الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BLIDA 1
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme de Master
Domaine : **Mathématiques et Informatique**
Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Analyse Mathématiques et Applications**

Présenté par :

Ghenim Achwak

Thème :

Étude d'une équation intégro-différentielle abstraite semi-linéaire par l'approche des semi-groupes compacts

Soutenue publiquement, le **20 juillet 2023**, **devant le jury composé de** :

M.Benbachir Maamar	**Professeur**	**ENSM, Alger**	**Président**
M.Chaouchi Belkacem	**MCA**	**Université de Khemis Miliana**	**Examinateur**
Mme Boutaous Fatiha	**MCA**	**Université de Blida1**	**Promotrice**

Année universitaire : **2022-2023**

Table des matières

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux
Tout d'abord,je voudrais remercier **ALLAH** de m'avoir donné le courage pour réaliser ce travail.

Je remercie également **Mme Boutaous Fatiha**, pour m'avoir proposé ce thème de recherche, ses encouragements et ses efforts ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens aussi à remercier Messieurs les membres de Jury : **M. Maamar Benbachir** et **M. Belkacem Chaouchi** qui m'ont fait un grand honneur, en acceptant d'examiner ce travail.

Dédicaces

Je dédie ce travail

à mon très cher père,

à ma très chère mère,

à toute la famille Ghenim ,Djaafre et Kobbi,

à toutes mes amies,

à tous mes professeurs depuis l'école de primaire à l'université.

"Achwak"

Notations

$\mathbb{R}$: L'ensemble des nombres réels.

$[a, b)$: L'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.

X : Espace de de Banach.

$\|.\|_X$: Norme de l'espace X.

$\mathcal{L}(X, Y)$: Espace des opérateurs linéaires continus de l'espace vectoriel X dans l'espace vectoriel Y.

I : L'opérateur identité sur X.

A : Opérateur linéaire .

$D(A)$: Le domaine de l'opérateur linéaire A.

$\rho(A)$: L'ensemble résolvant de A.

$R(\lambda, A)$: La résolvante de l'opérateur A en $\lambda \in \rho(A)$.

$C^k(]a, b[)$: L'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables sur l'intervalle $]a, b[$.

$< ., . >$: Le produit scalaire.

B_E : La boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 ($B_E = B_E(0, 1)$).

$(E.D)$: Équations Différentielles.

$(E.I.D)$: Équations intégro-différentielles

ملخص

في هذا العمل نحن مهتمون بدراسة فئة من المعادلات التكاملية التفاضلية شبه خطية في فضاء باناخ، باستخدام نظرية المجموعات النصفية للمؤثرات الخطية المتراصة ، ونبرهن الوجود المحلي والشامل لهذه الفئة من المعادلات التكاملية التفاضلية.

الكلمات المفتاحية . مجموعة نصفية متراصة، معادلات تكاملية تفاضلية ، حل متكامل ، حل محلي ، حل شامل .

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles semi-linéaires, dans espace de Banach. En utilisant la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires compactes, nous montrons l'existence locale et globale des solutions intégrales (mild solutions) de cette classe d'équations intégro-différentielles.

Mots clés : Semi-groupe compact, équation intégro-différentielle, solution intégrale (mild), solution locale, solution globale.

Abstract

In this work, we are interested in the study of a class of semi-linear integro-differential equations, in Banach space. Using the theory of semigroups of compact linear operators, we show the local and global existence of mild solutions to this class of integro-differential equations.

Keywords : Compact semigroup, integro-differential equation, mild solution, local solution, global solution.

Introduction

Parmi les branches les plus importantes en mathématiques, anciennes et récentes, figurent les équations différentielles et les équations intégrales, considérées comme l'épine dorsale de la majeure partie de la science actuelle, voire de toutes les sciences.

Une autre branche d'équations qui combinent à la fois les aspects différentiel et intégrale dans une même équation est apparue. C'est celle des équations intégro-différentielles qui a été introduite pour la première fois par V. Volterra (1860-1940).

Ce travail est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites. On entend, ici, par équations intégro-différentielles abstraites (en abrégé E.I.D.A.), des équations intégro-différentielles à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) dans un espace de Banach.

Nous allons présenter une synthèse des résultats obtenus dans l'article de D. Bahuguna et S. K. Srivastava, voir [3], intitulé :

Semilinear integro-differential equations with compact semigroups.

En utilisant une approche basée sur la théorie des semi-groupes compacts, nous allons étudier, dans un espace de Banach X, l'équation intégro-différentielle abstraite suivante (voir [1], [3], [4] et [5]) :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t-s)g(t, u(t))ds, \ 0 \leq t_0 < T_0 \leq +\infty, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

où :

- l'opérateur linéaire $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

dans l'espace X,

• les application non linéaires $f, g : J \times U \to X$, $J = [t_0, T_0]$,$t_0 < T_0 \leq +\infty$ sont continues où U est un sous ensemble ouvert de X,

• $a \in L^1(J)$ et $u_0 \in U$.

Pour le cas particulier : $g = 0$, le problème (1) a été étudié par Pazy [1], Pavel [5] et d'autres. L'existence d'une solution intégrale (mild solution) est assurée sous les conditions : A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact dans X, $f(t, u)$ est continue par rapport à ses deux variables et uniformément localement Lipschitzienne par rapport à la variable u. Si la continuité Lipschitzienne de f par rapport à u abandonné, alors l'existence d'une solution intégrale n'est plus garantie.

Pour le cas général : $g \neq 0$, Heard et Rankin [4] ont étudié l'équation intégro-différentielle suivante dans un espace de Banach X :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A(t)u(t) = f(t, u(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t, s)g(t, u(t))ds, \quad 0 \leq t_0 < T_0 \leq \infty, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

où pour chaque $t \geq 0$, l'opérateur linéaire $-A(t)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique dans X, l'opérateur non linéaire f est défini de $[0, \infty[\times X$ dans X et satisfait une condition de Hölder de la forme :

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq C[|t - s|^\eta + \|y_1 - y_2\|_\mu^\gamma],$$

$0 < \eta, \mu, \gamma < 1$,$\|.\|$ est la norme sur X et $\|.\|_\mu$ est la norme du graphe sur $X_\mu = D(A^\mu(0))$, la fonction non linéaire g est supposée satisfaire une condition de Lipschitz locale par rapport à la norme de X (voir [4]). De plus, l'unicité des solutions est démontrée sous la restriction que l'espace X est un espace de Hilbert et $\gamma = 1$.

Ce mémoire se compose de quatre chapitres :

• **Le premier chapitre** aborde des notions de base d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés par la suite. : espace de Banach, espace de Hilbert, les opérateurs linéaires, les fonctions localement Lipschitziennes et les fonctions localement intégrables.

• **Le deuxième chapitre** contient des notions de base et théorèmes de la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires.

• **Le troisième chapitre** est consacré aux équations intégrales et aux équations intégro-différentielles et leurs différentes propriétés.

• **Le quatrième chapitre** représente la partie essentielle de ce travail. Il concerne l'étude de l'existence locale et l'existence globale des solutions intégrales (mild solutions en anglais) pour une classe d'équations intégrales-différentielles dans un espace de Banach . Il est constitué de parties importantes :
∗ **La première partie : cas** $g = 0$ **:** On étudie le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), \quad 0 \leq t_0 < T_0 \leq \infty, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

Pour ce problème, l'existence locale et globale d'une solution intégrale (mild) est assurée sous les conditions : $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans l'espace X, $f(t, u)$ est continue par rapport à ses deux variables et uniformément Lipschitzienne continue en u.
∗ **La deuxième partie : cas** $g \neq 0$ **:** Elle concerne l'étude d'existence locale et globale des solutions intégrales "mild" du problème (1).
On termine ce travail par une conclusion générale.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions et résultats de base qui seront utiles dans ce travail. En particulier, nous rappelons les définitions de quelques espaces fonctionnels, des opérateurs linéaires non bornés, des opérateurs linéaires fermés, des opérateurs compacts, des fonctions Lipschitziennes et quelques théorèmes du point fixe.

1.1 Les espaces fonctionnels

1.1.1 Espace métrique

Définition 1.1 *(Distance) Soit X un ensemble non vide. On appelle distance sur l'ensemble X, une application $(x, y) \mapsto d(x, y)$ de $X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant les trois conditions :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ *(inégalité triangulaire).*

On appelle espace métrique le couple (X, d), où d est une distance sur l'ensemble X.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel X normé et complet. Autrement dit : l'espace vectoriel X est muni d'une norme $\|.\|_X$ et toute suite de Cauchy d'éléments de X est convergente dans l'espace X pour la norme $\|.\|_X$.*

Exemples : Les espaces vectoriels $(\mathbb{R}, |.|)$ et $(\mathbb{C}, |.|)$ sont de Banach.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.3 *On appelle espace de Hilbert X, tout espace de Banach X dont la norme provient d'un produit scalaire sur X (c'est-à-dire : $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \forall x \in X$).*

1.2 Les opérateurs linéaires et leurs propriétés

Soit E et F deux espaces de Banach sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$).

1.2.1 Opérateur linéaire

Définition 1.4 *Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire définie sur sous-espace vectoriel $D(A) \subset E$ et à valeurs dans F, tel que pour tous $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :*

1. *$A(x + y) = Ax + Ay$.*
2. *$A(\lambda x) = \lambda Ax$.*

L'ensemble $D(A)$, défini par : $D(A) = \{x \in E \ / \ Ax \text{ ait un sens}\}$ est appelé le domaine de l'opérateur linéaire A.

