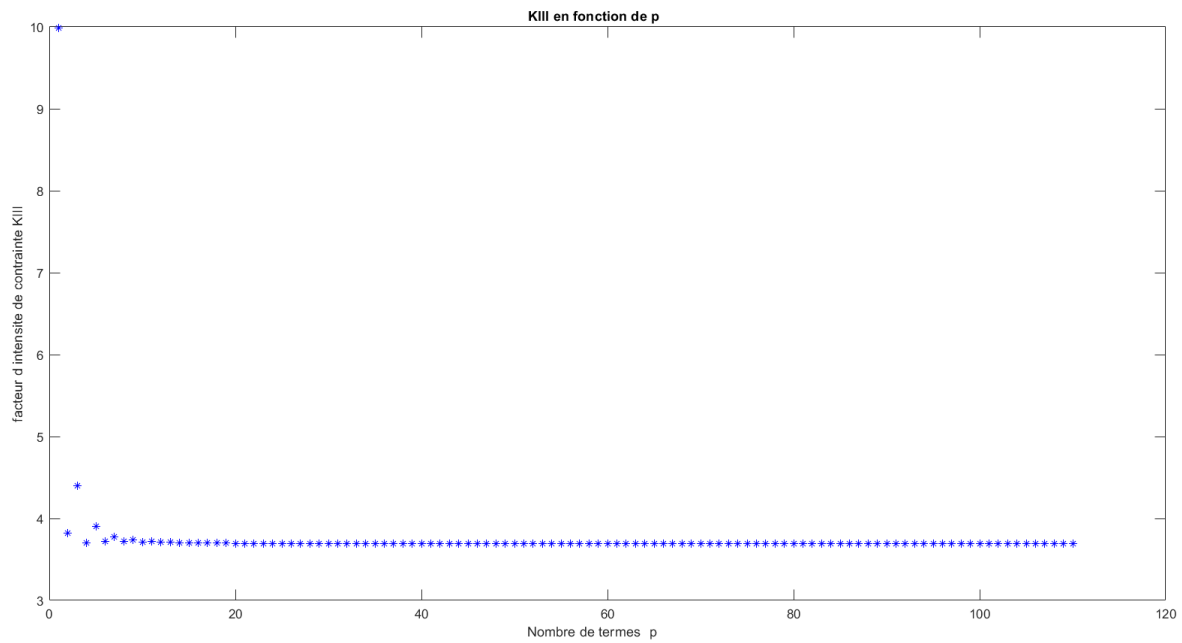


Figure A3-16.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.6$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	9.9894	61	3.6895
2	3.8181	66	3.6894
3	4.3999	69	3.6893
7	3.7795	76	3.6892
10	3.7131	85	3.6891
13	3.7108	91	3.6890
15	3.7097	92	3.6889
19	3.7075	98	3.6889
22	3.7054	99	3.6889
26	3.7020	100	3.6889

TableauA3-16.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.6$)

Résultats pour $f=1.7$

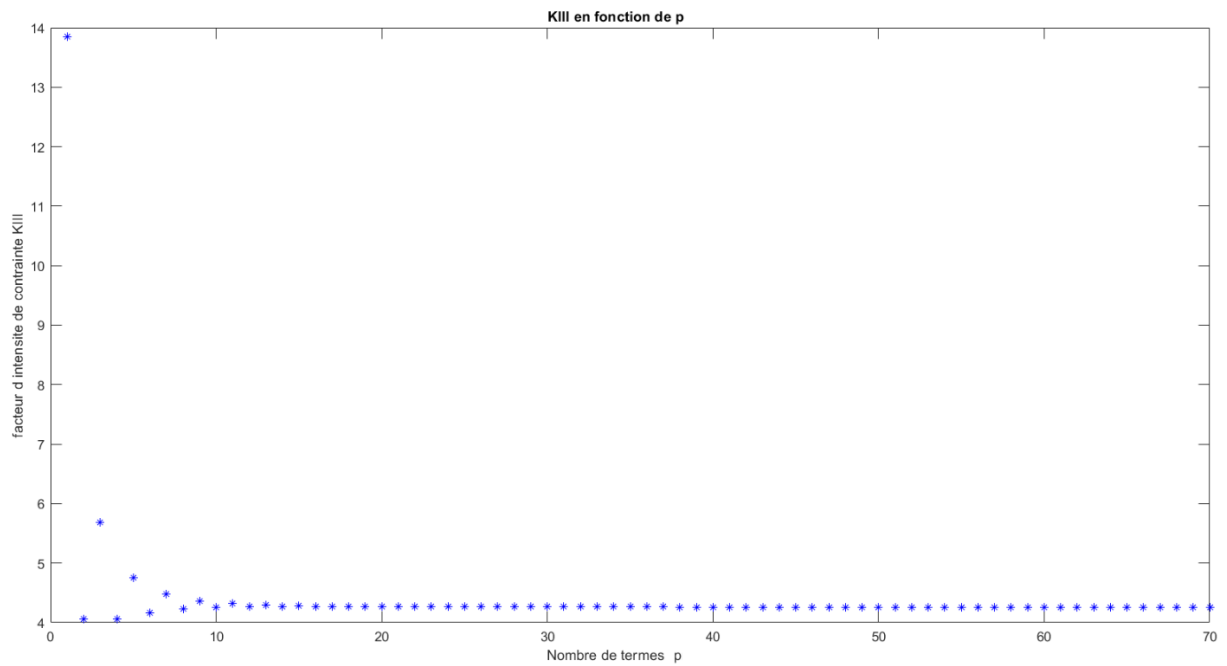


Figure A3-17.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.7$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	13.849	35	4.262
2	4.063	40	4.261
5	4.758	45	4.261
7	4.472	50	4.260
10	4.255	57	4.260
13	4.292	62	4.260
22	4.266	64	4.260
26	4.264	66	4.260
30	4.263	70	4.260

TableauA3-17.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.7$)

Résultats pour $f=1.8$

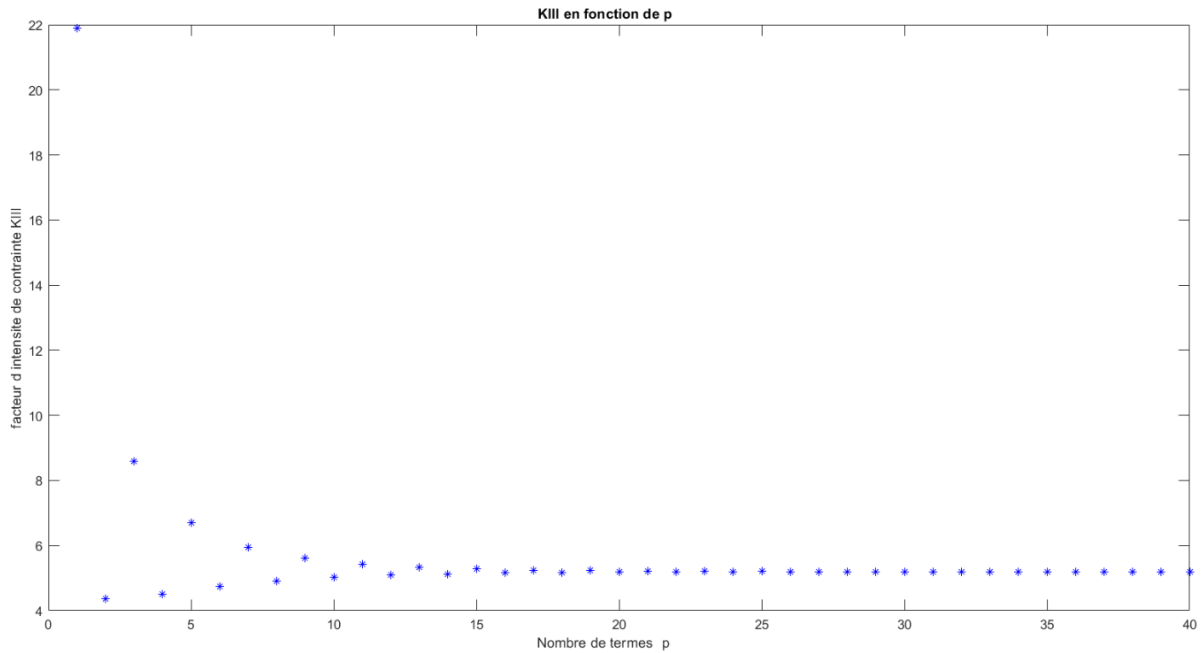


Figure A3-18.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.8$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	21.89	23	5.20
2	4.35	24	5.19
5	6.69	25	5.20
7	5.95	27	5.20
10	5.01	30	5.19
13	5.33	32	5.19
15	5.15	34	5.19
19	5.22	38	5.19
22	5.18	40	5.19

