

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Saad Dahlab Blida 1

Institut d'Aéronautique et des Études Spatiales

Département Construction Aéronautique



Mémoire de fin d'études

En vue de l'obtention du diplôme de

Master en Aéronautique

Option : structures aéronautiques

THEME

*Etude de l'influence du renforcement en  
nano-plaquettes de graphène sur les  
fréquences de vibration libre d'une plaque  
FGM.*

Projet de **Startup** présenté dans le cadre de l'arrête ministériel "1275 ", assurée par  
l'Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales. IAES

Proposé et dirigé par :

*Dr. MAHI Amale*

Réalisé par :

*Mlle. MOUSSAOUI Sara Ines*

Codirigé par :

*Mr. HASSAINE Abdellah*

*Soutenu devant le jury composé de :*

*Dr. KABAB Hakim*

*MCA*

*Président*

*Dr. HAMLATI Zineb*

*MCA*

*Examinateur*

*Promotion : 2022 / 2023*

## RESUME

Pour des raisons réglementaires et économiques, les industries aérospatiale, navale, automobile et du génie civil sont toujours à la quête de structures à la fois hautement résistantes et légères. Grâce aux progrès rapides enregistrés dans les nanosciences et la nanotechnologie, cette demande a pu être satisfaite en grande partie. En effet, de nombreuses études théoriques et expérimentales convergent de plus en plus vers le développement de nouveaux composites de haute technologie (FGM et composites avancés). Pour améliorer ces composites, la technologie actuelle permet de les renforcer avec des nano-plaquettes de graphène. Ces dernières se composent de petites plaques de graphène qui peuvent remplacer la fibre de carbone, les nanotubes de carbone, les nano-particules ou autres composants dans de nombreuses applications industrielles. Cette approche s'est avérée, avec le temps, très prometteuse car les propriétés mécaniques, thermiques et électriques ont pu être grandement optimisées avec un gain de poids conséquent.

Le présent sujet a justement pour but de contribuer à ce développement en proposant une étude paramétrique de l'influence du renforcement en nano-plaquettes de graphène sur les fréquences de vibration libre d'une plaque FGM par l'utilisation d'une théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur adaptée.

**Mots clés :** Nano-plaquettes de graphène, vibration libre , FGM , FG-GPLRC, HSDT.

## ABSTRACT

For regulatory and economic reasons, the aerospace, naval, automotive, and civil engineering industries are constantly seeking structures that are highly resistant and lightweight. Thanks to rapid progress in nanoscience and nanotechnology, this demand has been largely fulfilled. Indeed, numerous theoretical and experimental studies are increasingly converging towards the development of new high-tech composites (FGM and advanced composites). Current technology allows the reinforcement of these composites with graphene nanosheets, which consist of small graphene plates that can replace carbon fibers, carbon nanotubes, nanoparticles, or other components in many industrial applications. This approach has proved to be very promising over time, as the mechanical, thermal, and electrical properties have been greatly optimized while significantly reducing weight.

The present study aims to contribute to this development by proposing a parametric investigation on the influence of graphene nanosheet reinforcement on the free vibration frequencies of an FGM plate using an appropriate higher-order shear deformation theory.

**Keywords:** graphene nanoplatelets, free vibration, FGM, FG-GPLRC, HSDT.

## ملخص

من أجل أسباب تنظيمية واقتصادية، تسعى صناعات الفضاء والبحرية والسيارات والهندسة المدنية باستمرار إلى بنى قوية للغاية وخفيفة الوزن. بفضل التقدم السريع في علوم النانو وتكنولوجيا النانو، تم تحقيق هذا الطلب إلى حد كبير. في الواقع، تتجه العديد من الدراسات النظرية والتجريبية تدريجياً نحو تطوير مواد مركبة جديدة عالية التقنية (المواد المتدرجة والمواد المركبة المتقدمة). لتعزيز هذه المواد المركبة، تتيح التكنولوجيا الحالية تقويتها بواسطة ألواح الجرافين النانوية. تتألف هذه الألواح النانوية من صفائح صغيرة من الجرافين يمكن أن تحل محل ألياف الكربون أو أنابيب الكربون النانوية أو الجسيمات النانوية أو غيرها من المكونات في العديد من التطبيقات الصناعية. لقد ثبت أن هذا النهج وعلى مر الزمن واعد جداً حيث تم تحسين الخصائص الميكانيكية والحرارية والكهربائية بشكل كبير مع تقليل الوزن على نحو ملحوظ.

تهدف الدراسة الحالية إلى المساهمة في هذا التقدم عبر تقديم تحقيق متغيراتي في تأثير تقوية الجرافين على ترددات الإهتزاز الطبيعي للوح متدرج وظيفياً، وذلك باستعمال مناسب لنظرية تشوه قصي عالية الرتبة

**الكلمات الرئيسية:** صفائح الجرافين النانوية اهتزاز حر

## REMERCIEMENTS

La présentation de ce modeste travail m'offre l'occasion d'exprimer ma profonde gratitude envers Madame Mahi, ma superviseuse, dont les précieux conseils et la disponibilité sans faille ont été des éléments essentiels tout au long de la réalisation du projet. Sa minutieuse attention à chacune de mes questions et son accompagnement m'ont permis de mieux appréhender non seulement le sujet spécifique de ma thèse, mais également le domaine de recherche dans son ensemble. Ainsi que Monsieur Hassaine pour tous les efforts qu'il a fournis.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance envers les membres du club ALKINDI, qui ont su raviver ma passion et enrichir ma vie estudiantine au moment où j'en avais le plus besoin. Voir leur engagement a été pour moi une source de motivation précieuse.

Enfin, je souhaite adresser mes remerciements à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à la réussite de mon mémoire. Leur aide précieuse et leurs conseils éclairés ont grandement bénéficié à mon travail notamment mes professeurs ainsi que mes camarades de l'Institut d'Aéronautique qui ont joué un rôle clé dans cette aventure académique et toutes les personnes qui ont partagé leurs connaissances et leurs idées, contribuant ainsi à l'essor de ma recherche.

## DEDICACES

Je dédie humblement mon travail à mes parents qui ont toujours été à mes côtés, me soutenant et me poussant vers l'avant. Leur soutien indéfectible et les encouragements incessants ont été des piliers majeurs tout au long de mon parcours académique. Leur présence me permet de persévérer dans l'atteinte de mes objectifs. Je souhaite également dédier cette réalisation à ma petite sœur, dont l'accompagnement bienveillant a été une source de réconfort inestimable.

Je tiens à rendre hommage à mon défunt grand-père, qui aurait sans aucun doute été extrêmement fier d'assister à cette étape de ma vie. Il a toujours été un modèle et une inspiration inépuisable en termes de sagesse et de savoir.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude envers ma famille élargie et mes amis d'enfance qui sont pour moi comme une seconde famille, toujours présents pour partager mes joies et m'épauler dans les moments difficiles.

---

## SOMMAIRE

---

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES STRUCTURES COMPOSITES FGM NANO-RENFORCEES .....</b>	<b>5</b>
1. Introduction (historique d'évolution des matériaux) .....	6
2. Matériaux composite.....	7
2.1. Définition d'un matériau composite.....	7
2.2. Constituants.....	8
2.3. Composites laminaires .....	11
2.4. Avantages .....	12
2.5. Inconvénients .....	12
3. Matériaux fonctionnellement gradués.....	12
3.1. Concept des FGM.....	12
3.2. Avènement et historique des FGM.....	13
3.3. Domaines d'application.....	14
3.4. Variation des propriétés d'un FGM .....	15
3.5. Classification of FGM.....	16
3.6. Méthodes de fabrication et de traitement des matériaux à gradient fonctionnel...	18
4. Nanotechnologies.....	19
4.4. Types de nano-objets (Classification of nanostructures by dimensionality).....	20
4.5. Procédés de fabrication des nanomatériaux manufacturés.....	23
4.6. Domaine d'application de certains types de nanomatériaux .....	24
5. Conclusion .....	25
<b>CHAPITRE II : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES LOIS DE DISTRIBUTIONS ET DES THEORIES DE DEFORMATION EN CISAILLEMENT APPLICABLES AUX STRUCTURES FGM RENFORCEES .....</b>	<b>26</b>
1. Introduction.....	27
2. Lois de distribution des propriétés des plaques FGM.....	27
1.1. Loi de mélange en puissance P-FGM .....	28
1.2. Loi de mélange exponentielle E-FGM .....	29

1.3.	Loi de mélange sinusoïdale S-FGM.....	30
1.4.	Autres lois de mélange des plaques FGM.....	30
1.4.1.	Loi de Viola Tornabene .....	30
1.4.2.	Modèle trigonométrique .....	31
1.5.	Autres propriétés matérielles des plaques FGM .....	31
1.5.1.	Modele de Halpin-tsai .....	31
1.5.2.	Modèle de Mori et Tanaka .....	32
1.5.3.	Modèle auto-cohérent de Hill.....	32
1.5.4.	Modèle de bornes de Hashin-Shtrikman.....	33
3.	Théories des déformations des plaques FGM.....	33
3.1.	Théorie classique des plaques minces (CPT).....	34
3.2.	Les théories de déformation de cisaillement .....	36
3.2.1.	Théorie du premier ordre des plaques semi-épaisses (FSDT).....	36
3.2.2.	Théorie d'ordre supérieur des plaques épaisses (HSDPT).....	37
3.2.3.	Théories raffinées .....	39
4.	Conclusion .....	42
<b>CHAPITRE III : MODELISATION ET FORMULATION ENERGETIQUE DES PLAQUES FG-GPLRC.....</b>		<b>43</b>
1.	Introduction.....	44
2.	Modélisation analytique d'une plaque composite à gradient fonctionnel FGM renforcée en nano-plaquettes de graphène.....	44
3.	Champs de déformation et de contraintes .....	46
4.	Loi constitutive .....	48
5.	Développement des équations de mouvement des plaques composites renforcées par nano-plaquettes de graphène .....	51
5.1.	Formulation énergétique .....	51
5.1.1.	Energie cinétique .....	51
5.1.2.	Energie de déformation.....	53
5.1.3.	Travail des charges externes .....	54
5.1.4.	Energie de fondation élastique .....	54
5.2.	Principe de Hamilton.....	55
5.2.1.	Formulation variationnelle .....	55
5.2.2.	Relations fondamentales de vibrations libres .....	58

---

6. Résolution analytique des équations de mouvement .....	60
6.1. Vibrations libres d'une plaque .....	60
6.2. Conditions aux limites et solution de Navier .....	60
6.3. Solution analytique.....	61
7. Conclusion .....	63
<b>CHAPITRE IV : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....</b>	<b>64</b>
1. Introduction.....	65
2. Résolution numérique du problème aux valeurs propres.....	65
2.1. Graphes de variation des propriétés de la plaque.....	66
2.2. Calcul des inerties et des rigidités du système vibratoire libre .....	68
2.3. Comparaison des résultats.....	76
2.4. Etude paramétrique .....	78
2.4.1. Plaque FG-GPLRC simplement supportée.....	78
2.4.2. Plaque FG-GPLRC posée sur un support élastique.....	85
2.5. Organigramme des principales étapes du programme .....	87
3. Conclusion .....	89
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>90</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>	<b>92</b>
<b>ANNEXE : DE LA TECHNOLOGIE VERS L'ENTREPRISE.....</b>	<b>95</b>

## LISTE DES TABLEAUX

<b>TABLEAU 1:</b> VARIATION DES PROPRIETES EN FONCTION DES PHASES DANS UN FGM METAL-CERAMIQUE.....	16
<b>TABLEAU 2:</b> DIFFERENTS TYPES DE NANOMATERIAUX ET LEUR DOMAINE D'APPLICATION .....	24
<b>TABLEAU 3:</b> DIFFERENTES FONCTIONS DE CISAILLEMENT (DE FORME).....	40
<b>TABLEAU 4:</b> CALCUL DES MOMENTS D'INERTIES ET RIGIDITES POUR UNE PLAQUE EN PUR EPOXY. ....	68
<b>TABLEAU 5:</b> MOMENTS D'INERTIES DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES .....	70
<b>TABLEAU 6:</b> RIGIDITES DE TRACTION DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES.....	70
<b>TABLEAU 7:</b> RIGIDITES DE CISAILLEMENT DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES.....	71
<b>TABLEAU 8:</b> RIGIDITES DE COUPLAGE DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES.....	71
<b>TABLEAU 9:</b> RIGIDITES DE COUPLAGE D'ORDRE SUPERIEUR DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES. ....	72
<b>TABLEAU 10:</b> RIGIDITES DE FLEXION DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES.....	72
<b>TABLEAU 11:</b> RIGIDITES DE FLEXION D'ORDRE SUPERIEUR DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES. ....	73
<b>TABLEAU 12:</b> RIGIDITES DE FLEXION D'ORDRE SUPERIEUR DE LA PLAQUE POUR DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION ET POUR DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES. ....	73
<b>TABLEAU 13:</b> COMPARAISON DE 6 FREQUENCES NATURELLES ADIMENSIONNELLES D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE COMPOSITE EN PURE EPOXY ET AVEC DIFFERENTES DISTRIBUTIONS DE GRAPHENE POUR ( $A \times B \times H = 0,45 \text{ M} \times 0,45 \text{ M} \times 0,045 \text{ M}$ ).....	76
<b>TABLEAU 14:</b> LES CINQ PREMIERES FREQUENCES NATURELLES ADIMENSIONNELLES $\omega$ DE LA PLAQUE PUR EPOXY.....	78
<b>TABLEAU 15:</b> LES CINQ PREMIERES FREQUENCES NATURELLES ADIMENSIONNELLES $\omega$ DE LA PLAQUE FG-UD GPLRC POUR LES DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES AGPL. ....	78
<b>TABLEAU 16:</b> LES CINQ PREMIERES FREQUENCES NATURELLES ADIMENSIONNELLES $\omega$ DE LA PLAQUE FG-X-GPLRC POUR LES DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES AGPL.....	79
<b>TABLEAU 17:</b> LES CINQ PREMIERES FREQUENCES NATURELLES ADIMENSIONNELLES $\omega$ DE LA PLAQUE FG-O-GPLRC POUR LES DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES AGPL.....	81
<b>TABLEAU 18:</b> LES CINQ PREMIERES FREQUENCES NATURELLES NON ADIMENSIONNELLES $\bar{\omega}$ DE LA PLAQUE FG-X-GPLRC POUR LES DIFFERENTES FRACTIONS VOLUMIQUES AGPL.....	85

## LISTE DES FIGURES

<b>FIGURE 1: DEVELOPPEMENT DE MATERIAUX VERS DES MATERIAUX FONCTIONNELLEMENT GRADUES.....</b>	<b>7</b>
<b>FIGURE 2: MATERIAU COMPOSITE.....</b>	<b>7</b>
<b>FIGURE 3: TYPES DE MATRICES.....</b>	<b>9</b>
<b>FIGURE 4: CLASSIFICATION DES FIBRES SELON LEUR NATURE.....</b>	<b>9</b>
<b>FIGURE 5: ARMURE UNIDIRECTIONNELLE.....</b>	<b>10</b>
<b>FIGURE 6: ARMURE TAFFETAS.....</b>	<b>10</b>
<b>FIGURE 7: RENFORT EN MAT.....</b>	<b>10</b>
<b>FIGURE 8: CONSTITUTION D'UN STRATIFIE.....</b>	<b>11</b>
<b>FIGURE 9: CONSTITUTION D'UN PANNEAU SANDWICH.....</b>	<b>11</b>
<b>FIGURE 10: VARIATION CONTINUE DE LA MICROSTRUCTURE (SCHEMATISEE) [12].</b>	<b>13</b>
<b>FIGURE 11: EXEMPLES D'FGM DANS LA NATURE (VARIATION DE LA MICROSTRUCTURE DE L'OS ET DE LA PEAU) [8].</b>	<b>13</b>
<b>FIGURE 12: COMPARAISON DE LA VARIATION DES PROPRIETES DANS UN COMPOSITE CONVENTIONNEL ET UN FGM.</b>	<b>15</b>
<b>FIGURE 13: DIFFERENCE ENTRE UNE VARIATION CONTINUE ET DISCRETE DES PROPRIETES.....</b>	<b>16</b>
<b>FIGURE 14: TYPES DE GRADIENT DES FGM.</b>	<b>17</b>
<b>FIGURE 15: COMPARAISON DES PROCESSUS DE FABRICATION DE MATERIAUX FGM.</b>	<b>19</b>
<b>FIGURE 16: DU GRAPHENE 2D A LA FULLERENE 0D, EN PASSANT PAR LES NANOTUBES DE CARBONE 1D ET LE GRAPHITE 3D.</b>	<b>21</b>
<b>FIGURE 17: NANOTUBES DE CARBONE MONOFEUILLET ET MUTIFEUILLET.....</b>	<b>23</b>
<b>FIGURE 18: DISTRIBUTION DE FRACTION VOLUMIQUE D'UN ECHANTILLON DE PLAQUE FGM DANS LA DIRECTION DE L'EPAISSEUR.....</b>	<b>28</b>
<b>FIGURE 19: VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DU P-FGM [12].</b>	<b>29</b>
<b>FIGURE 20: VARIATION DU MODULE DE YOUNG <math>E</math> ([PA]<math>\times 10^{-11}</math>) DU E-FGM (SUS304-AL<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) [12].</b>	<b>29</b>
<b>FIGURE 21: VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE DU S-FGM [12].</b>	<b>30</b>
<b>FIGURE 22: CINEMATIQUE DE DEFORMATION.</b>	<b>36</b>
<b>FIGURE 23: DISTRIBUTION DES GPL.</b>	<b>44</b>
<b>FIGURE 24: COMPOSANTES DU VECTEUR DES CONTRAINTES.....</b>	<b>47</b>
<b>FIGURE 25: COMPOSANTES DES EFFORTS NORMAUX DE CISAILLEMENT EN PLAN.</b>	<b>48</b>
<b>FIGURE 26: COMPOSANTES DES EFFORTS DE CISAILLEMENT TRANSVERSE.....</b>	<b>49</b>
<b>FIGURE 27: COMPOSANTES DES MOMENTS DE FLEXION ET DE TORSION.....</b>	<b>49</b>
<b>FIGURE 28: PLAQUE RECTANGULAIRE ENCASTREE SUR UNE FONDATION ELASTIQUE DE WINKLER-PASTERNAK.....</b>	<b>54</b>
<b>FIGURE 29 : VARIATION DE LA FRACTION VOLUMIQUE A TRAVERS L'EPAISSEUR POUR LES DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION.</b>	<b>66</b>
<b>FIGURE 30 : VARIATION DU MODULE DE YOUNG A TRAVERS L'EPAISSEUR POUR LES DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION.....</b>	<b>66</b>
<b>FIGURE 31: VARIATION DE LA MASSE VOLUMIQUE A TRAVERS L'EPAISSEUR POUR LES DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION.</b>	<b>67</b>

<b>FIGURE 32:</b> VARIATION DU MODULE DE CISAILLEMENT A TRAVERS L'ÉPAISSEUR POUR LES DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION. ....	67
<b>FIGURE 33:</b> VARIATION DU MODULE DE POISSON A TRAVERS L'ÉPAISSEUR POUR LES DIFFERENTS TYPES DE DISTRIBUTION. ....	68
<b>FIGURE 34:</b> INFLUENCE DE LA FRACTION MASSIQUE DES GPL SUR LES RIGIDITES DE CISAILLEMENT $A_{44}^a$ ET $A_{55}^a$ .....	75
<b>FIGURE 35:</b> INFLUENCE DE LA FRACTION MASSIQUE DES GPL SUR LES RIGIDITES DE FLEXION $D_{11}$ ET $D_{22}$ . ....	75
<b>FIGURE 36:</b> VISUALISATION DES MODES SHAPES (DEFORMEES) D'UNE PLAQUE FGM CARREE POUR UNE DISTRIBUTION DE GPL-X CORRESPONDANT AUX MODES FIGURANT DANS LE TABLEAU DE COMPARAISON. ....	77
<b>FIGURE 37:</b> EFFET DU RAPPORT B/H SUR LA VIBRATION LIBRE D'UNE PLAQUE CARREE FG-X GPLRC POUR $AGPL=0,01$ . ....	83
<b>FIGURE 38:</b> VARIATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE D'UNE PLAQUE CARREE EN FONCTION DU RAPPORT B/H POUR DIFFERENTES DISTRIBUTIONS. ....	83
<b>FIGURE 39:</b> VARIATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE ET DE LA 5EME FREQUENCE NATURELLES D'UNE PLAQUE FGM CARREE GPL-X EN FONCTION DU RAPPORT B/H POUR DIFFERENTES FRACTIONS MASSIQUES.....	84
<b>FIGURE 40:</b> VARIATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE NATURELLE D'UNE PLAQUE FGM CARREE GPL-X EN FONCTION DE LA FRACTION MASSIQUE. ....	84
<b>FIGURE 41:</b> VARIATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE EN FONCTION DU RAPPORT A/B POUR DIFFERENTES DISTRIBUTION DES GPL DE FRACTION MASSIQUE $AGPL=0,01$ .....	85
<b>FIGURE 42:</b> VARIATION DE LA FREQUENCE FONDAMENTALE D'UNE PLAQUE CARREE FG-X GPLRC SUR SUPPORT ELASTIQUE EN FONCTION DU RAPPORT B/H. POUR $AGPL=0,01$ .....	87
<b>FIGURE 43:</b> VARIATION DE LA CINQUIEME FREQUENCE D'UNE PLAQUE CARREE FG-X GPLRC SUR SUPPORT ELASTIQUE EN FONCTION DU RAPPORT B/H POUR $AGPL=0,01$ .....	87
<b>FIGURE 44:</b> ORGANIGRAMME DU PROGRAMME DE CALCUL (MAPLE).....	88

## LISTE DES SYMBOLES

$u, v, w$	Composants de déplacement le long des directions des coordonnées (x,y,z)
$\phi_x, \phi_y$	Rotations autour des axes $x$ et $y$
$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$	Déplacements et rotations généralisés
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	Déformations normales suivant $x$ et $y$
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations transversales dans les plans $(x, y), (y, z), (x, z)$
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$	Contraintes normales suivant $x$ et $y$
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$	Contraintes de cisaillement dans les plans $(x, y), (y, z), (x, z)$
$Q_{ij}$	Coefficient de rigidité
$N_x, N_y, N_{xy}$	Résultantes en membrane (normales et cisaillement).
$Q_x, Q_y$	Forces transversales résultantes
$M_x, M_y$	Moments de flexion suivant les directions $x$ et $y$ .
$M_{xy}$	Moment de torsion
$M_x^a, M_y^a, M_{xy}^a$	Moments de flexion d'ordre supérieur suivant les directions $x$ et $y$ et le moment de torsion d'ordre supérieur
$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^a$	Rigidités de traction, de couplage, de flexion et de cisaillement transversal
$B_{ij}^a, D_{ij}^a, D_{ij}^{aa}$	Les rigidités de couplage et de flexion d'ordre supérieur
$I_1, I_2, I_3$	Moments d'inerties (longitudinal, de couplage longitudinal-rotation et de rotation)
$I_2^a, I_3^a, I_3^{aa}$	Les inerties de couplage et de rotation d'ordre supérieur
$U$	Energie de déformation (énergie potentielle)
$E_c$	Energie cinétique
$\delta U$	Energie de déformation (énergie potentielle) virtuelle
$\delta E_c$	Energie cinétique virtuelle

---

$\delta V$	Travail des charges externes virtuelles
$\omega$	Fréquence naturelle de vibration.
$\bar{\omega}$	Fréquence naturelle adimensionnelle
$[M], [k]$	Matrices globales de masse et de rigidité de la plaque
$E_{mn}, F_{mn}, G_{mn},$ $H_{mn}, I_{mn}$	Paramètres arbitraires
$M_x^a, M_y^a,$	Moments de flexion d'ordre supérieur suivant les directions x et y
$M_{xy}^a$	Moment de torsion d'ordre supérieur
E	Module de Young
G	module de cisaillement
$\nu$	Coefficient de poisson
$\rho$	Masse volumique
$m$	Indice de la matrice polymère
<i>GPL</i>	Indice des nanoplaquettes de graphène
$A_{GPL}$	Fraction massique des GPL
<i>FGM</i>	Matériau fonctionnellement gradué
<i>CPT</i>	Théorie classique
<i>FSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement du premier ordre
<i>TSDT</i>	Théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre ordre
<i>HDST</i>	Théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur
$\varphi(z)$	Fonction de forme
a,b,h	Longueur, largeur et épaisseur de la plaque FGM
[ ]	Matrice
{ }	Vecteur

# INTRODUCTION GENERALE

## Contexte et définition du problème

---

Dans le contexte de la conception de matériaux dont les propriétés varient de manière contrôlée à travers leur volume, une approche novatrice et prometteuse a émergé : les matériaux fonctionnellement gradués (FGM). Ces matériaux offrent la possibilité de créer des structures dont les caractéristiques physiques et chimiques évoluent de manière progressive. Ces variations graduelles permettent de combiner les avantages de différents matériaux en un seul, en exploitant leurs propriétés spécifiques dans différentes parties de la structure. Ainsi, les FGM offrent des performances améliorées, une meilleure résistance aux contraintes et une adaptabilité accrue aux environnements changeants. L'avènement des FGM a ouvert ainsi de nouvelles perspectives en termes de performances et d'applications.

Les industries aérospatiale, navale, automobile et du génie civil recherchent constamment des structures légères et résistantes pour des raisons réglementaires et économiques. Les avancées rapides dans les nanosciences et la nanotechnologie offrent une solution prometteuse grâce au développement de nouveaux composites de haute technologie, tels que les FGM et les composites avancés.

En utilisant la technologie actuelle, nous pouvons renforcer ces composites avec des nano-plaquettes de graphène, qui sont de petites plaques de graphène pouvant remplacer d'autres composants dans diverses applications industrielles. Cette approche présente un potentiel élevé car elle permet d'optimiser les propriétés mécaniques, thermiques et électriques tout en réduisant le poids des structures.

Ce travail se propose d'explorer les vibrations libres d'une plaque FGM renforcée en nano-plaquettes de graphène.

## Etudes antérieures

---

De ce fait, il est nécessaire commencer par présenter quelques recherches antérieures sur les plaques en matériaux composites à gradient fonctionnel (FGM). Plusieurs études ont été menées sur les plaques FGM et leurs caractéristiques de vibration notamment Cheng et Batra qui ont examiné le flambage et les vibrations en régime permanent de plaques FG simplement appuyées reposant sur une fondation élastique et soumises à des charges hydrostatiques uniformes. Ils ont utilisé la méthode de la théorie des plaques de Reddy (TSDT) pour cette analyse.

Une autre étude réalisée par Yang et Shen a porté sur la réponse dynamique de plaques rectangulaires FGM initialement contraintes. Différentes conditions aux limites ont été prises en compte, telles que la fixation sur tous les côtés ou seulement sur deux côtés avec un support sur les deux autres côtés. L'effet des contraintes initiales et des charges impulsionnelles sur les vibrations libres des plaques FGM a également été étudié.

Dans le cadre des environnements thermiques, Yang et Shen ont étendu leurs analyses aux plaques FG épaisses déformables en cisaillement. Ils ont développé une théorie générale des plaques qui permet de déterminer de manière semi-analytique la réponse sous des charges et des conditions aux limites générales, y compris le cas des plaques initialement contraintes.

Une analyse plus approfondie des vibrations des plaques laminées FGM précontraintes a été présentée par Yang et ses collaborateurs. Ils ont utilisé la méthode de la TSDT de Reddy pour étudier les vibrations de ces plaques dans des conditions spécifiques.

D'autres publications ont également abordé des aspects similaires, notamment les travaux de Yang et al. ainsi que ceux de Yang et Huang.

Par ailleurs, Kim a proposé une méthode théorique basée sur la TSDT de Reddy pour étudier les caractéristiques de vibration des plaques rectangulaires FG initialement contraintes dans un environnement thermique. Il a pris en compte les variations de température à travers l'épaisseur de la plaque et a examiné l'effet des compositions de matériau, de la géométrie de la plaque et des champs de température sur les vibrations.

Enfin, He et al. ont présenté une formulation par éléments finis basée sur la théorie des plaques de Kirchhoff-Cosserat pour le contrôle des vibrations et de la forme des plaques FG. Ils ont considéré l'intégration de capteurs piézoélectriques et d'actionneurs dans les plaques FG et ont utilisé une distribution de loi de puissance de fraction volumique pour modéliser les propriétés des plaques FG.

Ces études ont contribué à une meilleure compréhension des caractéristiques de vibration des plaques FG dans différentes conditions et ont exploré diverses approches théoriques et numériques pour analyser leur comportement.

## Contribution de la thèse

---

Notre sujet se concentre sur une étude paramétrique visant à comprendre comment le renforcement en nano-plaquettes de graphène affecte les fréquences de vibration libre d'une plaque FGM. Pour cela, nous utiliserons une théorie de déformation en cisaillement adaptée, qui nous permettra d'analyser précisément les effets de ce renforcement sur les caractéristiques vibratoires de la plaque.

Cette étude paramétrique nous permettra d'explorer différentes configurations et proportions de nano-plaquettes de graphène dans la plaque FGM suivant différentes conditions aux limites. Nous examinerons également des facteurs tels que la taille, la distribution des nano-plaquettes de graphène pour déterminer les combinaisons optimales qui maximisent les performances vibratoires.

Ces résultats fourniront des informations précieuses sur la manière d'améliorer les performances des composites renforcés par le graphène. En appliquant ces connaissances, les industries pourront concevoir des structures plus légères, plus résistantes et plus durables, ce qui favorisera l'innovation et l'efficacité dans ces domaines clés.

La modélisation continue des propriétés de la plaque FGM renforcée en GPL se basera sur le modèle de Halpin Tsai et une théorie de déformation d'ordre supérieur hyperbolique HSDT de Mahi et al. La principale méthode de recherche et de simulation utilisée dans cette thèse est Maple. Les fonctions permettant de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres dans Maple sont utilisées pour obtenir respectivement les fréquences et les formes modales.

## Plan de thèse

---

Pour mener à bien notre étude, notre thèse est organisée en quatre chapitres qui couvrent différents aspects des matériaux fonctionnellement gradués renforcés :

Un premier chapitre vise à effectuer une recherche bibliographique approfondie sur les structures composites FGM renforcées par des matériaux tels que les nanotubes, les nano-plaquettes de graphène et les nano-particules. Nous examinerons les différentes méthodes de renforcement utilisées, les propriétés des renforts ainsi que les techniques de fabrication associées à ces composites FGM.