1.2.2 Opérateur linéaire borné

Définition 1.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire. Dire que l'opérateur A est borné, signifie qu'il existe une constante $C > 0$, telle que $\|Au\|_F \leq C\|u\|_E$, $\forall u \in D(A)$.*
Sinon, A est dit opérateur linéaire non borné.
Lorsque $D(A) = E$, alors l'opérateur linéaire borné A est continu.

Théorème 1.1 *Un opérateur linéaire A défini sur $D(A) = E$, à valeurs dans F est continu si, et seulement s'il est borné.*

On note $\mathcal{L}(E, F)$: l'ensemble des opérateurs linéaires continus de E dans F.
Si $E = F$, on note l'ensemble $\mathcal{L}(E, E)$ par $\mathcal{L}(E)$.

1.2.3 Opérateur inversible

Définition 1.6 *Soit E et F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit que l'opérateur A est inversible s'il existe un opérateur linéaire $B \in \mathcal{L}(E,F)$, tel que $A \circ B = I_F$ et $B \circ A = I_E$, où I_E (resp.I_F) est l'opérateur identité de E (resp. de F).*
Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B = A^{-1}$.

1.2.4 Opérateur linéaire fermé

Définition 1.7 ***(Graphe d'un opérateur)*** *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire non borné. Le graphe de l'opérateur linéaire est un sous-espace vectoriel de $E \times E$, défini par*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

Définition 1.8 ***(Opérateur fermé)****. Un opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset E \to E$ est dit fermé si son graphe $\Gamma(A)$ est fermé dans $E \times E$.*

Proposition 1.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné. L'opérateur A est fermé si : $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que :*

$$(u_n \underset{n\to+\infty}{\to} u \text{ dans } E) \text{ et } (Au_n \underset{n\to+\infty}{\to} Au \text{ dans } F) \;\Rightarrow u \in D(A) \text{ et } v = Au.$$

1.2.5 Opérateurs dissipatif

Définition 1.9 *Soit X un espace de Hilbert muni du produit scalaire $< .,. >$.*
Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to X$ est dit dissipatif si :

$$< Au, u > \leq 0, \quad \forall u \in D(A).$$

Remarque Si X est un espace de Banach, alors $A : D(A) \subset X \to X$ est dissipatif si

$$\|\lambda u - Au\|_X \geq \lambda \|u\|_X, \quad \forall u \in D(A), \forall \lambda > 0.$$

1.2.6 Opérateur compact

Définition 1.10 ***(Ensemble compact)*** *Soit (X, τ) un espace topologique.*

1. *On appelle **recouvrement** ouvert de X, une famille $A_i, i \in I$ des ouverts de X , telle que $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.*

2. *L'espace topologique séparé (X,τ) est* ***compacte****, si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors il existe $i_0, i_2, ..., i_k \in I$ pour certain $k \in \mathbb{N}$ tels que $X \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*

Définition 1.11 ***(Ensemble pré-compact)*** *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que (X,d) est pré-compact si pour tout $\epsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini des boules de rayon ϵ.*

Théorème 1.2 *Soit (X,d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *X est compact.*
2. *X précompact et complet.*

Définition 1.12 ***(Ensemble relativement compact)*** *Une partie S d'un espace métrique X est dite relativement compacte, si sa fermeture $\overline{A}$ est compacte.*

Définition 1.13 ***(Opérateur compact)*** *Un opérateur linéaire continu $A : E \to F$ est dit compact s'il transforme tout ensemble borné M de E en un ensemble relativement compact.*
Autrement dit : $\overline{A(B_E)}$ est un compact de F, où B_E désigne la boule unité de E.
On note l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F par $K(E;F)$.
Si $E = F$, on note l'ensemble des opérateurs compacts de E dans E par $K(E)$.

Théorème 1.3 ***(Théorème de Riesz)*** *Soit E un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée de E est compacte alors l'espace E est de dimension finie.*

1.3 Application Lipschitzienne, fonction localement Lipschitzienne, fonction localement intégrable

1.3.1 Application Lipschitzienne

Une application Lipschitzienne est une application possédant une certaine propriété de régularité qui est plus forte que la continuité.

Cas réel

Définition 1.14 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), $f : I \to \mathbb{R}$ une application et k un réel strictement positif. On dit que f est **k-Lipschitzienne** si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Cas des espaces métriques

Définition 1.15 *Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, $f : E \to F$ une application et k un réel strictement positif.*
*On dit que f est k-**Lipschitzienne** si, et seulement si*

$$\forall (x, x') \in E^2,\ d_F\left(f(x), f(x')\right) \leq k d_E(x, x').$$

De plus
1) f est dite Lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-Lipschitzienne. La plus petite constante k telle que f soit k-Lipschitzienne est appelée constante de Lipschitz.
2) f est dite contractante si et seulement s'il existe un $k \in [0, 1[$ tel que f soit k-Lipschitzienne.

1.3.2 Fonction localement Lipschitzienne

Définition 1.16 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est localement Lipschitzienne si, pour tout x de I, il existe un intervalle $]a, b[$ contenant x, et un réel $K \geq 0$, tels que, pour tous u, v de $]a, b[\cap I$,*

$$|f(u) - f(v)| \leq K|u - v|.$$

Remarque Les fonctions localement Lipschitziennes sont automatiquement continues.

Le théorème suivant identifie la fonction Lipschitzienne et la fonction localement Lipschitzienne :

Théorème 1.4 *Toute fonction localement Lipschitzienne sur un espace compact est automatiquement Lipschitzienne.*

1.3.3 Fonction localement intégrable

Définition 1.17 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout segment $[a, b]$ est intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ converge pour tout couple de réels (a, b) avec $a < b$.*
Plus généralement, si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est localement intégrable sur Ω si pour toute partie compacte K de Ω, $f \times \mathbf{1}_K$ est intégrable. On note $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions localement intégrables sur Ω, et $L^1_{loc}(\Omega)$ son quotient par le sous-espace des fonctions nulles presque partout.

1.4 Théorèmes de point fixe fondamentaux

Définition 1.18 ***(Point fixe)*** *Soient (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*

Théorème 1.5 ***(Théorème de point fixe de Banach)*** *Soit $M \subseteq E$ un sous ensemble fermé non vide de l'espace métrique complet (E, d) et $f : M \to M$ une application k-contractante, i.e : il existe $0 < k < 1$, tel que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$, pour tout $x, y \in M$. Alors f possède un unique point fixe dans M.*

Théorème 1.6 ***(Théorème de point fixe de Brouwer)*** *Soit C un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, et $f : C \to C$ une application continue. Alors f admet au moins un point fixe dans C.*

Théorème 1.7 ***(Théorème de point fixe de Schauder)*** *Soit C un ensemble non vide compact et convexe d'un espace de Banach E et $f : C \to C$ une application continue. Alors f possède, au moins un point fixe.*

1.5 Ensemble résolvant, spectre et résolvante d'un opérateur

Définition 1.19 • *On appelle ensemble résolvant d'un opérateur linéaire A est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$, défini par :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

• *On appelle spectre d'un opérateur linéaire A le complémentaire de l'ensemble résolvant de A dans $\mathbb{C}$, défini par :*

$$\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A).$$

• *La résolvante d'un opérateur linéaire A est définie par $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$.*

1.6 Lemme de Gronwall, fonction équicontinue et théorème d'Ascoli

Lemme 1.1 *Soient f, g et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives, et vérifiant l'inégalité suivante : pour tout $t \in [a, b]$,*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds.$$

Alors , pour tout t de $[a, b]$:

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)du\right)ds.$$

Définition 1.20 *Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) est* ***équicontinue*** *si*

$$\forall x, y \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |x - y| < \sigma \Longrightarrow |f_n(x) - fn(y)| < \epsilon.$$

Théorème 1.8 ***(Ascoli)*** *Soit (E, d) un espace métrique compact, (F, δ) un espace métrique complet.*
Une partie $A \in \mathcal{C}(E, F)$ est relativement compacte si et seulement si :
1. *A est équicontinue , c'est-à-dire :*

$$\forall x, y \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall f \in A, \quad d(x, y) < \sigma \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

2. *Pour tout $x \in E$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

1.7 Intégrale de Bochner

L'intégrale de Bochner généralise la notion d'intégrale de Lebesgue pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach.

Mesurabilité et fonctions simples

Définition 1.21 ***(Fonction simple)*** *Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite simple (ou étagée), si elle est mesurable et s'il existe un nombre fini d'ensembles Lebesgue-mesurables $B_{i_{i=1,...,n}} \subset \mathbf{B}$ de mesure finie, deux à deux disjoints tels que, u prenne une valeur constante $b_i \in X$ sur chaque B_i pour $i = 1, ..., n$ et u s'annule sur $B_n = \Omega / \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$. Il revient au même de dire que $u = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_{B_i}$, où χ_{B_i} est la fonction caractéristique de l'ensemble $B_i \subset \Omega$ et $b_n = 0$. On note $S(\Omega, X)$ l'ensemble des fonctions simples de Ω dans X.*

Proposition 1.2 *L'ensemble de fonctions simples $S(\Omega, X)$ est un espace vectoriel.*

Définition 1.22 ***(fonction fortement mesurable)*** *Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(\Omega, X)$ telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(x) - u(x)\|_X = 0, \text{pour p.p. } x \in \Omega.$$

Proposition 1.3

1. *L'ensemble des fonctions fortement mesurables est un espace vectoriel.*
2. *Si $u : \Omega \to X$ est fortement mesurable alors la fonction*

$$\|u\|_X : \Omega \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \|u(x)\|_X$$

est aussi fortement mesurable.