TableauA3-18.a : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.8$)

Résultats pour $f=1.9$

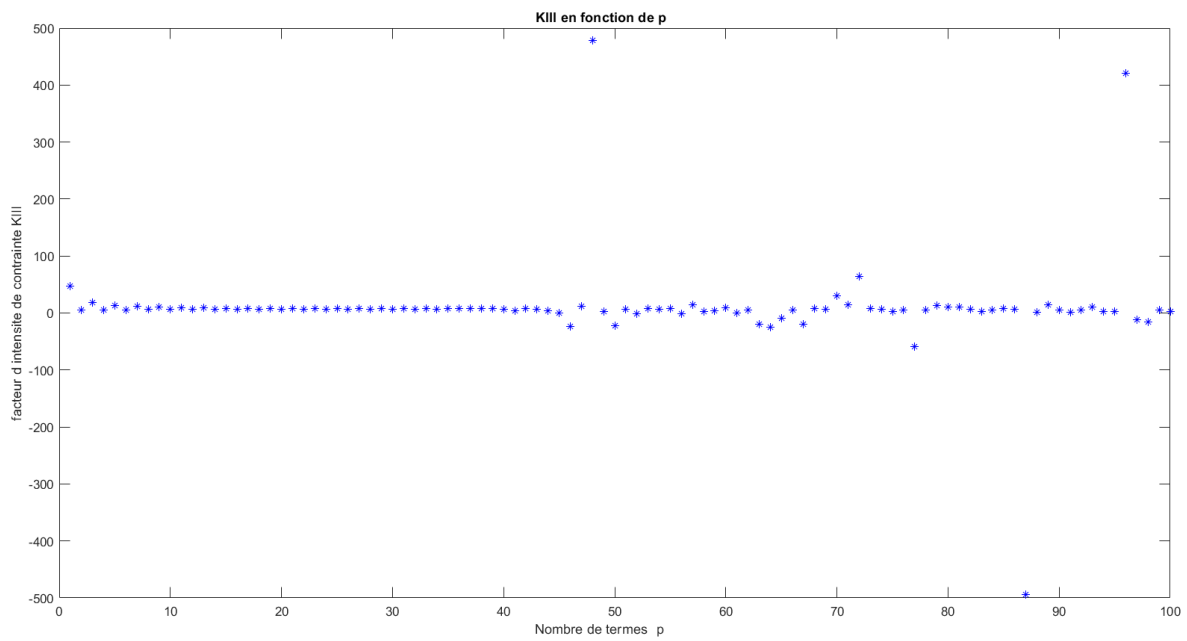


Figure A3-19.a : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.9$)

**Warning: Matrix is close to singular or badly scaled,
Results may be inaccurate, RCOND = 1.268785e-34**

Déplacement imposé

Résultats pour $f=0.1$

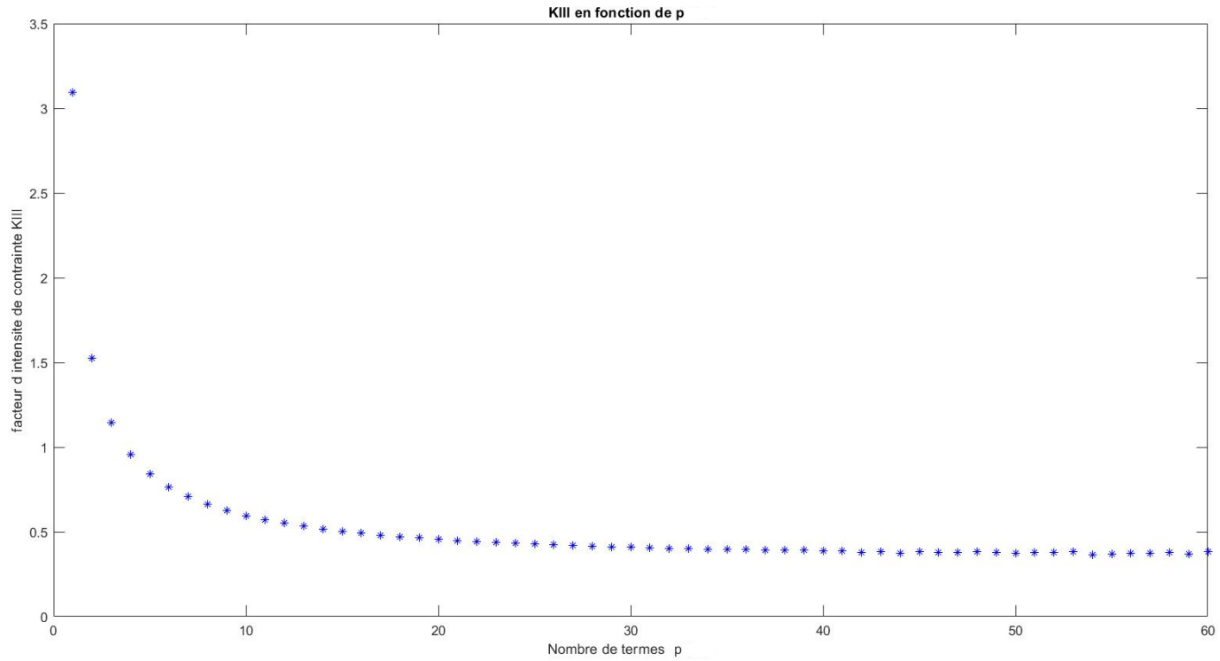


Figure A3-1.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.1$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	3.09	29	0.41
2	1.52	32	0.40
5	0.84	34	0.39
7	0.70	37	0.39
10	0.59	42	0.37
13	0.53	46	0.37
15	0.50	49	0.37
19	0.44	52	0.37
22	0.44	56	0.37
26	0.42	57	0.37

TableauA3-1.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.1$)

Résultats pour $f=0.2$

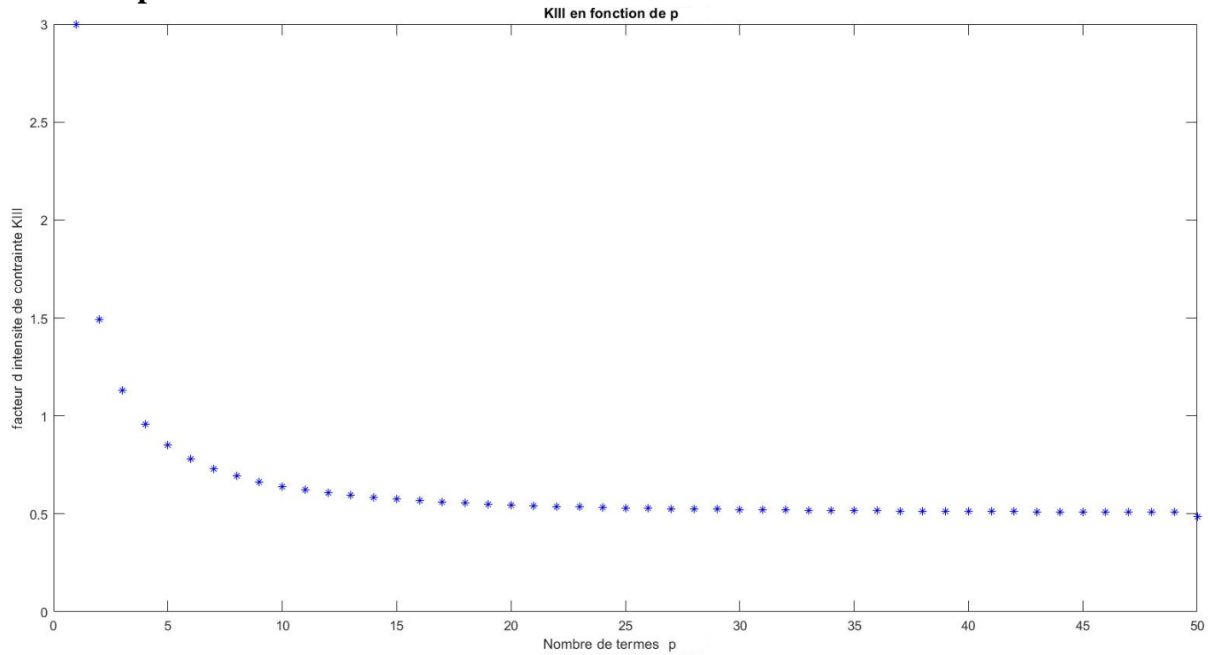


Figure A3-2.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.2$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.99	29	0.52
2	1.49	32	0.51
5	0.85	34	0.51
7	0.73	37	0.51
10	0.64	40	0.51
13	0.59	42	0.51
15	0.57	44	0.51
19	0.54	46	0.51
22	0.53	47	0.51
26	0.52	49	0.51