Un deuxième chapitre présente une recherche bibliographique approfondie sur les lois de distribution et les théories de déformation en cisaillement qui s'appliquent aux structures FGM renforcées. Nous examinerons les modèles mathématiques et les approches théoriques utilisées pour décrire le comportement mécanique de ces structures, en mettant l'accent sur les phénomènes de déformation en cisaillement.

Un troisième chapitre est consacré à la modélisation et à la formulation énergétique des plaques fonctionnellement graduées renforcées par des composites de polymères renforcés par des nano-plaquettes de graphène (FG-GPLRC). Nous développerons des équations mathématiques basés sur les principes de la mécanique des milieux continus pour décrire le comportement des plaques FG-GPLRC.

Un quatrième chapitre dédié aux interpréterons des résultats en les reliant aux théories de déformation en cisaillement, aux propriétés et distribution des renforts utilisés ainsi qu'aux conditions aux limites. Nous discuterons également des implications de ces résultats pour la conception et l'optimisation des structures composites FGM renforcées.

En résumé, notre thèse abordera les différentes étapes de recherche, de modélisation et d'interprétation pour mieux comprendre les structures composites FGM renforcées. Nous visons à contribuer à l'avancement des connaissances dans ce domaine en fournissant des analyses approfondies et des résultats significatifs.

CHAPITRE I :  
RECHERCHE  
BIBLIOGRAPHIQUE SUR  
LES STRUCTURES  
COMPOSITES FGM  
NANO-RENFORCEES

## 1. Introduction (historique d'évolution des matériaux)

La science des matériaux est une discipline qui étudie la structure, les propriétés et les performances des matériaux, ainsi que les processus de leur fabrication et de leur utilisation. Cette science est née d'une combinaison de la physique, de la chimie, de la métallurgie et de l'ingénierie. Elle a toujours été au centre de plusieurs technologies ayant révolutionné le monde scientifique, et le demeure jusqu'à aujourd'hui en contribuant dans différentes industries notamment l'aéronautique, l'automobile, l'électronique, les énergies renouvelables...

Au fil des siècles, les différentes civilisations qui ont marqué l'humanité ont chacune, en fonction de leurs besoins, apporté une plus grande diversité en conception des matériaux et de leurs procédés de production. Mais souvent limités par la technologie de l'époque, les ingénieurs du domaine devaient se surpasser à leurs échelles respectives pour optimiser les propriétés recherchées et développer des matériaux de plus en plus améliorés, une compétitivité croissante des performances et spécificités de chaque matériau.

*« Les historiens ont coutume de donner aux différents âges de l'humanité le nom des matériaux qui les ont dominés : l'âge de pierre, l'âge du cuivre, du bronze, du fer... » - Yves Bréchet*

Nous remontons jusqu'à la préhistoire, une période où afin d'assurer leur survie nos ancêtres ont eu recours aux matériaux qui les entouraient, les exploitant à l'état brut qu'ils soient minéraux ou organiques. Puis sont venus les Romains qui maîtrisaient bien la céramique, le verre, la vieille pierre, le mortier ainsi que le travail des métaux (métallurgie empirique) tel que l'argent, l'or, l'étain, le plomb, le bronze et le fer forgé. De l'Empire romain à la fin du Moyen Âge, le monde physique a relativement peu changé. [1]

Les premières études systématiques des matériaux ont commencé à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, lorsque des scientifiques ont commencé à utiliser des techniques telles que la microscopie et l'analyse chimique pour étudier la structure des matériaux. Cependant, c'est avec l'avènement de la Seconde Guerre mondiale que la science des matériaux a véritablement pris son envol, quand les gouvernements ont commencé à investir massivement dans la recherche pour le développement de nouveaux matériaux pour la construction d'avions, de chars, de navires et d'autres équipements militaires.

Dans les années 1950 et 1960, la recherche en science des matériaux a commencé à se concentrer sur l'étude des propriétés électroniques et optiques des matériaux, ainsi que sur les matériaux composites et les alliages. Cette période a également vu l'avènement des polymères

synthétiques, qui ont ouvert de nouvelles voies de recherche dans la conception de nouveaux matériaux.

Dans les années 1970 et 1980, la recherche en science des matériaux a été stimulée par l'essor de la technologie des semi-conducteurs, qui a conduit à la conception de nouveaux matériaux pour la fabrication de circuits intégrés. Les avancées dans la nanotechnologie ont également ouvert de nouvelles perspectives, avec la possibilité de créer des matériaux avec des propriétés uniques à l'échelle nanométrique.

Au cours des dernières décennies, la recherche s'est aussi concentrée sur la conception de matériaux durables et plus respectueux de l'environnement, ainsi que sur la recherche de nouveaux matériaux pour la production d'énergie propre.

Ainsi les matériaux utilisés par l'homme n'ont cessé d'évoluer, mais à un rythme extrêmement erratique au cours de l'histoire, avec une accélération considérable au cours des dernières décennies, visant à l'élaboration du matériau « sur mesure ». [1]



Figure 1: Développement de matériaux vers des matériaux fonctionnellement gradués.

## 2. Matériaux composite

### 2.1. Définition d'un matériau composite

Un matériau composite comme son nom l'indique est un matériau composé de deux ou plusieurs matériaux de nature différente, non miscibles mais à forte capacité adhérence. Chacun des composants possède ses propres propriétés mécaniques et thermiques, qui en les combinant on obtient un mélange hétérogène encore plus performant selon la direction et distribution géométrique, et interactions de ses constituants. [2]

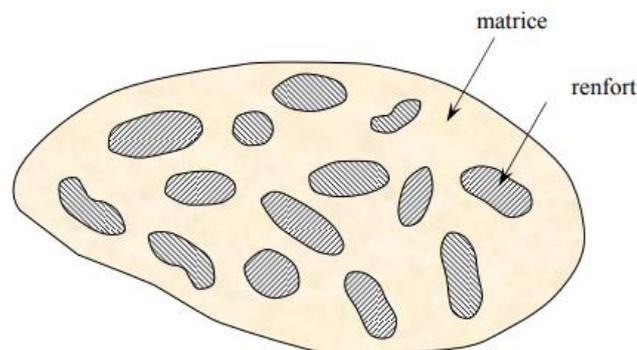


Figure 2: Matériau composite.

## 2.2. Constituants

Un matériau composite est composé de deux phases appelées matrice et renfort (fibres) avec une concentration de ce dernier bien précise selon les performances recherchées dans le composite résultant que ce soit en caractéristiques mécaniques élevées, tenue en température, résistance à la corrosion... Cette concentration des fibres est définie par des fractions volumiques et massiques faisant intervenir chacune des masses volumiques.

Il peut arriver que la densité mesurée expérimentalement ne concorde pas avec la masse des composants introduits. Si cette divergence dépasse la précision expérimentale, elle peut être attribuée à la présence de porosité.

Ces porosités engendrent souvent une baisse importante des propriétés mécaniques du matériau le rendant assez vulnérable face aux conditions extérieures telle que l'humidité et les produits chimiques. [2]

### 2.2.1. Matrice

La matrice est un élément assez ductile qui assure la liaison mécanique entre les fibres et ainsi les maintient dans leurs directions relatives choisies tout en les protégeant chimiquement contre la chaleur et l'humidité. Son rôle réside aussi dans le transfert et la répartition des différentes sollicitations et efforts appliqués sur le composite aux fibres (résistance à la compression ou à la flexion). [3]

La matrice est souvent constituée par une résine et doit présenter une bonne compatibilité avec le renfort. Afin de préserver les propriétés spécifiques recherchées une masse volumique faible est préconisée [2] comme dans la résine polyester insaturée, résine époxyde, phénolique, polyimide ou polyamide-imide, etc.... la figure ci-dessous présente les différents types de matrices (résines) selon leur nature. [4]

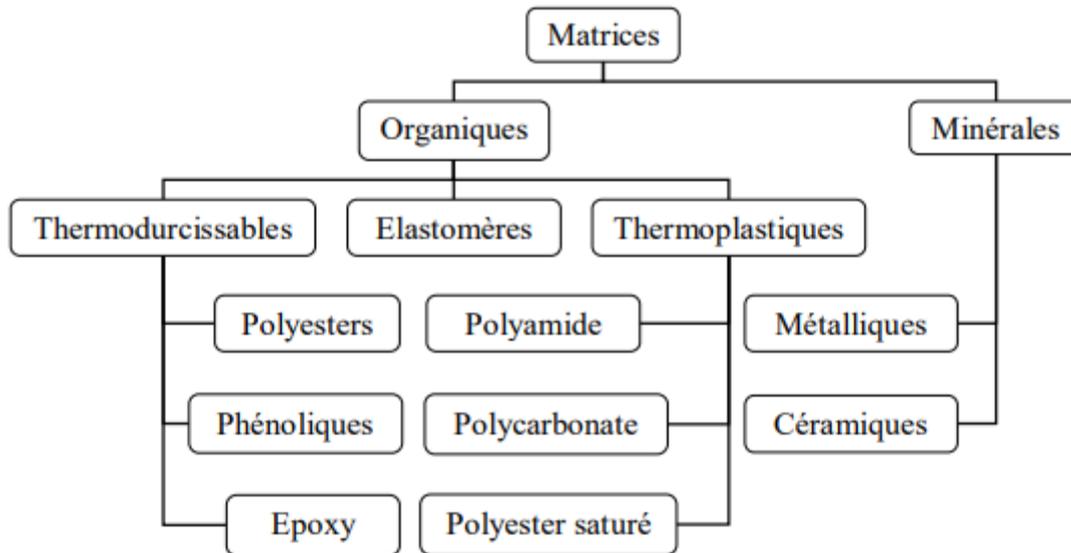


Figure 3: Types de matrices.

### 2.2.2. Renfort

Le renfort se présente en fibres c'est la partie la plus importante du composite chargée de supporter les efforts mécaniques que subit le matériau. Plus la fraction volumique du renfort est importante plus les propriétés mécaniques du composite seront meilleures. Pour une concentration donnée, la distribution du renfort dans le volume du composite est également un paramètre important. Une distribution uniforme assurera une "homogénéité" du matériau : les propriétés du composite seront indépendantes du point de mesure. Dans le cas d'une distribution non uniforme du renfort, la rupture du matériau sera initiée dans les zones pauvres en renfort, diminuant ainsi la résistance du composite. [2]

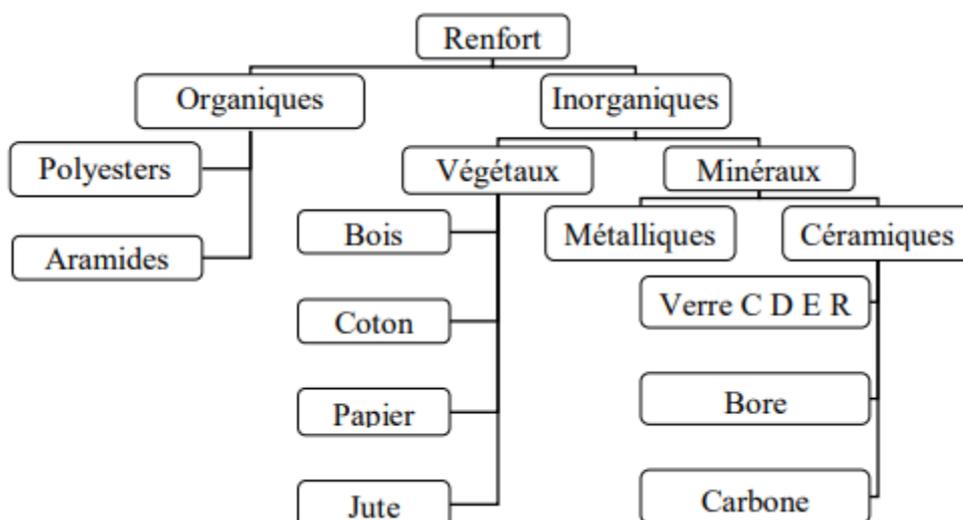
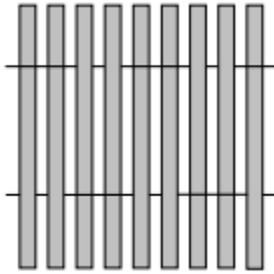


Figure 4: Classification des fibres selon leur nature.

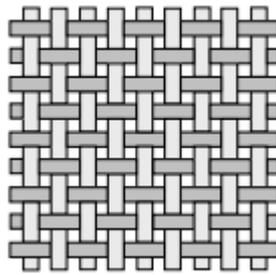
On peut aussi classer les fibres selon leur forme qu'elles soient courtes longues orientées dans une direction spécifiques ou désordonnées, on distingue alors :

Le renfort unidirectionnel (fils, mèches) fibres longues parallèles dans une orientation choisie.



**Figure 5: armure unidirectionnelle.**

Le renfort tissu 2D (taffetas, toiles, serge) formé à partir de fils entrecroisés perpendiculairement.



**Figure 6: armure taffetas.**

Le renfort à mat (fibres courtes et discontinues et éparpillées en vrac dans toutes les directions sans orientation privilégiée)



**Figure 7: renfort en mat.**

### 2.2.3. Additif et charges

Le rôle des charges est d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la matrice ou diminuer son coût tout en conservant ses performances [2]. En générales les principales charges utilisées sont [4] :

- microbille en (verre, carbone, époxyde, phénolique, polystyrène, etc. ...)
- des poudres ou paillettes métalliques : (cuivre, fer, aluminium, etc. ...)
- des particules de carbone (noir de carbone)

Les additifs sont nécessaires pour assurer une bonne adhérence entre les fibres et la résine et de modifier l'aspect ou les caractéristiques de la matière à laquelle ils sont ajoutés [2].

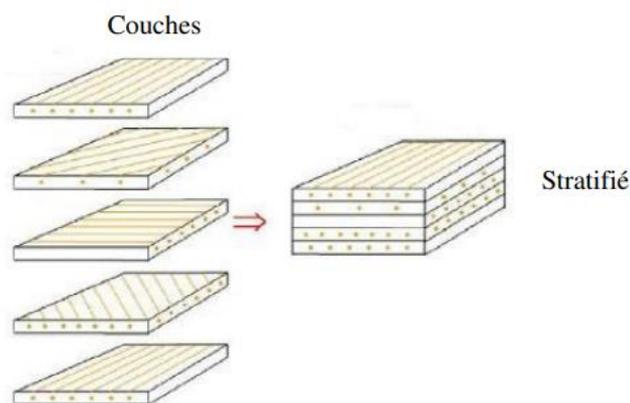
Les additifs se trouvent en faible quantité et interviennent comme :

- lubrifiants et agents de démoulage
- pigments et colorants
- agents anti-retraits
- agents anti-ultraviolets
- accélérateur
- catalyseur

## 2.3. Composites laminaires

### 2.3.1. Composite stratifié

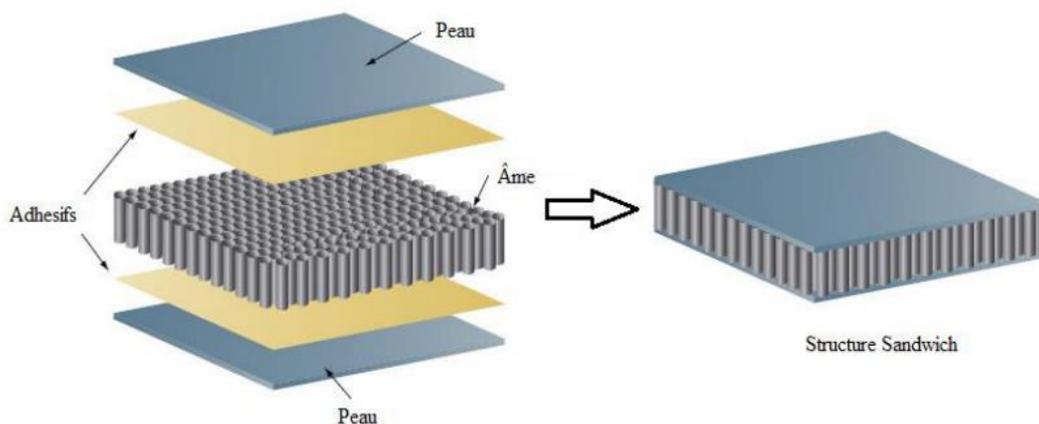
Le stratifié est constitué de fines couches de fibres (quelques dixièmes de millimètre), appelées plis ou nappes, empilées les unes sur les autres. Ces couches sont liées ensemble par une matrice après moulage. À l'intérieur de chaque couche, les renforts sont disposés de manière plane et orientée dans n'importe quelle direction [5]. La sélection de la composition et de l'ordre des couches sera déterminée par l'application spécifique du matériau composite, afin de l'optimiser pour les contraintes qui lui sont imposées [2].



**Figure 8: Constitution d'un stratifié.**

### 2.3.2. Composite sandwich

Les matériaux composites à structure sandwich sont un type particulier de composites qui consistent en deux couches extérieures minces mais rigides, reliées à un noyau intérieur léger mais épais. Le matériau utilisé pour le noyau (l'âme) est souvent de faible résistance, mais sa grande épaisseur confère au matériau sandwich une grande rigidité en flexion tout en ayant une faible densité globale. [6]



**Figure 9: Constitution d'un panneau sandwich.**

## 2.4. Avantages

Le principal intérêt de l'utilisation des matériaux composites provient de ses excellentes caractéristiques. Ils disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels.

- Légèreté
- Grande résistance à la fatigue
- Liberté de formes
- Maintenance réduite
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion
- Insensibles aux produits chimiques sauf les décapants de peinture qui attaquent les résines
- Une bonne isolation électrique

## 2.5. Inconvénients

Les matériaux composites avaient certes été une révolution dans le monde de l'ingénierie en nous permettant de contrôler et modéliser à la carte les propriétés du matériau selon l'orientation des fibres d'une couche à l'autre sauf que cette transition brutale de composition engendrait d'un autre côté une génération locale de concentration de contraintes, causant un délaminage des couches.

Le délaminage est parmi les modes de rupture des structures composites qui pose le plus de problèmes aux concepteurs. En effet, il peut survenir à des niveaux de chargement relativement faibles, et la sensibilité d'un stratifié au délaminage est difficile à estimer.

Il peut s'étendre sur de grandes surfaces entraînant une perte de cohésion de l'ensemble, endommageant ainsi le stratifié car les charges ne peuvent plus être réparties entre les couches [7].

# 3. Matériaux fonctionnellement gradués

---

## 3.1. Concept des FGM

FGM est l'abréviation de functionally graded materials en anglais qui signifie matériaux à gradient de fonction, c'est une nouvelle catégorie de matériaux composites avancés constitués de deux ou plusieurs phases, telles que le métal et la céramique, entre lesquelles la transition se fait graduellement. Comparé à un composite conventionnel, ce concept nous donne l'avantage d'une interface continue et non brusque dans la composition du matériau ainsi

que dans les contraintes éliminant de cette manière-là le problème de décollement des couches. Sans oublier une meilleure cohésion entre différents matériaux et l'élimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc...

Ils sont souvent utilisés dans des applications où des propriétés spécifiques doivent être combinées pour répondre à des exigences particulières, par exemple, pour améliorer la résistance à la fatigue, la résistance aux contraintes, la durabilité, ou encore pour obtenir des propriétés optiques ou électriques particulières...

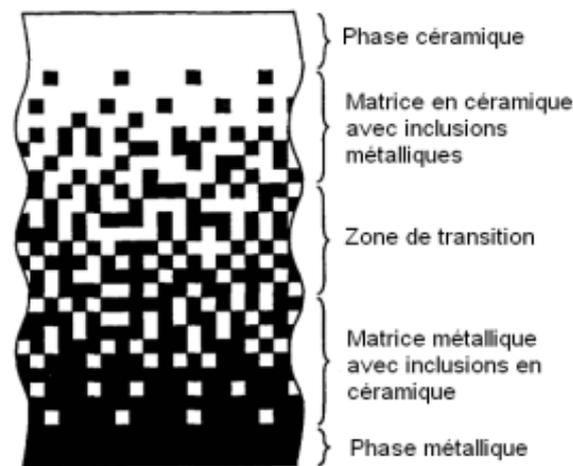


Figure 10: Variation continue de la microstructure (schématisée) [12].

### 3.2. Avènement et historique des FGM

Bien que la notion de matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) et notre capacité à les fabriquer puissent sembler être une invention avancée en ingénierie, le concept n'est pas nouveau. On le retrouve souvent même dans la nature, tels que les os qui présentent une gradation fonctionnelle et même notre peau, qui est graduée pour fournir certaines qualités tactiles, élastiques et de résistance en fonction de la profondeur et de l'emplacement sur le corps. [8]

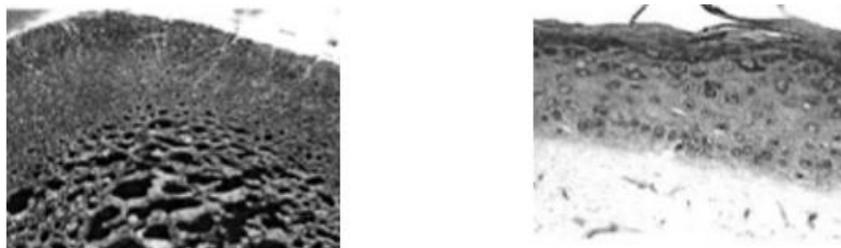


Figure 11: Exemples d'FGM dans la nature (variation de la microstructure de l'os et de la peau) [8].

Mais c'est en 1984 que le Laboratoire national de l'aérospatiale du Japon a imaginé pour la première fois l'application de matériaux avancés dans le cadre d'un projet de navette spatiale. Cette utilisation avait pour but d'éviter les pics de stress aux interfaces des panneaux revêtus de la navette spatiale en créant un système de barrière thermique capable de supporter une température de surface de 2000 K avec un gradient de température de 1000 K sur une section épaisse de 10 mm. [9] Par la suite, ces matériaux ont été utilisés dans différents domaines tels que les usines chimiques, les générateurs d'énergie solaire, les échangeurs de chaleur, les réacteurs nucléaires et les systèmes de combustion à haute efficacité. Le concept de FGMs a été appliqué avec succès dans les revêtements de barrière thermique afin d'améliorer la résistance thermique, à l'oxydation et à la corrosion.

### 3.3. Domaines d'application

Les matériaux à gradient de fonction ont de nombreuses applications, notamment dans les secteurs de l'aérospatiale, de l'automobile, de la médecine, de l'énergie, de l'électronique, de la construction, etc.

- L'aérospatiale : les FGM sont utilisés pour fabriquer des pièces de navettes spatiales, de satellites et d'avions, car ils ont une résistance thermique élevée et peuvent supporter des températures extrêmes.
- L'industrie chimique : les FGM sont utilisés pour les équipements de traitement chimique tels que les réservoirs, les pipelines et les réacteurs, car ils sont capables de résister aux produits chimiques corrosifs.
- L'énergie solaire : les FGM sont utilisés pour les panneaux solaires en raison de leur capacité à résister aux températures élevées et aux changements de température. Les cellules photovoltaïques des panneaux solaires ont une plage de fréquences à laquelle elles sont sensibles en fonction des matériaux utilisés. Il serait donc possible de concevoir une pile solaire utilisant des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) qui auraient une réponse optimale sur une plage de fréquences plus large. En outre, l'utilisation combinée de la génération thermoélectrique et photovoltaïque dans un panneau solaire permettrait une exploitation maximale de l'énergie lumineuse et thermique du rayonnement solaire, ce qui se traduirait par un meilleur rendement global de conversion. [9]
- Industrie nucléaire : les FGM sont utilisés pour les réacteurs nucléaires car ils ont une résistance élevée aux radiations et à la corrosion. Ainsi que dans les systèmes de

combustion à haute efficacité car ils ont une conductivité thermique élevée et peuvent résister aux températures élevées et aux conditions corrosives.

- En médecine : des implants osseux personnalisés pour améliorer l'intégration des implants
- En électronique : pour concevoir des batteries rechargeables plus efficaces.

### 3.4. Variation des propriétés d'un FGM

Ce sont des matériaux dont les propriétés varient de manière continue ou discrète en fonction de leur position dans l'espace. Ils présentent donc une variation graduelle de certaines propriétés physiques et/ou chimiques, telles que la densité, la conductivité thermique, la dureté, la composition chimique, la porosité, la perméabilité, etc. [10]

Cela est dû à leur microstructure hétérogène et contrôlée, qui est modulée par un gradient de compositions, de porosité, de distribution de phase ou de texture. Cette structure graduelle crée des différences de propriétés telles que la densité, la dureté, la conductivité thermique, la conductivité électrique, etc. Les FGM sont généralement des composites constitués de plusieurs couches qui contiennent des composants différents tels que des céramiques et des métaux. En conséquence, les FGM ont des caractéristiques macroscopiquement hétérogènes. [11]

La transition entre le renfort et la matrice se fait idéalement de façon continue de telle sorte à avoir une face complète de matrice et une autre à 100% de renfort, ce qui nous donne la possibilité d'utiliser un même matériau subissant différentes sollicitations de chaque côté. [12]

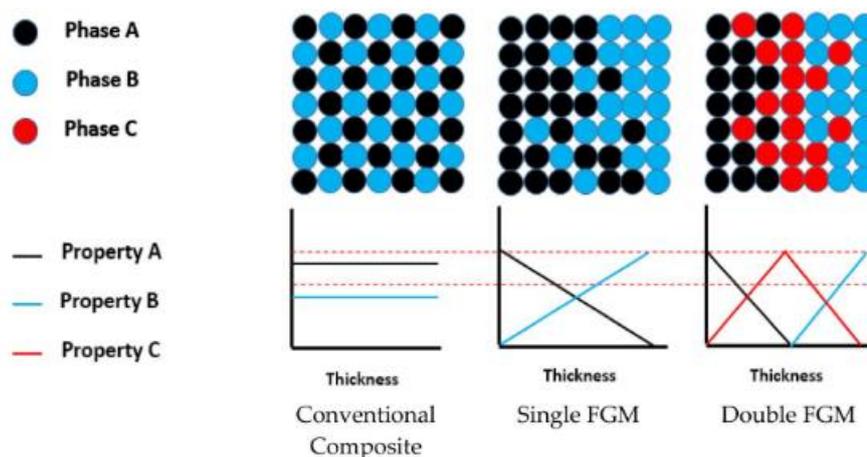


Figure 12: Comparaison de la variation des propriétés dans un composite conventionnel et un FGM.

Voici un tableau illustrant la variation des propriétés en fonction des phases dans un FGM métal-céramique [11] :

**Tableau 1: Variation des propriétés en fonction des phases dans un FGM métal-céramique.**

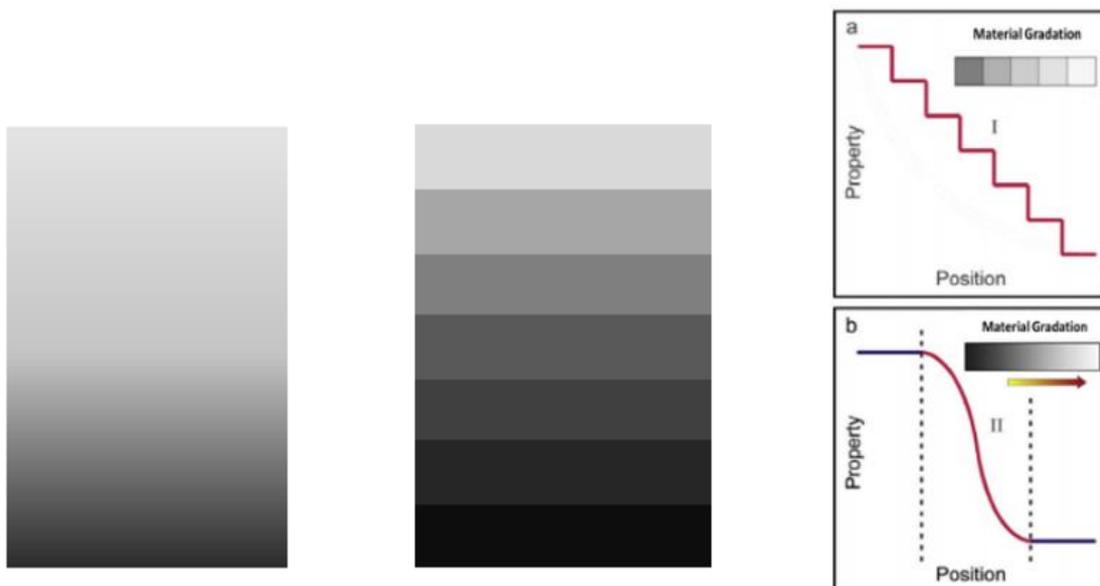
Couches	Matériaux	Les propriétés mécaniques
La face à haute température	Céramique	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Bonne résistance thermique</li> <li>▪ Bonne résistance à l'oxydation</li> <li>▪ Faible conductivité thermique</li> </ul>
« couches intermédiaires »	Céramique métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Elimination de problème d'interface</li> <li>▪ Relaxer les contraintes thermiques</li> </ul>
La face à basse température	Métal	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Bonne résistance mécanique</li> <li>▪ Conductivité thermique élevée</li> </ul>

### 3.5. Classification of FGM

#### 3.5.1. Selon l'échelle et les dimensions des FGM

Les FGM peuvent être classées en deux groupes ; les FGM interfaciales à film mince et les FGM en vrac (bulk FGM). Les FGM minces ont des sections relativement minces comme un revêtement de surface, tandis que les FGM en vrac sont constituées de l'ensemble du volume des matériaux.

#### 3.5.2. Selon la structure du FGM



**Figure 13: Différence entre une variation continue et discrète des propriétés.**

Les FGM sont classés en deux groupes principaux [13] : les matériaux gradués continus et discontinus, comme indiqué sur la figure 13. Dans le premier groupe, aucune zone claire ou ligne de coupe de séparation ne peut être observée à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone. Dans le deuxième groupe, les ingrédients du matériau changent de manière discontinue par gradation par paliers, ce qui est connu sous le nom de FGM en couches ou discrètes.

### 3.5.3. Selon le type du gradient FGM [14] [15]

#### 3.5.3.1. Gradient de composition

C'est le type de matériaux fonctionnellement gradués dont la composition chimique varie progressivement en fonction de la position spatiale dans le matériau. La combinaison du gradient FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre et conduit à des phases distinctes avec des structures chimiques diverses. Il peut être sous la forme d'un matériau monophasé ou multiphasé.

#### 3.5.3.2. Gradient de porosité

Dans le deuxième groupe de FGMs, que nous connaissons sous le nom de gradient de porosité, la porosité varie selon l'emplacement dans tout le matériau. Dans la conception de FGM avec une porosité graduelle, non seulement la taille de la porosité est très importante, mais également leur forme est extrêmement significative, en fonction du type d'application.