Définition 1.23 ***(Fonction Bochner-intégrable)*** *Une fonction $u : \Omega \to X$ est dite Bochner-intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S(\Omega, X)$ telle que $u_n(x) \to u(x)$ pour p.p. $x \in \Omega$ et $\int_\Omega \|u_n(x) - u(x)\|_X dx \to 0$. On note l'ensemble des fonctions Bochner-intégrables de Ω dans X par $\mathcal{L}^1(\Omega, X)$. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant les propriétés citées dans la définition ci-dessus est dite suite approximante pour u.*

Proposition 1.4 1. *Une fonction $u : \Omega \to X$ est Bochner-intégrable ssi u est fortement mesurable et*

$$\int_\Omega \|u(x)\|_X dx < \infty.$$

2. *$\mathcal{L}^1(\Omega, X)$ est un espace vectoriel.*

Définition 1.24 *Si $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, X)$, on définit*

$$\int_\Omega u(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n(x)dx,$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arbitraire de $S(\Omega, X)$ approximante pour u. La valeur $\int_\Omega u(x)dx$ s'appelle l'intégrale de Bochner de la fonction u.

Remarque. Lorsque $A \subset \Omega$ est Lebesgue -mesurable et $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, X)$, on définit

$$\int_A u(x)dx = \int_\Omega u(x)\chi_A dx.$$

Proposition 1.5 1. *Si $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, X)$, on a :*

$$\| \int_\Omega u(x)dx\|_X \leq \int_\Omega \|u(x)\|_X dx.$$

2. *L'intégrale de Bochner $\int : \mathcal{L}^1(\Omega, X) \to X$ est une application linéaire.*
3. *Si A et B sont deux ensembles Lebesgue-mesurables disjoints de Ω, alors pour tout $u \in \mathcal{L}^1(\Omega, X)$, on a*

$$\int_{A\cup B} u(x)dx = \int_A u(x)dx + \int_B u(x)dx.$$

Chapitre 2

Les semi-groupes d'opérateurs linéaires et leurs propriétés

Introduction

Dans ce chapitre, nous rappellons les notions essentielles de la théorie de semi-groupes d'opérateurs linéaires, nécessaires pour notre travail. Pour plus de détails, voir [1], [2] .

2.1 Les semi-groupes d'opérateurs linéaires

Définition 2.1 ***(Semi-groupe)*** *Soit X un espace de Banach. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de X dans X est dite semi-groupe sur X si :*

1. *$T(0) = I$ (I est l'opérateur identité dans X)*
2. *$T(s+t) = T(s) \circ T(t)$ pour tous $t, s \geq 0$.*

Exemple On considère l'espace de Banach $X = L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Pour $t \geq 0$, soit l'opérateur linéaire T_t défini sur l'espace X, par

$$T_t(f)(x) = f(x+t).$$

La famille d'opérateurs linéaires $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur l'espace X, car :

1. Pour $t = 0$, $T_0(f)(x) = f(x)$.
2. Pour tous $t, s \geq 0$, on a $T_(t+s)f(x) = f(x+t+s) = (T_t \circ T_s)f(x)$.

Définition 2.2 ***(Semi-groupe fortement continu ou C_0-Semi-groupe)*** *On dit qu'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, l'application*

$t \mapsto T(t)x$ de $\mathbb{R}_+$ dans X est continue.
Cette propriété peut être remplacée par :

$$\forall x \in X, \lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0.$$

Proposition 2.1
1. *Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est C_0-semi-groupe, alors il existe deux constantes $M \geq 1$ et $w \geq 0$ telles que : $\forall t \geq 0, \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}$.*
2. *Si $M = 1$ et $w = 0$ alors $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, on dira que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe de contraction.*

Définition 2.3 ***(Semi-groupe uniformément continu)*** *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X est dit uniformément continu sur un espace de Banach X si :*

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Remarque Si $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu alors $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0 Semi-groupe. La réciproque est fausse en général.

2.2 Générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe

Définition 2.4 *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe, l'opérateur linéaire A défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = \{x \in X, \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} \textit{ existe}\}. \\ \textit{et} \\ Ax = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t}. \end{cases}$$

est appelé le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ et $D(A)$ est le domaine de l'opérateur A.

Théorème 2.1 *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur X si, et seulement si A est un opérateur linéaire borné sur X.*

Proposition 2.2 *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe sur l'espace X et A le générateur infinitésimal alors :*

a) $\forall x \in X,$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

b) $\forall x \in X$ *on a*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \ et \ A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

c) $\forall x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ *et*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

d) $\forall x \in D(A),$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Démonstration. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X et A son générateur infinitésimal alors :

a) Montrons que $\forall x \in X,$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

Autrement dit : montrons que $\forall x \in X$,

$$\lim_{h \to 0^+} \|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds\|_X = 0.$$

Nous avons

$$\|\frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds\|_X \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|(T(s)x - T(t)x)ds\|_X.$$

L'application $t \mapsto T(t)x$ est continue, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s, t \in \mathbb{R}_+,$

$$|s - t| \leq \delta \Rightarrow \|T(s)x - T(t)x\| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|(T(s)x - T(t)x)ds\|_X \leq \varepsilon$$

Donc

$$\forall x \in X, \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

b) Montrons que $\forall x \in X$,

$$\int_0^{t+h} T(s)xds \in D(A) \; et \; A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x.$$

Comme A le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ alors :

$$A = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}.$$

Calculons $A(\int_0^t T(s)xds)$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\int_0^t \frac{T(h+s)x - T(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)ds\right).
\end{aligned}$$

Posons $h+s=\alpha \to ds = d\alpha$, on peut écrire

$$\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)xds = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(\alpha)d\alpha - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds.$$

et

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_h^t T(s)xds.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)\int_0^t T(s)xds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds \\
&\quad + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^h T(s)xds \\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= T(t)x - T(0)x.
\end{aligned}$$

Donc

$$A(\int_0^t T(s)xds) = T(t)x - x. \; et \; \int_0^{t+h} T(s)xds \in D(A)$$

c) Montrons que $\forall x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x.$$

On a

$$AT(t)x = \left(\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\right) T(t)x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h+t)-T(t)}{h} x = \frac{d}{dt}T(t)x \quad ....(1)$$

D'autre part

$$T(t)Ax = T(t)\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\right) x = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h+t)-T(t)}{h} x = \frac{d}{dt}T(t)x \quad ....(2)$$

De (1) et (2) on obtient

$$\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x, \forall x \in D(A) et T(t)x \in D(A).$$

d) Montrons que $\forall x \in D(A)$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Il suffit d'intégrer de s à t l'égalité obtenue dans ***c***, alors

$$\int_s^t \frac{d}{dt}T(t)x = \int_s^t T(t)Ax = \int_s^t AT(t)x.$$

donc

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

$\square$

Théorème 2.2 ***(Théorème de Hille-Yosida)*** *Un opérateur linéaire A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) l'opérateur A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
(ii) $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$, où $\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A et

$$\|(A-\lambda I)^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{Re\lambda - \omega}, \ pour \ Re\lambda > \omega.$$

Démonstration. Voir [1]. □

Le résultat suivant généralise le théorème de Hille-Yosida :

Théorème 2.3 ***(Théorème de Phillips-Miyadera-Feller)***
Un opérateur linéaire A vérifie les deux conditions suivantes :
(i) A est fermé et $D(\bar{A}) = X$.
(ii) il existe deux nombres $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$, tels que l'ensemble résolvant de A,

$$\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\} \text{ et } \|(A-\lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \text{ pour } Re\lambda > \omega, n = 1, 2, ...$$

si, et seulement si, A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, tels que

$$\|T(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

2.3 Quelques semi-groupes particuliers

2.3.1 Semi-groupe différentiable

Définition 2.5 • *Un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est dit différentiable pour $t > t_0$, si pour tout $x \in X$, l'application $t \longmapsto T(t)x$ est différentiable pour $t > t_0$.*
• *$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est dit différentiable, s'il est différentiable pour $t > 0$.*

2.3.2 Semi-groupe compact

Définition 2.6 *Un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}$ pour $t > t_0$ est dit compact si pour chaque $t > t_0$ l'opérateur $T(t)$ est compact. $T(t)$ est dit compact s'il est compact pour $t > 0$.*

Notons que si $T(t)$ est compact pour $t \geq 0$, alors en particulier l'opérateur d'identité est compact et donc l'espace X est de dimension finie.
Remarque Si $T(t_0)$ est compact pour certains $t_0 > 0$ alors T(t) est compact pour tout $t \geq t_0$, puisque $T(t) = T(t-t_0)\, T(t_0)$ est borné.