TableauA3-2.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.2$)

Résultats pour $f=0.3$

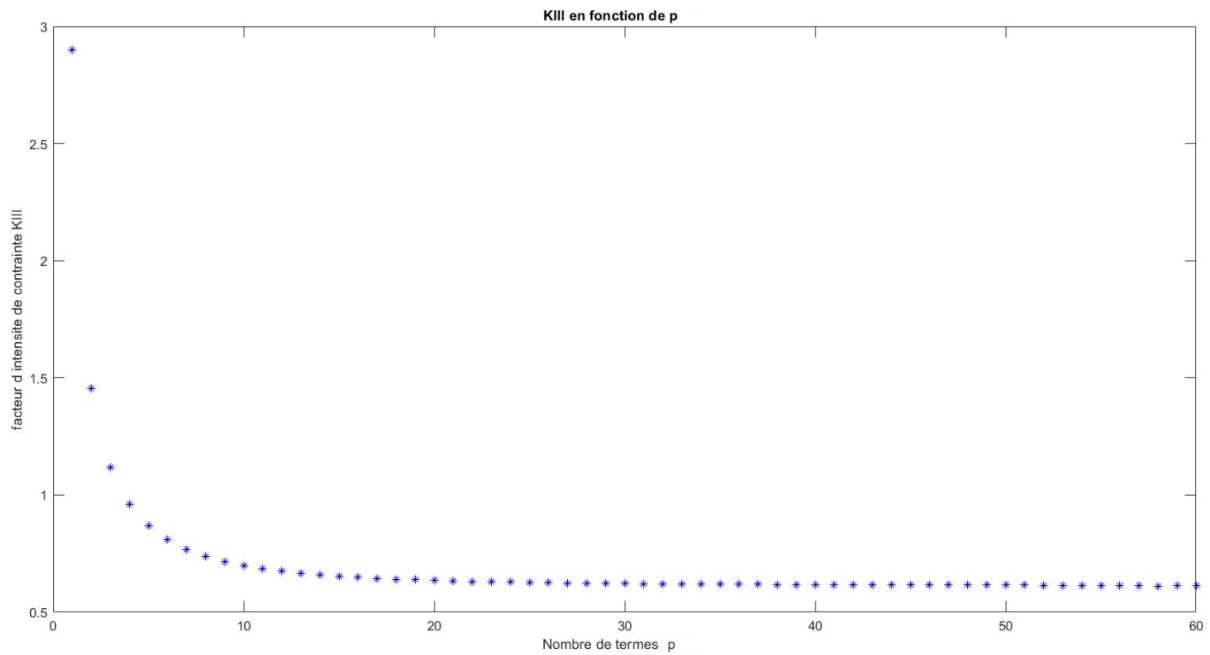


Figure A3-3.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.3$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.90	29	0.62
2	1.45	32	0.62
5	0.86	34	0.61
7	0.76	37	0.61
10	0.69	40	0.61
13	0.66	42	0.61
15	0.65	48	0.61
19	0.63	53	0.61
22	0.63	57	0.61
26	0.62	60	0.61

TableauA3-3.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.3$)

Résultats pour $f=0.4$

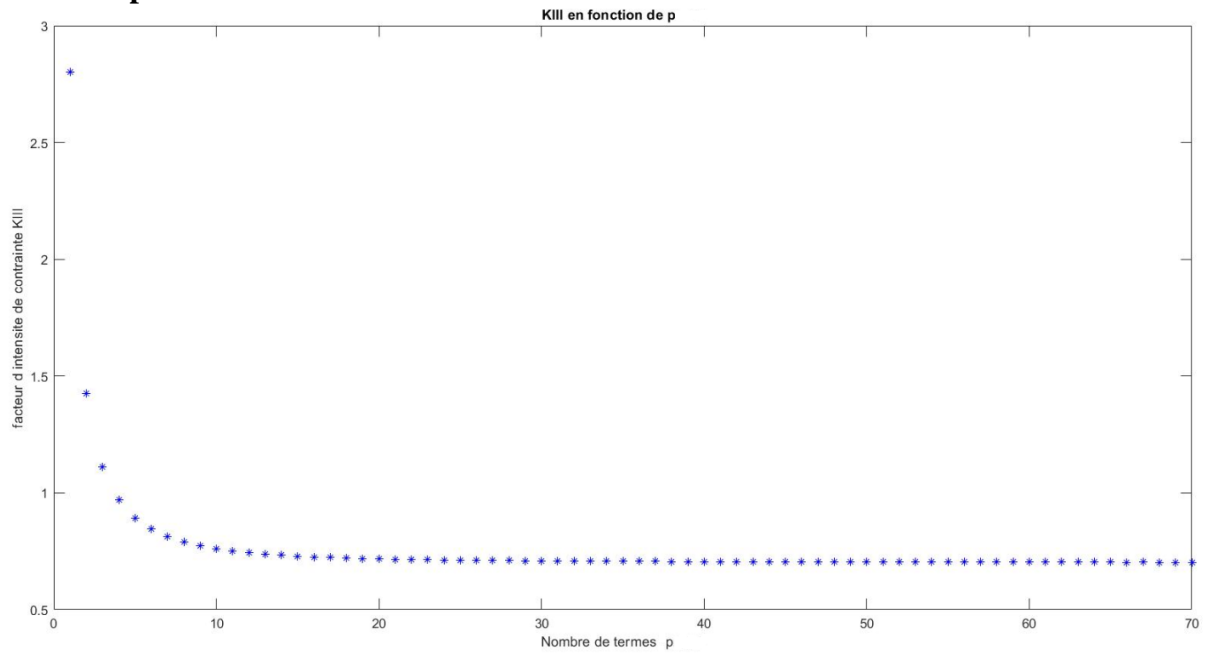


Figure A3-4.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.4$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.802	29	0.709
2	1.424	35	0.707
5	0.893	40	0.705
7	0.811	46	0.704
10	0.759	52	0.704
13	0.737	56	0.703
15	0.728	58	0.703
19	0.719	62	0.703
22	0.714	65	0.703
26	0.711	69	0.703

TableauA3-4.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.4$)

Résultats pour $f=0.5$

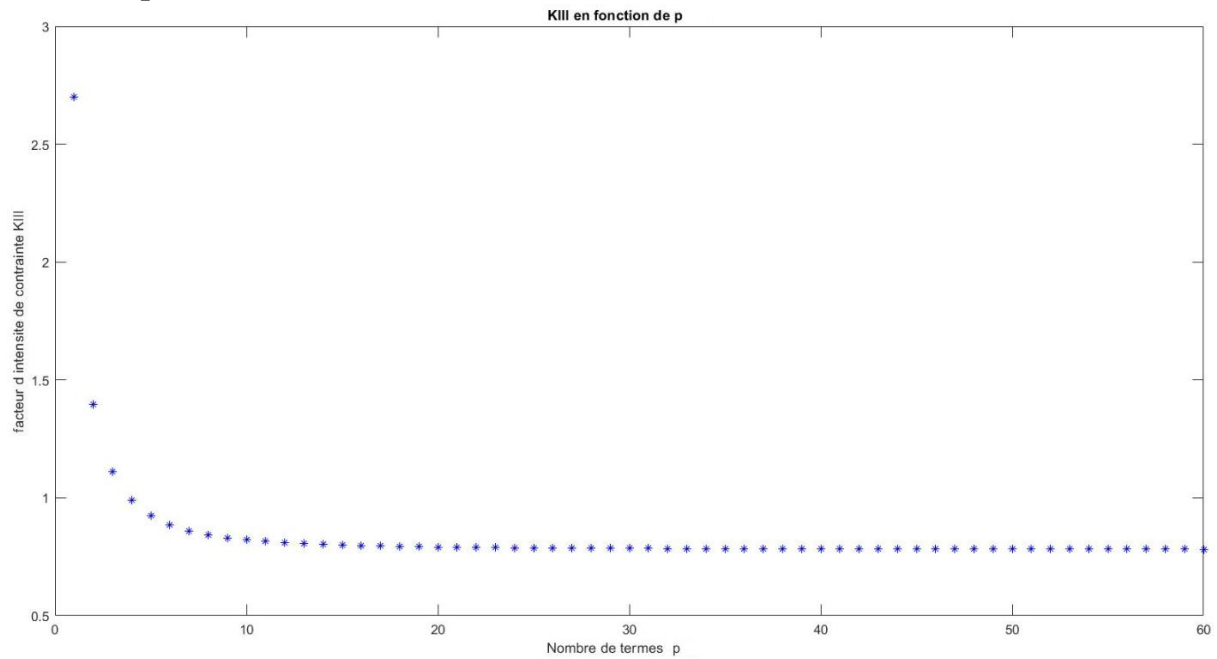


Figure A3-5.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.5$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.701	29	0.785
2	1.396	32	0.784
5	0.924	34	0.784
7	0.860	37	0.783
10	0.821	42	0.783
13	0.805	45	0.782
15	0.799	48	0.782
19	0.792	53	0.782
22	0.789	57	0.782
26	0.787	60	0.782