#### 3.5.3.3. Gradient de microstructure

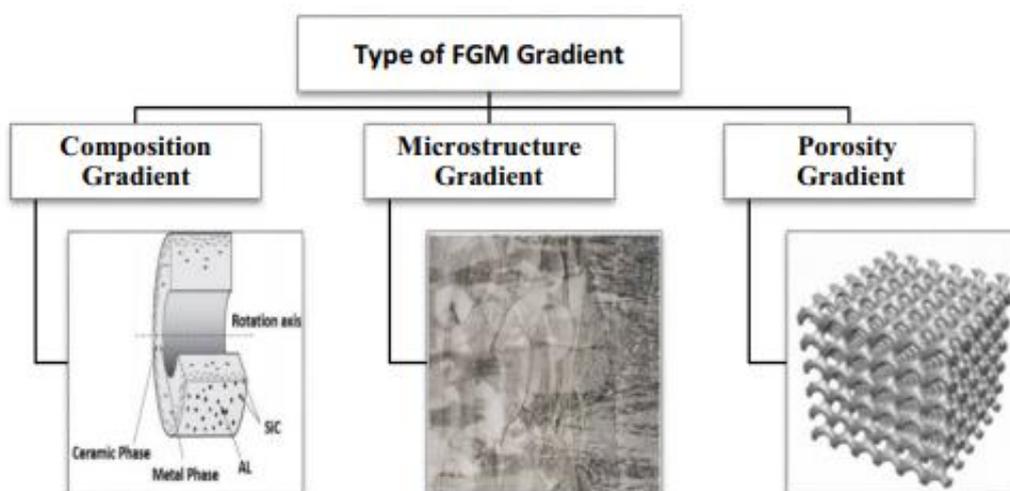


Figure 14: Types de gradient des FGM.

Ce troisième type d'FGM, fait référence à un groupe dont la surface du matériau a une microstructure différente de celle de son noyau. Ces éléments sont principalement produits pendant le processus de refroidissement, de sorte que le traitement thermique joue un rôle important dans ces matériaux. Ils sont utilisés dans des applications et des dispositifs où la surface doit avoir certaines capacités telles que la résistance à l'usure et à la corrosion, tandis que le noyau du corps a une autre propriété.

### 3.6. Méthodes de fabrication et de traitement des matériaux à gradient fonctionnel

Il existe différents moyens de produire des matériaux à gradient de fonction, basée souvent sur une variation des méthodes de traitement des processus d'élaboration conventionnels bien établis tels que le mélange de matériaux, l'ingénierie des surfaces, l'impression 3D, la fabrication additive, l'utilisation de champs électriques ou magnétiques, etc...

Parmi les procédés qui sont capables de s'adapter à une étape de gradation, nous citons [16]:

- La compaction sèche des poudres
- La stratification des feuilles
- Les méthodes de dépôt chimique en phase vapeur
- Le coulage centrifuge
- Coulage séquentiel en barbotine
- Coulage en bande
- Projection thermique (plasma)

Cependant ces différents processus sont utilisés selon : le type des FGMs et leur complexité ainsi que le coût de l'équipement, etc... Ci-dessous un schéma résumant les méthodes à adapter en fonction de ces différents paramètres [13] :

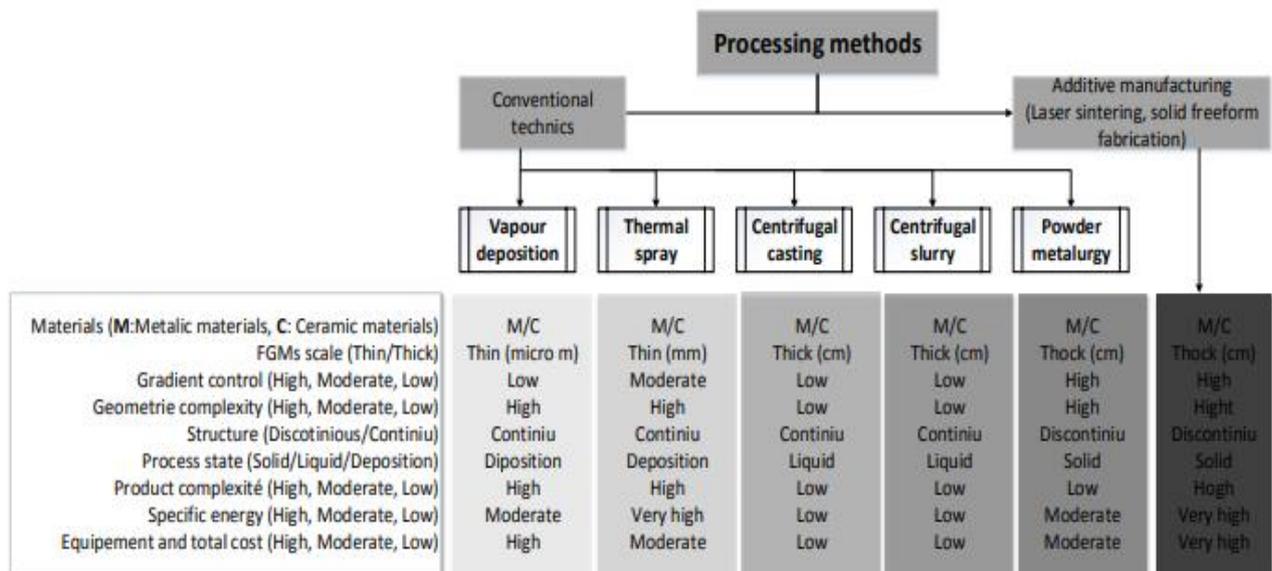


Figure 15: Comparaison des processus de fabrication de matériaux FGM.

## 4. Nanotechnologies

### 4.1. Qu'est ce que la nanotechnologie ?

Les nanotechnologies sont une branche, relativement récente, de la science et de la technologie qui se concentre sur la manipulation de la matière à l'échelle nanométrique. Le préfixe "nano" signifie un milliardième, soit  $10^9$ . Les nanotechnologies impliquent la conception, la fabrication et l'utilisation de matériaux et de dispositifs ayant au moins une de ses trois dimensions de l'ordre du nanomètre, qui est environ 100 000 fois plus petit que l'épaisseur d'un cheveu humain.

### 4.2. Nanomatériaux

Un matériau peut être considéré comme un nanomatériau s'il satisfait au moins un des critères suivants :

- Un matériau est dit nanorenforcé s'il est constitué de particules dites nano-objets dont au moins une dimension est comprise entre 1 et 100 nanomètres, représentant au moins 1 % de l'ensemble des particules. À titre d'exemple on a les nanocomposites qui sont composés d'au moins deux phases distinctes, dont l'une ou plusieurs sont à l'échelle nanométrique. Les nanophases sont obtenues par l'intégration de nano-objets dans la matrice, créant ainsi des structures composites dotées de propriétés électriques, mécaniques ou thermiques uniques afin d'apporter une nouvelle fonctionnalité en terme de performance du matériau. [17]

- Les matériaux nanostructurés en surface et en volume présenteront des structures internes ou de surface avec au moins une dimension comprise entre 1 et 100 nanomètres. [18]
- Il possède une surface spécifique supérieure à  $60 \text{ m}^2/\text{cm}^3$ , à l'exception des matériaux constitués de particules dont la taille est inférieure à celle du nanomètre. [18]

### 4.3. Concept de surface d'échange

L'augmentation de la surface d'échange est un concept important en nanotechnologie, car elle permet d'optimiser les performances de nombreux dispositifs et matériaux en augmentant leur efficacité.

En réduisant la taille d'un matériau à l'échelle nanométrique on augmente ainsi la surface d'échange avec le milieu extérieur. En d'autres termes plus un objet est petit, plus la surface de cet objet par rapport à son volume est importante, cela devient particulièrement significatif à l'échelle nanométrique [19]. En effet, les nano-objets sont caractérisés par un nombre d'atomes en surface identique au nombre d'atomes en volume, ce qui signifie que les phénomènes de surface deviennent prépondérants augmentant la quantité d'interaction avec d'autres matériaux ou substances, ce qui peut conduire à une meilleure sensibilité. Cela nous permet de contrôler et façonner les propriétés des matériaux à la carte.

### 4.4. Types de nano-objets (Classification of nanostructures by dimensionality)

#### 4.4.1. Nanoplaquettes (1D)

Les nanofeuillets, nanoplats ou nanoplaquettes se rapportent aux nano-objets dont une dimension externe est inférieure à 100 nm alors que les deux autres dimensions sont significativement supérieures

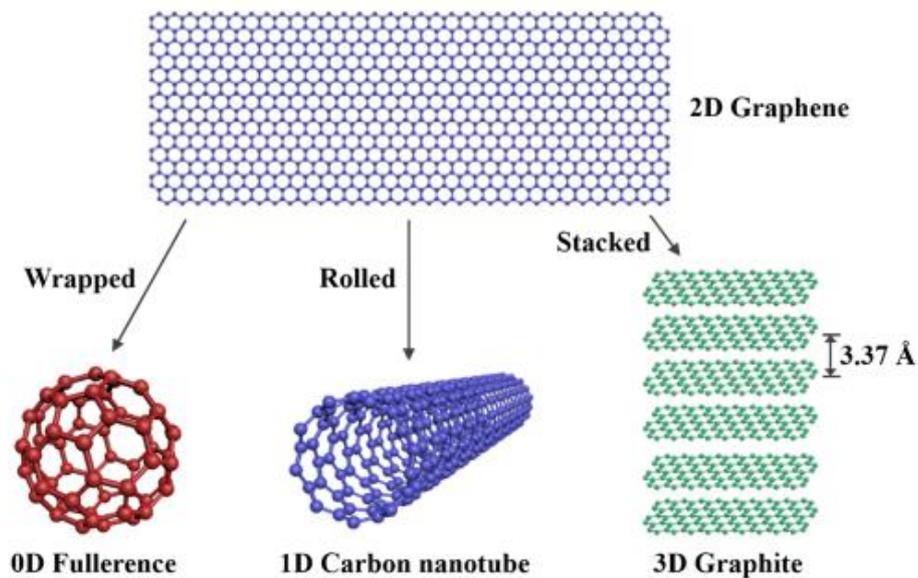
##### 4.4.1.1. Les nano-plaquettes de graphène

Le graphène est un matériau très prometteur grâce à ses propriétés uniques, bien que sa synthèse soit complexe et sa production à grande échelle encore difficile. Les nanoplaquettes de graphène (GPL) qui sont des nano-objets bidimensionnels constitués d'une seule couche de graphène, c'est-à-dire une feuille plane de carbone d'une épaisseur d'un seul atome, présentent une alternative intéressante en raison de leur faible coût, de leur potentiel de production en masse et de leurs caractéristiques fascinantes, telles que la légèreté, de bonnes propriétés mécaniques et une excellente conductivité thermique et électrique. Les GPL peuvent être

utilisées comme matériaux isolants, revêtements purs et charges de composites, et ce numéro spécial se concentre sur leur utilisation en tant que nanocharges. [20]

#### 4.4.1.2. Structure

Le graphène est une structure hexagonale bidimensionnelle monofeuillette composée d'atomes de carbone, qui est l'élément structural de base de toutes les autres formes allotropiques de carbone graphitique pour différentes dimensionalités [21]. Par exemple, enrouler une feuille de graphène peut donner une structure en fullerène à zéro dimension (0D), également appelée buckyball, ou un cylindre à une dimension (1D) d'allotropes de carbone, soit des nanotubes de carbone. L'empilement de différentes feuilles de graphène permet d'obtenir du graphène monocouche, du graphène à quelques couches, des plaquettes de graphène ou du graphite (allotrope de carbone tridimensionnel). [21] Notre intérêt se porte sur les nanoplaquettes de graphène ayant une taille de quelques dizaines à quelques centaines de nanomètres dans leur plus grande dimension et ont une épaisseur typique de 1 à 10 nm.



**Figure 16: Du graphène 2D à la fullerène 0D, en passant par les nanotubes de carbone 1D et le graphite 3D.**

#### 4.4.1.3. Propriétés

En raison de leur structure plate, de leur grande surface, de leurs propriétés physiques et mécaniques exceptionnelles en termes de module d'élasticité, de module de cisaillement, de résistance et conductivité thermique ainsi que leur stabilité chimique et leur résistance à la corrosion, les GPL sont de plus en plus utilisées en tant que renforts nanométriques.

Une étude menée par Lee et ses collègues a mesuré les propriétés élastiques et la résistance intrinsèque du graphène monocouche à l'aide d'une méthode de nano-indentation dans un microscope à force atomique (AFM). Les résultats ont montré que le module de Young du graphène est de 1TPa et une résistance intrinsèque d'environ 130GPa, ce qui est beaucoup plus élevé que celui des matériaux métalliques traditionnels. [22]

Leur géométrie bidimensionnelle leur donne l'avantage d'être dispersées dans la matrice avec moins d'agglomération que les renforts anisotropes unidimensionnels. De plus, leur grande surface peut être fonctionnalisée avec différents groupes chimiques pour améliorer leur compatibilité avec d'autres matériaux ou pour modifier leurs propriétés optiques. Les nanoplaquettes de graphène ont aussi une grande surface spécifique, ce qui leur permet de réagir plus facilement avec leur environnement [23]. Cette propriété est utilisée dans les capteurs pour détecter des molécules spécifiques dans des échantillons tels que des biomolécules dans le sang ou des gaz toxiques dans l'air.

#### 4.4.1.4. Domaines d'application

Ces propriétés font des nanoplaquettes de graphène des matériaux très prometteurs pour une large gamme d'applications, notamment dans les domaines de l'énergie civile, biomédicale et automobile, l'électronique tels que les capteurs, les piles à combustible, les supercondensateurs et les batteries et plein d'autres dispositifs électroniques, tels que les transistors, les diodes et les cellules solaires, en raison de leur excellente conductivité électrique.

En résumé, les nanoplaquettes de graphène sont des nano-objets bidimensionnels en carbone avec des propriétés uniques qui les rendent très utiles dans de nombreuses applications, de la détection de molécules à la production d'énergie.

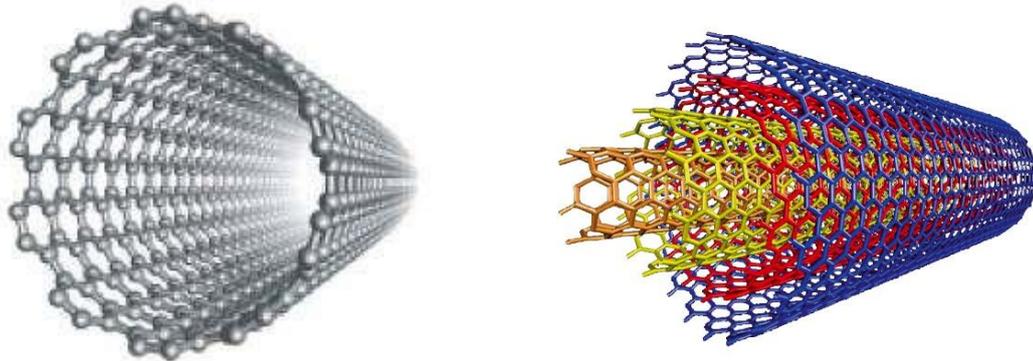
#### 4.4.2. Nanotubes (2D)

Les nanofibres, nanotubes, nanofilaments, nanotiges ou nanobâtonnets sont définis les nano-objets ayant deux dimensions à l'échelle nanométrique tandis que la troisième dimension est significativement plus grande

- nanofibres creuses : ce sont les nanotubes
- nanofibres pleines : ce sont les nanotiges
- nanofibres électriquement conductrice ou semi-conductrice : ce sont les nanofils

#### 4.4.2.1. Nanotube de carbone

Un nanotube de carbone est un nano-objet cylindrique formé par l'enroulement d'une seule couche de graphène (monofeuillet) dont le diamètre peut être inférieur à 1 nanomètre, ou de plusieurs couches de feuilles de graphène enroulées sur elles-mêmes (multifeuillet).



**Figure 17: Nanotubes de carbone monofeuillet et multifeuillet.**

Les nanotubes de carbone ont été découverts dans les années 1990 par S. Iijima (NEC, Tsukuba, Japon) qui l'identifie par microscopie électronique dans un sous produit de synthèse des fullerènes, et ont depuis lors suscité un grand intérêt dans le domaine de la nanotechnologie en raison de leurs propriétés physiques et chimiques uniques. Ils sont très résistants et rigides, avec une grande résistance à la traction, une faible densité et une conductivité électrique et thermique élevée.

Ces propriétés remarquables font des nanotubes de carbone des matériaux potentiellement utiles dans de nombreux domaines, tels que la construction de nanocomposites, la fabrication de dispositifs électroniques avancés, la catalyse et la médecine. Ils sont également étudiés pour leur potentiel en tant que matériaux de stockage d'énergie et pour leur capacité à transporter des médicaments dans le corps.

#### 4.4.3. Nanoparticules (3D)

Les nanoparticules désignent des nano-objets dont les trois dimensions externes sont inférieures à 100 nm

### 4.5. Procédés de fabrication des nanomatériaux manufacturés

Les nanomatériaux sont synthétisés selon les deux approches suivantes :

- L'approche « ascendante » (bottom-up) provient des laboratoires de recherche en nanosciences, et implique la construction de nanomatériaux à partir de la manipulation précise et contrôlée d'atomes, de molécules ou d'agrégats, un par un. Cette technique

permet l'élaboration de matériaux fonctionnels dont la structure est entièrement contrôlée, grâce à un assemblage ou un positionnement extrêmement précis et exponentiel. [24]

- L'approche « descendante » (top-down) trouve son origine dans la microélectronique, et implique la réduction et la miniaturisation des systèmes existants en utilisant les technologies industrielles disponibles. Cette approche consiste à progressivement réduire les dispositifs ou les structures jusqu'à atteindre des dimensions nanométriques, en utilisant notamment des techniques telles que le broyage à haute énergie. [24]

#### 4.6. Domaine d'application de certains types de nanomatériaux

Les nanomatériaux sont d'une importance particulière car ils sont considérés comme les éléments fondamentaux des produits manufacturés. Le développement et l'intégration de ces matériaux dans les processus de fabrication bénéficient à tous les secteurs économiques [25].

**Tableau 2: Différents types de nanomatériaux et leur domaine d'application**

<b>Nanocéramiques</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Matériaux composites structuraux</li> <li>▪ Composants anti-UV</li> <li>▪ Polissage mécano-chimique des substrats (wafers) dans la microélectronique</li> <li>▪ Applications photocatalytiques</li> </ul>
<b>Nanométalliques</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Secteurs antimicrobiens et/ou de la catalyse</li> <li>▪ Couches conductrices des écrans, les capteurs ou encore les matériaux énergétiques</li> </ul>
<b>Nanoporeux</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Aérogels pour isolation thermique dans les domaines de l'électronique, de l'optique et de la catalyse</li> <li>▪ Domaine bio-médical pour des applications de type vectorisation ou encore implants</li> </ul>
<b>Nanotubes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Nanocomposites conducteurs électriques</li> <li>▪ Matériaux structuraux</li> <li>▪ Les nanotubes monofeuillets pour des applications dans le domaine de l'électronique, les écrans</li> </ul>
<b>Nanomatériaux massifs</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Revêtements durs</li> <li>▪ Composants structuraux pour l'industrie aéronautique, l'automobile, les conduites pour les industries pétrolières et gazières</li> </ul>

---

	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ le domaine sportif</li> <li>▪ le secteur anticorrosion</li> </ul>
<b>Dendrimères</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Domaine médical (administration de médicaments, détection rapide)</li> <li>▪ Domaine cosmétique</li> </ul>
<b>Quanta dots</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Applications optoélectroniques (écrans)</li> <li>▪ Cellules photovoltaïques</li> <li>▪ Encres et peintures pour applications de type marquage anti-contrefaçon</li> </ul>
<b>Fullerènes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Secteurs du sport (nanocomposites)</li> <li>▪ des cosmétiques</li> </ul>
<b>Nanofils</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ les couches conductrices des écrans ou encore les cellules solaires les dispositifs électroniques</li> </ul>

---

## 5. Conclusion

En conclusion, la recherche bibliographique menée sur les matériaux composites fonctionnellement gradués renforcés en nanographène est riche en informations et en perspectives prometteuses. Les résultats des différentes études montrent que l'ajout de nanographène à la matrice polymère peut améliorer considérablement les propriétés mécaniques et thermiques du matériau composite. De plus, la conception fonctionnellement graduée permet d'obtenir des propriétés spécifiques dans différentes zones du matériau en ajustant la concentration en nanographène.

Cependant, il reste encore des défis à relever pour une utilisation plus généralisée de ces matériaux composites. Les procédés de fabrication doivent être optimisés pour garantir une distribution uniforme du renfort en nanographène dans la matrice. De plus, des études supplémentaires sont nécessaires pour évaluer les propriétés électriques et optiques de ces matériaux.

En somme, les matériaux composites fonctionnellement gradués renforcés en nanographène sont un domaine de recherche prometteur avec des perspectives d'applications variées. Cette recherche bibliographique fournit une base solide pour la poursuite des travaux sur ces matériaux innovants.

**CHAPITRE II :  
RECHERCHE  
BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES  
LOIS DE DISTRIBUTIONS ET  
DES THEORIES DE  
DEFORMATION EN  
CISAILLEMENT  
APPLICABLES AUX  
STRUCTURES FGM  
RENFORCEES**

---

## 1. Introduction

---

L'introduction des matériaux composites a considérablement élargi les possibilités de conception et de fabrication de structures légères et résistantes. Cependant, ces matériaux ont des propriétés mécaniques anisotropes qui nécessitent une compréhension approfondie des théories de déformation pour une modélisation précise de leur comportement. Les matériaux composites fonctionnellement gradués (FGM) constituent une classe particulière de composites, où les propriétés varient graduellement selon l'épaisseur ou la forme de la structure.

Dans ce contexte, ce chapitre de projet de fin d'études (PFE) vise à explorer la littérature scientifique pour fournir une revue complète des différentes théories de déformation en cisaillement applicables aux structures FGM renforcées. En particulier, l'accent sera mis sur les aspects théoriques de la modélisation des matériaux FGM et la manière dont les théories de déformation peuvent être utilisées pour décrire le comportement de ces matériaux.

Dans ce but, nous examinerons les différents types de structures FGM renforcées et les méthodes de fabrication utilisées pour obtenir des propriétés mécaniques spécifiques. Nous analyserons également les différents modèles de déformation en cisaillement, tels que la théorie des plaques, la théorie des coques et la théorie des poutres, qui sont couramment utilisés pour décrire le comportement des structures composites.

Enfin, nous discuterons des avantages et des limites de chaque théorie de déformation et de leur pertinence pour la modélisation des structures FGM renforcées. Cette revue bibliographique fournira ainsi une base solide pour l'analyse numérique et la conception de structures composites FGM renforcées.

## 2. Lois de distribution des propriétés des plaques FGM

---

Les matériaux FGM se caractérisent par des microstructures non uniformes et des propriétés macroscopiques graduelles dans l'espace. La structure multiphase à travers l'épaisseur est l'un des principaux paramètres à prendre en compte lors de la fabrication de ces matériaux. Ainsi pour la modélisation des plaques FGM renforcées il faut pertinemment prendre en compte la variation de ses phases et donc des propriétés. Ces derniers dépendent de leur position et peuvent être déterminées en utilisant la loi des mélanges, qui correspond au modèle de Voigt.

$$P = \sum P_i V_i \quad , \quad \sum V_i = 1 \quad (\text{II. 1})$$

P : Propriété le long de l'axe z

P<sub>i</sub> : La propriété mécanique du constituant i

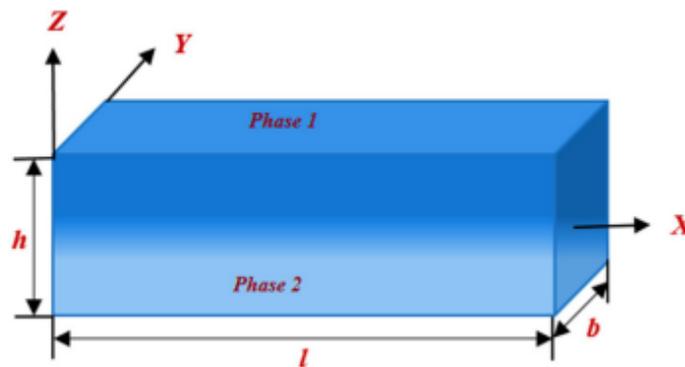
V<sub>i</sub> : La fraction volumique du constituant i

Les FGM ayant tendance à être constitués de deux éléments seulement (ex: métal/céramique) la loi est donné par :

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (\text{II. 2})$$

L'utilisation de l'analyse par éléments finis pour les matériaux gradués à plusieurs phases peut être limitée dans certaines applications. Ainsi, l'homogénéisation est avantageuse pour les matériaux gradués, en utilisant des couches homogènes parallèles avec des modules d'élasticité définis. Les propriétés de chaque couche sont évaluées avec des méthodes d'homogénéisation les épaisseurs de la couche et les fractions volumiques des constituants de phase sont choisies pour approximer la variation substantielle dans une fraction volumique de phase. [26]

### 1.1.Loi de mélange en puissance P-FGM



**Figure 18: Distribution de fraction volumique d'un échantillon de plaque FGM dans la direction de l'épaisseur.**

La loi de puissance est considérée comme le modèle le plus cité et accepté dans la littérature scientifique [26]. Les propriétés du matériau varient dans une direction spécifique (unidirectionnelle), qui est définie par :

$$P(z) = (P_c - P_m)V(z) + P_m \quad (\text{II. 3})$$

P<sub>c</sub> et P<sub>m</sub> étant respectivement les propriétés des phases céramique et métal.

Ces propriétés dépendent de la fraction volumique d'un P-FGM est définie par :

$$V(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^n, \quad -h/2 \leq z \leq h/2 \quad (\text{II. 4})$$

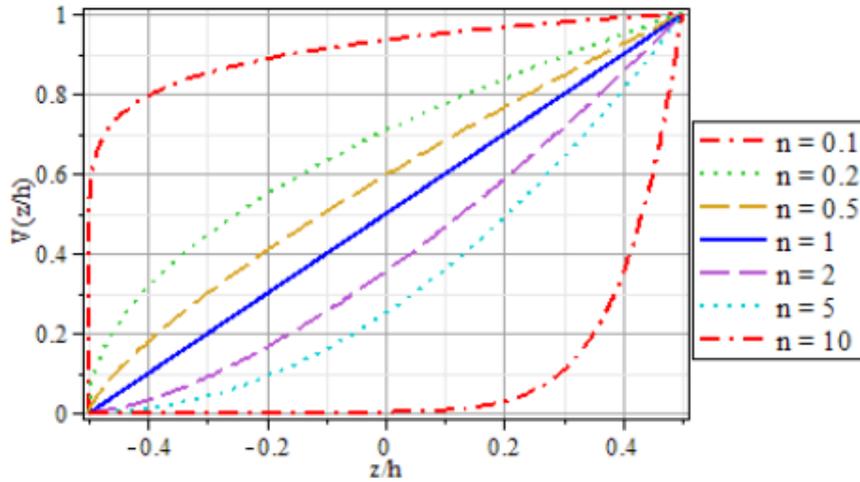


Figure 19: Variation de la fraction volumique du P-FGM [12].

Tel que n qui définit l'index de la fraction volumique qui indique le niveau d'hétérogénéité du matériau dans les FGM (matériaux à gradient de fonctionnalité). Si n = 0, alors la plaque FGM est entièrement en céramique, tandis que  $n \rightarrow \infty$  indique une plaque entièrement métallique.

### 1.2. Loi de mélange exponentielle E-FGM

On utilise couramment ce modèle pour étudier la mécanique de la rupture, et les chercheurs l'ont appliqué à l'analyse des performances statiques et dynamiques des structures FGM [26]. La propriété du E\_FGM est donné directement par :

$$P(z) = P_b e^{\left(\frac{z}{h} + 0.5\right) \ln \frac{P_t}{P_b}} \quad (\text{II. 5})$$

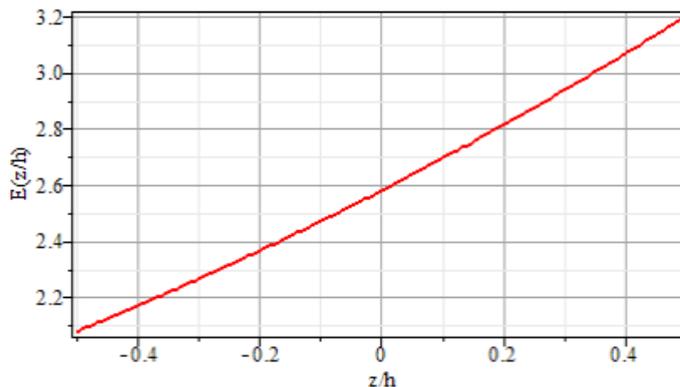


Figure 20: Variation du module de Young E([Pa]x 10-11) du E-FGM (SUS304-Al2O3) [12].

### 1.3. Loi de mélange sinusoidale S-FGM

Ce modèle utilise un FGM à loi de puissance unique pour les composites multicouches [26].

Selon les recherches de Chi et Chung, la fraction volumique est déterminée en utilisant deux fonctions de loi de puissance. Cette approche permet une distribution plus homogène des contraintes à chaque interface.

$$P(z) = (P_t - P_b)V(z) + P_b, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (\text{II. 6})$$

$$P(z) = (P_t - P_b)V(z) + P_b, \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

Tel que les fractions volumiques sont données par :

$$V(z) = 0.5\left(1 + 2\frac{z}{h}\right)^p, \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{II. 7})$$

$$V(z) = 1 - 0.5\left(1 - 2\frac{z}{h}\right)^p, \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2}$$

P étant l'index de la fraction volumique.

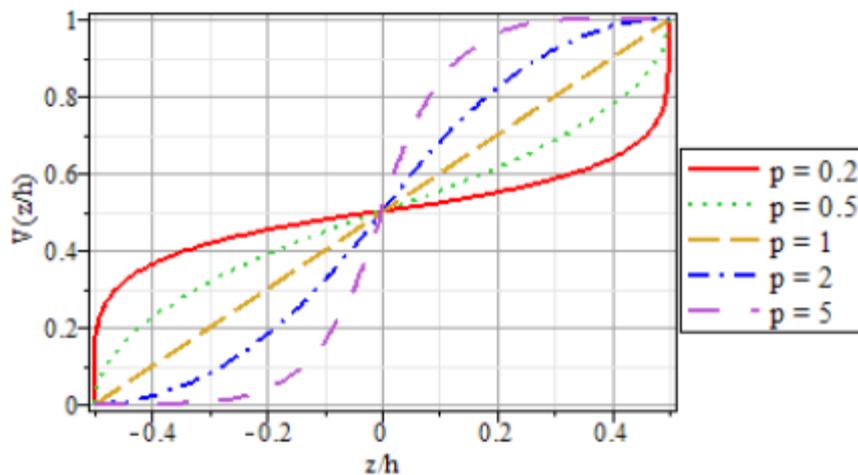


Figure 21: Variation de la fraction volumique du S-FGM [12].