Théorème 2.4 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, si $T(t)$ est compact pour $t > t_0$ alors $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continue pour $t > t_0$.*

Démonstration. Soit $\|T(s)\| \leq M$ pour $0 \leq s \leq 1$ et soit $\epsilon > 0$ donné, si $t > t_0$ alors l'ensemble $U_t = \{T(t)x, \|x\| \leq 1\}$ est compact et par conséquent, il existe $x_1, x_2, ..., x_N$ tels que les boules ouvertes de rayon $\frac{\epsilon}{2(M+1)}$ centrées en $T(t)x_j, 1 \leq j \leq N$ couvrentU_t.
De la continuité de $T(t)$, il est clair qu'il existe un $0 < h_0 \leq 1$ tel que

$$\|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \texttt{pour} \quad 0 \leq h \leq h_0 \quad \texttt{et} \quad 1 \leq j \leq N.$$

Soit $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, alors il existe un indice j, $1 \leq j \leq N$ (j dépendant de x), tel que

$$\|T(t)x - T(t)x_j\| \leq \frac{\epsilon}{2(M+2)}.$$

Ainsi, pour $0 \leq h \leq h_0$ et $\|x\| \leq 1$, nous avons

$$\|T(t+h)x - T(t)x\| \leq \|T(h)\| \|T(t)x - T(t)x_j\| + \|T(t+h)x_j - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - T(t)x\| < \epsilon.$$

Ce qui prouve la continuité de $T(t)$ pour la topologie uniforme des opérateurs pour $t > t_0$. □

Théorème 2.5 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}, T(\mathrm{t})$ est un semi-groupe compact si, et seulement si :*

(1) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *est uniformément continue pour $t > 0$*

(2) $R(\lambda, A)$ *est compact pour $\lambda \in \rho(A)$.*

Démonstration. $(Voir[2]p.106 - 107)$ Avant de présenter la preuve, notons que si $R(\lambda, A)$ est compact pour certains $\lambda \in \rho(A)$, alors il est compact pour tout $\lambda \in \rho(A)$, cela découle de l'identité résolvante

$$R(\mu, A) = R(\lambda, A) + (\lambda - \mu) R(\lambda, A) R(\mu, A), \forall \mu, \lambda \in \rho(A).$$

Conditions nécessaires : il suffit de montrer que si $T(t)$ est compact alors les condition (1) et (2) sont vérifiées.
D'après le théorème précédent, la condition (1) est vérifiée, pour la condition (2), on note que la continuité de $T(t)$ dans la topologie uniformes des opérateurs implique la convergence uniforme de l'intégrale

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds.$$

Pour $\lambda \in \rho(A)$ et $\epsilon > 0$ on défini

$$R_\epsilon(\lambda) = \int_\epsilon^\infty e^{-\lambda s} T(s) ds$$

Puisque $T(t)$ est compact, la famille d'opérateurs $\{R_\epsilon(\lambda), \epsilon > 0\}$ est compacte pour chaque $\lambda \in \rho(A)$. Il suffit montrer que $R_\epsilon(\lambda)$ converge vers $R(\lambda, A)$ dans la topologie uniforme d'opérateurs, comme $\epsilon \to 0$, nous avons

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A) - R_\epsilon(\lambda)\|_{L(X)} &\leq \int_0^\epsilon e^{-\lambda s}\|T(s)\|ds \\ &\leq M\int_0^\epsilon e^{-(\lambda-w)s}ds \\ &\leq M\epsilon e^{w\epsilon} \to 0 \ quand\ \epsilon \to 0.\end{aligned}$$

Pour $\lambda > w$ puisque $\epsilon > 0$, cela montre que $R(\lambda, A)$ est la limite uniforme d'un famille d'opérateurs compacts et, par conséquent, elle doit être compacte.

Conditions suffisantes : puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément continu, l'intégrale

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)ds$$

est définie pour la topologie uniforme d'opérateurs, pour $t > 0$ on définit

$$T_\lambda(t) = \lambda R(\lambda, A)T(t), \lambda \in \rho(A).$$

D'après la condition (2), $R(\lambda, A)$ est compact et $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, il s'ensuit que l'ensemble

$$\{T_\lambda(t) = \lambda R(\lambda, A)T(t), \lambda \in \rho(A)\}$$

est un famille d'opérateurs compacts dans X et comme les limites uniformes des opérateurs compactes sont compactes, donc

$$T_\lambda(t) = \lambda R(\lambda, A)T(t), \lambda \in \rho(A)$$

converge vers l'opérateur identité lorsque $\lambda \to \infty$, il suffit de montrer que $T_\lambda(t)$ converge vers $T(t)$ dans la topologie uniforme des opérateurs. Comme $\lambda \to \infty$. Pour cela, nous écrivons pour $t > 0$

$$\begin{aligned}T_\lambda(t) - T(t) &= \lambda R(\lambda, A)T(t) - T(t) \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\tau}(T(t+\tau) - T(t))d\tau \\ &= \lambda\int_0^\gamma e^{-\lambda\tau}(T(t+\tau) - T(t))d\tau + \lambda\int_\gamma^\infty e^{-\lambda\tau}(T(t+\tau) - T(t))d\tau.\end{aligned}$$

où $\gamma > 0$. En estimant les deux intégrales pour $\lambda > w$, comme $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ on obtient

$$\|T_\lambda(t) - T(t)\| \leq sup_{0\leq\tau\leq\gamma}\|T_\lambda(t) - T(t)\| + M\frac{2\lambda - w}{\lambda - w}e^{wt-(\lambda-w)\gamma}. \qquad (*)$$

Pour $\gamma > 0$, il clair que le second terme de $(*)$ converge vers zéro lorsque $\lambda \to \infty$. donc

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda(t) - T(t)\| \leq sup_{0 \leq \tau \leq \gamma} \|T_\lambda(t) - T(t)\|.$$

Puisque $\gamma > 0$ et $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est continue dans la topologie des opérateurs uniformes, on peut choisir pour tout $\epsilon > 0$ et $\gamma > 0$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|T_\lambda(t) - T(t)\| \leq \epsilon.$$

On peut choisir ϵ petit, alors $T_\lambda(t)$ converge vers $T(t)$ lorsque $\lambda \to \infty$ pour dans la topologie uniforme des opérateurs et donc $T(t)$ est un opérateur compact. $\square$

2.3.3 Semi-groupe analytique

Ici, nous étudions la possibilité d'étendre le domaine du paramétre t des semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ à des régions du plan complexe contenant l'intervalle $[0, \infty[$, appelées angles autour de la demi-droite réelle positive, notées :

$$\triangle = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2, \theta_1 < 0 < \theta_2\}.$$

Définition 2.7 *Soit $\triangle$ un secteur dans $\mathbb{C}$. On appelle semi-groupe analytique la famille d'opérateurs linéaires bornés $\{T(z), z \in \Omega\}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

1. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *pour tous* $z_1 z_2 \in \triangle$.
2. $T(0) = I$, *où I désigne l'opérateur identité.*
3. *Pour chaque* $x \in X, \lim_{z \to 0} T(z)x = x$ *où* $z \in \triangle$.
4. *La fonction* $z \mapsto T(z)$ *est analytique dans* $\triangle$.

Chapitre 3

Généralités sur les équations intégro-différentielles

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions de base sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles ainsi que leurs différentes propriétés, (voir [6]).

3.1 Équations intégrales

Définition 3.1 *Toute équation de la forme :*

$$\alpha(x)\psi(x) = f(x) + \lambda \int K(x,t)\psi(t)dt, \tag{3.1}$$

*est appelée **équation intégrale** (E.I), où ψ est une fonction inconnue, α et f sont des fonctions connues, λ est un paramètre réel et K le noyau.*

3.1.1 Classifications des équations intégrales

Nous allons présenter une liste des équations intégrales de Fredholm et de Volterra :

Définition 3.2 ***(Équation intégrale de Fredholm)***

*Une équation de la forme (3.1) dont les bornes d'intégration sont fixées est dite équation intégrale **linéaire de Fredholm.***

$1-$ *Si $f(x) = 0$ l'équation s'écrit*

$$\alpha(x)\psi(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)(\psi(t))dt.$$

et elle est dite homogène. .

$2-$ *Si* $\alpha(x)=0$, *l'équation s'écrit*

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\psi(t)dt=0.$$

et elle est dite de première espèce.

$3-$ *Si* $\alpha(x)=1$, *l'équation s'écrit*

$$\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\psi(t)dt.$$

et elle est dite de seconde espèce.

Définition 3.3 ***(Équation intégrale de Volterra)***

• *On appelle une équation intégrale* ***de Volterra linéaire*** *une équation de la forme :*

$$\alpha(x)\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\psi(t)dt,$$

où ψ *est une fonction inconnue,* K , α *et* f *sont des fonction connues et* λ *est un paramètre réel.*

• *On appelle équation intégrale de* ***Volterra non linéaire*** *une équation de la forme :*

$$\alpha(x)\psi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t,\psi(t))dt.$$

Remarque 3.1 Les équations intégrales de Volterra de première espèce, de seconde ou homogène sont définies de la même manière précédente (Équation intégrale de Fredholm) sauf que la borne d'intégration supérieure est variable, c-à-d., $b=x$.