TableauA3-5.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.5$)

Résultats pour $f=0.6$

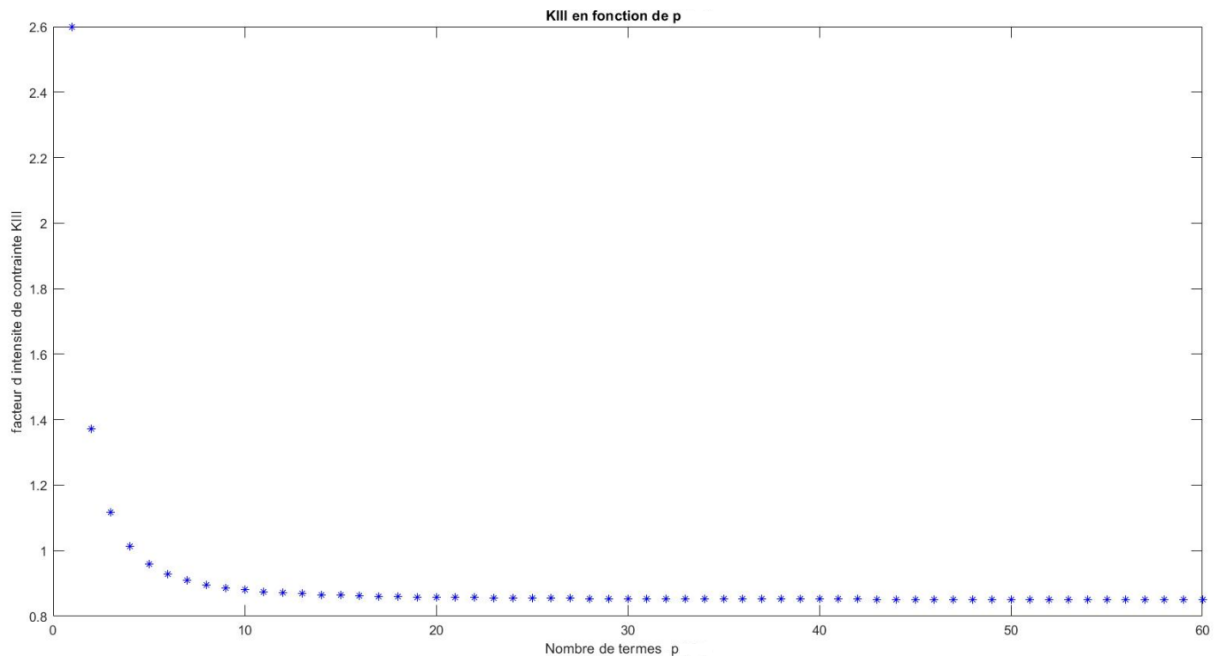


Figure A3-6.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.6$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.598	29	0.853
2	1.371	32	0.853
5	0.960	34	0.852
7	0.909	37	0.852
10	0.880	42	0.851
13	0.868	45	0.851
15	0.864	48	0.851
19	0.858	53	0.851
22	0.856	57	0.851
26	0.854	60	0.851

TableauA3-6.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.6$)

Résultats pour $f=0.7$

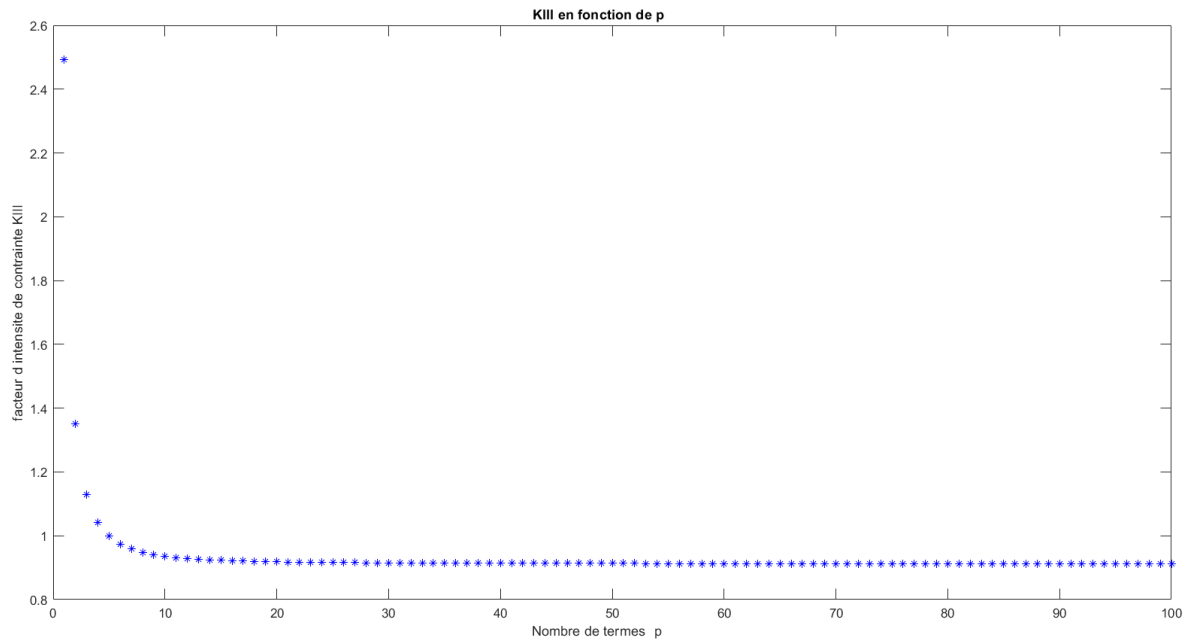


Figure A3-7.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.7$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.4934	35	0.9144
2	1.3512	47	0.9135
5	0.9984	53	0.9132
7	0.9582	65	0.9129
10	0.9356	77	0.9128
13	0.9264	82	0.9126
15	0.9230	88	0.9126
19	0.9191	93	0.9126
22	0.9174	97	0.9126
26	0.9160	100	0.9126

TableauA3-7.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.7$)

Résultats pour $f=0.8$

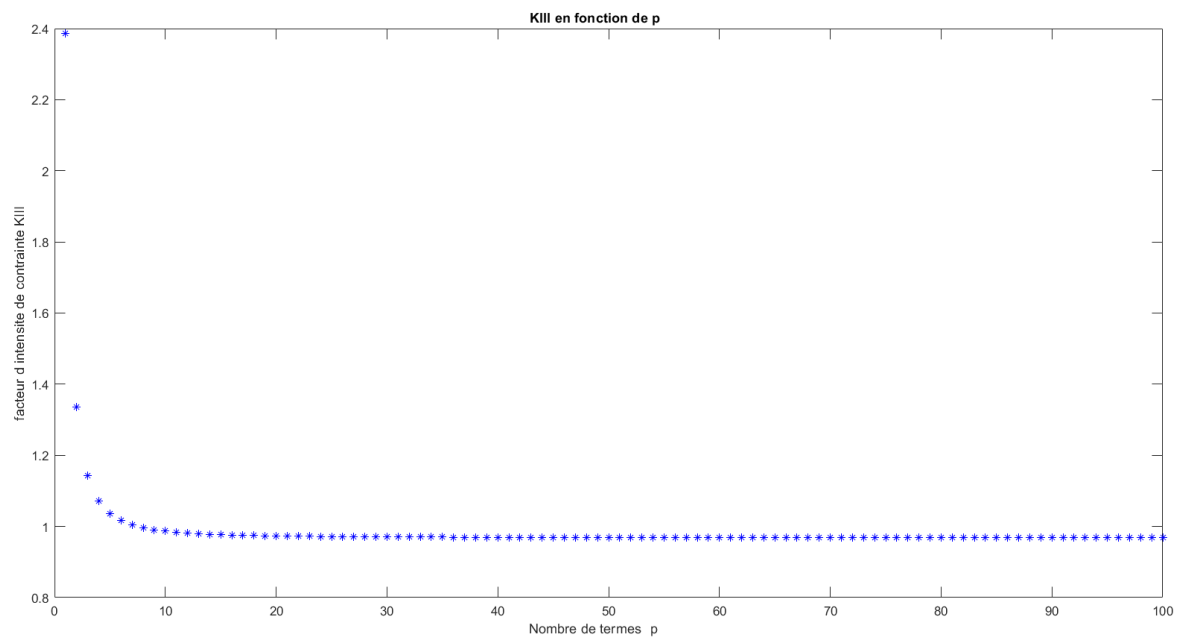


Figure A3-8.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.8$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.3869	35	0.9699
2	1.3356	47	0.9697
5	1.0366	53	0.9690
7	1.0046	65	0.9690
10	0.9867	78	0.9685
13	0.9794	82	0.9685
15	0.9767	89	0.9685
19	0.9736	93	0.9685
22	0.9723	97	0.9685
26	0.9712	100	0.9685