### 1.4. Autres lois de mélange des plaques FGM

#### 1.4.1. Loi de Viola Tornabene

Ce modèle offre la variation de matériaux la plus diversifiée par rapport au modèle de loi de puissance et est principalement utilisé pour l'analyse des poutres à gradient de fonctionnalité. La formulation permet de choisir le mélange de matériaux soit pour la surface

supérieure, soit pour la surface inférieure de la poutre [26]. Cette loi est catégorisée en modèles à trois ou quatre paramètres définis respectivement par les formules suivantes :

$$V_f = \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right)^p \quad (\text{II. 8})$$

$$V_f = \left( \frac{1}{2} - a \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{h} \right) + b \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^c \right)^p \quad (\text{II. 9})$$

Les termes a, b, c et p représentent la propagation des matériaux le long de la direction de l'épaisseur de la poutre.

#### 1.4.2. Modèle trigonométrique

Ce modèle fournit la fraction volumique sous forme de fonction trigonométrique pour les matériaux composites à gradient de fonctionnalité (FGM) unidirectionnels, comme indiqué ci-dessous.

$$V_f = \left( 1 - \sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x} + \varphi_x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y} + \varphi_y\right) \right)^y \quad (\text{II. 10})$$

### 1.5. Autres propriétés matérielles des plaques FGM

Les modèles de mélange P-FGM, S-FGM et E-FGM sont pratiques et ont une fonctionnalité élevée, mais ils ne sont pas capables de caractériser la taille, la forme et la répartition des particules à l'échelle microstructurale. Il y a d'autres modèles disponibles pour évaluer les propriétés globales de la structure.

#### 1.5.1. Modèle de Halpin-Tsai

Le modèle de Halpin-Tsai [27] est une méthode semi-empirique utilisée pour prédire les propriétés élastiques des composites renforcés par des fibres ou plaquettes. Il prend en compte les caractéristiques géométriques et l'orientation des charges, qui ont un impact significatif sur l'efficacité du renforcement [28].

$$E_{11} = \frac{1 - \xi_{11} \eta_{11} V_f}{1 - \eta_{11} V_f} E_m \quad E_{22} = \frac{1 - \xi_{22} \eta_{22} V_f}{1 - \eta_{22} V_f} E_m \quad (\text{II. 11})$$

Avec

$$\eta_{11} = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + \xi_{11}} \quad \eta_{22} = \frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + \xi_{22}} \quad (\text{II. 12})$$

Tel que  $\xi_{11}$  et  $\xi_{22}$  sont les paramètres de taille le long des directions longitudinale et transversale.

Le module de Young du composite sera obtenu par la relation suivante :

$$E_c = \frac{3}{8}E_{11} + \frac{5}{8}E_{22} \quad (\text{II. 13})$$

### 1.5.2. Modèle de Mori et Tanaka

Le modèle largement utilisé repose sur le schéma de Mori et Tanaka, qui prend en compte l'interaction des champs élastiques entre les inclusions voisines [26]. Pour une distribution aléatoire d'inclusions isotropes (indice 2) dans une matrice isotrope (indice 1), les propriétés sont exprimées de la manière suivante.

- Le module de compressibilité est donné par :

$$\frac{K - K_1}{K_2 - K_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(K_2 - K_1)(K_1 - \frac{3}{4}G_1)} \quad (\text{II. 14})$$

- Le module de cisaillement est donné par :

$$\frac{G - G_1}{G_2 - G_1} = \frac{V_2}{1 + V_1(G_2 - G_1)(G_1 - \frac{G_1(9K_1 + 8G_1)}{6(K_1 + 2G_2)})} \quad (\text{II. 15})$$

- Le module de Young est donné par :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (\text{II. 16})$$

### 1.5.3. Modèle auto-cohérent de Hill

Ce modèle est adapté pour estimer les modules effectifs dans les zones qui possèdent une microstructure similaire [26]. Hill a estimé les modules de cisaillement et de compression globaux du système composite.

- Le module de compressibilité est donné par :

$$K = \frac{1}{\frac{V_1}{K_1 + \frac{3}{4}G} + \frac{V_2}{K_2 + \frac{3}{4}G}} - \frac{3}{4}G \quad (\text{II. 17})$$

- Il utilise une équation quadratique qui doit être résolue à chaque surface de la plaque à gradient de fonctionnalité (FGM) pour obtenir le module de cisaillement.

$$\left[ \frac{V_1 K_1}{K_1 + \frac{3}{4}G} + \frac{V_2 K_2}{K_2 + \frac{3}{4}G} \right] + 5 \left[ \frac{V_1 G_2}{G - G_2} + \frac{V_2 G_1}{G - G_1} \right] + 2 = 0 \quad (\text{II. 18})$$

- Le module de Young est donné par :

$$E = \frac{9KG}{3K + G} \quad (\text{II. 19})$$

#### 1.5.4. Modèle de bornes de Hashin-Shtrikman

Ce modèle permet de déterminer les propriétés effectives d'un matériau biphasique contenant des particules sphériques réparties aléatoirement. Il repose sur une méthode de variation qui fournit les bornes supérieure et inférieure des propriétés matérielles [26].

- Le module de cisaillement est donné par :

$$G^+ = G_2 + \frac{(1 - V_f)}{\frac{1}{G_1 - G_2} + \frac{6(K_2 + 2G_2)V_f}{5G_2(3K_2 + 4G_2)}} \quad (\text{II. 20})$$

$$G^- = G_1 + \frac{V_f}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)(1 - V_f)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}}$$

- Le module de compressibilité est donné par :

$$K^+ = K_2 + \frac{(1 - V_f)}{\frac{1}{K_1 - K_2} + \frac{3V_f}{(3K_2 + 4G_2)}} \quad (\text{II. 21})$$

$$K^- = K_1 + \frac{V_f}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1 - V_f)}{(3K_1 + 4G_1)}}$$

### 3. Théories des déformations des plaques FGM

Les plaques sont utilisées dans différents domaines de l'ingénierie, comme les ailettes de fusée en aérospatial ou les murs de bâtiments en génie civil. Pour concevoir des plaques capables de résister aux conditions de service, il est important de comprendre leur comportement sous différentes charges et leur tendance à résonner ou flamber. Une théorie d'ingénierie précise mais simple est donc essentielle. [29]

Les théories de déformation sont utilisées pour analyser et prédire le comportement des matériaux. Elles prennent en compte des paramètres tels que l'épaisseur, la géométrie et les propriétés des matériaux pour déterminer leur capacité à résister aux différents chargements auxquels la plaque est soumise. Ces théories sont classées en deux classes principales : la première étant la théorie classique qui s'applique aux plaques minces, celle-ci ignore les effets de déformation de cisaillement transversal contrairement à la deuxième qui regroupe toutes les théories de déformation de cisaillement de la plaque semi-épaisse et épaisse. [30]

Voici quelques différences entre les plaques minces, semi-épaisses et épaisses selon les théories de déformation :

- Plaques minces : Les plaques minces ont une épaisseur très faible devant les autres dimensions (rapport d'élanement  $\frac{h}{a}$  ou  $\frac{h}{b} \leq 0.05$  ). Les contraintes de cisaillement sont uniformément réparties à travers leur épaisseur. Les théories de déformation en cisaillement pour les plaques minces sont basées sur l'hypothèse de Kirchhoff, qui considère que la contrainte de cisaillement est constante à travers l'épaisseur de la plaque et que les déformations sont indépendantes de l'épaisseur.
- Plaques moyennement-épaisses : Les plaques semi-épaisses ont une épaisseur relativement supérieur que celle des plaques minces, le rapport dimensionnel par rapport à l'épaisseur est de l'ordre de 50 ou supérieur, ce qui signifie que les contraintes de cisaillement ne sont pas uniformément réparties à travers leur épaisseur. Les théories de déformation en cisaillement pour les plaques semi-épaisses sont basées sur l'hypothèse de Reissner, qui prend en compte les variations de contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la plaque et qui considère que les déformations sont dépendantes de l'épaisseur.
- Plaques épaisses : Les plaques épaisses ont une épaisseur assez importante par rapport aux deux autres dimensions de la plaque, ce qui signifie que les contraintes de cisaillement sont fortement concentrées près des surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

### 3.1. Théorie classique des plaques minces (CPT)

La théorie de Kirchhoff (1850) des plaques minces est une méthode d'analyse utilisée pour décrire le comportement de plaques minces soumises à des charges. Cette théorie repose sur les hypothèses suivantes [29]:

- La déformation de la plaque est uniquement due à la flexion et à l'extension, et les déformations en cisaillement sont négligeables.
- La normale à la surface de la plaque reste normale à la surface après la déformation, ce qui signifie que la plaque mince ne subit pas de déformation importante en épaisseur.
- L'hypothèse des sections droites (ou planes) stipule que les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. En d'autres termes les sections planes qui étaient initialement planes dans la plaque mince restent planes après la déformation. Les déplacements selon les axes  $x$  et  $y$  varient linéairement en fonction de la profondeur  $z$ , tandis que le déplacement transversal  $w$  n'est fonction que des coordonnées  $x$  et  $y$ . Cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, notamment Reissner, Hencky, BOLLÉ et Mindlin.
- L'hypothèse d'une déformation transversale  $\varepsilon_z$  nulle (pas de variation d'épaisseur).
- Les contraintes dans la plaque mince sont supposées planes dans les relations de comportement ; la contrainte suivant  $z$  est considérée comme négligeable en comparaison avec les autres composantes du tenseur de contraintes.

Ces hypothèses permettent de simplifier les calculs nécessaires pour analyser le comportement de la plaque mince sous charge, en réduisant le nombre de variables à prendre en compte. Toutefois, ces hypothèses ne sont pas toujours valides dans toutes les situations, en particulier pour des plaques plus épaisses ou des matériaux avec des propriétés de flexion ou d'extension plus complexes.

Le champ de déformation est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 22})$$

Où  $(u_0, v_0, w_0)$  sont les déplacements en membrane directions  $x$  et  $y$ ,  $z$  respectivement.

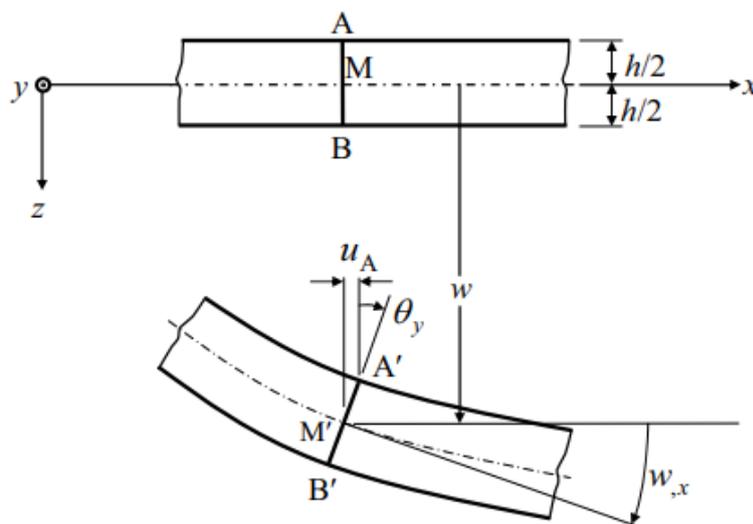


Figure 22: Cinématique de déformation.

Physiquement cela se traduit par la plaque subissant une petite déformation qui entraîne le déplacement vertical du point M vers la position M', le plan médian de la plaque tourne autour de l'axe y et la normale AMB tourne également d'un même angle  $\Theta_y$  pour atteindre sa nouvelle position A'M'B'.

### 3.2. Les théories de déformation de cisaillement

Bien que l'approche tridimensionnelle soit l'ultime méthode en matière de précision et de rigueur, elle ne peut pas être utilisée pour tous les problèmes de plaques en raison du manque de solutions analytiques et de la complexité des solutions numériques et leur exigence en termes de mémoire et de temps de calcul. Il est donc nécessaire de développer des théories de plaques bidimensionnelles plus réalistes que l'hypothèse de Kirchhoff-Poisson et qui en même temps se rapprochent de la théorie 3D, appelées théories de déformation de cisaillement. Ces théories prennent en compte l'éirement en épaisseur dans certains cas. [29]

#### 3.2.1. Théorie du premier ordre des plaques semi-épaisses (FSDT)

La théorie du premier ordre des plaques également connue sous le nom de théorie de la plaque de Reissner-Mindlin (1951) est une méthode d'analyse plus avancée que la théorie de Kirchhoff des plaques minces. Cette théorie prend en compte les déformations en cisaillement qui sont négligées dans la théorie de Kirchhoff, et permet une analyse plus précise du comportement de la plaque mince. Les hypothèses principales de cette théorie sont :

- La normale à la surface de la plaque reste normale à la surface après la déformation, ce qui signifie que la plaque ne subit pas de déformation importante en épaisseur.

- Les sections planes qui étaient initialement planes dans la plaque restent planes après la déformation.
- La contrainte de cisaillement transversale est supposée être constante par rapport à la coordonnée d'épaisseur.
- L'hypothèse d'état de contrainte plane est toujours valable.
- Pour éliminer l'inextensibilité d'une normale transversale, on suppose que la déflexion transversale varie également dans l'épaisseur.

Ces hypothèses permettent de modéliser le comportement de la plaque sous charge, en prenant en compte les déformations en cisaillement qui peuvent être importantes dans certaines situations. Toutefois, la théorie du premier ordre peut ne pas être valide dans toutes les situations, notamment pour des plaques plus épaisses ou des matériaux avec des propriétés d'extension plus complexes.

Champ des déplacements

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 23})$$

Où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  représentent respectivement les rotations autour des axes x et y.

Ces fonctions de rotations devraient se rapprocher respectivement des pentes de la déviation transversale :  $\phi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$  ,  $\phi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$

Des facteurs de correction de cisaillement dépendant des paramètres géométriques et des conditions aux limites de la plaque sont introduits pour corriger la différence entre les distributions de forces de cisaillement transversales réelles et celles calculées à l'aide des relations cinématiques. [30]

En 1966, Yang, Norris et Stavsky ont étendu cette théorie pour les plaques anisotropes stratifiées. Egalement documentée par Whitney et Pagano, la théorie YNS inclut des déplacements de plan médian  $u_0$  et  $v_0$  pour prendre en compte le couplage de flexion-étirement, nécessitant deux équations supplémentaires. [29]

### 3.2.2. Théorie d'ordre supérieur des plaques épaisses (HSDPT)

Cette théorie prend en compte les effets des déformations en cisaillement, ce qui est important pour les plaques épaisses dont l'épaisseur est comparable à leur longueur et leur largeur. Les théories d'ordre supérieur désignent les théories qui incorporent des termes z d'ordre supérieur, allant au-delà du terme linéaire, dans les champs de déplacement. Elles visent

à éliminer le facteur de correction de cisaillement arbitraire et à obtenir des estimations plus précises des contraintes et des déplacements dans le plan en tenant compte de la torsion des normales [29]. Les théories d'ordre supérieur introduisent des inconnues supplémentaires qui sont souvent difficiles à interpréter sur le plan physique. [30]

Les hypothèses principales de ces théories sont les suivantes :

- La plaque est suffisamment épaisse pour que les déformations transversales ne soient pas négligeables, mais suffisamment mince pour que les déformations en flexion soient importantes.
- Les déformations en flexion et les déformations en cisaillement sont toutes deux importantes et interdépendantes.
- La normale à la surface de la plaque ne reste pas nécessairement normale à la surface après la déformation, ce qui signifie que la plaque ne subit des déformations en épaisseur.
- Les sections transversales qui étaient initialement planes dans la plaque ne restent pas forcément planes après la déformation.
- Les contraintes dans la plaque varient de manière non linéaire à travers l'épaisseur de la plaque.
- Les déformations en cisaillement sont prises en compte en utilisant des fonctions d'interpolation pour les contraintes et les déformations transversales.

Ces hypothèses permettent de modéliser avec précision le comportement des plaques épaisses sous charge, en prenant en compte les effets des déformations en cisaillement, qui sont souvent négligées dans les méthodes d'analyse moins avancées.

En règle générale, cette théorie utilise une expansion en série de Taylor à travers l'épaisseur du champ de déplacement qui peut être représentée par la forme suivante : [31]

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\phi_x^2(x, y, t) + \dots + z^n\phi_x^n(x, y, t) \quad (\text{II. 24})$$

Second ordre

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 25})$$

Où  $u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$  sont les fonctions inconnues.

3<sup>ème</sup> ordre

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) + z^2\psi_x(x, y, t) + z^3\chi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) + z^2\psi_y(x, y, t) + z^3\chi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\phi_z(x, y, t) + z^2\psi_z(x, y, t) + z^3\chi_z(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$  sont les fonctions inconnues à déterminer pour pouvoir décrire le mouvement de la plaque.

On peut constater que la théorie d'ordre supérieur des plaques épaisses peut être complexe à appliquer dans la pratique et nécessite souvent l'utilisation de méthodes numériques pour résoudre les équations.

### 3.2.3. Théories raffinées

#### 3.2.3.1. Théories à cinq variables

Leur avantage principal est de réduire le nombre de variables dans les équations de mouvement et donc le nombre d'équations à résoudre, en introduisant des fonctions de formes décrivant les déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque [12], leur permettant de se rapprocher de plus en plus de la théorie de cisaillement 3D.

Les théories d'ordre supérieur raffinées sont donc utiles pour une analyse plus précise et réaliste de ces structures et peuvent avoir une incidence significative sur leur comportement en termes de résistance, de stabilité, de vibrations, de déformations, etc... Leur champ de déformation est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi(z) \left( \phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi(z) \left( \phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 27})$$

$u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y$  sont les variables à déterminer ainsi ces théories sont appelées théories à 5 variables.

Les déplacements de la théorie classique de plaque (CPT) sont obtenus par en prenant  $\varphi(z) = 0$ , alors que la théorie de premier ordre (FSDPT) peut être obtenue par  $\varphi(z) = z$ .

Le modèle de Reddy suppose que le champ de déplacement membranaire est cubique. Cette approche est une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par

rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle. Ce qui rend la théorie de Reddy fréquemment la plus utilisée pour l'étude de flexion, flambage et de vibrations des plaques.

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z\phi_x(x, y, t) + z^3 \left(1 - \frac{4}{3h^2}\right) \left(\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z\phi_y(x, y, t) + z^3 \left(1 - \frac{4}{3h^2}\right) \left(\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 28})$$

Le tableau suivant présente différentes fonctions de forme de distribution parabolique des déformations de cisaillement suivant z, valides pour les plaques minces et épaisses:

**Tableau 3: Différentes fonctions de cisaillement (de forme).**

<b>Théorie</b>	<b>Intitulé</b>	<b>Fonction de forme</b>
<b>Reddy [32]</b>	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$
<b>Reissener [33]</b>	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5z}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h}\right)^2\right)$
<b>Touratier [34]</b>	Théorie de déformation trigonométrique des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
<b>Karama [35]</b>	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
<b>Aydogdu [36]</b>	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z\alpha^{\frac{2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln(\alpha)}} \quad , \alpha > 0$
<b>El Meiche [37]</b>	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$
<b>Atmane [38]</b>	Théorie raffinée des plaques	$\frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$
<b>Mahi [12]</b>	Théorie raffinée des plaques	$z\left[1 - \alpha \left(\frac{z}{h}\right)^2 - \beta \left(\frac{z}{h}\right)^4\right]$
<b>Mahi [39]</b>	Théorie raffinée des plaques	$\frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4}{3\cosh^2(1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right)$

3.2.3.2. Théories à quatre variables

La théorie de Shimpi [40], contrairement aux autres théories figurant dans le tableau précédent, décrit le champ de déplacement à partir de 4 variables, il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II. 29})$$

Avec

$$\varphi(z) = h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right] \quad (\text{II.30})$$

Où :  $U_0$  et  $V_0$  : Déplacements de membrane dans les directions x et y respectivement. Le déplacement transversal W comprend deux composantes de flexion  $W_b$  et de cisaillement  $W_s$

3.2.3.3. Les théories des laminés

Les théories des laminés peuvent être classées en deux catégories : les théories équivalentes à une seule couche et les théories à couches discrètes (layerwise). Les théories équivalentes à une seule couche utilisent des fonctions continues pour approximer les déplacements sur toute l'épaisseur du laminé, mais ne capturent pas la nature morcelée des déplacements. Afin de pallier cette limitation, il est possible d'utiliser des champs de déplacement approximatifs (linéaires, quadratiques, etc.) ou d'autres variations pour chaque couche du laminé, tout en imposant et assurant la continuité aux interfaces. Cela conduit à ce que l'on appelle des théories à couches discrètes qui sont plus précises, mais nécessitent plus de calculs car le nombre de variables de déplacement augmente avec le nombre de couches. [29].

Une approche ingénieuse pour prendre en compte les changements brusques de pente des variations de déplacement aux interfaces consiste à introduire une fonction dite "zigzag" en plus des fonctions continuellement globales dans les expansions de déplacement d'une théorie équivalente à une seule couche. Ces théories "zigzag" sont généralement plus précises que les théories équivalentes à une seule couche classiques de même complexité et constituent une alternative pratique aux coûteuses théories à couches discrètes. [29]

Plusieurs tentatives ont été effectuées pour évaluer la précision des théories d'ordre supérieur populaires en les comparant avec des solutions tridimensionnelles. Cependant, il est

difficile de résumer les conclusions de ces études car chaque étude est spécifique à un problème particulier et à un ensemble correspondant de résultats. [29]

## 4. Conclusion

---

Dans ce chapitre, nous avons examiné les lois de mélange et les théories de cisaillement des plaques composites à gradient de fonctionnalité (FGM) qui permettent de déterminer les propriétés effectives d'un matériau FGM en fonction des propriétés des matériaux de base et de la variation du gradient.

Une familiarisation des modèles de déformation en cisaillement nous a permis une meilleure compréhension de leur fonctionnement pour étudier le comportement mécanique de différents types de structures renforcées. Nous avons constaté que les modèles de Kirchhoff et de Reissner-Mindlin ne sont pas appropriés pour la modélisation de plaques FGM, car ils ne prennent pas en compte les variations de gradient. En revanche, un modèle à cinq variables est plus approprié pour la modélisation de plaques FGM,

En somme, les lois de mélange et les théories de cisaillement des plaques FGM offrent des outils essentiels pour la modélisation et la conception de structures composites à gradient de fonctionnalité. La recherche sur les théories de déformation en cisaillement est en constante évolution et continue de fournir de nouvelles connaissances et de nouvelles avancées dans le domaine des matériaux composites avancés.

**CHAPITRE III :  
MODELISATION ET  
FORMULATION  
ENERGETIQUE DES  
PLAQUES FG-GPLRC**

## 1. Introduction

Le but de ce chapitre est de modéliser la plaque FG-GPLRC en utilisant la théorie de déformation en cisaillement raffinée à cinq variables de Mahi. Cette théorie est avantageuse car elle est applicable à des plaques minces, moyennement épaisses et épaisses. Les énergies cinétique et de déformation seront également définies pour permettre l'application du principe de Hamilton. En fin de compte, l'objectif de ce chapitre est d'établir les équations de mouvement pour notre système structural, la plaque FG-GPLRC, en utilisant la théorie mentionnée ci-dessus. Puis nous décrirons les étapes de la méthode analytique utilisée pour résoudre les équations de vibration libre, puis nous résoudrons le système d'équations différentielles couplées.

## 2. Modélisation analytique d'une plaque composite à gradient fonctionnel FGM renforcée en nano-plaquettes de graphène

Considérons une plaque FG-GPLRC avec la longueur  $a$ , la largeur  $b$  et l'épaisseur  $h$  comme indiqué sur la figure 23. Le renforcement GPL est supposé être réparti soit uniformément (GPL-UD) soit de manière graduelle fonctionnelle sur toute l'épaisseur, avec deux motifs symétriques, GPL-X et GPL-O, respectivement. [41]

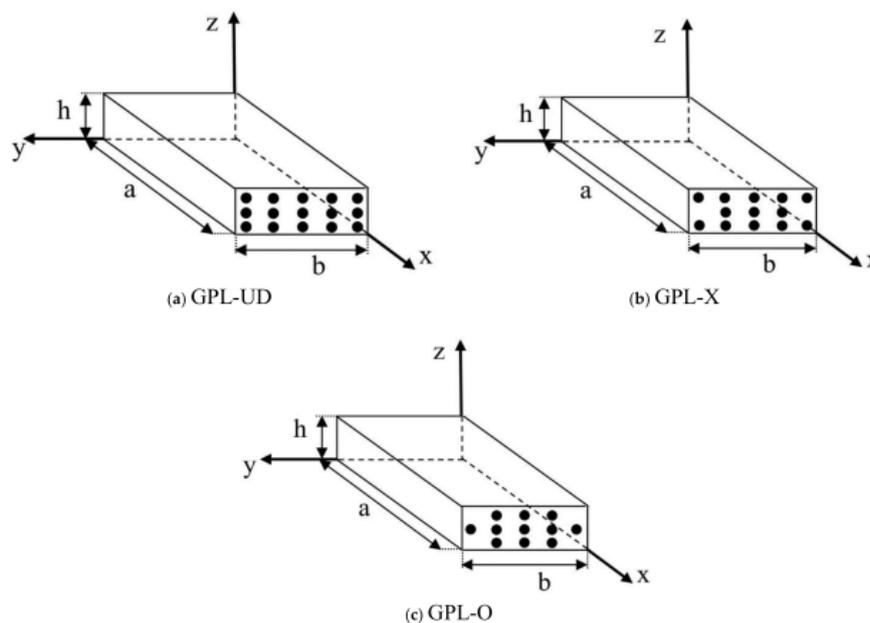


Figure 23: Distribution des GPL.

La fraction volumique des GPL en fonction de la coordonnée  $z$  dans la direction de l'épaisseur peut être exprimée comme suit :

$$V_{gpl}(z) = \begin{cases} V_{GPL}^* & \text{(GPL - UD)} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2V_{GPL}^* \left(1 - \frac{2z}{h}\right), \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ 2V_{GPL}^* \left(1 - 2\frac{(h-z)}{h}\right), \quad \frac{h}{2} \leq z \leq h \end{array} \right. & \text{(GPL - X)} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2V_{GPL}^* \left(1 - \frac{(\frac{h}{2}-z)}{h}\right), \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \\ 2V_{GPL}^* \left(1 + 2\frac{(\frac{h}{2}-z)}{h}\right), \quad \frac{h}{2} \leq z \leq h \end{array} \right. & \text{(GPL - O)} \end{cases} \quad \text{(III. 1)}$$

Tel que  $A_{GPL}$  est la fraction massique des GPL comptée par rapport à la masse totale de la couche composite (GPL+Epoxy). Cette fraction sera distribuée le long de l'épaisseur pour trouver la fraction volumique des GPL. [41]

$$V_{GPL}^* = \frac{A_{GPL}}{(\rho^{GPL} / \rho^m) \cdot (1 - A_{GPL}) + A_{GPL}} \quad \text{(III. 2)}$$

Dans le cadre de notre étude, nous adoptons une approche plus poussée en négligeant les couches et en modélisant la plaque comme un matériau à variation continue.

Les propriétés effectives des matériaux sont définies selon le modèle de Halpin-Tsai, de telle sorte que le module de Young effectif du composite GPL/polymère  $E$  soit :

$$E = \frac{3}{8}E_{11} + \frac{5}{8}E_{22} \quad \text{(III. 3)}$$

$$E = \frac{3(1 - \xi_L \eta_L V_{GPL})}{8(1 - \eta_L V_{GPL})} E_m + \frac{5(1 - \xi_W \eta_W V_{GPL})}{8(1 - \eta_W V_{GPL})} E_m \quad \text{(III. 4)}$$

$$\text{Où } \xi_L = \frac{2L_{GPL}}{t_{GPL}}, \quad \xi_W = \frac{2W_{GPL}}{t_{GPL}} \quad \text{(III. 5)}$$

$$\text{Et } \eta_L = \frac{\frac{E_{GPL}-1}{E_m}}{\xi_L + \frac{E_{GPL}}{E_m}}, \quad \eta_W = \frac{\frac{E_{GPL}-1}{E_m}}{\xi_W + \frac{E_{GPL}}{E_m}} \quad \text{(III. 6)}$$

- $E_M$  et  $E_{GPL}$  sont les modules de Young de la matrice polymère et des GPL, respectivement

- $\xi_L$  et  $\xi_W$  sont les paramètres caractérisant à la fois la géométrie et la taille des nanoparticules de GPL
- $L_{GPL}$ ,  $W_{GPL}$  et  $t_{GPL}$  sont la longueur, la largeur et l'épaisseur moyennes des GPL, respectivement.

La densité volumique, le coefficient de poisson et le module de cisaillement sont à leur tour donnés par :

La règle de mélange est employée pour déterminer la densité massique et le coefficient de Poisson effectif :

$$\rho = V_{GPL}\rho_{GPL} + (1 - V_{GPL})\rho_m \quad (\text{III. 7})$$

$$\nu = V_{GPL}\nu_{GPL} + (1 - V_{GPL})\nu_m \quad (\text{III. 8})$$

L'expression du module de cisaillement est à son tour donnée par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{III. 9})$$

### 3. Champs de déformation et de contraintes

On utilise la théorie des plaques de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT) à 5 variables, le champ de déformation est donné par :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi(z) \left( \phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi(z) \left( \phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{III. 10})$$

Dans cette étude, nous avons choisi la fonction de cisaillement de Mahi et al. [39] qui a l'avantage d'être applicable à des plaques de différentes épaisseurs, qu'elles soient minces, moyennement épaisses ou épaisses :

$$\varphi(z) = \frac{h}{2} \tanh\left(\frac{2z}{h}\right) - \frac{4}{3 \cosh^2(1)} \left(\frac{z^3}{h^2}\right) \quad (\text{III. 11})$$

Nous dérivons le champ des déformations suivant la relation déformation-déplacement suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{III. 12})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \varphi(z) \left[ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \\ \varepsilon_{zz} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \varphi(z) \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III. 13})$$

Les différentes contraintes agissant sur un point matériel sont représentées dans la figure suivante :

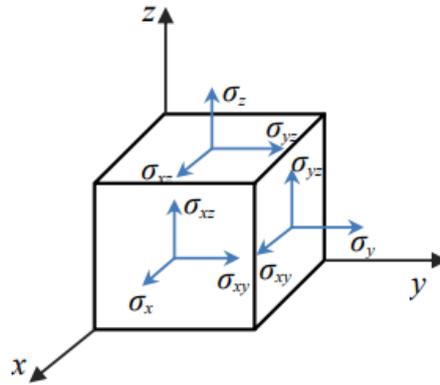


Figure 24: Composantes du vecteur des contraintes.