Exemple 3.1

$-$ Équations intégrales linéaires homogènes de Volterra de première espèce

$$\lambda\int_0^x (x^2-1)\psi(t)dt=0.$$

$-$ Équations intégrales linéaires non homogènes de Fredholm de seconde espèce

$$\psi(t)-\lambda\int_{-1}^1 (x^2-t)\psi(t)dt=x^2=sin(x)+1,x\in[-1,1].$$

Lemme 3.1 *Soit f un fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors*

$$\int_a^x \int_a^t f(s)dsdt = \int_a^x (x-t)f(t)dt, x \in [a,b].$$

Démonstration.
Soit $g(t) = \int_a^t f(s)ds$, $g(a) = 0$, $g^{'}(t) = f(t)$. Par intégration par parties, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int_a^x \int_a^t f(s)dsdt &= \int_a^x g(t)dt \\
&= tg(t)|_a^x - \int_a^x tf(t)dt \\
&= xg(x) - \int_a^x tf(t)dt = x\int_a^x f(s)ds - \int_a^x tf(t)dt \\
&= \int_a^x (x-t)f(t)dt.
\end{aligned}$$

□

3.2 Équations intégro-différentielles

Définition 3.4 *On appelle* ***équation intégro-différentielle*** *(E.I.D) une équation composée de deux opérations intégrale et différentielle dont la fonction inconnue ψ.*

3.2.1 Classification des équations intégro-différentielles

On distingue trois types d'équations intégro-différentielles :

Définition 3.5 ***(Équations intégro-différentielles de Fredholm)***
Une équation intégro-différentielle est dite de Fredholm est de la forme :

$$\psi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\psi(t)dt,$$

où $\psi^{(n)}(x)$ indique la nième dérivée de $\psi(x)$.

Exemple 1 :

$$\psi^{'}(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \int_0^1 x\psi(t)dt, \qquad \psi(0) = 0.$$

et

$$\psi^{''}(x) + \psi^{'}(x) = 1 - sinx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xt\psi(t)dt, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi^{'}(0) = 1.$$

Définition 3.6 ***(Équations intégro-différentielles de Volterra)***
Une équation intégro-différentielle est dite de Volterra, si elle s'écrit sous la forme :

$$\psi^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} k(x,t)\psi(t)dt,$$

où $\psi^{(n)}(x)$ indique la nième dérivée de $\psi(x)$.

Exemple 2 :

$$\psi^{'}(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 - xe^x - \int_{0}^{x} t\psi(t)dt, \qquad \psi(0) = 0.$$

et

$$\psi^{''}(x) + \psi^{'}(x) = 1 - x - (sinx + cosx) - \int_{0}^{x} t\psi(t)dt, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi^{'}(0) = -1.$$

Définition 3.7 ***(Équation intégro-différentielle de Volterra- Fredholm)***
Si les deux opérateurs de l'intégration de Fredholm et Volterra coincident alors l'équation intégro-différentielle est dite de Fredholm -Volterra, s'écrit sous la forme :

$$\psi^{(n)}(x) = \lambda_1 \int_{a}^{b} K_1(x,t)\psi(t)dt + \lambda_2 \int_{a}^{x} K_2(x,t)\psi(t)dt + f(x).$$

Remarque 3.2
1− Si $f(x) = 0$ dans l'équation intégro-différentielle de **Volterra** ou de **Fredholm** ou de **Volterra-Fredholm** , alors l'équation intégro-différentielle est dite homogène. sinon ($f \neq 0$), elle est dite non homogène.
2− Une équation intégro-différentielle (E.I.D) est dite de première espèce si la partie différentielle est nulle, sinon elle est dite de deuxième espèce.
3− Une équation intégro-différentielle (E.I.D) est dite ordinaire si la fonction inconnue dépend d'une seule variable indépendante, alors si la fonction inconnue dépend de deux ou plusieurs variables indépendantes, alors l'équation intégro-différentielle estdite partielle.
Remarque 3.3
Une équation intégro-différentielle est dite singulière dans l'un des cas suivants :
∗ L'une des bornes d'intégration ou les deux sont infinies.
∗ Le noyau est non borné sur l'intervalle d'intégration.

3.2.2 Conversion d'une équation intégro-différentielle $(E.I.D)$ de Fredholm à une équation intégrale $(E.I)$ de Fredholm

Soit l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\begin{cases} u^{'}(s) = a(s)u(s) + b(s) + \int_0^1 K(s,t)u(t)dt, \\ u(0) = \alpha \quad 0 \leq s \leq 1, \end{cases} \tag{3.2}$$

où $a(s), b(s)$ et $K(s,t)$ sont des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$.
Si on pose $u^{'}(s) = y(s)$, on obtient :

$$u(s) = \alpha + \int_0^s y(t)dt. \tag{3.3}$$

D'après (3.2),(3.3), on trouve :

$$y(s) = a(s)[\alpha + \int_0^s y(t)dt] + b(s) + \int_0^1 K(s,t)[\alpha + \int_0^t y(\tau)d\tau]dt.$$

Alors

$$y(s) = \underbrace{a(s)\alpha + b(s) + \alpha \int_0^1 K(s,t)dt}_{g(s)} + \underbrace{a(s)\int_0^s y(t)dt + \int_0^1 K(s,t)(\int_0^t y(\tau)d\tau)dt}_{f(s)}.$$

On a

$$\int_0^1 K(s,t)(\int_0^t y(\tau)d\tau)dt = \int_0^1 (\int_0^t K(s,\tau)d\tau))y(t)dt.$$

On pose

$$K^{'}(s,t) = \int_t^1 K(s,\tau)d\tau.$$

Donc

$$f(s) = a(s)\int_0^s y(t)dt + \int_0^1 K^{'}(s,t)y(t)dt.$$

$$f(s) = \int_0^1 [a(s)H(s-t) + K^{'}(s,t)]y(t)dt,$$

tel que

$$H(s-t) = \begin{cases} 1 \quad \texttt{si} \;\; s-t \geq 0. \\ 0 \quad \texttt{si} \;\; s-t \leq 0. \end{cases}$$

Supposons

$$a(s)H(s-t) + K^{'}(s,t) = \phi(s,t).$$

Alors, on obtient l'équation intégrale de Fredholm :

$$y(t) = g(s) + \int_0^1 \phi(s,t)y(t)dt.$$

Chapitre 4

Applications des semi-groupes compacts à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites

4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une classe d'équations intégro-différentielles abstraites. On entend, ici, par équations intégro-différentielles abstraites (en abrégé EIDA), des équations intégro-différentielles à coefficients opérateurs linéaires (en général non bornés) dans un espace de Banach.
Nous allons présenter, ici, une synthèse des résultats obtenus dans l'article de D. Bahuguna et S. K. Srivastava, voir [3], intitulé :

Semilinear integro-differential equations with compact semigroups.

En utilisant une approche basée sur la théorie des semi-groupes compacts, nous allons étudier, dans un espace de Banach X, l'existence locale et l'existence globale d'une solution intégrale (mild solution) de l'équation intégro-différentielle abstraite suivante (voir [1], [3], [5] et [4]) :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t-s)g(t, u(t))ds, \ 0 \leq t_0 < T_0 \leq +\infty, \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

où :

- l'opérateur $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans l'espace X,
- les application non linéaires $f, g : J \times U \to X$, $J = [t_0, T_0]$,$t_0 < T_0 \leq +\infty$ sont continues où U est un sous ensemble ouvert de X,
- $a \in L^1(J)$ et $u_0 \in U$.

4.2 Étude du cas particulier $(g = 0)$

Voir [1]. Nous considérons le problème semi-linéaire abstrait à valeur initiale :

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), \ 0 \leq t_0 < T_0 \leq +\infty, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Pour ce problème, l'existence d'une solution intégrale (mild) unique est assurée sous les conditions : $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ dans l'espace X, $f(t, u)$ est continue par rapport à ses deux variables et elle est localement Lipschitzienne et uniformément continue en u.
Si $A = 0$ où la continuité Lipschitzienne de f par rapport à u n'est pas vérifiée, alors l'existence d'une solution intégrale (mild solution) n'est plus garantie (voir [1]).
Définition 4.1 ***(Solution intégrale (mild))*** *Une fonction $u : [0, T] \to X$ est dite solution intégrale (mild) du problème (4.2), si u satisfait l'équation intégrale :*

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_0^t T(t - s)f(s, u(s))ds.$$

4.2.1 Existence locale de la solution

Théorème 4.1 *Soit X un espace de Banach et $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si $f : J \times U \to X$ est continue, où U est un ouvert de X, alors $\forall u_0 \in U, \exists t_1, t_0 < t_1 < T_0$ telle que le problème (4.2) a une solution intégrale (mild) u sur $J_0 = [t_0, t_1]$.*

Démonstration. Voir Pazy ([1], P.191). □

4.2.2 Existence globale de la solution

Théorème 4.2 *Soit $-A$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, si $f : [t_0, +\infty[\times X \to X$ est continue et envoie des ensemble bornés dans $[0, +\infty[\times X$ aux ensembles bornés dans X. $\forall u_0 \in X$, l'équation (4.2) a une solution intégrale (mild) u sur l'intervalle maximal d'existence $[0, t_{\max}[$ si $t_{\max} < +\infty$ alors :*

$$\lim_{t \uparrow T_{\max}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Démonstration. Tout d'abord, nous notons qu'une solution intégrale (mild) u de (4.2) définie sur un intervalle fermé $[0, t_1]$ peut être étendue à un intervalle plus large $[0, t_1 + \psi]$,$\psi > 0$, ceci en définissant $u(t + t') = w(t)$ où $w(t)$ est une solution intégrale (mild) du problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dw(t)}{dt} + Aw(t) = f(t, w(t)), 0 \leq t_0 < T_0 \leq +\infty \\ w(t_0) = u(t_1). \end{cases} \tag{4.3}$$

L'existence de cette solution sur un intervalle de longueur positive $\psi > 0$ est assurée par le Théorème 4.1.