TableauA3-8.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.8$)

Résultats pour $f=0.9$

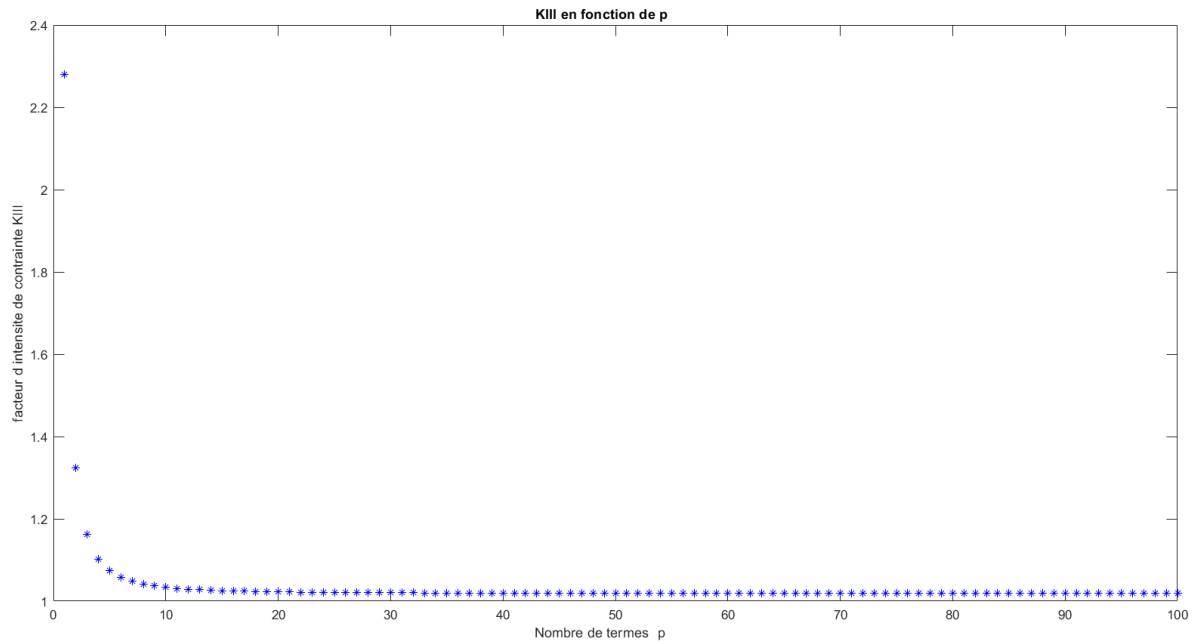


Figure A3-9.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=0.9$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.2792	35	1.0199
2	1.3245	47	1.0194
5	1.0738	53	1.0193
7	1.0479	65	1.0191
10	1.0335	77	1.0190
13	1.0276	82	1.0189
15	1.0254	88	1.0189
19	1.0230	93	1.0189
22	1.0219	97	1.0189
26	1.0207	100	1.0189

TableauA3-9.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=0.9$)

Résultats pour $f=1.0$

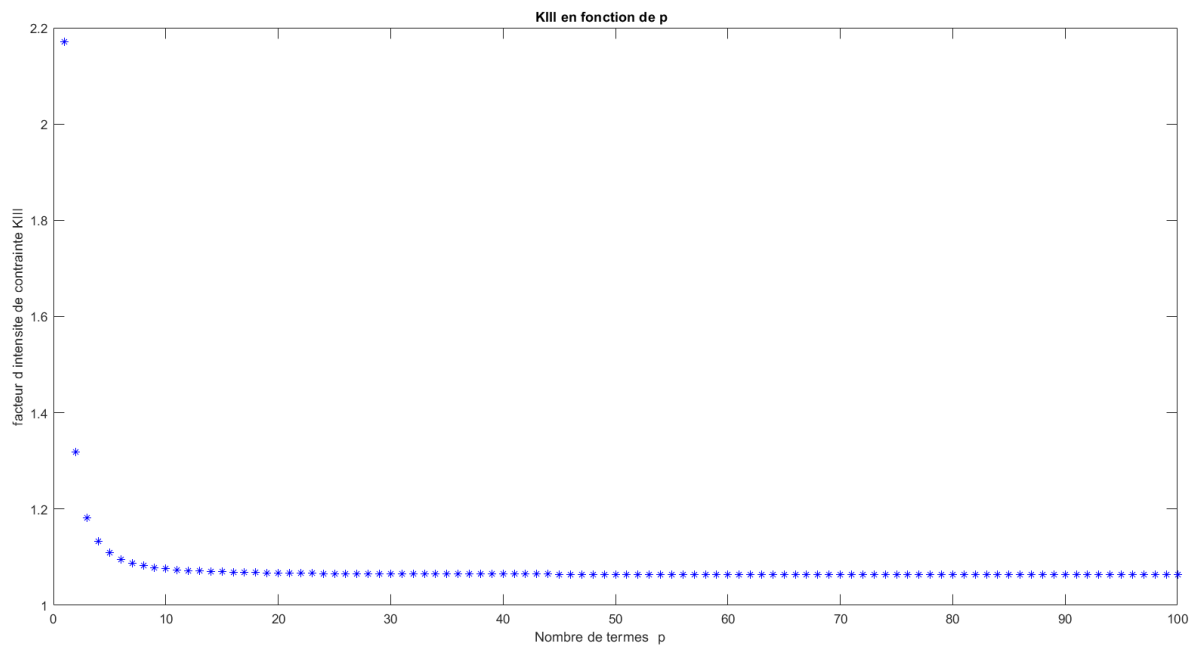


Figure A3-10.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.0$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.1708	75	1.0641
2	1.3178	80	1.0640
4	1.1323	83	1.0640
10	1.0759	87	1.0640
15	1.0693	90	1.0640
20	1.0670	93	1.0640
30	1.0653	96	1.0640
40	1.0646	98	1.0640
55	1.0643	99	1.0640
65	1.0642	100	1.0640

TableauA3-10.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.0$)

Résultats pour $f=1.1$

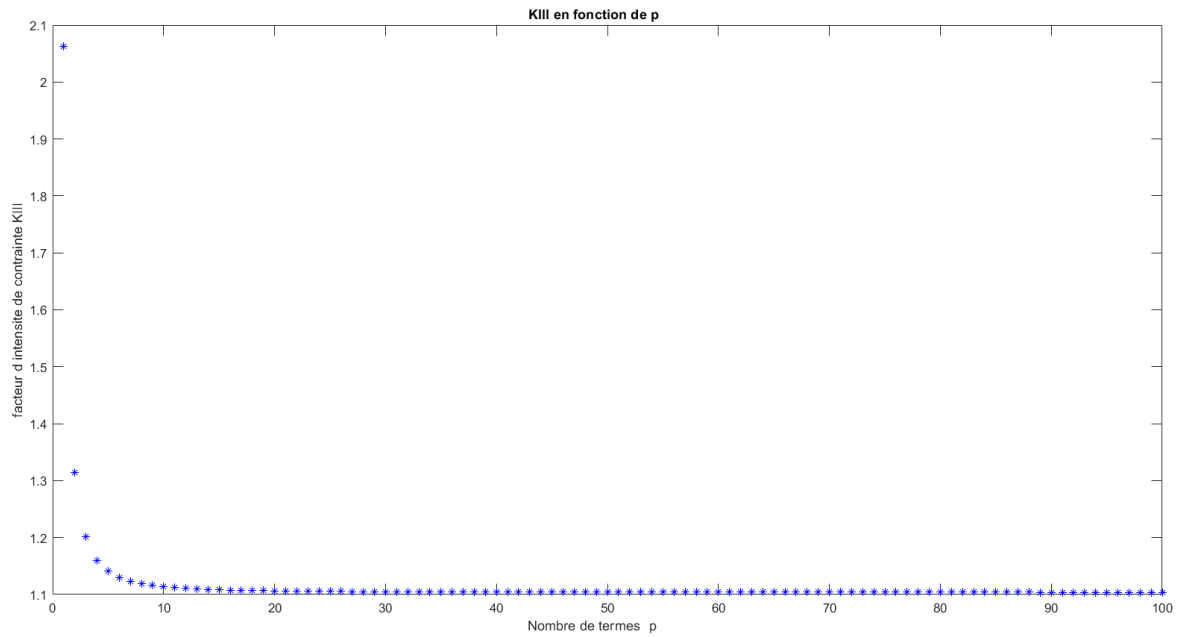


Figure A3-11.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.1$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	2.0624	35	1.1047
2	1.3146	47	1.1043
5	1.1409	53	1.1042
7	1.1234	65	1.1040
10	1.1137	77	1.1040
13	1.1098	83	1.1039
15	1.1083	88	1.1039
19	1.1066	93	1.1039
22	1.1059	97	1.1039
26	1.1053	100	1.1039