Les relations contraintes-déformations sont données par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (\text{III. 14})$$

Où les coefficients de rigidité  $Q_{ij}$  sont donnés par les équations constitutives suivantes :

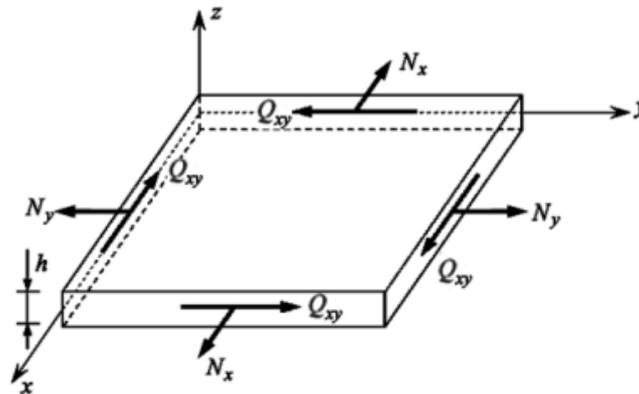
$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ Q_{12} = Q_{21} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \nu} \end{array} \right. \quad (\text{III. 15})$$

## 4. Loi constitutive

### 4.1. Résultantes en membrane et en cisaillement :

Les composantes  $N_x, N_y, Q_{xy}$  sont les résultantes des efforts normaux suivant  $x$  et  $y$  et des efforts de cisaillement dans le plan  $(xy)$ , respectivement.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ Q_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} Q_{11} \varepsilon_{xx} + Q_{12} \varepsilon_{yy} \\ Q_{12} \varepsilon_{xx} + Q_{22} \varepsilon_{yy} \\ Q_{66} \gamma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (\text{III. 16})$$



**Figure 25: composantes des efforts normaux de cisaillement en plan.**

Les composantes  $Q_{xz}^a$  et  $Q_{yz}^a$  sont les résultantes, par unité de longueur, des efforts de cisaillement d'ordre supérieur dans les plans  $(xz)$  et  $(yz)$ .

$$\begin{pmatrix} Q_{xz}^a \\ Q_{yz}^a \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (\text{III. 17})$$

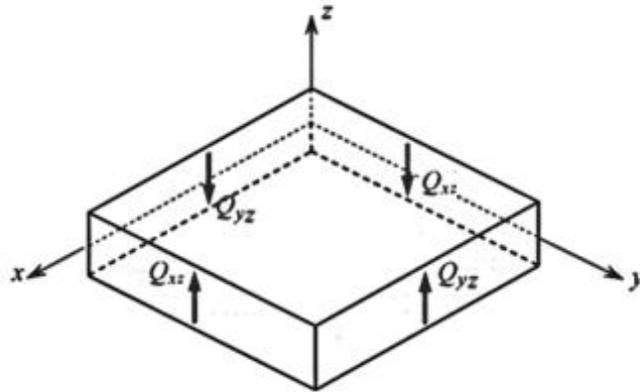


Figure 26: Composantes des efforts de cisaillement transverse.

#### 4.2. Moments de flexion et de torsion

Les composantes  $M_x, M_y, M_{xy}$  sont les moments de flexion suivant les directions x et y et de torsion, respectivement.

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad \text{(III. 18)}$$

Les composantes  $M_x^a, M_y^a, M_{xy}^a$  sont les moments de flexion d'ordre supérieur suivant les directions x et y et le moment de torsion d'ordre supérieur, respectivement.

$$\begin{pmatrix} M_x^a \\ M_y^a \\ M_{xy}^a \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \varphi(z) dz \quad \text{(III. 19)}$$

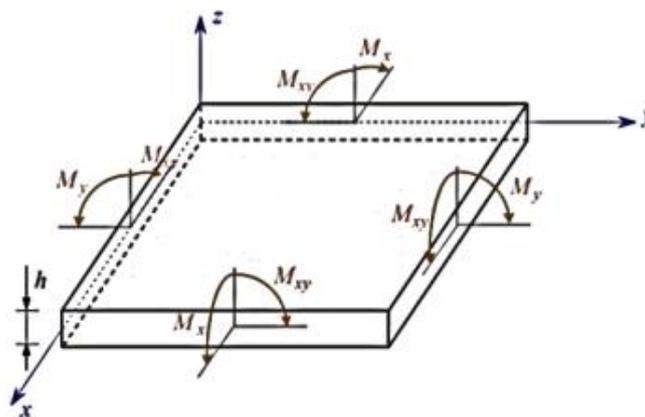


Figure 27: Composantes des moments de flexion et de torsion.

### 4.3. Equation constitutive

En développant les formules des efforts et moments appliqué sur la plaque FGM nous obtenons l'équation constitutive suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ M_x \\ M_y \\ M_x^a \\ M_y^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{11}^a & B_{12}^a \\ A_{12} & A_{22} & B_{12} & B_{22} & B_{12}^a & B_{22}^a \\ B_{11} & B_{12} & D_{11} & D_{12} & D_{11}^a & D_{12}^a \\ B_{12} & B_{22} & D_{12} & D_{22} & D_{12}^a & D_{22}^a \\ B_{11}^a & B_{12}^a & D_{11}^a & D_{12}^a & D_{11}^{aa} & D_{12}^{aa} \\ B_{12}^a & B_{22}^a & D_{12}^a & D_{22}^a & D_{12}^{aa} & D_{22}^{aa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 20})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xy} \\ M_{xy} \\ M_{xy}^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{66} & B_{66} & B_{66}^a \\ B_{66} & D_{66} & D_{66}^a \\ B_{66}^a & D_{66}^a & D_{66}^{aa} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 21})$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz}^a \\ Q_{yz}^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^a & 0 \\ 0 & A_{44}^a \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 22})$$

Les rigidités extensives de traction, de couplage, de flexion et de cisaillement transversal  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, A_{ij}^a$  respectivement sont définies par :

$$(A_{ij}, B_{ij}, B_{ij}^a, D_{ij}, D_{ij}^a, D_{ij}^{aa}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, \varphi, z^2, \varphi z, \varphi^2) Q_{ij} dz \quad (\text{III. 23})$$

pour  $i, j = 1, 2, 6$

$$\text{Et } A_{ij}^a = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 dz, \quad \text{pour } i, j = 4, 5 \quad (\text{III. 24})$$

Les rigidités de couplage et de flexion d'ordre supérieur supplémentaires sont liées à la fonction de forme qui a été introduite dans le champ de déplacement.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + B_{11}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{12}^a \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 N_y = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + B_{12}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{22}^a \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{11}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{12}^a \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 M_y = B_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{12}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{22}^a \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 M_x^a = B_{11}^a \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{12}^a \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11}^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12}^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{11}^{aa} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{12}^{aa} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 M_y^a = B_{12}^a \frac{\partial u_0}{\partial x} + B_{22}^a \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{12}^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22}^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + D_{12}^{aa} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + D_{22}^{aa} \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 Q_{xy} = A_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{66}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 M_{xy} = B_{66} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + D_{66}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 M_{xy}^a = B_{66}^a \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2D_{66}^a \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + D_{66}^{aa} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
 Q_{xz}^a = A_{55}^a \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 Q_{yz}^a = A_{44}^a \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)
 \end{array} \right. \quad \text{(III. 25)}$$

## 5. Développement des équations de mouvement des plaques composites renforcées par nano-plaquettes de graphène

### 5.1. Formulation énergétique

#### 5.1.1. Energie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \int_v \rho(z) \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} dv = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left[ \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial t} + \frac{\partial w^2}{\partial t} \right] dz dA = \sum_{i=1}^3 E_c^i \quad \text{(III. 26)}$$

$$E_C^1 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \frac{\partial u^2}{\partial t} dz dA \quad (\text{III. 27})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \right]^2 dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \frac{\partial u_0^2}{\partial t} + I_3^{aa} \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} + 2I_2^a \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right. \\ &\quad + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} + (I_3 - 2I_3^a \\ &\quad \left. + I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} dA \end{aligned}$$

$$E_C^2 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \frac{\partial v^2}{\partial t} dz dA \quad (\text{III. 28})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left[ \frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} + \varphi \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right) \right]^2 dz dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ I_1 \frac{\partial v_0^2}{\partial t} + I_3^{aa} \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} + 2I_2^a \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right. \\ &\quad + 2(I_2^a - I_2) \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} + 2(I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} + (I_3 - 2I_3^a \\ &\quad \left. + I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$E_C^3 = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \frac{\partial w^2}{\partial t} dz dA = \frac{1}{2} \int_A I_1 \frac{\partial w_0^2}{\partial t} dA \quad (\text{III. 29})$$

Avec les coefficients d'inerties de la plaque définis comme suit :

$$\left\{ \begin{aligned} (I_1 + I_2 + I_3) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (1, z, z^2) dz \\ (I_2^a + I_3^a + I_3^{aa}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \varphi(z) (1, z, \varphi(z)^2) dz \end{aligned} \right. \quad (\text{III. 30})$$

$I_1, I_2, I_3$  sont les inerties axiales, de couplage et de rotation respectivement,  $I_2^a$  l'inertie de couplage et  $I_3^a, I_3^{aa}$  les inerties de rotation d'ordre supérieur.

## 5.1.2. Energie de déformation

L'expression mathématique de l'énergie de déformation, également appelée énergie potentielle ou élastique du fait qu'elle soit associée à la déformation élastique d'un solide est la suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (\text{III. 31})$$

$$= \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} + \sigma_{xy} \gamma_{xy}] dz dA = \sum_{i=1}^5 U_i$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dv = \int_A \left\{ N_x \frac{\partial u_0}{\partial x} - M_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + M_x^a \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right] \right\} dA \quad (\text{III. 32})$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dv = \int_A \left\{ N_y \frac{\partial v_0}{\partial y} - M_y \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + M_y^a \left[ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right\} dA \quad (\text{III. 33})$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{xz} \gamma_{xz} dv = \int_A Q_{xz}^a \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) dA \quad (\text{III. 34})$$

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{yz} \gamma_{yz} dv = \int_A Q_{yz}^a \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) dA \quad (\text{III. 35})$$

$$U_5 = \frac{1}{2} \int_v \sigma_{xy} \gamma_{xy} dv \quad (\text{III. 36})$$

$$= \int_A \left\{ Q_{xy} \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + M_{xy}^a \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right] \right\} dA$$

5.1.3. Travail des charges externes

$$V = - \int_A [qw_0] dA \tag{III. 37}$$

En mécanique vibratoire des plaques, le flambage ou la flexion peuvent se produire en fonction du type de chargement appliqué sur la plaque.

5.1.3.1. Les charges statiques

Lorsqu'une charge statique est appliquée sur une plaque, elle peut entraîner des contraintes de flexion et de flambage. Les contraintes augmentent avec l'amplitude de la charge appliquée.

5.1.3.2. Les charges dynamiques

Lorsqu'une charge dynamique est appliquée sur une plaque, elle peut provoquer des vibrations et des contraintes de flambage. Les charges dynamiques peuvent être appliquées sous forme de forces harmoniques ou de forces aléatoires.

Le flambage dynamique survient lorsque la charge appliquée a une amplitude intermédiaire et que la durée de l'impulsion est proche de la période de vibration fondamentale naturelle de flexion, qui se situe dans une plage de l'ordre des millisecondes [42].

5.1.4. Energie de fondation élastique

Dans le cas où la surface inférieure de la plaque repose sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak, la variation virtuelle de la fondation est donnée par :

$$\delta U_f = \int_A \left( -k_w w_0 + k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right) \delta w_0 dA \tag{III. 38}$$

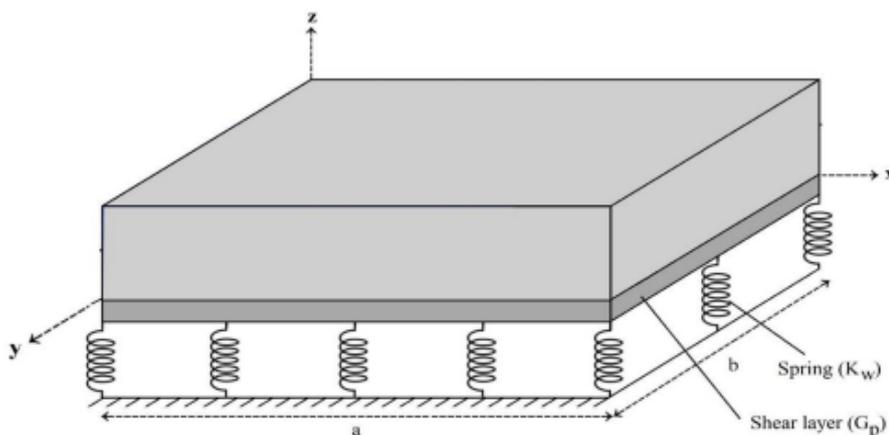


Figure 28: Plaque rectangulaire encadrée sur une fondation élastique de Winkler-Pasternak.

En notant que le support élastique est modélisé en tant que plaque homogène en époxy, les paramètres  $k_p$  et  $k_w$  correspondent aux rigidités en cisaillement et en flexion respectivement et sont donnés par :

$$k_p = \frac{D_1 K_{bp}}{a^2} \quad , \quad k_w = \frac{D_1 K_{bw}}{a^4} \quad (\text{III. 39})$$

Avec  $K_{bp}$  et  $K_{bw}$  : constantes de Pasternak et Winkler du support

$D_1$  : rigidité de flexion d'une plaque homogène en époxy

$$D_1 = \frac{E_m h^3}{12(1 - \nu_m^2)} \quad (\text{III. 40})$$

## 5.2. Principe de Hamilton

Afin de déterminer les équations différentielles de mouvement de la plaque FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène, nous utilisons le principe de Hamilton, qui stipule que la variation de l'énergie totale  $E_T$  du système vibratoire libre est nulle au cours du temps. En d'autres termes, cela se traduit par l'équation intégrale suivante [39] :

$$0 = \int_0^t (\delta U + \delta V - \delta E_c - \delta U_f) dt \quad (\text{III.41})$$

Où  $t$  représente le temps,  $U$  : l'énergie de déformation,  $V$  : le travail des charges externes,  $E_c$  : l'énergie cinétique et  $U_f$  est l'énergie de la fondation élastique.

### 5.2.1. Formulation variationnelle

Pour pouvoir appliquer le principe de Hamilton, il est nécessaire de déterminer la variation des énergies.

#### 5.2.1.1. Variation de l'énergie cinétique

$$\delta E_c = \delta E_c^1 + \delta E_c^2 + \delta E_c^3 \quad (\text{III.42})$$

$$\begin{aligned} \delta E_c^1 = \int_A \left\{ I_1 \frac{\partial u_0}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + I_3^{aa} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) + I_2^a \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + (I_2^a - I_2) \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) + (I_3^{aa} - I_3^a) \delta \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \right. \\ \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III. 43})$$

$$\begin{aligned} \delta E_C^2 = \int_A \left\{ I_1 \frac{\partial v_0}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + I_3^{aa} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) + I_2^a \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + (I_2^a - I_2) \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right) + (I_3^{aa} - I_3^a) \delta \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial t} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right) \right. \\ \left. + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right) \right\} dA \end{aligned} \quad (\text{III. 44})$$

$$\delta E_C^3 = \int_A I_1 \frac{\partial w_0}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right) dA \quad (\text{III. 45})$$

Nous intégrons par parties l'expression de chaque variation d'énergie par rapport au temps en annulant les variations des déplacements et rotations virtuels.

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta E_c dt = \int_0^t \int_A \left\{ -I_1 \frac{\partial u_0^2}{\partial t} \delta u_0 - I_3^{aa} \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} \delta \phi_x \right. \\ \left. - I_2^a \left( \frac{\partial u_0^2}{\partial t} \delta \phi_x + \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} \delta u_0 \right) \right. \\ \left. + (I_2^a - I_2) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_0 - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 \right) \right. \\ \left. + (I_3^{aa} - I_3^a) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} \delta w_0 - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \delta \phi_x \right) + (I_3 - 2I_3^a \right. \\ \left. + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_0 - I_1 \frac{\partial v_0^2}{\partial t} \delta v_0 - I_3^{aa} \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} \delta \phi_y \right. \\ \left. - I_2^a \left( \frac{\partial v_0^2}{\partial t} \delta \phi_y + \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} \delta v_0 \right) \right. \\ \left. + (I_2^a - I_2) \left( \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_0 - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 \right) \right. \\ \left. + (I_3^{aa} - I_3^a) \left( \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial t^2} \delta w_0 - \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \delta \phi_y \right) + (I_3 - 2I_3^a \right. \\ \left. + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_0 - I_1 \frac{\partial w_0^2}{\partial t} \delta w_0 \right\} dA dt \end{aligned} \quad (\text{III. 46})$$

Les contributions dynamiques des termes sources par rapport aux variations  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y$  sont :

$$\delta u_0 : -I_1 \frac{\partial u_0^2}{\partial t} - I_2^a \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \quad (\text{III. 47})$$

$$\delta v_0 : -I_1 \frac{\partial v_0^2}{\partial t} - I_2^a \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} - (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
 \delta w_0 &: (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \\
 &(I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial t^2} + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} - I_1 \frac{\partial w_0}{\partial t} \\
 \delta \phi_x &: -I_3^{aa} \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} - I_2^a \frac{\partial u_0^2}{\partial t} - (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\
 \delta \phi_y &: -I_3^{aa} \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} - I_2^a \frac{\partial v_0^2}{\partial t} - (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned}$$

## 5.2.1.2. Variation de l'énergie de déformation

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \delta U_4 + \delta U_5 \quad (\text{III. 48})$$

$$\begin{aligned}
 \delta U = \int_A \left\{ N_x \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - M_x \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + M_x^a \delta \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + M_x^a \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right. \\
 + N_y \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - M_y \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + M_y^a \delta \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + M_y^a \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
 + Q_{xz}^a \delta \phi_x + Q_{xz}^a \delta \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + Q_{yz}^a \delta \phi_y + Q_{yz}^a \delta \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 + Q_{xy} \delta \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + Q_{xy} \delta \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2M_{xy} \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + M_{xy}^a \delta \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \\
 \left. + M_{xy}^a \delta \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + 2M_{xy}^a \delta \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right\} dA \quad (\text{III. 49})
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties selon l'ordre qui convient nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \delta U dt = \int_0^t \int_A \left\{ -\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \delta w_0 - \frac{\partial M_x^a}{\partial x} \delta \phi_x + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} \delta w_0 \right. \\
 - \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \delta w_0 - \frac{\partial M_y^a}{\partial y} \delta \phi_y + \frac{\partial^2 M_y^a}{\partial y^2} \delta w_0 + Q_{xz}^a \delta \phi_x \\
 - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} \delta w_0 + Q_{yz}^a \delta \phi_y - \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} \delta w_0 - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} \delta v_0 \\
 - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \delta w_0 - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} \delta \phi_x - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x} \delta \phi_y \\
 \left. + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^a}{\partial x \partial y} \delta w_0 \right\} dA dt \quad (\text{III. 50})
 \end{aligned}$$

La contribution des termes source de l'énergie de déformation par rapport aux variations  $\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \phi_x, \delta \phi_y$  est :

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 &: -\frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} \\
 \delta v_0 &: -\frac{\partial N_y}{\partial y} - \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} \\
 \delta w_0 &: -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_x^a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_y^a}{\partial y^2} - \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} - \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^a}{\partial x \partial y} \\
 \delta \phi_x &: -\frac{\partial M_x^a}{\partial x} + Q_{xz}^a - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} \\
 \delta \phi_y &: -\frac{\partial M_y^a}{\partial y} + Q_{yz}^a - \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{III.51}$$

### 5.2.2. Relations fondamentales de vibrations libres

A partir des contributions de chaque énergie par rapport aux variations et en appliquant le principe de Hamilton nous pouvons écrire les équations qui régissent le mouvement vibratoire de la plaque FGM renforcé en nano-plaquettes de graphène.

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2^a \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\
 \delta v_0 &: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial x} = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2^a \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \\
 \delta w_0 &: \frac{\partial^2}{\partial x^2} (M_x - M_x^a) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (M_y - M_y^a) + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (M_{xy} - M_{xy}^a) + \frac{\partial Q_{xz}^a}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}^a}{\partial y} - \\
 & k_w w_0 + k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + (I_2 - I_2^a) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + \\
 & (I_3^a - I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial t^2} \right) - (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\
 \delta \phi_x &: \frac{\partial M_x^a}{\partial x} - Q_{xz}^a + \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial y} = I_3^{aa} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + I_2^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \\
 \delta \phi_y &: \frac{\partial M_y^a}{\partial y} - Q_{yz}^a + \frac{\partial M_{xy}^a}{\partial x} = I_3^{aa} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + I_2^a \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2}
 \end{aligned} \tag{III.52}$$

Afin de pouvoir résoudre ces équations, il est judicieux de les mettre en fonction des déplacements généralisés  $(u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y)$  en remplaçant les forces et moments par leurs expressions obtenues à partir de l'équation constitutive.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + B_{11}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \\ & B_{12}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + B_{66}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) = I_1 \frac{\partial u_0^2}{\partial t} + I_2^a \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{aligned} \quad (\text{III. 53})$$

$$\begin{aligned} \delta v_0 : & A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + B_{12}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\ & B_{22}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + A_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{66}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) = I_1 \frac{\partial v_0^2}{\partial t} + I_2^a \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} + (I_2^a - I_2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & (B_{11} - B_{11}^a) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} - B_{12}^a) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} - (D_{11} - D_{11}^a) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - (D_{12} - \\ & D_{12}^a) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + (D_{11}^a - D_{11}^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + (D_{12}^a - D_{12}^{aa}) \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \\ & (B_{12} - B_{12}^a) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + (B_{22} - B_{22}^a) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - (D_{12} - D_{12}^a) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - (D_{22} - \\ & D_{22}^a) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + (D_{12}^a - D_{12}^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \right) + (D_{22}^a - D_{22}^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y^3} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + \\ & 2(B_{66} - B_{66}^a) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} \right) - 4(D_{66} - D_{66}^a) \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} + 2(D_{66}^a - D_{66}^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x^2} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + A_{55}^a \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{44}^a \left( \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - k_w w_0 + k_p \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = I_1 \frac{\partial w_0^2}{\partial t} + (I_2 - I_2^a) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \right) + (I_3^a - I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^3 \phi_x}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \phi_y}{\partial y \partial t^2} \right) - \\ & (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa}) \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_x : & B_{11}^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + B_{12}^a \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} - D_{11}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - D_{12}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} + D_{11}^{aa} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) + \\ & D_{12}^{aa} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) - A_{55}^a \left( \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \\ & D_{66}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) = I_3^{aa} \frac{\partial \phi_x^2}{\partial t} + I_2^a \frac{\partial u_0^2}{\partial t} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi_y : & B_{12}^a \frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + B_{22}^a \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - D_{12}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} - D_{22}^a \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + D_{12}^{aa} \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + \\ & D_{22}^{aa} \left( \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - A_{44}^a \left( \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + B_{66} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - 2D_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} + \\ & D_{66}^a \left( \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) = I_3^{aa} \frac{\partial \phi_y^2}{\partial t} + I_2^a \frac{\partial u_0^2}{\partial t} + (I_3^{aa} - I_3^a) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial t^2} \end{aligned}$$

Les équations (III.53) décrivent cinq équations différentielles partielles linéaires d'ordre quatre en fonction des cinq déplacements généralisés.

## 6. Résolution analytique des équations de mouvement

### 6.1. Vibrations libres d'une plaque

Les vibrations naturelles sont les vibrations qui résultent des propriétés intrinsèques de la structure, en l'absence de forces externes. En tout temps, ces vibrations impliquent une conversion d'énergie constante entre l'énergie cinétique et l'énergie de déformation des éléments de la plaque. L'énergie cinétique est déterminée par la vitesse vibratoire et la masse des éléments déformés, tandis que la déformation est influencée par les contraintes dynamiques dues à la rigidité des éléments déformés par le mouvement vibratoire. La vibration des plaques est un exemple spécifique d'un problème plus large dans le domaine des vibrations mécaniques.

### 6.2. Conditions aux limites et solution de Navier

Pour analyser une plaque rectangulaire, il est nécessaire de résoudre l'équation harmonique ainsi que de définir les conditions aux limites appropriées aux quatre bords pour obtenir la fonction de déflexion  $w(x, y)$ . Une fois cela accompli, il est possible d'obtenir les déformations et les contraintes en tout point de la structure de la plaque. [29]

La méthode de Navier repose sur l'idée de rechercher une solution pour  $w$  sous la forme d'une série infinie qui satisfait les conditions aux bords et réduit les équations différentielles gouvernantes à des équations algébriques simples. Mais cela ne peut se faire que sous certaines conditions aux limites spécifiques, cette approche est réalisable pour une plaque simplement appuyée. [29]

Les conditions aux limites le long des côtés d'une plaque simplement appuyée peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{array}{llll}
 w_0(x, 0, t) = 0, & w_0(x, b, t) = 0, & w_0(0, y, t) = 0, & w_0(a, y, t) = 0 & \text{(III. 54)} \\
 N_x(x, 0, t) = 0, & N_x(x, b, t) = 0, & N_y(0, y, t) = 0, & N_y(a, y, t) = 0 & \\
 M_x(x, 0, t) = 0, & M_x(x, b, t) = 0, & M_y(0, y, t) = 0, & M_y(a, y, t) = 0 & \\
 M_x^a(x, 0, t) = 0, & M_x^a(x, b, t) = 0, & M_y^a(0, y, t) = 0, & M_y^a(a, y, t) = 0 & 
 \end{array}$$

Les fonctions de déplacement qui respectent ces conditions aux limites sont représentées sous forme de séries doubles de Fourier:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \quad (\text{III. 55})$$

$$V(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)$$

$$W(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n G_{mn} \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$\Psi_x(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_{mn} \cos(\alpha x) \sin(\beta y)$$

$$\Psi_y(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n I_{mn} \sin(\alpha x) \cos(\beta y)$$

$$\text{Avec } \alpha = m\pi/a \text{ et } \beta = n\pi/b \quad (\text{III. 56})$$

$E_{mn}, F_{mn}, G_{mn}, H_{mn}, I_{mn}$  sont des paramètres arbitraires à déterminer et  $\omega$  est la fréquence du mode  $(m, n)$ .

### 6.3. Solution analytique

En substituant les équations des déplacements dans les équations de mouvement, on obtient le système d'équations pour chaque valeur donnée de  $m$  et  $n$  dans un problème de vibration libre. Cela aboutit à l'équation courante :

$$[k]\{U\} + [M]\{\ddot{U}\} = \{0\} \quad (\text{III. 57})$$

Où  $[M]$  et  $[k]$  sont respectivement les matrices globales de masse et de rigidité de la plaque,  $\{U\}$  et  $\{\ddot{U}\}$  sont respectivement le vecteur des variables nodales et le vecteur des accélérations nodales du système défini au temps  $t$ .

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{ij} \\ F_{ij} \\ G_{ij} \\ H_{ij} \\ I_{ij} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{E}_{ij} \\ \ddot{F}_{ij} \\ \ddot{G}_{ij} \\ \ddot{H}_{ij} \\ \ddot{I}_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 58})$$

Avec  $[M]$  et  $[k]$  sont des matrices symétriques:

$$k_{11} = A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, \quad k_{12} = (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, \quad (\text{III. 59})$$

$$k_{13} = \alpha^3(B_{11}^a - B_{11}) + (2B_{66}^a - 2B_{66} + B_{12}^a - B_{12})\beta^2\alpha$$

$$k_{14} = B_{11}^a\alpha^2 + \beta^2 B_{66}^a, \quad k_{15} = (B_{12}^a + B_{66}^a)\alpha\beta,$$

$$k_{22} = A_{22}\beta^2 + A_{66}\alpha^2$$

$$k_{23} = \beta^3(B_{22}^a - B_{22}) + (2B_{66}^a - 2B_{66} + B_{12}^a - B_{12})\beta\alpha^2,$$

$$k_{24} = (B_{12}^a + B_{66}^a)\alpha\beta$$

$$k_{25} = B_{22}^a\beta^2 + B_{66}^a\alpha^2,$$

$$\begin{aligned} k_{33} = & (D_{11} - 2D_{11}^a + D_{11}^{aa})\alpha^4 + (D_{22} - 2D_{22}^a + D_{22}^{aa})\beta^4 \\ & + 2(2D_{66} - 4D_{66}^a + 2D_{66}^{aa} + D_{12} - 2D_{12}^a + D_{12}^{aa})\alpha^2\beta^2 \\ & + A_{55}^a\alpha^2 + A_{44}^a\beta^2 + k_w + k_p(\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

$$k_{34} = (D_{11}^{aa} - D_{11}^a)\alpha^3 + (D_{12}^{aa} - D_{12}^a + 2D_{66}^{aa} - 2D_{66}^a)\alpha\beta^2 + A_{55}^a\alpha,$$

$$k_{35} = (D_{22}^{aa} - D_{22}^a)\beta^3 + (D_{12}^{aa} - D_{12}^a + 2D_{66}^{aa} - 2D_{66}^a)\beta\alpha^2 + A_{44}^a\beta$$

$$k_{44} = (D_{11}^{aa}\alpha^2 + D_{66}^{aa}\beta^2 + A_{55}^a), k_{45} = (D_{12}^{aa} + D_{66}^{aa})\alpha\beta,$$

$$k_{55} = (D_{22}^{aa}\beta^2 + D_{66}^{aa}\alpha^2 + A_{44}^a).$$

$$m_{11} = m_{22} = I_1, m_{14} = m_{25} = I_2^a, m_{13} = \alpha(I_2^a - I_2) \quad (\text{III. 60})$$

$$m_{23} = \beta(I_2^a - I_2), m_{33} = I_1 + (I_3 - 2I_3^a + I_3^{aa})(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$m_{34} = \alpha(I_3^{aa} - I_3^a), m_{35} = \beta(I_3^{aa} - I_3^a), m_{44} = m_{55} = I_3^{aa}$$

Nous supposons une solution périodique de la forme :

$$\begin{Bmatrix} E_{mn}(t) \\ F_{mn}(t) \\ G_{mn}(t) \\ H_{mn}(t) \\ I_{mn}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_{mn}^0 \\ F_{mn}^0 \\ G_{mn}^0 \\ H_{mn}^0 \\ I_{mn}^0 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \quad (\text{III. 61})$$

Où  $i = \sqrt{-1}$  et  $\omega$  est la fréquence naturelle de vibration.