Soit $[0, t_{max}]$ l'intervalle maximal jusqu'à lequel la solution intégrale u de (4.2) peut être prolongée. Nous montrons que si $t_{\max} < +\infty$, alors $\|u(t)\|$ tend vers l'infini lorsque t tend vers $t_{\max}$. Pour ce faire, nous commençons par prouver que $t_{\max} < +\infty$ implique $\overline{lim}_{t \uparrow T_{\max}} \|u(t)\| = +\infty$.

En effet, si $t_{\max} < +\infty$ et $\overline{lim}_{t \uparrow t_{\max}} \|u(t)\| < +\infty$, nous supposons que $\|T(t)\| \leq M$ et $\|u(t)\| \leq K$ pour $0 \leq t < t_{\max}$, où M et K sont des constantes.

Selon hypothèse sur la fonction f, il existe également une constante N telle que

$$\|f(t, u(t))\| \leq N \textit{ pour } 0 \leq t < t_{\max}.$$

Maintenant, si $0 < \rho < t < t^{'} < t_{\max}$, alors

$$\begin{aligned}\|u(t^{'}) - u(t)\| \leq \quad & \|T(t^{'}u_0 - T(t)u_0\| \\ & + \int_0^{t-\rho} (T(t^{'}-s) - T(t-s))f(s,u(s))ds\| \\ & + \int_{t-\rho}^{t} (T(t^{'}-s) - T(t-s))f(s,u(s))ds\| \\ & +\| \int_t^{t^{'}} T(t^{'}-s)f(s,u(s))ds\|. \\ & \leq \|T(t^{'}u_0 - T(t)u_0\| + N\int_0^{t-\rho} \|T(t^{'}-s) - T(t-s)\|ds + 2MN\rho + (t^{'}-t)MN.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Puisque $t > \rho > 0$ est arbitraire et $T(t)$ est uniformément continu pour $t \geq p > 0$, le membre de droite de (4.4) tend vers zéro lorsque t et $t^{'}$ tendent vers $t_{\max}$.
Par conséquent, $lim_{t\to t_{\max}} u(t) = u(t_{max})$ existe et, grâce à la première partie de la preuve, la solution u peut être prolongée au-delà de $t_{\max}$, ce qui contredit la maximalité de $t_{\max}$. Par conséquent, l'hypothèse selon laquelle $t_{\max} < +\infty$ implique que $\overline{lim}_{t\uparrow t_{max}} \|u(t)\| = +\infty$.
Pour conclure la preuve, nous montrons que

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Si cela est faux, alors il existe une suite $t_n \uparrow t_{\max}$ et une constante K telle que $\|u(t_n)\| \leq K$ pour tout n. Supposons que $\|T(t)\| \leq M$ pour $0 \leq t \leq t_{\max}$ et posons

$$N = sup\{\|f(t,u)\|, 0 \leq t \leq t_{\max}, \|u\| \leq M(K+1)\}.$$

Puisque $t \mapsto \|u(t)\|$ est continue et que $\lim_{t\uparrow t_{max}} \|u(t)\| = +\infty$, nous pouvons trouver une séquence $\{h_n\}$ avec les propriétés suivantes : $h_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, $\|u(t)\| \leq M(K+1)$ pour $t_n \leq t \leq t_n + h_n$ et $\|u(t_n + h_n)\| = M(K+1)$. Mais, nous avons

$$\begin{aligned} M(K+1) = \|u(t_n+h_n)\| \leq \|T(h_n)u(t_n)\| + \int_{t_n}^{t_n+h_n} \|T(t_n+h_n-s)f(s,u(s)\|ds. \\ \leq MK + h_nMN \end{aligned}$$

Ce qui donne une contradiction lorsque $h_n \to 0$. Ainsi

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}} \|u(t)\| = +\infty.$$

□

Le résultat important suivant dû à Pazy ([1]), nous donne deux conditions utiles pour l'existence de solutions intégrales (mild) globales du problème (4.2) sous les hypothèses du théorème précédent.

Corollaire 4.3 *Soit l'opérateur linéaire $-A$ générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si l'application non linéaire $f : [t_0, +\infty[\times X \to X$ est continue et envoie des sous-ensembles bornés de $[t_0, +\infty[\times X$ aux sous-ensembles bornés de X alors l'une des deux conditions suivantes est suffisante pour l'existence globale d'une solution intégrale (mild) du problème (4.2) :*

i) *Il existe une fonction continue $k_0 : [t_0, +\infty[\to [t_0, +\infty[$ telle que $\|u(t)\| \leq k_0(t)$ pour tout t dans l'intervalle d'existence de u.*

ii) *Il existe deux fonctions localement intégrables $k_1, k_2 : [t_0, +\infty[\to [0, +\infty[$, telles que*

$$\|f(t,v)\| \leq k_1(t)\|v\| + k_2(t),\ \forall t_0 \leq t \leq +\infty,\ \ v \in X.$$

4.3 Étude de l'équation intégro-différentielle dans le cas général ($g \neq 0$)

Définition 4.2 ***(Solution intégrale (mild))*** *Pour la solution intégrale (mild) de (4.1) sur J, on entend une fonction $u \in C(J, X)$ vérifiant l'équation intégrale :*

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds.$$

4.3.1 Existence locale de la solution

Dans cette section, nous visons à généraliser les résultats du cas particulier $g = 0$ au problème à valeur initiale(4.1). Ci-dessous, nous énonçons et prouvons le résultat d'existence suivant pour (4.1) voir [3].

Théorème 4.4 *Soit X un espace de Banach, $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X, U un sous-ensemble ouvert de X et $J = [t_0, T_0[$, $t_0 < T_0 \leq +\infty$. Si les applications non linéaires $f, g : J \times U \to X$ sont continues et a est localement intégrable dans J, alors $\forall u_0 \in U, \exists t_1, t_0 < t_1 < T_0$ tel que l'équation (4.2) admet une solution intégrale (mild) locale u sur $J_0 = [t_0, t_1]$.*

Démonstration. Soit T tel que $t_0 < T < T_0 \leq +\infty$. Soit M une constante positive telle que

$$\|T(t)\| \leq M, \quad \texttt{pour} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Soit $\rho > 0$ tel que

$$B_\rho(u_0) = \{v \in X, \|v - u_0\| \leq \rho\} \subset U.$$

Choisissons $t' > t_0$ tel que $\|f(t,v)\| \leq N_1$, $\|g(t,v)\| \leq N_2$,
pour $t_0 \leq t \leq t', v \in B_\rho(u_o)$ avec N_1, N_2 des constantes positives. Nous Choisissons $t'' > t_0$ tel que

$$\|T(t-t_0)u_0 - u_0\| < \frac{\rho}{2}, \quad \texttt{pour} \quad t_0 \leq t \leq t''.$$

Soit $t_1 = \min\left\{T, t', t'', t_0 + \dfrac{\rho}{2M(N_1 + a_T N_2)}\right\}$, où $a_T = \int_{t_0}^{T} |a(s)|ds$.
Posons $Y = C([t_0, t_1]; X)$ et

$$S = \{u \in Y, u(t_0) = u_0, u(t) \in B_\rho(u_0), \ pour \ t_0 \leq t \leq t_1.\}$$

Soit S est sous-ensemble borné, fermé et convexe de Y. On définit une application

$$F : S \to Y$$

Telle que

$$(Fu)(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds. \tag{4.5}$$

Pour $u \in S$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|(Fu)(t) - u_0\| &= \|T(t-t_0)u_0 - u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\| \\
&\leq \|T(t-t_0)u_0 - u_0\| + \|\int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\| \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \int_{t_0}^{t} M[N_1 + \int_{t_0}^{s} |a(s-\tau)|N_2\tau]ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \int_{t_0}^{t} M[N_1 + a_T N_2]ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + (t_1 - t_0)M[N_1 + a_T N_2] \leq \rho.
\end{aligned}$$

Ainsi, $F : S \to S$. Maintenant, nous allons montrer que l'application F est continue de S dans S. Pour cela, on remarque d'abord que : puisque f et g sont continues sur $[t_0, T] \times U$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $u \in B_\rho(u_0)$ fixé, il existe $\delta_1(u), \delta_2(u) > 0$ tels que pour tout v dans $B_\rho(u_0)$, nous avons

$$\|u-v\|_Y \leq \delta_1(u) \Longrightarrow \|f(t,u(t)) - f(t,v(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2TM},$$

et

$$\|u-v\|_Y \leq \delta_2(u) \Longrightarrow \|g(t,u(t)) - g(t,v(t))\| \leq \frac{\varepsilon}{2a_T TM}.$$

Soit $\delta(u) = \min\{\delta_1(u), \delta_2(u)\}$, alors $\forall v \in S$, $\|u-v\| \leq \delta(u)$ implique que

$$\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\| = \|T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds$$

$$-T(t-t_0)v_0 - \int_{t_0}^t T(t-s)[f(s,v(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,v(\tau))d\tau]ds\|$$

$$\leq \int_{t_0}^t \|T(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds$$

$$+ \int_{t_0}^t \|T(t-s)\| \left[\int_{t_0}^s |a(s-\tau)|\|g(\tau,u(\tau)) - g(\tau,v(\tau))\|d\tau\right] ds$$

$$\leq \int_{t_0}^t M\frac{\varepsilon}{2TM}ds + \int_{t_0}^t Ma_T\frac{\varepsilon}{2a_T TM}ds \leq (t-t_0)2\frac{\varepsilon}{2T} \leq \varepsilon - \frac{\varepsilon t_0}{T} \leq \varepsilon.$$