TableauA3-11.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.1$)

Résultats pour f=1.2

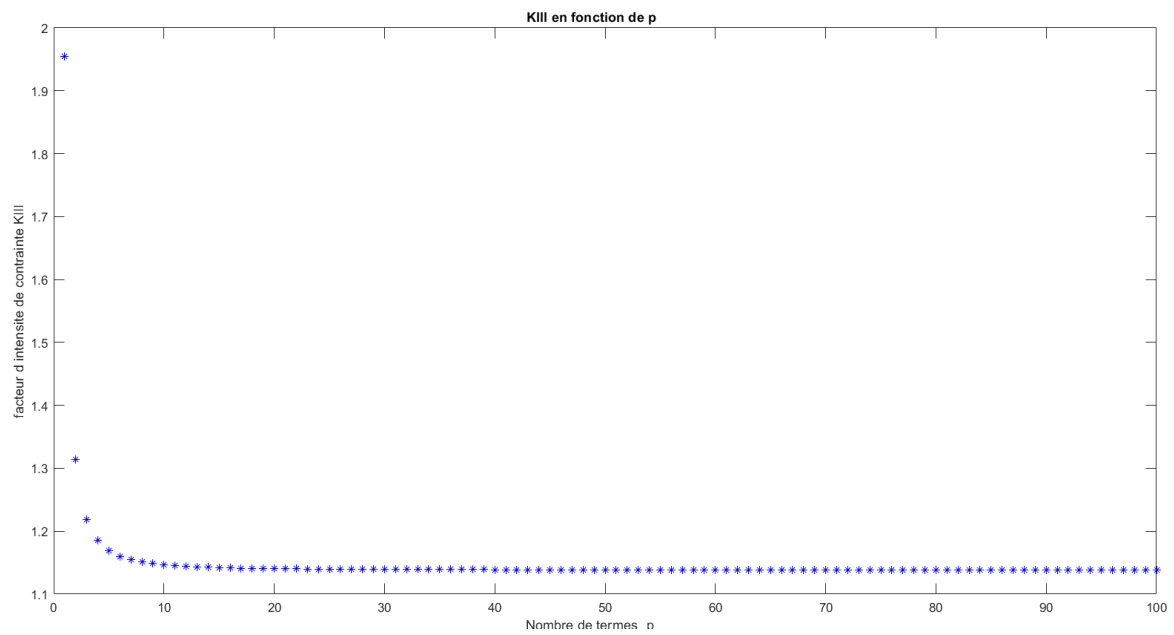


Figure A3-12.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.2$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.9549	35	1.1391
2	1.3136	47	1.1387
5	1.1691	53	1.1387
7	1.1546	65	1.1386
10	1.1465	67	1.1385
13	1.1433	73	1.1385
15	1.1421	77	1.1385
19	1.1407	85	1.1385
22	1.1401	90	1.1385
26	1.1396	94	1.1385

TableauA3-12.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.2$)

Résultats pour $f=1.3$

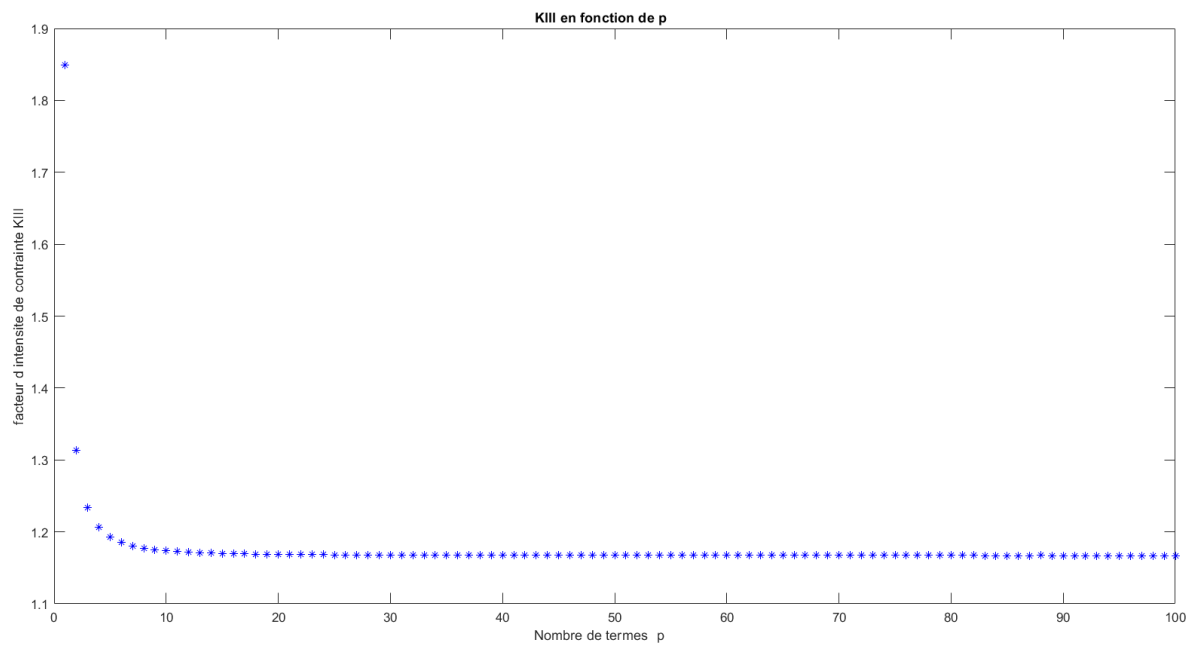


Figure A3-13.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.3$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.8495	35	1.1676
2	1.3130	47	1.1673
5	1.1925	53	1.1673
7	1.1805	65	1.1672
10	1.1738	69	1.1671
13	1.1711	75	1.1671
15	1.1701	80	1.1671
19	1.1690	93	1.1671
22	1.1685	97	1.1671
26	1.1681	100	1.1671

Tableau A3-13.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.3$)

Résultats pour $f=1.4$

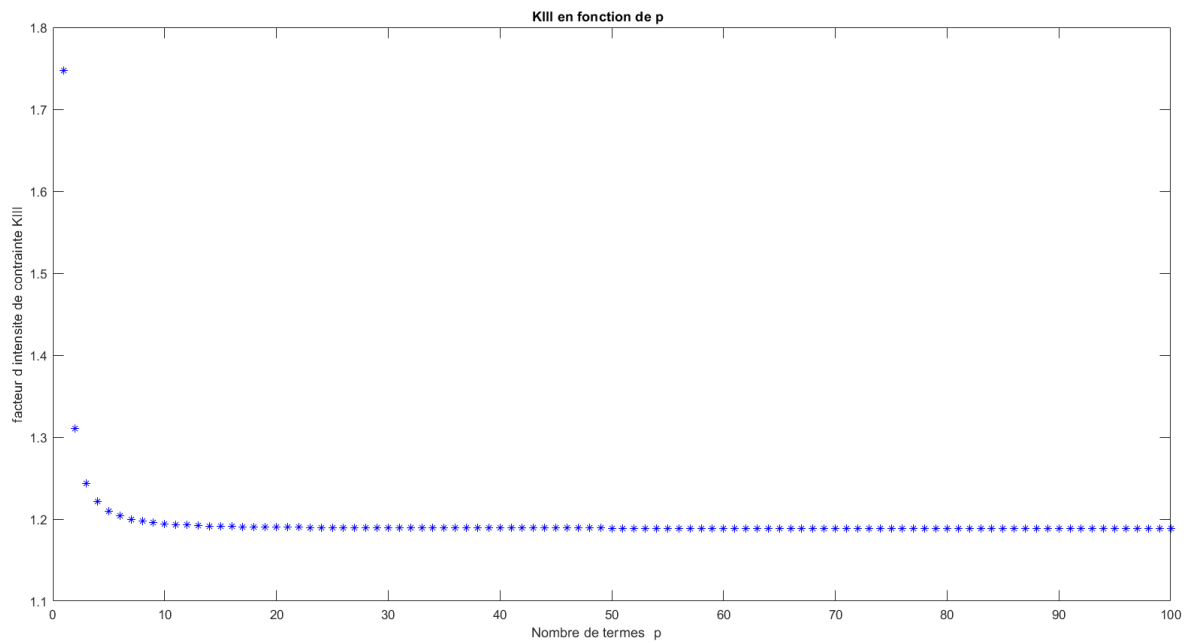


Figure A3-14.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.4$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.7473	35	1.1892
2	1.3105	47	1.1890
5	1.2098	53	1.1890
7	1.1999	65	1.1889
10	1.1944	77	1.1888
13	1.1921	82	1.1888
15	1.1913	88	1.1888
19	1.1904	93	1.1888
22	1.1900	97	1.1888
26	1.1896	100	1.1888