Une fois que les matrices de rigidité et de masse ont été calculées pour chaque élément, il est possible de formuler les équations de mouvement pour l'analyse de la vibration libre sous la forme d'un problème de valeurs propres généralisées. Cela implique la substitution de l'équation de la solution périodique dans le système algébrique :

$$([k] - \omega^2[M])\{d\} = 0 \quad (\text{III. 62})$$

Ou encore :

$$\left( \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} & 0 & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & m_{52} & m_{53} & 0 & m_{55} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} E_{mn}^0 \\ F_{mn}^0 \\ G_{mn}^0 \\ H_{mn}^0 \\ I_{mn}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.63})$$

Où  $\omega$  est la fréquence naturelle associée au mode  $(i, j)$  et  $\{d\}$  sont les modes de vibration.

Pour trouver la solution non triviale le problème revient à résoudre l'équation du déterminant suivant égal à zéro:

$$|[k] - \omega^2[M]| = 0 \quad (\text{III.64})$$

## 7. Conclusion

En conclusion, la détermination des énergies cinétique et de déformation du système vibratoire libre a été une étape essentielle pour comprendre les mouvements et les oscillations de ce système. Grâce au principe de Hamilton, nous avons pu établir les équations de mouvement et ainsi obtenir un système d'équations différentielles. En transformant ce système en système algébrique, nous avons pu résoudre analytiquement le système par la méthode de Navier. Ainsi ce chapitre va servir de base pour la conception et la modélisation du mouvement vibratoire de la plaque FGM renforcée par nano-plaquettes de graphène.

# CHAPITRE IV : RESULTATS ET INTERPRETATIONS

## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les résultats obtenus après l'exécution d'un programme de calcul que nous avons développé en utilisant le langage Maple. Contrairement à Pascal et Fortran qui sont des langages compilés, Maple est un langage interprété. Cela signifie que Maple est toujours attentif et prêt à réagir aux commandes sans nécessiter d'étapes intermédiaires telles que la compilation et l'établissement des liens. Maple offre donc un environnement de calcul très puissant qui permet de résoudre facilement une grande variété de problèmes mathématiques et physiques.

Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux des articles publiés, puis nous examinerons l'influence des paramètres considérés, tels que les dimensions géométriques, l'épaisseur relative et la fraction volumique, sur les fréquences naturelles de vibration.

## 2. Résolution numérique du problème aux valeurs propres

Pour notre étude, on considère les mêmes données que celles de Song et al [43] pour pouvoir faire des comparaisons de résultats avec ceux de la référence [41] :

Dans cette section, plusieurs exemples numériques sont présentés pour étudier la vibration libre des plaques FG-GPLRC. Les propriétés de la matrice époxy sont données par [41] :

$$\begin{aligned} \nu_m &= 0.34 \\ \rho_m &= 1200 \frac{Kg}{m^3} \\ E_m &= 3 \text{ GPa} \end{aligned}$$

Les propriétés mécaniques des nano-plaquettes de graphène (GPL) sont données par [41] :

$$\begin{aligned} \nu_{GPL} &= 0,186 \\ \rho_{GPL} &= 1060 \text{ Kg/m}^3 \\ E_{GPL} &= 1,01 \text{ TPa} \\ l_{GPL} &= 2,5 \text{ }\mu\text{m} \\ w_{GPL} &= 1,5 \text{ }\mu\text{m} \\ t_{GPL} &= 1,5 \text{ nm} \end{aligned}$$

2.1. Graphes de variation des propriétés de la plaque

Après des séries de calcul, nous obtenons les graphes de  $V_{gpl}(z)$ ,  $E(z)$ ,  $G(z)$ ,  $\nu(z)$ ,  $\rho(z)$  pour les 3 types de distributions FG-GPLRC (  $b/h = 10$  et  $A_{gpl} = 0.01$  ).

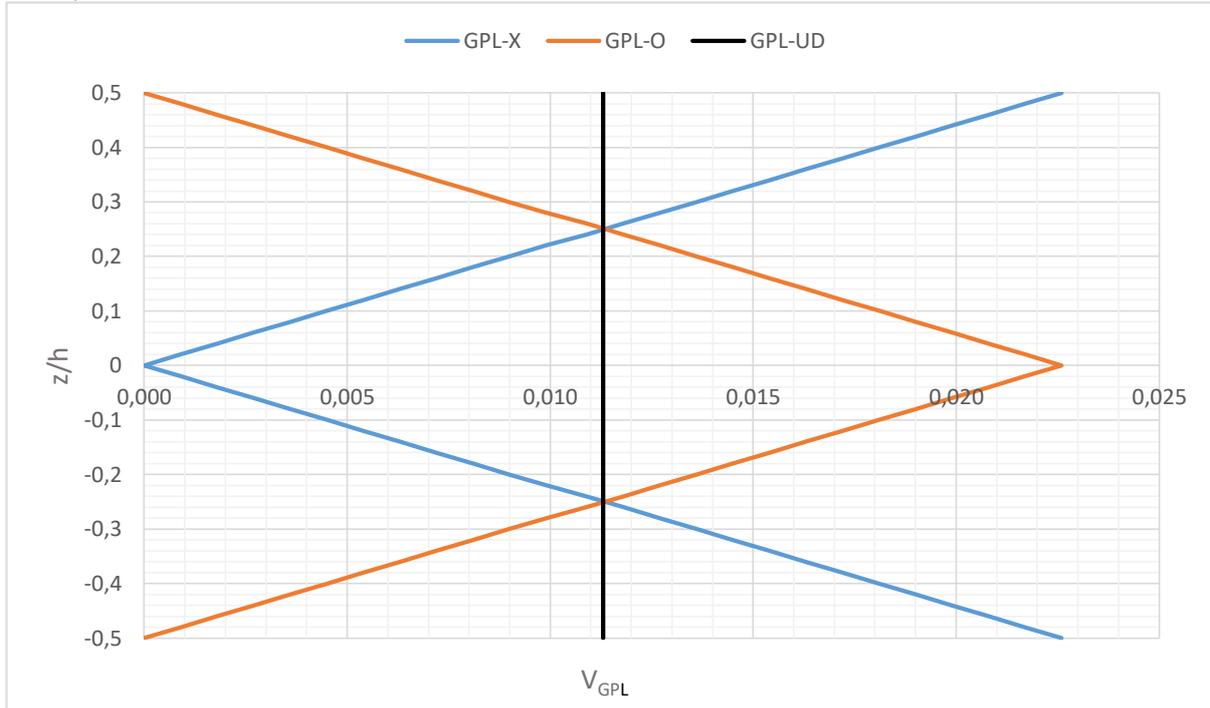


Figure 29 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur pour les différents types de distribution.

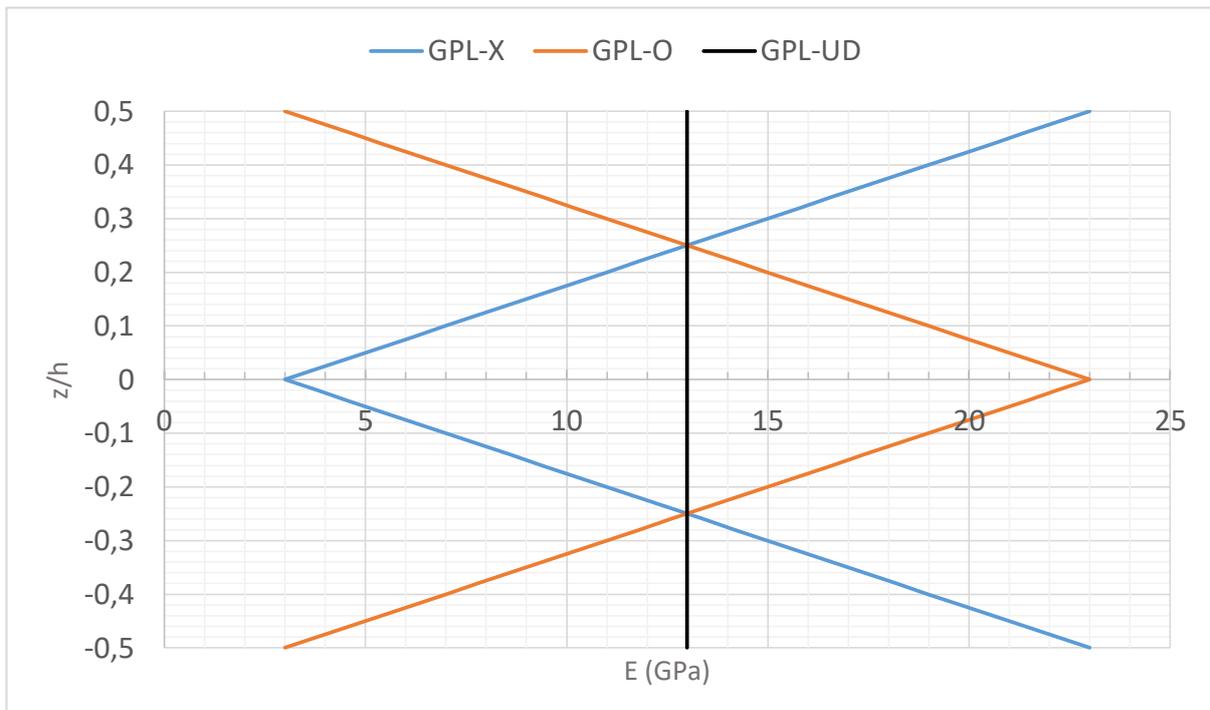


Figure 30 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur pour les différents types de distribution.

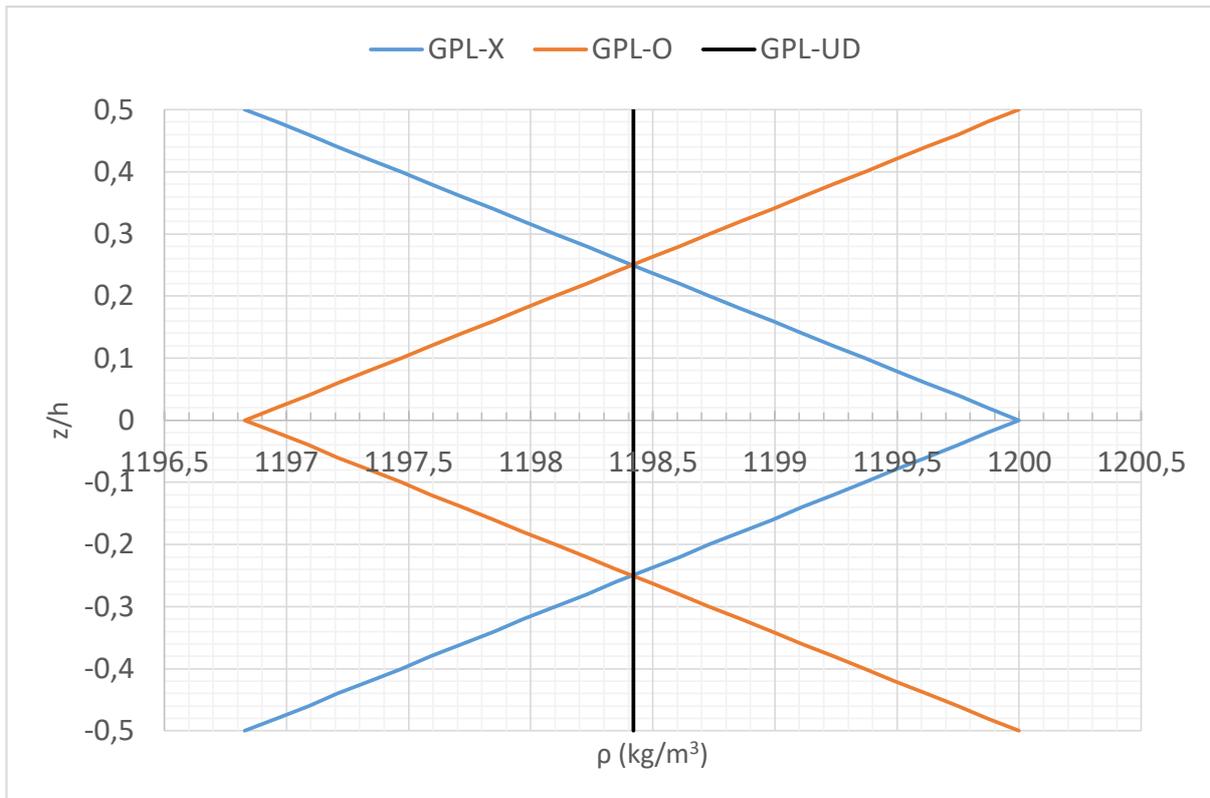


Figure 31: Variation de la masse volumique à travers l'épaisseur pour les différents types de distribution.

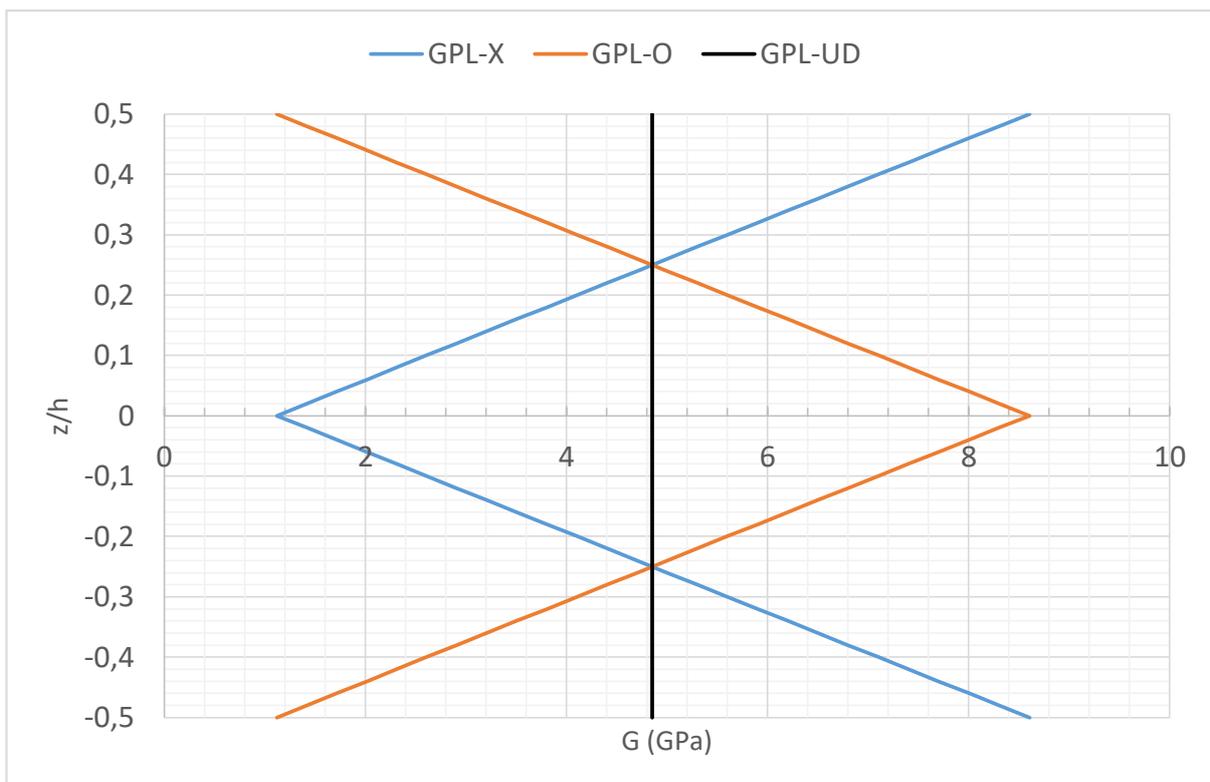


Figure 32: Variation du module de cisaillement à travers l'épaisseur pour les différents types de distribution.

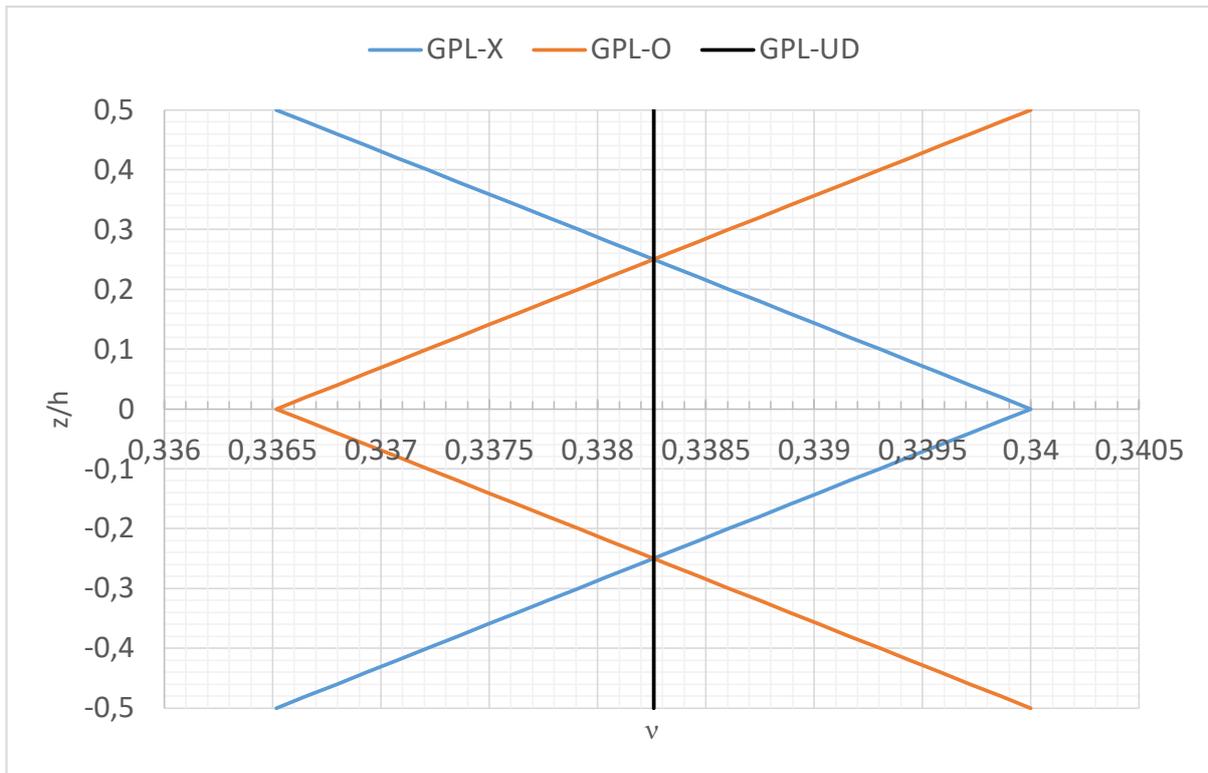


Figure 33: Variation du module de Poisson à travers l'épaisseur pour les différents types de distribution.

Sur la base de l'analyse des courbes ci-dessus (Figures 29-33) , nous notons :

- Des valeurs constantes (uniformes) des propriétés mécaniques dans le cas de distribution **GPL-UD** suivant l'épaisseur de la plaque.
- Une variation symétrique des propriétés mécaniques par rapport au plan  $z/h = 0$  dans le cas des distributions **GPL-X** et **GPL-O**.

## 2.2. Calcul des inerties et des rigidités du système vibratoire libre

Pour voir l'influence du renforcement en nano-plaquettes de graphène sur notre plaque FGM nous commençons par calculer les fréquences propres d'une plaque en pur époxy non renforcée :

Tableau 4: Calcul des moments d'inerties et rigidités pour une plaque en pur époxy.

Inerties et rigidités		Pure epoxy
Moments d'inertie	$I_1$	54,00000000
	$I_2$	0
	$I_3$	0,009112500000

	$I_2^a$	0
	$I_3^a$	0,006921921901
	$I_3^{aa}$	0,005342244447
<b>Rigidités de traction</b> ( $\times 10^8$ )	$A_{11}$	1,526458616
	$A_{12}$	0,5189959296
	$A_{22}$	1,526458616
	$A_{66}$	0,5037313432
<b>Rigidités de cisaillement</b> ( $\times 10^8$ )	$A_{44}^a$	0,2429547465
	$A_{55}^a$	0,2429547465
<b>Rigidités de couplage</b>	$B_{11}$	0
	$B_{12}$	0
	$B_{22}$	0
	$B_{66}$	0
<b>Rigidités de couplage d'ordre supérieur</b>	$B_{11}^a$	0
	$B_{12}^a$	0
	$B_{22}^a$	0
	$B_{66}^a$	0
<b>Les rigidités de flexion</b>	$D_{11}$	25758,98915
	$D_{12}$	8758,056312
	$D_{22}$	25758,98915
	$D_{66}$	8500,466417
<b>Les rigidités de flexion d'ordre supérieur</b>	$D_{11}^a$	19566,71727
	$D_{12}^a$	6652,683873
	$D_{22}^a$	19566,71727
	$D_{66}^a$	6457,016698
<b>Les rigidités de flexion d'ordre supérieur</b>	$D_{11}^{aa}$	15101,32420
	$D_{12}^{aa}$	5134,450228
	$D_{22}^{aa}$	15101,32420
	$D_{66}^{aa}$	4983,436984

**Tableau 5: Moments d'inerties de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.**

<b>Fractions volumiques</b>	<b>Moments d'inerties</b>	<b>GPL-UD</b>	<b>GPL-X</b>	<b>GPL-O</b>
<i>Agpl</i>				
<b>0.01</b>	$I_1$	53,92877332	53,92877332	53,92877332
	$I_2$	0	0	0
	$I_3$	0,009100480499	0,009094470746	0,009106490249
	$I_2^a$	0	0	0
	$I_3^a$	0,006912791800	0,006908671341	0,006916912257
	$I_3^{aa}$	0,005335197960	0,005332375857	0,005338020061
<b>0.02</b>	$I_1$	53,85773430	53,85773429	53,85773429
	$I_2$	0	0	0
	$I_3$	0,009088492663	0,009076488991	0,009100496330
	$I_2^a$	0	0	0
	$I_3^a$	0,006903685752	0,006895455690	0,006911915810
	$I_3^{aa}$	0,005328170037	0,005322533266	0,005333806805
<b>0.03</b>	$I_1$	53,78688216	53,78688217	53,78688216
	$I_2$	0	0	0
	$I_3$	0,009076536364	0,009058554548	0,009094518183
	$I_2^a$	0	0	0
	$I_3^a$	0,006894603660	0,006882274810	0,006906932510
	$I_3^{aa}$	0,005321160603	0,005312716573	0,005329604634

**Tableau 6: Rigidités de traction de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.**

<b>Fraction volumique</b>	<b>Rigidités de traction</b>	<b>GPL-UD</b> ( $\times 10^8$ )	<b>GPL-X</b> ( $\times 10^8$ )	<b>GPL-O</b> ( $\times 10^8$ )
<i>Agpl</i>				
<b>0.01</b>	$A_{11}$	6,598839006	6,598963441	6,598963441
	$A_{12}$	2,232116046	2,229214091	2,229214091

	$A_{22}$	6,598839006	6,598963441	6,598963441
	$A_{66}$	6,598839006	2,184874675	2,184874675
<b>0.02</b>	$A_{11}$	11,65859946	11,65920395	11,65920396
	$A_{12}$	3,923379799	3,911836022	3,911836025
	$A_{22}$	11,65859946	11,65920395	11,65920396
	$A_{66}$	3,867609833	3,873683965	3,873683968
<b>0.03</b>	$A_{11}$	16,70594796	16,70754561	16,70754561
	$A_{12}$	5,592991882	5,567159521	5,567159522
	$A_{22}$	16,70594796	16,70754561	16,70754561
	$A_{66}$	5,556478036	5,570193043	5,570193044

Tableau 7: Rigidités de cisaillement de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.

Fraction volumique	Rigidités de cisaillement	GPL-UD ( $\times 10^8$ )	GPL-X ( $\times 10^8$ )	GPL-O ( $\times 10^8$ )
<i>Agpl</i>				
<b>0.01</b>	$A_{44}^a$	1,053057432	0,7129652103	1,394642083
	$A_{55}^a$	1,053057432	0,7129652103	1,394642083
<b>0.02</b>	$A_{44}^a$	1,865387530	1,183925918	2,552839922
	$A_{55}^a$	1,865387530	1,183925918	2,552839922
<b>0.03</b>	$A_{44}^a$	2,679945830	1,655838578	3,717579880
	$A_{55}^a$	2,679945830	1,655838578	3,717579880

Tableau 8: Rigidités de couplage de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.

Fraction volumique	Rigidités de couplage	GPL-UD	GPL-X	GPL-O
<i>Agpl</i>				
<b>0.01/0.02/0.03</b>	$B_{11}$	0	0	0
	$B_{12}$	0	0	0
	$B_{22}$	0	0	0

$B_{66}$	0	0	0
----------	---	---	---

Tableau 9: Rigidités de couplage d'ordre supérieur de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.

Fraction volumique <i>Agpl</i>	Rigidités de couplage d'ordre supérieur	GPL-UD	GPL-X	GPL-O
<b>0.01/0.02/0.03</b>	$B_{11}^a$	0	0	0
	$B_{12}^a$	0	0	0
	$B_{22}^a$	0	0	0
	$B_{66}^a$	0	0	0

Tableau 10: Rigidités de flexion de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.

Les fractions volumiques <i>Agpl</i>	Les rigidités de flexion	GPL-UD $\times 10^5$	GPL-X $\times 10^5$	GPL-O $\times 10^5$
<b>0.01</b>	$D_{11}$	1,113554082	1,541591955	0,6855666058
	$D_{12}$	0,3766695828	0,5198915992	0,2322722745
	$D_{22}$	1,113554082	1,541591955	0,6855666058
	$D_{66}$	0,3684422497	0,5108501779	0,2266471656
<b>0.02</b>	$D_{11}$	1,967388660	2,822556157	1,112465980
	$D_{12}$	0,6620703411	0,9440533230	0,3754121250
	$D_{22}$	1,967388660	2,822556157	1,112465980
	$D_{66}$	0,6526591593	0,9392514170	0,3685269275
<b>0.03</b>	$D_{11}$	2,819128718	4,100601544	1,538302932
	$D_{12}$	0,9438173802	1,360158415	0,5170142142
	$D_{22}$	2,819128718	4,100601544	1,538302932
	$D_{66}$	0,9376556687	1,370221564	0,5106443588

**Tableau 11: Rigidités de flexion d'ordre supérieur de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.**

Les fractions volumiques <i>Agpl</i>	Les rigidités de flexion d'ordre supérieur	GPL-UD $\times 10^5$	GPL-X $\times 10^5$	GPL-O $\times 10^5$
<b>0.01</b>	$D_{11}^a$	0,8458638562	1,139339060	0,5524235784
	$D_{12}^a$	0,2861209805	0,3843137451	0,1871137023
	$D_{22}^a$	0,8458638562	1,139339060	0,5524235784
	$D_{66}^a$	0,2798714379	0,3775126576	0,1826549381
<b>0.02</b>	$D_{11}^a$	1,494442870	2,080770938	90828,44686
	$D_{12}^a$	0,5029134918	0,6962317469	0,3063551562
	$D_{22}^a$	1,494442870	2,080770938	90828,44686
	$D_{66}^a$	0,4957646890	0,6922695954	0,3009646562
<b>0.03</b>	$D_{11}^a$	2,141430872	3,020047111	1,263263053
	$D_{12}^a$	0,7169306112	1,002347044	0,4242636057
	$D_{22}^a$	2,141430872	3,020047111	1,263263053
	$D_{66}^a$	0,7122501299	1,008850034	0,4194997236

**Tableau 12: Rigidités de flexion d'ordre supérieur de la plaque pour différents types de distribution et pour différentes fractions volumiques.**

Les fractions volumiques <i>Agpl</i>	Les rigidités de flexion d'ordre supérieur	GPL-UD $\times 10^5$	GPL-X $\times 10^5$	GPL-O $\times 10^5$
<b>0.01</b>	$D_{11}^{aa}$	0,6528261303	0,8538275796	0,4518491299
	$D_{12}^{aa}$	0,2208242510	0,2880703251	0,1530080029
	$D_{22}^{aa}$	0,6528261303	0,8538275796	0,4518491299
	$D_{66}^{aa}$	0,2160009397	0,2828786273	0,1494205635

<b>0.02</b>	$D_{11}^{aa}$	1,153390523	1,554967837	0,7519319791
	$D_{12}^{aa}$	0,3881417397	0,5205209044	0,2534944622
	$D_{22}^{aa}$	1,153390523	1,554967837	0,7519319791
	$D_{66}^{aa}$	0,3826243917	0,5172234665	0,2492187584
<b>0.03</b>	$D_{11}^{aa}$	1,652726995	1,008850034	1,051273583
	$D_{12}^{aa}$	0,5533172190	0,7487440326	0,3528148818
	$D_{22}^{aa}$	1,652726995	1,008850034	1,051273583
	$D_{66}^{aa}$	0,5497048877	0,7528751396	0,3492293506

Ce que nous notons sur les valeurs des tableaux précédents est comme suit :

**Tableau 5:**

- Valeurs presque identiques des moments d'inerties  $I_1, I_3, I_3^a$  et  $I_3^{aa}$  pour les trois types de distribution **GPL-UD**, **GPL-X** et **GPL-O**, tous inférieurs aux moments d'inerties d'une plaque en pur époxy (**tableau 4**).
- Valeurs nulles pour les moments d'inerties  $I_2$  et  $I_2^a$  (distribution symétrique des propriétés).
- Ces valeurs augmentent avec l'augmentation de la fraction volumique Agpl.

**Tableau 6 :**

- Valeurs presque identiques des rigidités de traction  $A_{ij}$  pour les trois types de distribution, avec des valeurs légèrement supérieures dans le cas de **GPL-UD**. On note une augmentation de ces valeurs à cause de l'augmentation de Agpl.

**Tableau 7 :**

- On note une augmentation des rigidités de cisaillement  $A_{ij}^a$  à cause de l'augmentation de la fraction volumique Agpl, avec des valeurs plus importantes dans le cas de **GPL-O**.