Donc $F : S \to S$ est continue. D'autre part, soit

$$\tilde{S} = F(S)$$

et Pour $t \in [t_0, t_1]$ fixé, nous considérons $S(t) = \{(Fu)(t), u \in S\}$, puisque $S(t_0) = \{u_0\}$, alors $S(t_0)$ est pré-compact dans X. Pour $t > t_0$ et $0 < \varepsilon < t - t_0$, soit

$$(F_\varepsilon u)(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t-\varepsilon} T(t-s+\varepsilon-\varepsilon)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds.$$

$$(F_\varepsilon u)(t) = T(t-t_0)u_0 + T(\varepsilon)\int_{t_0}^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds \quad (4.6)$$

La compacité du semi-groupe $T(t)$ pour tout $t > 0$ et (4.6) impliquent que pour chaque ε , $0 < \varepsilon < t - t_0$, l'ensemble $S_\varepsilon(t) = \{(F_\varepsilon u)(t), u \in S\}$ est pré-compact en X . De plus, pour tout $u \in S$, nous avons :

$$\|(Fu)(t) - (F_\varepsilon u)(t)\| = \|(Fu)(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds$$

$$-T(t-t_0)u_0 - T(\varepsilon)\int_{t_0}^{t-\varepsilon} T(t-s-\varepsilon)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^s a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|$$

$$\leq \int_{t-\varepsilon}^{t} \|T(t-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]\|ds.$$

Donc

$$\|(Fu)(t) - (F_\varepsilon u)(t)\| \leq \varepsilon M(N_1 + a_T N_2). \tag{4.7}$$

D'après (4.7), il en résulte que l'ensemble $S(t)$ est pré-compact. Dans ce qui suit, on aura besoin de montrer que l'ensemble $\tilde{S}$ est équicontinu. Alors, pour tous $r_1, r_2 \in [t_0, t_1]$ avec $r_1 < r_2$, nous avons

$$\begin{aligned}&\|(Fu)(r_2) - (Fu)(r_1)\| \leq \| (T(r_2-t_0) - T(r_1-t_0))u_0) \| \\ &+\| \int_{t_0}^{r_2} T(r_2-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds \\ &- \int_{t_0}^{r_1} T(r_1-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]ds\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|(Fu)(r_2) - (Fu)(r_1)\| \quad &\leq \|(T(r_2-t_0) - T(r_1-t_0))u_0) \\ &(N_1 + a_T N_2) \int_{t_0}^{r_1} \|(T(r_2-s) - T(r_1-s))\|ds \\ &+(r_2-r_1)M(N_1 + a_T N_2).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Puisque $T(t)$ est compact, le théorème 2.4 implique que $T(t)$ est continue dans la topologie des opérateurs uniforme pour $t > 0$. Par conséquent, (4.8) tend vers zéro lorsque $r_2 - r_1$ tend vers zéro. Ainsi, l'ensemble $\tilde{S}$ est équicontinu. De plus, $\tilde{S}$ est borné. D'après le théorème d'Ascoli-Arzela, il découle que $\tilde{S}$ est pré-compact. L'existence d'un point fixe de l'application F dans l'ensemble S est une conséquence du théorème du point fixe de Schauder et tout point fixe de F dans S est une solution intégrale (mild) de (4.1) sur l'intervalle $[t_0, t_1[$. $\square$

4.3.2 Existence globale de la solution

Dans cette section, nous examinons l'existence globale d'une solution de type "mild" pour (4.1), voir [3].

Dans le théorème suivant, nous étendons les résultats du cas particulier au problème (4.1).

Théorème 4.5 *Supposons que l'opérateur linéaire $-A$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si les applications non linéaires* $f, g : [t_0, +\infty[\times X \to X$ *sont continues et envoient des sous-ensembles bornés de* $[t_0, +\infty[\times X$

aux sous-ensembles bornés de X et si a est localement intégrable dans l'intervalle $[t_0, +\infty[$, alors $\forall u_0 \in X$, l'équation (4.1) admet une solution intégrale (mild) u sur l'intervalle maximal d'existence $[t_0, T_{\max}[$ et si $T_{\max} < +\infty$ alors :

$$\lim_{t \uparrow T_{\max}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.4, le problème (4.1) admet une solution intégrale (mild) locale $u \in C([t_0, t_1[; X)$ pour $t_0 < t_1$, elle s'écrit sous la forme :

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s, u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, u(\tau))d\tau]ds.$$

Supposons que $u(t_1) < +\infty$ et considérons le problème

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + Av(t) = f(t, v(t)) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(t-s)g(t, v(t))ds, \\ v(t_1) = u(t_1). \end{cases} \tag{4.9}$$

D'après le théorème 4.4, il existe une solution intégrale (mild) $v \in C([t_1, t_2[; X)$ du problème (4.9) pour t_2, $t_1 < t_2 < +\infty$, elle est donnée par :

$$\begin{aligned} v(t) &= T(t-t_1)u(t_1) + \int_{t_1}^{t} T(t-s)[f(s, v(s)) + \int_{t_1}^{s} a(s-\tau)g(\tau, v(\tau))d\tau]ds \\ &= T(t-t_1)\left[T(t_1-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t_1} T(t_1-s)[f(s, u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, u(\tau))d\tau]ds\right] \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} T(t-s)[f(s, v(s)) + \int_{t_1}^{s} a(s-\tau)g(\tau, v(\tau))d\tau]ds \\ &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t_1} T(t-s)[f(s, u(s)) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau, u(\tau))d\tau]ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} T(t-s)[f(s, v(s)) + \int_{t_1}^{s} a(s-\tau)g(\tau, v(\tau))d\tau]ds. \end{aligned}$$

On définit l'application $\tilde{u} : [t_0, t_2[\to X$ par

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, t_1[, \\ v(t), & t \in [t_1, t_2[. \end{cases}$$

Alors $\tilde{u} \in C([t_0, t_2[; X)$ et pour $t_1 \leq t \leq t_2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t_1} T(t-s)[f(s,\tilde{u}(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau]ds \qquad (4.10)\\
&\quad + \int_{t_1}^{t} T(t-s)[f(s,\tilde{u}(s)) + \int_{t_1}^{s} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau]ds \\
&= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,\tilde{u}(s) \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t}\int_{t_1}^{s} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau ds.
\end{aligned}$$

En changeant l'ordre d'intégration dans (4.10), on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(t) &= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,\tilde{u}(s) \qquad (4.11)\\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\tau}^{t_1} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))dsd\tau \\
&\quad + \int_{t_1}^{t}\int_{\tau}^{t} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))dsd\tau \\
&= T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)[f(s,\tilde{u}(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)g(\tau,\tilde{u}(\tau))d\tau]ds.
\end{aligned}$$

D'où la fonction $\tilde{u}$ est une solution intégrale (mild) du problème (4.1) sur l'intervalle $[t_0, t_2[$. Maintenant, supposons que $[t_0, T_{\max}[$ soit l'intervalle maximal dans lequel la solution u de (4.1) peut être prolongée. Si $T_{\max} < +\infty$, alors nous montrons que $\|u(t)\|$ tend vers l'infini lorsque $t \uparrow T_{max}$. Il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{t\uparrow T_{\max}}} \|u(t)\| = +\infty.$$

Si $\overline{\lim\limits_{t\uparrow T_{\max}}} \|u(t)\| < +\infty$, alors il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers T_{max} telle que $\|u(t_n)\| \leq K$ pour une certaine constante K et pour tout n. Supposons que $\|T(t)\| \leq M$ pour $t_0 \leq t \leq T_{\max}$ et soit

$$N_1 = \sup\{\|f(t,v)\|, t_0 \leq t \leq T_{\max}, \|v\| \leq M(K+1)\}$$

et

$$N_2 = \sup\{\|g(t,v)\|, t_0 \leq t \leq T_{\max}, \|v\| \leq M(K+1)\}.$$

En utilisant la continuité de u et l'hypothèse $\overline{\lim\limits_{t\uparrow T_{\max}}} \|u(t)\| < +\infty$, on peut trouver une suite $\{h_n\}$ telle que $h_n \to 0$, $\|u(t)\| \leq M(K+1)$ pour $t_n \leq t \leq t_n + h_n$ et

$$\|u(t_n + h_n)\| = M(K+1).$$

Or

$$\begin{aligned} M(K+1) &= \|u(t_n+h_n)\| \leq \|T(h_n)T(t_n)\| \\ &+ \int_{t_n}^{t_n+h_n} \|T(t_n+h_n-s)[f(s,u(s)) + \int_{t_n}^{s} a(s-\tau)g(\tau,u(\tau))d\tau]\|ds \\ &\leq MK + h_n M(N_1 + a_{T_{\max}} N_2). \end{aligned}$$

Ce qui donne une contradiction lorsque $h_n \to 0$. Ainsi $\overline{\lim_{t\uparrow T_{\max}}} \|u(t)\| = +\infty$. □

Finalement, nous démontrons le résultat suivant sur l'existence globale de la solution intégrale (mild) du problème (4.1) :