TableauA3-14.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.4$)

Résultats pour $f=1.5$

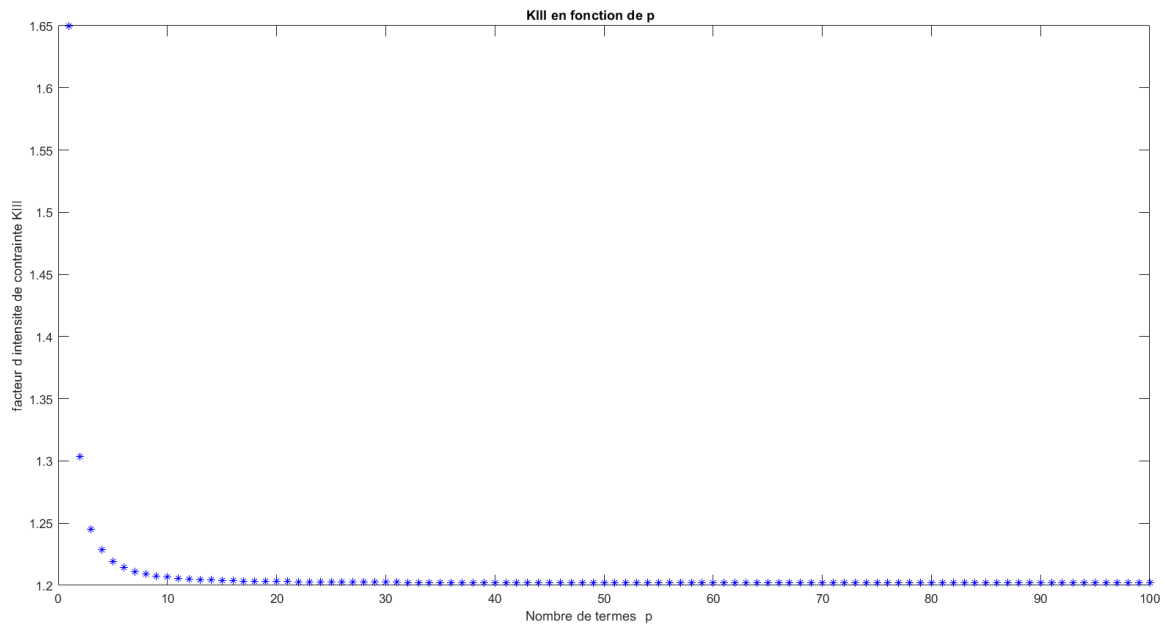


Figure A3-15.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.5$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.6495	35	1.2023
2	1.3034	47	1.2021
5	1.2190	53	1.2020
7	1.2110	65	1.2020
10	1.2065	77	1.2020
13	1.2047	82	1.2019
15	1.2040	88	1.2019
19	1.2032	93	1.2019
22	1.2029	97	1.2019
26	1.2026	100	1.2019

TableauA3-15.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.5$)

Résultats pour $f=1.6$

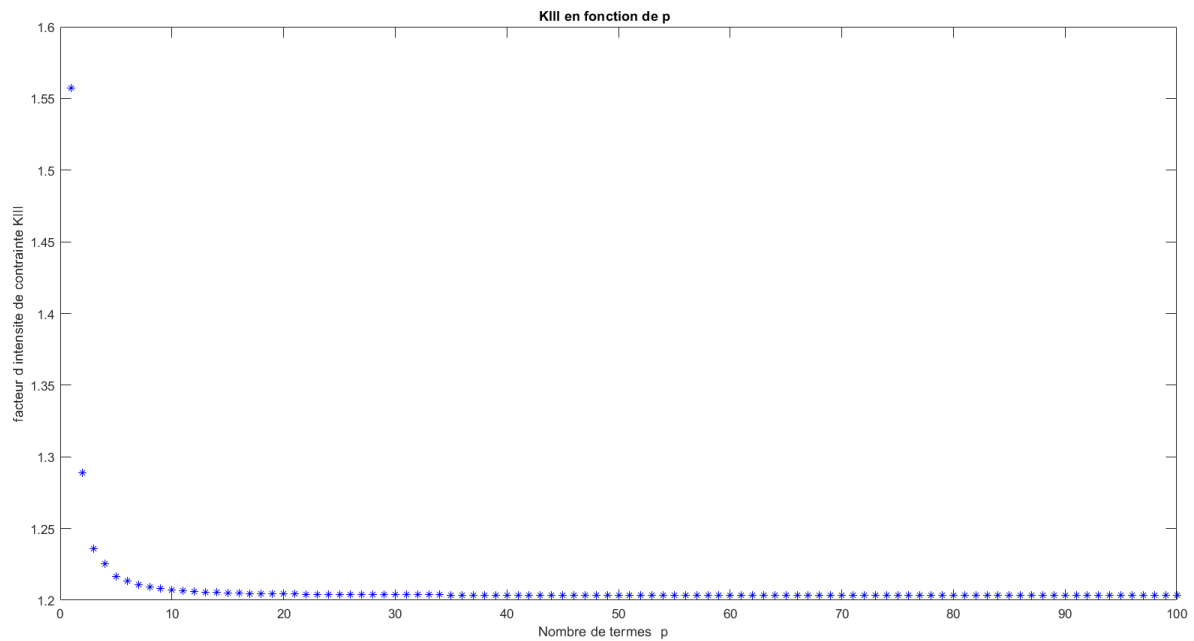


Figure A3-16.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.6$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.5571	35	1.2037
2	1.2888	47	1.2035
5	1.2165	53	1.2035
7	1.2106	65	1.2034
10	1.2071	77	1.2034
13	1.2056	82	1.2034
15	1.2050	88	1.2034
19	1.2044	93	1.2034
22	1.2041	97	1.2034
26	1.2039	100	1.2034

Tableau A3-16.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.6$)

Résultats pour f=1.7

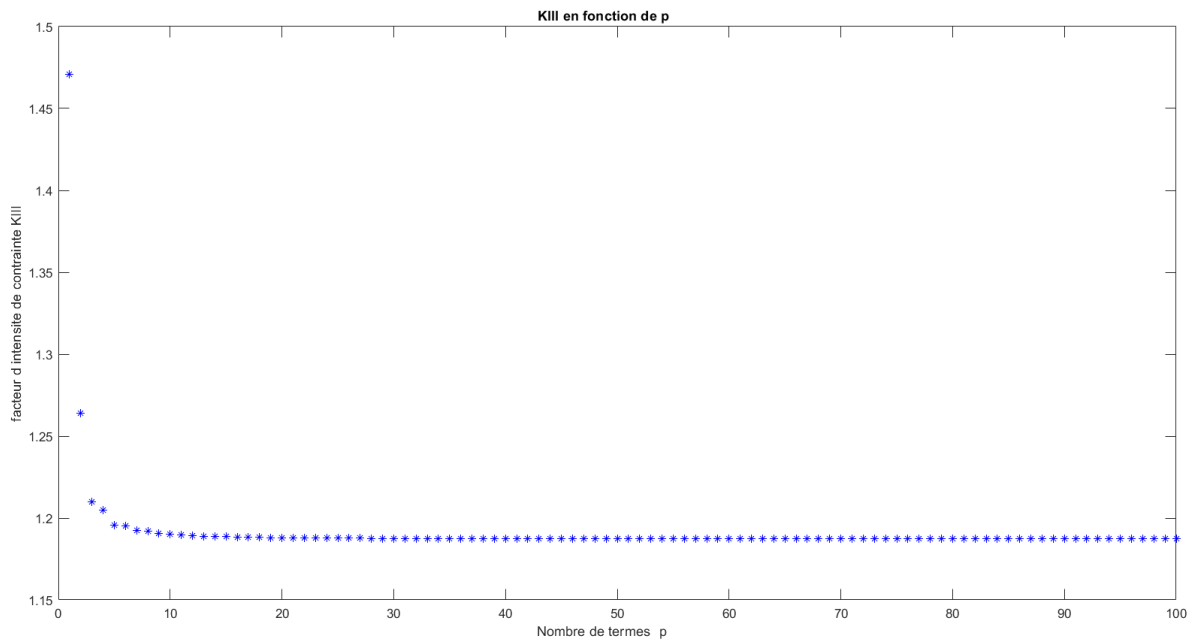


Figure A3-17.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.7$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.4711	35	1.1874
2	1.2641	47	1.1873
5	1.1958	53	1.1873
7	1.1923	65	1.1873
10	1.1902	77	1.1872
13	1.1890	82	1.1872
15	1.1885	88	1.1872
19	1.1880	93	1.1872
22	1.1878	97	1.1872
26	1.1877	100	1.1872