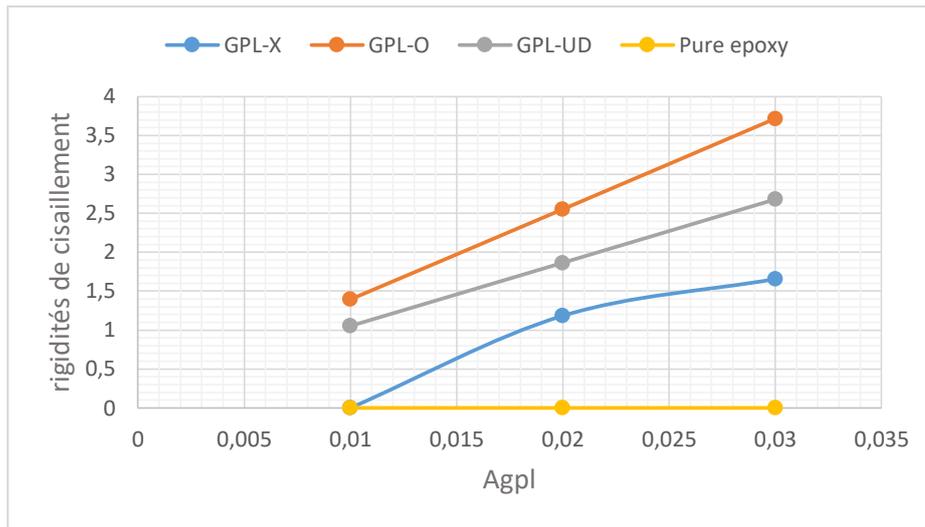


Figure 34: Influence de la fraction massique des GPL sur les rigidités de cisaillement  $A_{44}^a$  et  $A_{55}^a$ .

Tableau 8-9:

- Les valeurs de rigidités de couplage traction-flexion  $B_{ij}$  et  $B_{ij}^a$  restent nulles pour les trois types de distribution (pas de couplage à cause de la symétrie des distributions par rapport au plan  $z/h = 0$ ).

Tableau 10-11-12 :

- On note une augmentation des rigidités de flexion et de flexion d'ordre supérieur  $D_{ij}$ ,  $D_{ij}^a$  et  $D_{ij}^{aa}$  à cause de l'augmentation de la fraction volumique Agpl, avec des valeurs plus importantes dans le cas de **GPL-X**.

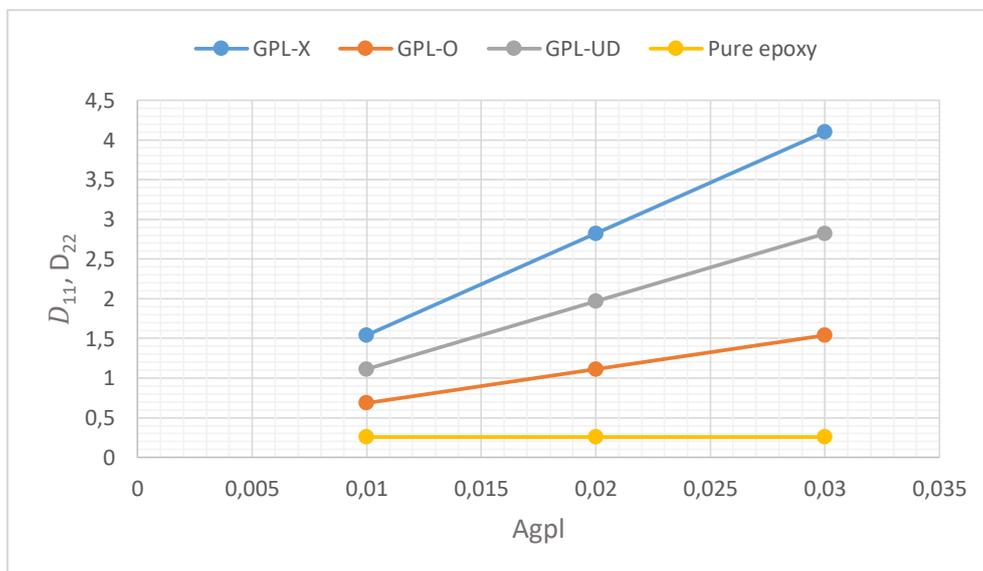


Figure 35: Influence de la fraction massique des GPL sur les rigidités de flexion  $D_{11}$  et  $D_{22}$ .

### 2.3. Comparaison des résultats

Afin de valider les résultats de la formulation actuelle, une étude comparative est effectuée. Les résultats issus de cette étude sont présentés dans le tableau 13.

Les fréquences naturelles sont déterminées sous forme adimensionnelle pour notre étude paramétrique :

$$\text{Avec } \bar{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m}$$

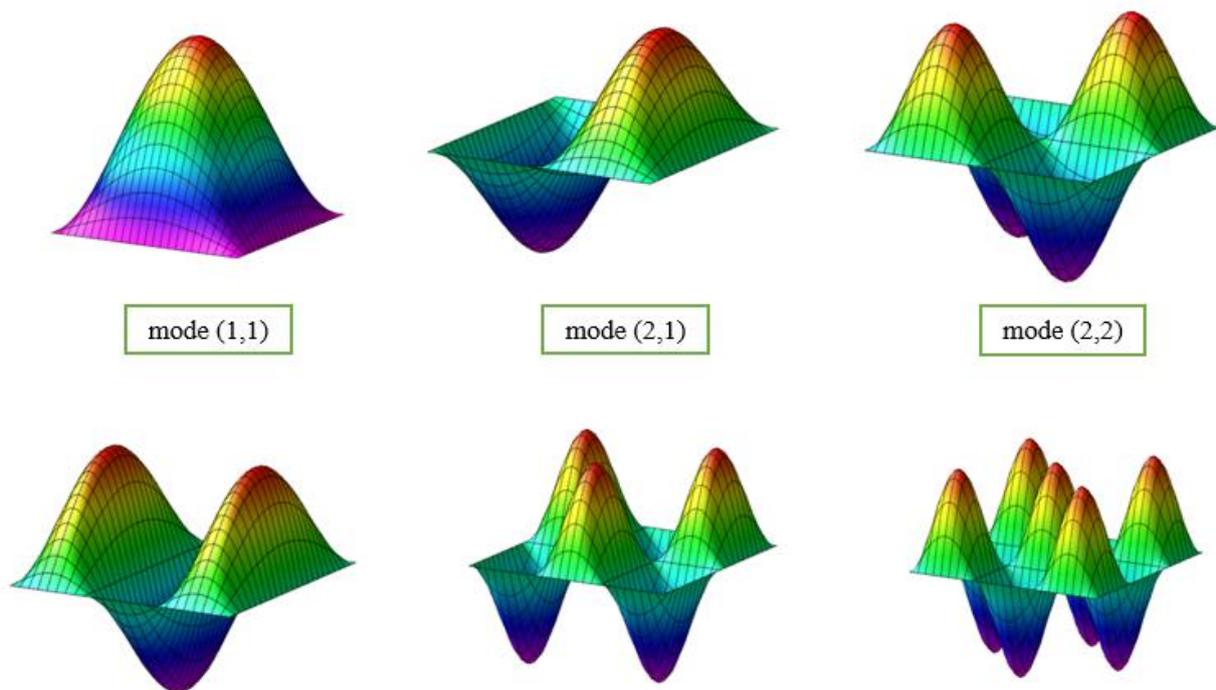
**Tableau 13 : Comparaison de 6 fréquences naturelles adimensionnelles d'une plaque rectangulaire composite en pure époxy avec différentes distributions de graphène pour ( $a \times b \times h = 0,45 \text{ m} \times 0,45 \text{ m} \times 0,045 \text{ m}$ ).**

$\omega_{mn}$	Source	GPL-X	GPL-O	GPL-UD	Pure Epoxy
<b>(1,1)</b>	Présente (HSDT)	0,1396	0,0967	0,1216	0,0584
	Ref. [41] (FSDT)	0,1378	0,1020	0,1216	0,0584
	Error%	-1,31%	5,20%	0,00%	0,00%
<b>(2,1)</b>	Présente (HSDT)	0,3230	0,2341	0,2896	0,1392
	Ref. [41] (FSDT)	0,3249	0,2456	0,2895	0,1391
	Error%	0,58%	4,68%	-0,03%	-0,07%
<b>(2,2)</b>	Présente (HSDT)	0,4841	0,3636	0,4438	0,2133
	Ref. [41] (FSDT)	0,4939	0,3796	0,4436	0,2132
	Error%	1,98%	4,21%	-0,05%	-0,05%
<b>(3,1)</b>	Présente (HSDT)	0,5822	0,4462	0,5404	0,2597
	Ref. [41] (FSDT)	0,5984	0,4645	0,5400	0,2595
	Error%	2,71%	3,94%	-0,07%	-0,08%
<b>(3,2)</b>	Présente (HSDT)	0,7183	0,5656	0,6774	0,3255
	Ref. [41] (FSDT)	0,7454	0,5860	0,6767	0,3251
	Error%	3,64%	3,48%	-0,10%	-0,12%
<b>(3,3)</b>	Présente (HSDT)	0,9224	0,7521	0,8884	0,4268
	Ref. [41] (FSDT)	0,9690	0,7755	0,8869	0,4261
	Error%	4,81%	3,02%	-0,17%	-0,16%

Le Tableau 13 présente une comparaison entre les fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  d'une plaque FG-GPLRC simplement supportée obtenues à partir de notre formulation et celles rapportées dans la littérature [41]. Les données utilisées pour la

comparaison correspondent aux références citées. Nous avons considéré trois types de distributions de nano-plaquettes de graphène selon l'épaisseur, désignées dans la littérature par GPL-UD, GPL-O et GPL-X. Notre approche repose sur l'utilisation d'une théorie d'ordre supérieur hyperbolique (désignée par l'abréviation HSDT: Higher-order Shear Deformation Theory) combinée à la méthode analytique de Navier pour le cas SSSS (Simply Supported). Il convient de noter que les résultats présentés dans la référence ont été obtenus à l'aide d'une analyse basée sur la théorie de déformation du cisaillement du premier ordre (FSDT) incluant l'inertie de rotation, avec un facteur de correction du cisaillement  $K$ , et en utilisant la méthode numérique DQM (Differential Quadrature Method) pour les autres conditions limites.

L'écart entre nos résultats et ceux de la référence, bien qu'il ne soit pas significatif, peut s'expliquer par le fait que la FSDT surestime certaines fréquences par rapport à la HSDT, en fonction du mode considéré, en raison de l'introduction du facteur de cisaillement qui tend à rendre la plaque plus rigide. De plus, il est important de noter que notre approche suppose une variation continue des propriétés à travers l'épaisseur, optimisant ainsi les résultats par rapport à la modélisation par couches utilisée dans la référence (qui est une approximation de la continuité).



**Figure 36:** Visualisation des modes shapes (déformées) d'une plaque FGM carrée pour une distribution de GPL-X correspondant aux modes figurant dans le tableau de comparaison.

Ainsi, compte tenu des approximations considérées dans la ref [41] et à la lumière des bons résultats obtenus (Tableau 13), nous pouvons conclure que notre analyse, basée sur une théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur, est parfaitement adaptée aux problèmes de vibration des plaques FGM renforcées par des nano-plaquettes de graphène en appuis simples, et pouvons même affirmer que nos résultats sont moins erronés et se rapprochent davantage du cas réel.

## 2.4. Etude paramétrique

### 2.4.1. Plaque FG-GPLRC simplement supportée

Dans cette section, nous nous penchons sur l'étude de l'influence de la fraction volumique  $Agpl$  et du rapport  $b/h$  sur les fréquences naturelles d'une plaque de type FGM renforcée par des nano-plaquettes de graphène.

**Tableau 14: Les cinq premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque pur époxy.**

a/b	b/h						
	10	20	30	40	60	80	100
1	<b>0,0584</b>	0,0150	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0017</b>	0,0009	<b>0,0006</b>
	<b>0,1131</b>	0,0297	<b>0,0134</b>	0,0075	<b>0,0034</b>	0,0019	<b>0,0012</b>
	<b>0,1392</b>	0,0370	<b>0,0167</b>	0,0094	<b>0,0042</b>	0,0024	<b>0,0015</b>
	<b>0,1919</b>	0,0584	<b>0,0265</b>	0,0150	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0024</b>
	<b>0,2133</b>	0,0655	<b>0,0297</b>	0,0169	<b>0,0075</b>	0,0042	<b>0,0027</b>
2	<b>0,0370</b>	0,0094	<b>0,0042</b>	0,0024	<b>0,0011</b>	0,0006	<b>0,0004</b>
	<b>0,0584</b>	0,0150	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0017</b>	0,0009	<b>0,0006</b>
	<b>0,0655</b>	0,0169	<b>0,0075</b>	0,0042	<b>0,0019</b>	0,0011	<b>0,0007</b>
	<b>0,0930</b>	0,0242	<b>0,0109</b>	0,0061	<b>0,0027</b>	0,0015	<b>0,0010</b>
	<b>0,0960</b>	0,0297	<b>0,0134</b>	0,0075	<b>0,0034</b>	0,0019	<b>0,0012</b>

**Tableau 15: Les cinq premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-UD GPLRC pour les différentes fractions volumiques  $Agpl$ .**

Agpl	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.01	1	<b>0,1216</b>	0,0312	<b>0,4901</b>	0,0079	<b>0,0035</b>	0,0020	<b>0,0013</b>
		<b>0,2353</b>	0,0619	<b>0,0278</b>	0,0157	<b>0,0070</b>	0,0039	<b>0,0025</b>

		<b>0,2896</b>	0,0770	<b>0,0347</b>	0,0196	<b>0,0087</b>	0,0049	<b>0,0031</b>
		<b>0,3998</b>	0,1216	<b>0,0551</b>	0,0312	<b>0,0139</b>	0,0079	<b>0,0050</b>
		<b>0,4438</b>	0,1362	<b>0,0619</b>	0,0351	<b>0,0157</b>	0,0088	<b>0,0057</b>
	2	<b>0,0770</b>	0,0196	<b>0,0087</b>	0,0049	<b>0,0022</b>	0,0012	<b>0,0008</b>
		<b>0,1216</b>	0,0312	<b>0,0139</b>	0,0079	<b>0,0035</b>	0,0020	<b>0,0013</b>
		<b>0,1362</b>	0,0351	<b>0,0157</b>	0,0088	<b>0,0039</b>	0,0022	<b>0,0014</b>
		<b>0,1935</b>	0,0504	<b>0,0226</b>	0,0128	<b>0,0057</b>	0,0032	<b>0,0020</b>
		<b>0,1999</b>	0,0619	<b>0,0278</b>	0,0157	<b>0,0070</b>	0,0039	<b>0,0025</b>
<b>0.02</b>	1	<b>0,1617</b>	0,0415	<b>0,0186</b>	0,0105	<b>0,0047</b>	0,0026	<b>0,0017</b>
		<b>0,3130</b>	0,0823	<b>0,0370</b>	0,0209	<b>0,0093</b>	0,0052	<b>0,0034</b>
		<b>0,3852</b>	0,1024	<b>0,0461</b>	0,0260	<b>0,0116</b>	0,0065	<b>0,0042</b>
		<b>0,5324</b>	0,1617	<b>0,0733</b>	0,0415	<b>0,0186</b>	0,0105	<b>0,0067</b>
		<b>0,5905</b>	0,1812	<b>0,0823</b>	0,0467	<b>0,0209</b>	0,0118	<b>0,0075</b>
	2	<b>0,1024</b>	0,0260	<b>0,0116</b>	0,0065	<b>0,0029</b>	0,0016	<b>0,0010</b>
		<b>0,1617</b>	0,0415	<b>0,0186</b>	0,0105	<b>0,0047</b>	0,0026	<b>0,0017</b>
		<b>0,1812</b>	0,0467	<b>0,0209</b>	0,0118	<b>0,0052</b>	0,0029	<b>0,0019</b>
		<b>0,2574</b>	0,0671	<b>0,0301</b>	0,0170	<b>0,0076</b>	0,0043	<b>0,0027</b>
		<b>0,2662</b>	0,0823	<b>0,0370</b>	0,0209	<b>0,0093</b>	0,0052	<b>0,0034</b>
<b>0.03</b>	1	<b>0,1937</b>	0,0497	<b>0,0222</b>	0,0125	<b>0,0056</b>	0,0031	<b>0,0020</b>
		<b>0,3750</b>	0,0986	<b>0,0443</b>	0,0250	<b>0,0111</b>	0,0063	<b>0,0040</b>
		<b>0,4615</b>	0,1227	<b>0,0552</b>	0,0312	<b>0,0139</b>	0,0078	<b>0,0050</b>
		<b>0,6386</b>	0,1937	<b>0,0878</b>	0,0497	<b>0,0222</b>	0,0125	<b>0,0080</b>
		<b>0,7075</b>	0,2170	<b>0,0986</b>	0,0559	<b>0,0250</b>	0,0141	<b>0,0090</b>
	2	<b>0,1227</b>	0,0312	<b>0,0139</b>	0,0078	<b>0,0035</b>	0,0020	<b>0,0013</b>
		<b>0,1937</b>	0,0497	<b>0,0222</b>	0,0125	<b>0,0056</b>	0,0031	<b>0,0020</b>
		<b>0,2170</b>	0,0559	<b>0,0250</b>	0,0141	<b>0,0063</b>	0,0035	<b>0,0023</b>
		<b>0,3083</b>	0,0804	<b>0,0360</b>	0,0203	<b>0,0091</b>	0,0051	<b>0,0033</b>
		<b>0,3193</b>	0,0986	<b>0,0443</b>	0,0250	<b>0,0111</b>	0,0063	<b>0,0040</b>

Tableau 16: Les cinq premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-X-GPLRC pour les différentes fractions volumiques Agpl.

Agpl	a/b	b/h					
		10	20	30	40	60	80

<b>0.01</b>	1	<b>0,1396</b>	0,0365	<b>0,0164</b>	0,0092	<b>0,0041</b>	0,0023	<b>0,0015</b>
		<b>0,2647</b>	0,0719	<b>0,0325</b>	0,0184	<b>0,0082</b>	0,0046	<b>0,0030</b>
		<b>0,3230</b>	0,0891	<b>0,0405</b>	0,0229	<b>0,0103</b>	0,0058	<b>0,0037</b>
		<b>0,3999</b>	0,1396	<b>0,0641</b>	0,0365	<b>0,0164</b>	0,0092	<b>0,0059</b>
		<b>0,4841</b>	0,1559	<b>0,0719</b>	0,0410	<b>0,0184</b>	0,0104	<b>0,0067</b>
	2	<b>0,0891</b>	0,0229	<b>0,0103</b>	0,0058	<b>0,0026</b>	0,0014	<b>0,0009</b>
		<b>0,1396</b>	0,0365	<b>0,0164</b>	0,0092	<b>0,0041</b>	0,0023	<b>0,0015</b>
		<b>0,1559</b>	0,0410	<b>0,0184</b>	0,0104	<b>0,0046</b>	0,0026	<b>0,0017</b>
		<b>0,2000</b>	0,0587	<b>0,0265</b>	0,0150	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0024</b>
		<b>0,2192</b>	0,0719	<b>0,0325</b>	0,0184	<b>0,0082</b>	0,0046	<b>0,0030</b>
<b>0.02</b>	1	<b>0,1881</b>	0,0493	<b>0,0221</b>	0,0125	<b>0,0056</b>	0,0031	<b>0,0020</b>
		<b>0,3553</b>	0,0970	<b>0,0439</b>	0,0249	<b>0,0111</b>	0,0063	<b>0,0040</b>
		<b>0,4329</b>	0,1203	<b>0,0547</b>	0,0310	<b>0,0139</b>	0,0078	<b>0,0050</b>
		<b>0,5329</b>	0,1881	<b>0,0866</b>	0,0493	<b>0,0221</b>	0,0125	<b>0,0080</b>
		<b>0,6463</b>	0,2100	<b>0,0970</b>	0,0554	<b>0,0249</b>	0,0141	<b>0,0090</b>
	2	<b>0,1203</b>	0,0310	<b>0,0970</b>	0,0078	<b>0,0035</b>	0,0020	<b>0,0013</b>
		<b>0,1881</b>	0,0493	<b>0,0221</b>	0,0125	<b>0,0056</b>	0,0031	<b>0,0020</b>
		<b>0,2100</b>	0,0554	<b>0,0249</b>	0,0141	<b>0,0063</b>	0,0035	<b>0,0023</b>
		<b>0,2664</b>	0,0793	<b>0,0358</b>	0,0203	<b>0,0090</b>	0,0051	<b>0,0033</b>
		<b>0,2947</b>	0,0970	<b>0,0439</b>	0,0249	<b>0,0111</b>	0,0063	<b>0,0040</b>
<b>0.03</b>	1	<b>0,2264</b>	0,0595	<b>0,0267</b>	0,0151	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0024</b>
		<b>0,4271</b>	0,1169	<b>0,0530</b>	0,0300	<b>0,0134</b>	0,0076	<b>0,0048</b>
		<b>0,5199</b>	0,1449	<b>0,0660</b>	0,0374	<b>0,0167</b>	0,0094	<b>0,0060</b>
		<b>0,6394</b>	0,2264	<b>0,1043</b>	0,0595	<b>0,0267</b>	0,0151	<b>0,0097</b>
		<b>0,7751</b>	0,2527	<b>0,1169</b>	0,0668	<b>0,0300</b>	0,0169	<b>0,0109</b>
	2	<b>0,1449</b>	0,0374	<b>0,0167</b>	0,0094	<b>0,0042</b>	0,0024	<b>0,0015</b>
		<b>0,2264</b>	0,0595	<b>0,0267</b>	0,0151	<b>0,0067</b>	0,0038	<b>0,0024</b>
		<b>0,2527</b>	0,0668	<b>0,0300</b>	0,0169	<b>0,0076</b>	0,0043	<b>0,0027</b>
		<b>0,3197</b>	0,0956	<b>0,0432</b>	0,0244	<b>0,0109</b>	0,0061	<b>0,0039</b>
		<b>0,3543</b>	0,1169	<b>0,0530</b>	0,0300	<b>0,0134</b>	0,0076	<b>0,0048</b>

Tableau 17: Les cinq premières fréquences naturelles adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-O-GPLRC pour les différentes fractions volumiques Agpl.

Agpl	a/b	b/h						
		10	20	30	40	60	80	100
0.01	1	0,0967	0,0246	0,0110	0,0062	0,0027	0,0015	0,0010
		0,1892	0,0489	0,0219	0,0123	0,0055	0,0031	0,0020
		0,2341	0,0609	0,0273	0,0154	0,0069	0,0039	0,0025
		0,3636	0,0967	0,0435	0,0246	0,0110	0,0062	0,0040
		0,3999	0,1084	0,0489	0,0276	0,0123	0,244	0,0044
	2	0,0609	0,0154	0,0069	0,0039	0,0017	0,0010	0,0006
		0,0967	0,0246	0,0110	0,0062	0,0027	0,0015	0,0010
		0,1084	0,0276	0,0123	0,0069	0,0031	0,0017	0,0011
		0,1549	0,0398	0,0178	0,0100	0,0045	0,0025	0,0016
		0,1892	0,0489	0,0219	0,0123	0,0055	0,0031	0,0020
0.02	1	0,1234	0,0313	0,0140	0,0079	0,0035	0,0020	0,0013
		0,2418	0,0624	0,0279	0,0157	0,0070	0,0039	0,0025
		0,2992	0,0777	0,0348	0,0196	0,0087	0,0049	0,0032
		0,4656	0,1234	0,0555	0,0313	0,0140	0,0079	0,0050
		0,5191	0,1384	0,0624	0,0352	0,0157	0,0089	0,0057
	2	0,0777	0,0196	0,0087	0,0049	0,0022	0,0012	0,0008
		0,1234	0,0313	0,0140	0,0079	0,0035	0,0020	0,0013
		0,1384	0,0352	0,0157	0,0089	0,0039	0,0022	0,0014
		0,1979	0,0508	0,0227	0,0128	0,0057	0,0032	0,0020
		0,2418	0,0624	0,0279	0,0157	0,0070	0,0039	0,0025
0.03	1	0,1453	0,0369	0,0164	0,0093	0,0041	0,0023	0,0015
		0,2847	0,0734	0,0328	0,0185	0,0082	0,0046	0,0030
		0,3525	0,0915	0,0410	0,0231	0,0103	0,0058	0,0037
		0,5488	0,1453	0,0653	0,0369	0,0164	0,0093	0,0059
		0,6120	0,1630	0,0734	0,0415	0,0185	0,0104	0,0067
	2	0,0915	0,0231	0,0103	0,0058	0,0026	0,0014	0,0009
		0,1453	0,0369	0,0164	0,0093	0,0041	0,0023	0,0015
		0,1630	0,0415	0,0185	0,0104	0,0046	0,0026	0,0017
		0,2331	0,0597	0,0267	0,0150	0,0067	0,0038	0,0024

---

<b>0,2847</b>	0,0734	<b>0,0328</b>	0,0185	<b>0,0082</b>	0,0046	<b>0,0030</b>
---------------	--------	---------------	--------	---------------	--------	---------------

---

Les résultats obtenus à partir des **Tableaux 14-17** mettent en évidence une augmentation des fréquences adimensionnelles  $\bar{\omega}$  à mesure que le rapport b/h augmente, indiquant ainsi une transition de plaque de caractéristiques moyennement épaisses vers une plaque mince. Cette augmentation du rapport b/h entraîne une diminution des fréquences naturelles  $\omega$ , traduisant ainsi une réduction de la rigidité de la plaque.

Cette tendance est observée quelle que soit la fraction volumique des nano-plaquettes choisie ainsi que le rapport a/b, que la plaque soit carrée ou rectangulaire. L'augmentation du rapport a/b entraîne une diminution des fréquences adimensionnelles ainsi que les fréquences non adimensionnelles, traduisant une souplesse accrue de la plaque.

Il est important de noter que les fréquences naturelles deviennent moins sensibles aux variations du rapport largeur/épaisseur ou longueur/épaisseur au-delà d'un certain seuil (b/h supérieur à 50).

De même, à mesure que la fraction massique augmente, les fréquences naturelles augmentent indépendamment du rapport b/h. Cette tendance s'explique par l'accroissement de la rigidité globale de la plaque avec l'ajout de particules de nanoplaquettes de graphène en tant que renforcement. Cela suggère que, pour une configuration de plaque donnée, il est possible de contrôler la rigidité globale de la plaque simplement en ajustant la fraction volumique des nano-plaquettes de renforcement. Ainsi, nous pouvons conclure que le renforcement d'un composite par l'incorporation de nano-plaquettes de graphène constitue un moyen efficace de contrôler la rigidité et, par conséquent, les fréquences naturelles de vibration.

En utilisant une quantité identique d'additifs GPL, le schéma de distribution GPL-X génère la fréquence fondamentale la plus élevée, surpassant de de loin la plus basse fréquence fondamentale produite par le schéma de distribution GPL-O. Ce constat indique clairement que la dispersion accrue des nanocharges GPL à proximité des surfaces supérieure et inférieure de la plaque, où les contraintes normales sont considérablement élevées, et la réduction significative de leur concentration près du plan médian où les contraintes normales sont minimales, constituent la méthode la plus efficace pour renforcer la rigidité de la plaque, entraînant ainsi une augmentation remarquable des fréquences naturelles.

Cette observation découle de l'exploitation optimale des nanocharges GPL, permettant une amélioration significative des éléments de rigidité de la plaque, tels que les coefficients  $D_{ij}$

et les éléments de la matrice de rigidité  $K_{ij}$  dans le contexte de notre problème d'analyse modale.

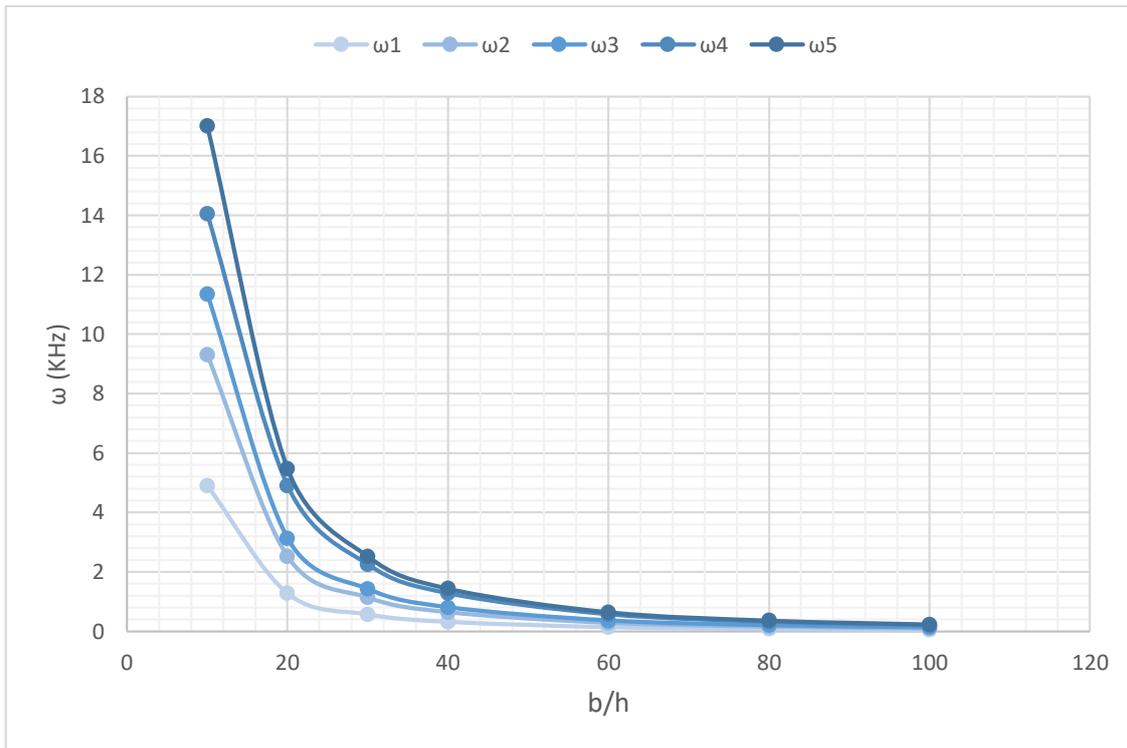


Figure 37: Effet du rapport  $b/h$  sur la vibration libre d'une plaque carrée FG-X GPLRC pour  $Ag_{pl}=0,01$ .