Théorème 4.6 *Soit l'opérateur linéaire $-A$ générateur infinitésimal d'un semi-groupe compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur X. Si les applications non linéaires $f, g : [t_0, +\infty[\times X \to X$ sont continues et envoient des sous-ensembles bornés de $[t_0, +\infty[\times X$ aux sous-ensembles bornés de X et si a est localement intégrable dans l'intervalle $[t_0, +\infty[$, alors $\forall u_0 \in X$, alors l'une des deux conditions suivantes est suffisante pour l'existence globale d'une solution intégrale (mild) du problème (4.1) :*

i) *Il existe une fonction continue $k_0 : [t_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $\|u(t)\| \leq k_0(t)$ pour tout t dans l'intervalle d'existence de u.*

ii) *Il existe des fonctions $k_i : [t_0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $i = 1, 2, 3, 4$ telles que $k_1, k_2, a * k_3, a * k_4$ sont localement intégrables sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et pour $t_0 \leq t \leq +\infty$, $v \in X$*

$$\|f(t,v)\| \leq k_1(t)\|v\| + k_2(t),$$

$$\|g(t,v)\| \leq k_3(t)\|v\| + k_4(t),$$

où

$$a * k_i(t) = \int_{t_0}^{t} a(t-s)k_i(s)ds, \quad \textbf{pour} i = 3, 4.$$

Démonstration.

i) Puisque pour tout t_1,$t_0 < t_1 < +\infty$,$\|u(t_1)\| \leq k_0(t_1) < +\infty$, alors d'après le Théorème 4.5, il s'ensuit que la solution u peut être étendue au-delà de t_1, donc la solution u existe globalement.

ii) La solution intégrale (mild) u du problème (4.1) est donnée par :

$$e^{-w(t-t_0)}\|u(t)\| \leq M\|u_0\| + M\int_{t_0}^{t} e^{-w(s-t_0)}[\|f(s,u(s))\| + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)\|g(\tau,u(\tau))\|d\tau]ds. \tag{4.12}$$

Pour $t \in [t_0, +\infty[$, posons

$$\zeta(t) = M\|u_0\| + M\int_{t_0}^{t} e^{-w(s-t_0)}[k_2(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)k_4(\tau)d\tau]ds.$$

D'après (4.12) , nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{-w(t-t_0)}\|u(t)\| \\
&\leq \zeta(t) + M\int_{t_0}^{t} e^{-w(s-t_0)}[K_1(s)\|u(s)\| + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)K_3(\tau)\|u(\tau)\|d\tau]ds.
\end{aligned}$$

Pour $t_0 \leq r \leq t$, nous avons

$$\begin{aligned}
&e^{-w(t-t_0)}\|u(r)\| \\
&\leq \zeta(r) + M\int_{t_0}^{r} e^{-w(s-t_0)}[K_1(s)\|u(s)\| + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)K_3(\tau)\|u(\tau)\|d\tau]ds \\
&\leq \zeta(r) + M\int_{t_0}^{r} e^{-w(s-t_0)}[K_1(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)K_3(\tau)d\tau]\sup_{t_0\leq\tau\leq s}\|u(\tau)\|ds. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

En considérant la borne supérieure sur l'intervalle $[t_0, t]$ aux deux côtés de l'équation 4.13, on obtient

$$\begin{aligned}
&e^{-w(t-t_0)}\sup_{t_0\leq r\leq s}\|u(r)\| \quad (4.14) \\
&\leq \sup_{t_0\leq r\leq s}\zeta(r) + M\int_{t_0}^{r} e^{-w(s-t_0)}[K_1(s) + \int_{t_0}^{s} a(s-\tau)K_3(\tau)d\tau]\sup_{t_0\leq r\leq s}\|u(\tau)\|ds.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall implique que

$$e^{-w(t-t_0)}\sup_{t_0\leq r\leq t}\|u(r)\| \leq \sup_{t_0\leq r\leq t}\zeta(r) + M\int_{t_0}^{t}[e^{-w(s-t_0)}[K_1(s)$$

$$+\int_{t_0}^{s} a(s-\tau)k_3(\tau)d\tau]\exp\left\{\int_{s}^{t}[K_1(u) + \int_{t_0}^{s} a(u-\tau)K_3(\tau)du\right\}]\sup_{t_0\leq r\leq t}\|\zeta(\tau)\|ds. \quad (4.15)$$

L'inégalité (4.15) implique que $\|u(t)\|$ est bornée par une fonction continue et de ***i)*** on obtient l'existence globale de la solution intégrale (mild) u du problème (4.1).

□

4.3.3 Exemple d'application en une EDP parabolique

On considère l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}$ (Voir Pazy [1]) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),\ 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,1),\ u_x^{'}(t,0) = u_x^{'}(t,1), \qquad t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.16}$$

Dans cette section, nous allons prouver, sous des conditions appropriées, l'existence de solutions locales et globales de ce problème de valeur initiale.

Le problème abstrait : Nous commençons par introduire un cadre abstrait pratique.

Soit $X = C_p([0,1])$ l'espace de toutes les fonctions continues à valeurs réelles périodiques ayant une période 1, muni de la norme $\|u\| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |u(x)|$. X est donc constitué de fonctions continues sur $[0,1]$ satisfaisant à $u(0) = u(1)$.

Soit A l'opérateur linéaire de X défini par $D(A) = \{u : u, u', u'' \in X\}$, où $u^{'}$ et $u^{''}$ représentent respectivement la première et la deuxième dérivée de u, et pour $u \in D(A), Au = u^{''}$.

Donc le problem abstrait obtenu est

$$\begin{cases} u^{'}(t) - Au(t) = f(u). \\ u(0) = u(1),\ u^{'}(0) = u^{'}(1). \end{cases} \tag{4.17}$$

Lemme 4.1 *L'opérateur A défini ci-dessus est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique compact $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, sur X.*

Démonstration. Soit $g \in X$ et $\lambda = \rho e^{i\vartheta}$ avec $\rho > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Considérons le problème aux valeurs :

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u'' = g. \\ u(0) = u(1),\ u'(0) = u'(1). \end{cases} \tag{4.18}$$

On montre que ce problème a une solution u qui est donnée par :

$$u(x) = \frac{1}{2\lambda\ \sinh\frac{\lambda}{2}}[\int_0^x \cosh\lambda(x-y-\frac{1}{2})g(y)dy + \int_x^1 \cosh\lambda(x-y+\frac{1}{2})g(y)dy].$$

et que cette solution est unique. En notant $Re\lambda = \mu = \rho\cos\vartheta > 0$ et en utilisant les inégalités élémentaires

$$|\sinh\frac{\lambda}{2}| \geq \sinh\frac{\mu}{2}, \quad |\cosh\lambda(x-y\pm\frac{1}{2})| \leq \cosh\mu(x-y+\frac{1}{2}).$$

nous trouvons

$$|u(x)| \leq \frac{\|g\|}{2|\lambda|\sinh\frac{\mu}{2}}[\int_0^x \cosh\mu(x-y-\frac{1}{2})|dy + \int_x^1 \cosh\mu(x-y+\frac{1}{2})dy]$$

$$= \frac{\|g\|}{cos\vartheta|\lambda|^2}.$$

En fixant $\frac{\pi}{4} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$, nous obtenons

$$\rho(A) \supset \Sigma(\vartheta_0) = \{\lambda, |arg\lambda| < 2\vartheta_0\}$$

et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq (\cos\vartheta_0|\lambda|)^{-1} \; pour \, \lambda \in \Sigma(\vartheta_0).$$

D'après le théorème 5.2, voir Pazy ([1]), il s'ensuit que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{T(t)\}_t \geq 0$. Puisque $T(t)$ est analytique, il est continu pour la topologie uniforme des opérateurs pour $t > 0$.
D'autre part, puisque pour $\lambda \in \Sigma(\vartheta_0)$, $R(\lambda, A)$ définie de X dans $D(A)$ envoie les ensembles bornés de X aux ensembles bornés de $D(A)$ qui ont également une borne uniforme sur leur première dérivée, il découle du théorème d'Arzelà-Ascoli que $R(\lambda, A)$ est un opérateur compact. D'après le théorème 3.4.3, (voir Ahmed [2]), il résulte que $T(t), t \geq 0$ est un semi-groupe compact. □

Nous avons aussi le résultat important suivant :

Théorème 4.7 *Pour toute fonction continue à valeurs réelles f et tout $u_0 \in X$, il existe un $t_0 > 0$ tel que le problème de valeur initiale (4.16) ait une solution intégrale (mild solution) globale $u(t,x)$ sur $[0, t_0[$ et si $t_0 = \infty$ ou $t_0 < \infty$, alors*

$$\overline{\lim_{t \uparrow t_0}} \|u(t,x)\| = +\infty.$$

Démonstration. Voir Pazy ([1]), p. 235. □

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques équations intégro-différentielles abstraites non linéaires dans un espace de Banach. Nous nous sommes basés essentiellement sur l'étude faite dans l'article des auteurs D. Bahuguna et S. K. Srivastava, voir [3], intitulé :

Semilinear integro-differential equations with compact semigroups.

La méthode utilisée est basée sur : la théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires, en particulier les semi-groupes compacts et leurs propriétés. Nous avons démontré l'existence et l'unicité des solutions intégrales (mild solutions) locales et globales pour cette classe d'équations intégro-différentielles abstraites.

Bibliographie

[1] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44. Springer, 1983.

[2] N. U. Ahmed. Semigroup theory with applications to systems and control. 1991.

[3] D.Bahuguna and S. Srivastava. Semilinear integro-differential equation with compact semigroups. 11(1998) :507–517.

[4] L.Heard and M.Rankin. A semilinar parabolic volterra integrodifferential equation. 71(1988) :201–233.

[5] N. Pavel. Invariant sets for a class of semi-linear equation of evolution. 1(1977) :187–196.

[6] A.-M. Wazwaz. *A linear and nonlinear integral equations*, volume 639. Springer, 2011.