TableauA3-17.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.7$)

Résultats pour $f=1.8$

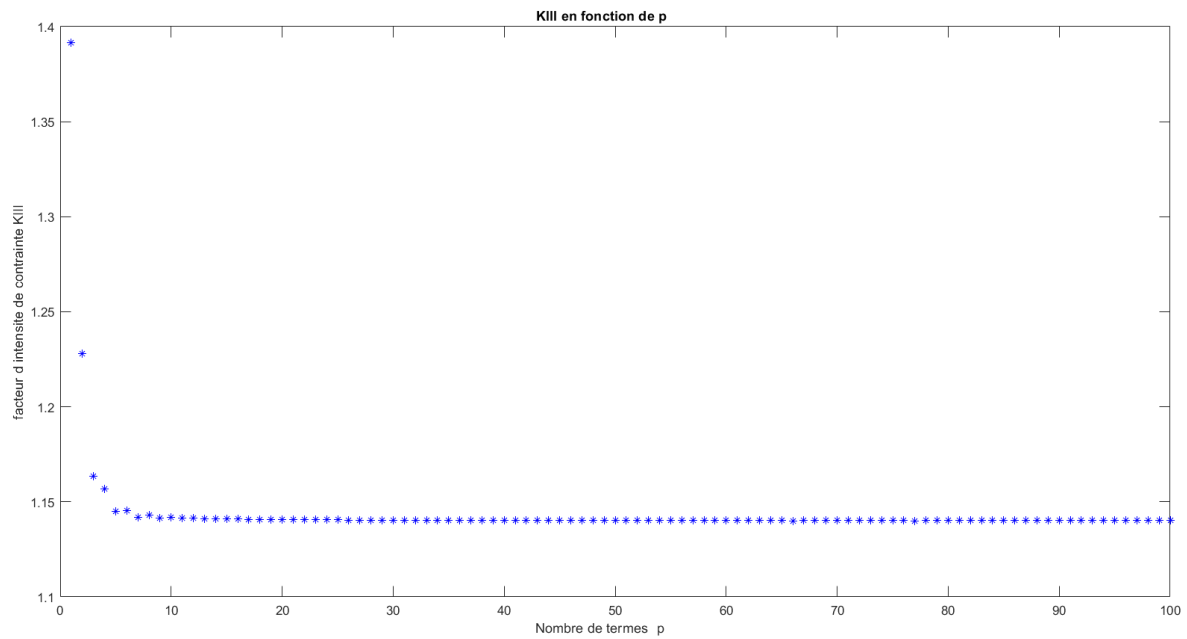


Figure A3-18.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.8$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.3917	35	1.1403
2	1.2281	47	1.1402
5	1.1449	53	1.1402
7	1.1420	65	1.1402
10	1.1420	77	1.1401
13	1.1412	82	1.1402
15	1.1410	88	1.1402
19	1.1407	93	1.1402
22	1.1406	97	1.1402
26	1.1405	100	1.1402

TableauA3-18.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.8$)

Résultats pour $f=1.9$

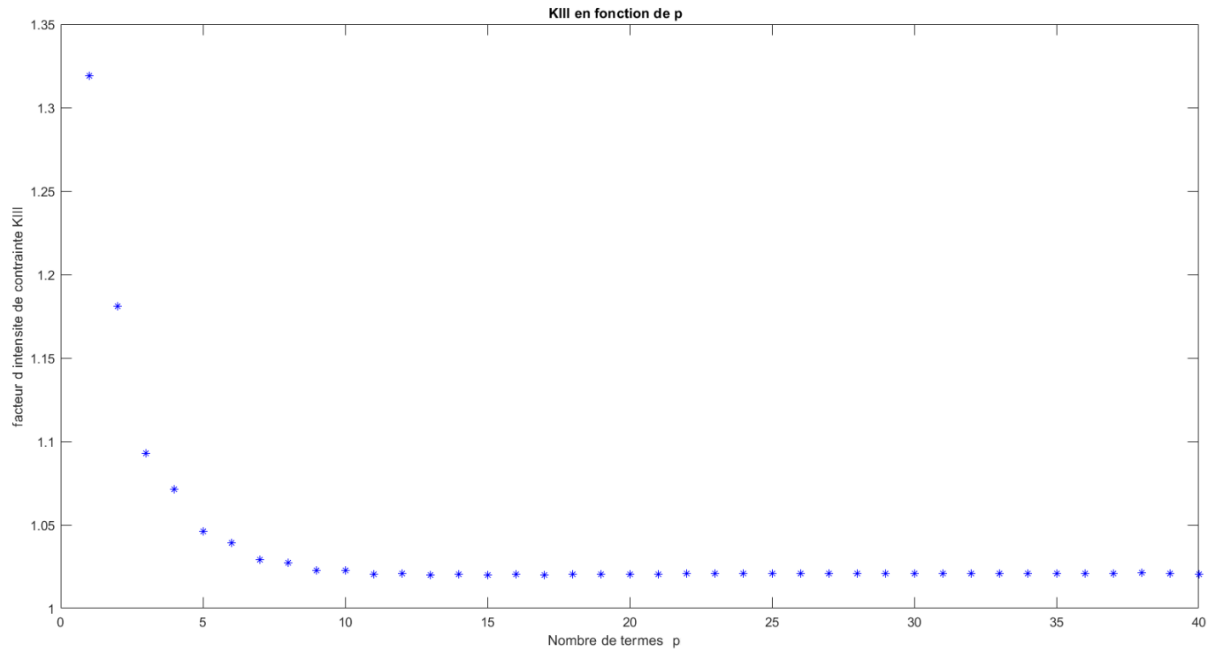


Figure A3-19.b : Facteur d'intensité de contrainte K_{III} en fonction de p ($f=1.9$)

P	K_{III}	P	K_{III}
1	1.3192	22	1.0207
2	1.1811	24	1.0208
5	1.0460	28	1.0210
7	1.0292	32	1.0210
10	1.0225	34	1.0210
13	1.0199	36	1.0210
15	1.0199	37	1.0210
19	1.0203	40	1.0205

TableauA3-19.b : K_{III} en fonction des points de collocations p ($f=1.9$)

Références bibliographiques

- [1] : Pr.HICHEME FERDJANI, (2021) : « Cours mécanique de la rupture fragile », Université Saad Dahlab Blida 1.
- [2] I. CHAOUATI, C. MOATES, (2021) : « Calcul du facteur d'intensité de contrainte K_{III} pour une section elliptique fissurée par la méthode de collocation de frontière », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [3] A. MEKKAOUI, M. BELHADJ, (2019) : « Calcul de KI pour une section elliptique fissurée par la méthode de collocation de frontière » PFE Master, département de génie mécanique, université Saad Dahlab Blida 1.
- [4] M. BOUZA, Z. BOURAS, (2017) : « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode I », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [5] : JEAN-MARC BLANC, (2008) : « Résolution des systèmes linéaires » site(<http://jmblanc.developpez.com/>)
- [6] I. SLAMANI, A. OUANSA, (2020) : « Calcul du K_{III} pour une section circulaire fissurée par la méthode de collocation de frontière avec la méthode de résolution SVD », », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [7] A. ZEHNDER, (2009) : « Lecture Notes on Fracture Mechanics », Department of Theoretical and Applied Mechanics, Cornell University,
- [8] Y. MEZOUANI, (2014): « Application de la méthode de collocation de frontière au calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [9] : S.BENTTALAH, W.IZA (2015) : « Exemple de calcul du facteur d'intensité de contrainte en mode III avec la méthode de collocation de frontière » mémoire d'ingénieur d'état en génie mécanique, école militaire polytechnique.
- [10] O. SERGHINI, B. TEFIANI, (2019) : « Calcul de K_{III} pour une section circulaire et carrée fissurée par la méthode de collocation de frontière », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [11] S. BENKRIRA, (2018) : « Calcul du facteur d'intensité de contrainte pour des sections fissurées circulaire et elliptique avec ABAQUS », PFE Master, département de génie mécanique, Université Saad Dahlab Blida 1.
- [12] : Pr.HICHEME FERDJANI, (2021) : « Cours Introduction à la mécanique de la rupture fragile », Université Saad Dahlab Blida 1.
- [13] : J.-B. Leblond, (2003) : « Mécanique de la rupture fragile et ductile » hermes, Lavoisier.