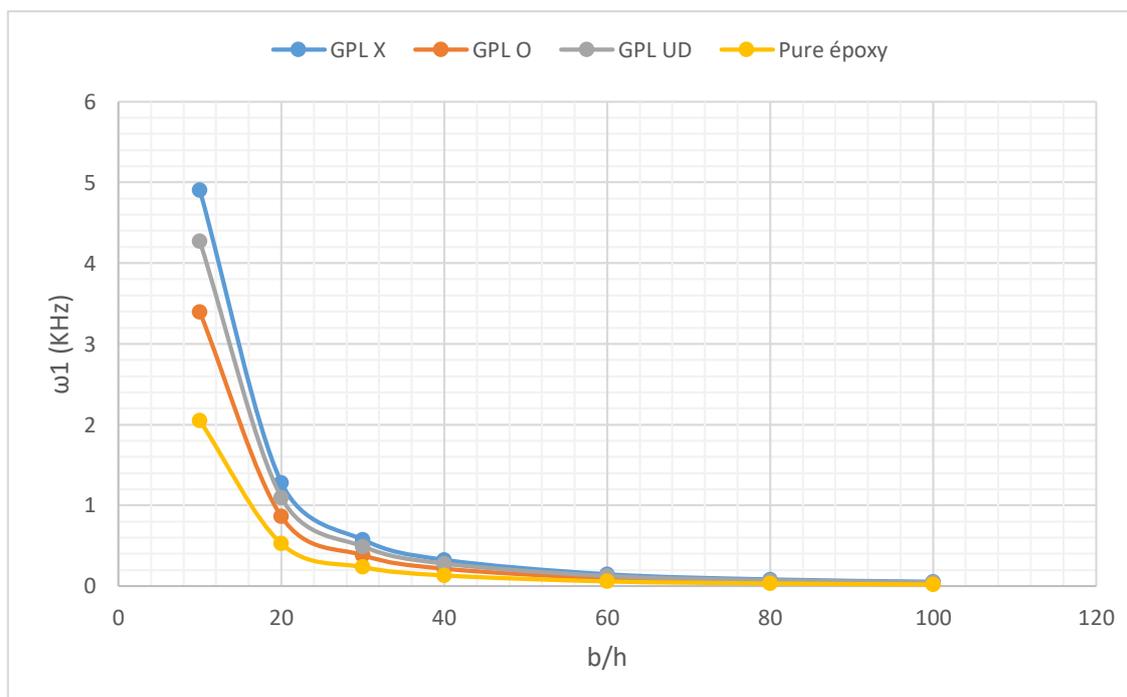


Figure 38: Variation de la fréquence fondamentale d'une plaque carrée en fonction du rapport  $b/h$  pour différentes distributions.

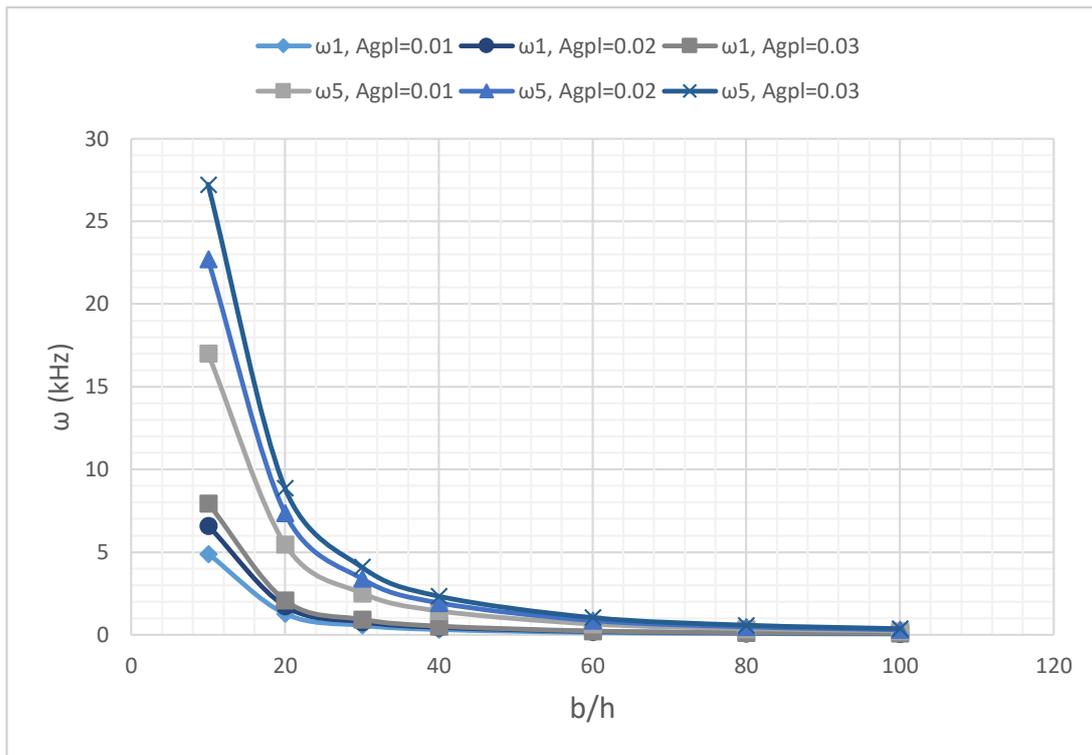


Figure 39: Variation de la fréquence fondamentale et de la 5ème fréquence naturelles d'une plaque FGM carrée GPL-X en fonction du rapport  $b/h$  pour différentes fractions massiques.

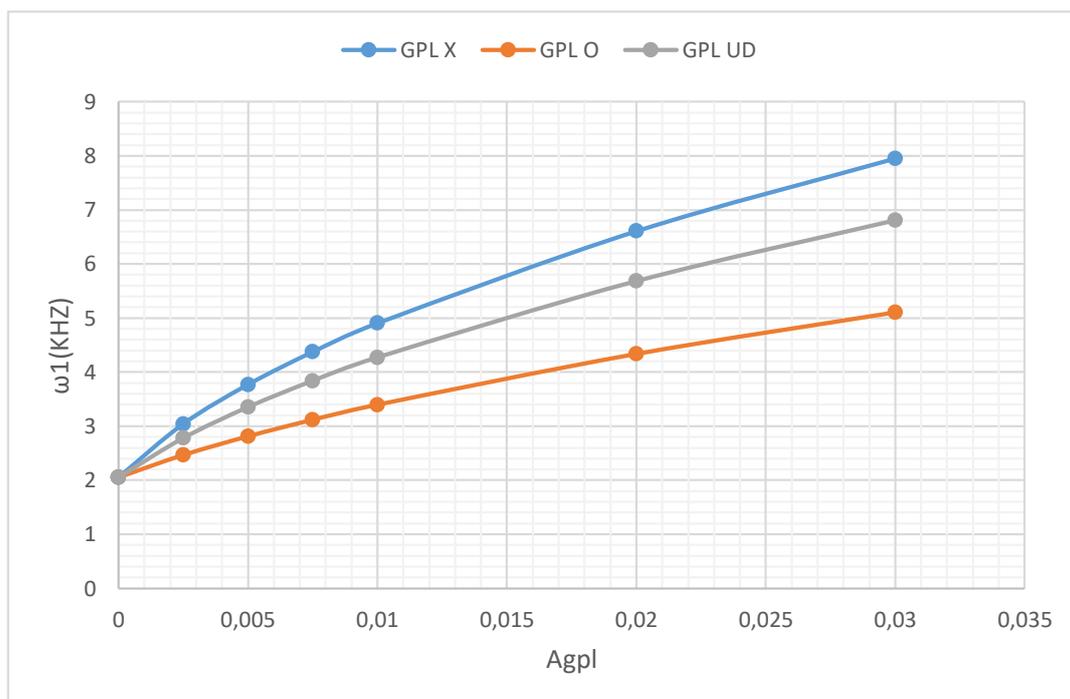


Figure 40: Variation de la fréquence fondamentale naturelle d'une plaque FGM carrée GPL-X en fonction de la fraction massique.

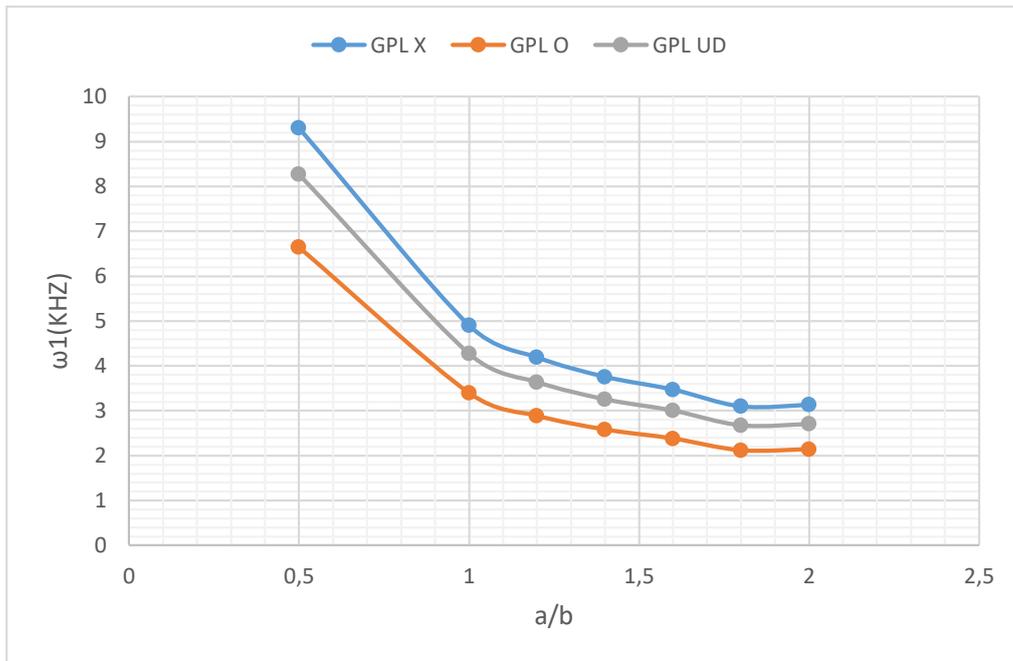


Figure 41: Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport a/b pour différentes distribution des GPL de fraction massique  $Agpl=0,01$ .

2.4.2. Plaque FG-GPLRC posée sur un support élastique

Étant donné les résultats optimaux obtenus pour la distribution GPL-X, nous entreprenons une autre étude paramétrique dans le cas où la plaque repose sur un support élastique afin d'évaluer l'impact des paramètres de flexion et de cisaillement du support Winkler-Pasternak sur les vibrations libres de la plaque.

Tableau 18: Les cinq premières fréquences naturelles non adimensionnelles  $\bar{\omega}$  de la plaque FG-X-GPLRC pour les différentes fractions massiques Agpl.

Agpl	$\omega$ (KHz)	S1( $k_{bp}=0, k_{bw}=0$ )	S2( $k_{bp}=0, k_{bw}=100$ )	S3( $k_{bp}=100, k_{bw}=0$ )	S4( $k_{bp}=100, k_{bw}=100$ )
<b>0,01</b>	$\omega_1$	4,904	5,019	6,837	6,92
	$\omega_2$	9,3	9,361	11,47	11,52
	$\omega_3$	11,35	11,4	13,6	13,64
	$\omega_4$	14,05	14,05	14,05	14,05
	$\omega_5$	17,01	17,04	19,45	19,48
<b>0,02</b>	$\omega_1$	6,608	6,694	8,148	8,218
	$\omega_2$	12,49	12,53	14,18	14,22
	$\omega_3$	15,21	15,25	16,96	16,99
	$\omega_4$	18,72	18,72	18,72	18,72
	$\omega_5$	22,71	22,73	24,6	24,62

<b>0,03</b>	$\omega_1$	7,954	8,026	9,275	9,337
	$\omega_2$	15,01	15,04	16,44	16,48
	$\omega_3$	18,27	18,3	19,75	19,78
	$\omega_4$	22,47	22,47	22,47	22,47
	$\omega_5$	27,23	27,26	28,83	28,85

Les résultats obtenus démontrent que les fréquences naturelles (du mode 1 au mode 5) sont plus élevées lorsque le support élastique de paramètre Pasternak non nul est présent par rapport à l'absence de support Winkler-Pasternak, ainsi qu'à un support de paramètre Pasternak nul, quel que soit le rapport  $b/h$ . Cette observation peut être expliquée par l'effet significatif de l'ajout d'un support élastique de type Winkler-Pasternak, qui augmente considérablement la rigidité de l'ensemble formé par la plaque et le support élastique. Ce résultat est principalement attribué au paramètre de Pasternak, qui influe directement sur la rigidité en cisaillement de l'ensemble. Le paramètre de Winkler, qui agit sur la rigidité de flexion, contribue également à rendre la plaque plus rigide, bien que dans une moindre mesure.

Nous observons des variations similaires et des influences comparables lorsque nous modifions la fraction massique des nano-plaquettes. Que ce soit avec ou sans support on voit clairement que l'augmentation de la fraction massique des nano-plaquettes se traduit toujours par une hausse des fréquences naturelles adimensionnelles et non adimensionnelles.

Les deux graphiques (42-43) présentés ci-dessus illustrent l'impact du rapport  $b/h$  sur la fréquence fondamentale (mode 1) ainsi que la cinquième fréquence (mode 5). Ces représentations graphiques mettent en évidence l'effet du support de type Winkler-Pasternak sur les vibrations naturelles de la plaque, l'impact de cet effet diminue progressivement à mesure que le rapport  $b/h$  augmente, particulièrement lorsque celui-ci dépasse 40.

## 2.5. Organigramme des principales étapes du programme

Le schéma (44) qui suit présente les étapes clés utilisées dans le programme Maple pour résoudre les équations de mouvement d'une plaque FG-GPLRC simplement appuyée et posée sur support élastique de type , en se basant sur une théorie d'ordre supérieur sur la méthode de Navier.

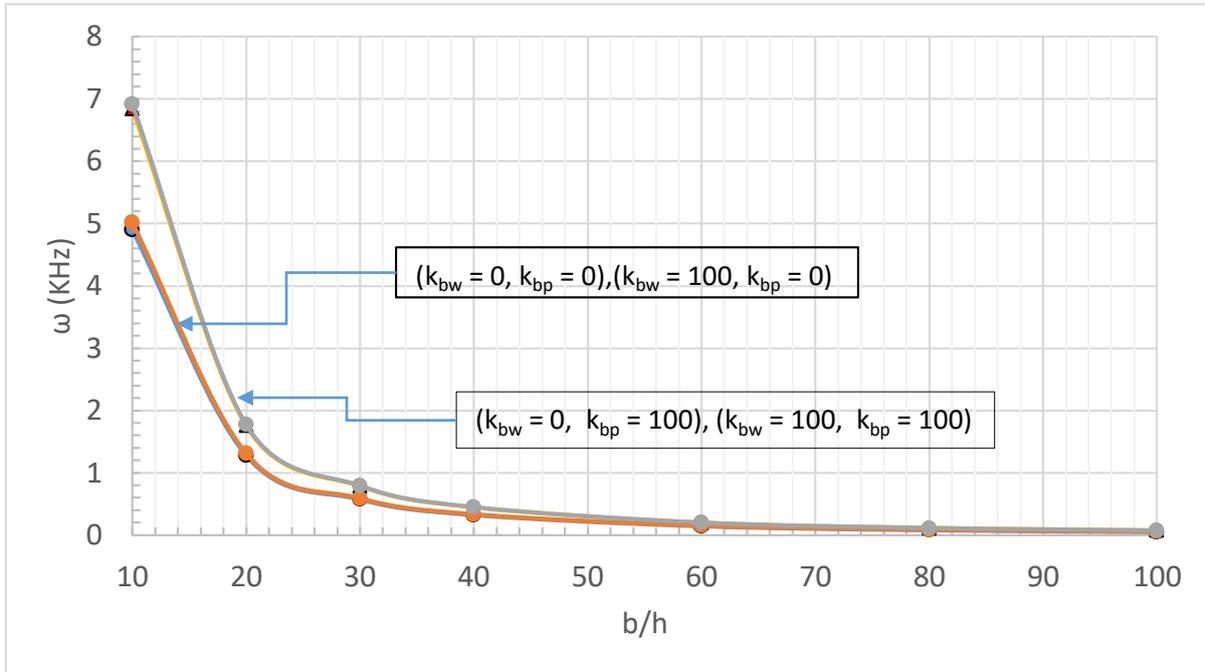


Figure 42: Variation de la fréquence fondamentale d'une plaque carrée FG-X GPLRC sur support élastique en fonction du rapport b/h. pour Agpl=0,01.

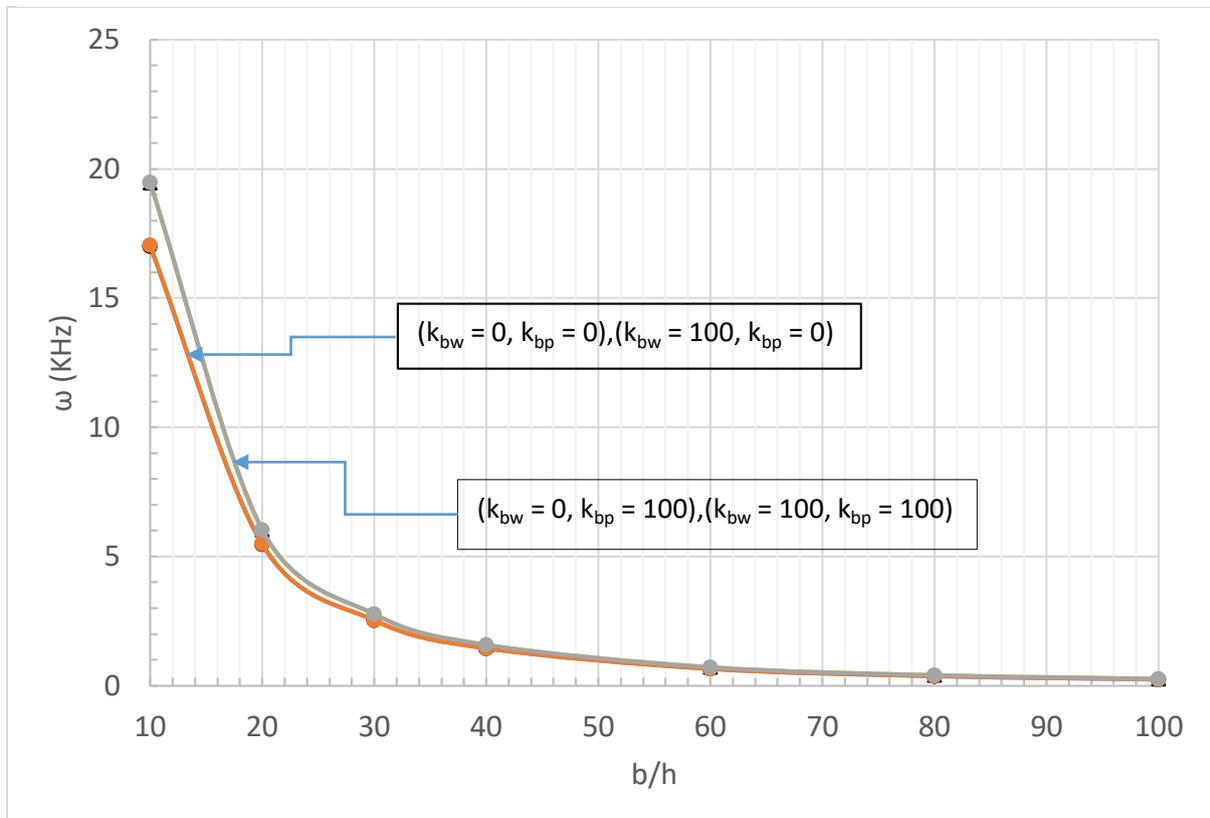


Figure 43: Variation de la cinquième fréquence d'une plaque carrée FG-X GPLRC sur support élastique en fonction du rapport b/h pour Agpl=0,01.

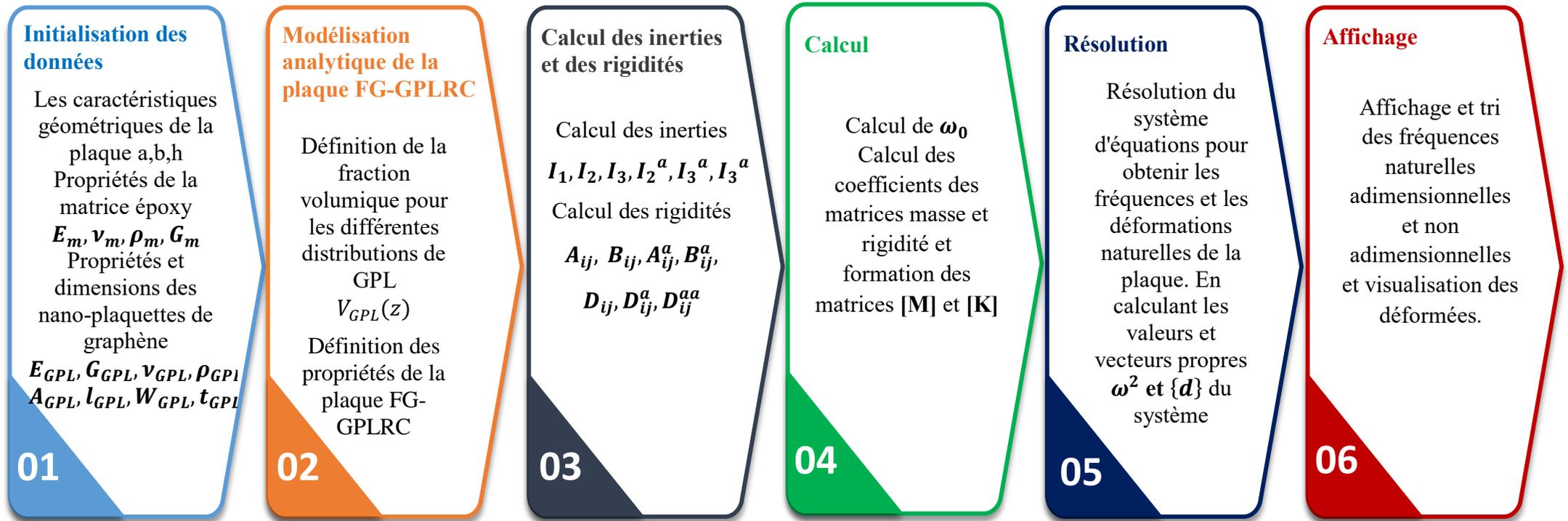


Figure 44: Organigramme du programme de calcul (Maple).

### 3. Conclusion

---

L'objectif de cette étude était d'analyser les vibrations libres des plaques composites GPLRC en utilisant la méthode analytique de Navier. Pour se faire, nous avons estimé les propriétés mécaniques qui varient à travers l'épaisseur  $z$  en utilisant la règle étendue de mélange. La théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur hyperbolique (HSDT) a été employée pour approximer le champ de déplacement bidimensionnel.

Pour valider notre code de calcul Maple, nous avons comparé nos résultats avec ceux déjà publiés. Trois types de composites GPLRC ont été sélectionnés, et deux configurations de plaques ont été étudiées : carrée et rectangulaire. Le tableau de comparaison comprend trois différentes fractions massiques de nano-plaquettes de graphène.

Les résultats obtenus à l'aide de la théorie de déformation choisie, combinée à la méthode numérique de Navier, sont en accord satisfaisant avec les résultats disponibles dans la littérature.

# CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal de cette étude est de développer des formulations analytiques et d'utiliser une méthode numérique pour analyser les vibrations libres des plaques à gradient fonctionnel renforcées par des nano-plaquettes de graphène (FG-GPLRC). Pour cela, nous avons adopté la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur hyperbolique (HSDT) en utilisant cinq variables dans le champ de déplacement.

L'étude paramétrique que nous avons entreprise a permis d'obtenir des résultats numériques intéressants à partir desquels plusieurs conclusions peuvent être tirées :

- Le renforcement des plaques composites par des nano-plaquettes de graphène a un impact significatif sur leur comportement vibratoire libre.
- La loi de distribution des nano-plaquettes le long de l'épaisseur de la plaque affecte directement les fréquences naturelles.
- Les fréquences naturelles dépendent fortement de la fraction massique des nano-plaquettes de graphène utilisées comme renforcement. Plus la fraction volumique augmente, plus la plaque devient rigide et plus les fréquences naturelles augmentent.
- Les résultats montrent l'influence de la géométrie de la plaque sur son comportement vibratoire libre. Lorsque la plaque est relativement mince (rapport longueur sur épaisseur ou largeur sur épaisseur élevé), les fréquences naturelles diminuent en raison de l'augmentation de la souplesse de la plaque.
- L'ajout d'un support élastique de type Winkler-Pasternak, avec un paramètre Pasternak non nul, augmente les fréquences naturelles de la plaque, indépendamment du rapport  $a/h$ , grâce à l'augmentation significative de sa rigidité. De plus, l'augmentation de la fraction massique des nano-plaquettes entraîne systématiquement une hausse des fréquences naturelles, que ce soit avec ou sans support.

Ces recherches innovantes dans le domaine des nanostructures auront un impact direct sur les performances des structures, notamment en termes de rigidité, de légèreté, de réduction de la consommation de matière première, d'économie d'énergie, ainsi que sur les aspects environnementaux et le développement durable.

### Perspectives de recherche

- Intégration de l'effet de la température : Une perspective intéressante serait d'étendre l'étude en considérant l'influence de la température sur les vibrations libres de la plaque FGM renforcée par des nanoplaquettes de graphène. Cela permettrait de prendre en compte l'effet de la dilatation thermique et des variations des propriétés mécaniques avec la température.
- Exploration de nouvelles conditions aux limites et avancement des théories de déformation en cisaillement : Diversifier les conditions aux limites et à explorer différentes configurations pour obtenir des informations précises sur l'influence du renforcement en nanoplaquettes de graphène sur les fréquences de vibration libre. Parallèlement, il est important de progresser dans les théories de déformation en cisaillement en affinant les modèles existants et en développant de nouvelles approches pour mieux décrire les interactions entre les nanoplaquettes de graphène et la matrice environnante.
- Phénomènes aéroélastiques : Une autre perspective prometteuse serait d'explorer les phénomènes aéroélastiques dans le contexte des plaques FGM renforcées par des nanoplaquettes de graphène. L'étude des charges aérodynamiques, telles que les forces de pression et les effets de traînée, permettrait de comprendre leur interaction avec les vibrations libres de la plaque, ce qui serait pertinent pour les applications aéronautiques et spatiales.
- Évaluation d'autres nanomatériaux : En plus des nanoplaquettes de graphène, il serait intéressant d'évaluer d'autres types de nanomatériaux en tant que renforcement pour les plaques FGM. Cette perspective permettrait de comparer les effets de différents nanomatériaux tels que les nanotubes de carbone, les nanofibres et les nanoparticules métalliques sur les vibrations libres des plaques, en vue d'une sélection et d'une conception optimale des renforts pour des applications spécifiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Brechet, «La science des matériaux : du matériau de rencontre au matériau sur mesure» Leçon inaugurale prononcée le jeudi 17 janvier 2013.
- [2] Jean-Marie Berthelot, Mécanique des Matériaux et Structures Composites, Institut Supérieur des Matériaux et Mécaniques Avancés (ISMANS), Le Mans, France, 2010.
- [3] M. Mukhopadhyay, «Mechanics of Composite Materials and Structures», Universities Press, 2005.
- [4] DJEBLOUN Youcef ,« Étude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites», Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider Biskra,2004
- [5] L. GENDRE, «Matériaux composites et structures composites»Université Paris-Sclay, 2011.
- [6] R. Abdelhafid, «Étude du comportement dynamique des composites stratifiés et sandwichs» , Thèse de Doctorat, Université Freres Mantouri Constantine, 2018.
- [7] VIOLEAU et al. , «Les dégradations des matériaux composites : les phénomènes physiques» Sciences de l'Ingénieur,2011 .
- [8] DK. Jha et al. , «A critical review of recent research on functionally graded plates», Composite structures, 2013.
- [9] B. Mbongo, «les matériaux à gradient de fonction pour la conversion de l'énergie solaire» 2009.
- [10] B. Abdeldjalil, «Modélisation du Comportement Thermomécanique des Plaques FGM (Functionally Graded Materials)» , Thèse de Doctorat, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, 2017.
- [11] Guerfi Fadi Khelifa et Ould El Hocine Yacine, «Etude paramétrique de l'influence de la porosité sur les vibrations libres d'une plaque FGM» Université Saad Dahlab Blida, 2021.
- [12] Mahi Amale, «Analyse et Etudes des Plaques Composites FGM en Vibrations Libres», Thèse de Doctorat, Université Saad Dahlab Blida, 2012.
- [13] K. ZEMANI, «Elaboration et simulation des matériaux à gradient de fonction métal/céramique pour la protection balistique», Thèse de Doctorat, Ecole Militaire Polytechnique Chahid Abderrahmane Taleb, 2023.
- [14] Majid Mohammadi et al. , «Review paper Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications», Processing and Application of Ceramics, 2021.

- [15] MH. Ahmed et al. , «Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view», SN Applied Sciences, 2019.
- [16] B. Sidahmed et al. , «Flexion thermomécanique avec effet stretching de plaques FGM sandwich en utilisant la théorie raffinée de déformation par cisaillement (HSDT)», Université Abdelhamid Ibn Badis - Mostaganem, 2020.
- [17] Ric Gaffet, Directeur de recherche au CNRS, «Nanomatériaux : différentes voies de synthèse, propriétés, applications et marchés», Centre national de la recherche scientifique, 2008.
- [18] E. Gaffet, «Nanomaterials: A review of the definitions, applications, health effects. How to implement secure development», Centre national de la recherche scientifique, 2011.
- [19] Site [en ligne]: CEA, le nanomonde, disponible sur:  
<https://www.cea.fr/comprendre/Pages/matiere-univers/nanomonde.aspx?Type=Chapitre&numero=3>.
- [20] Suárez et al. , «Graphene Nanoplatelets» Applied Sciences, 2020.
- [21] Shaoyu Zhaoa et al. , «Functionally graded graphene reinforced composite structures: A review» Engineering Structures, 2020.
- [22] Changgu lee et al. , «Measurement of the elastic properties and intrinsic strength of monolayer graphene» SCIENCE, 2008.
- [23] Deji Akinwande et al. , «A review on mechanics and mechanical properties of 2D materials—Graphene and beyond», Extreme Mechanics Letters, 2017.
- [24] Site [en ligne]: INRS, Nanomatériaux, disponible sur:  
<https://www.inrs.fr/risques/nanomateriaux/terminologie-definition.html#:~:text=Parmi%20les%20nanomat%C3%A9riaux%20manufactur%C3%A9s%20certains,calcium%20ou%20la%20silice%20amorphe..>
- [25] J.P. Dupuy et F. Roure, «Les nanotechnologies : éthique et prospective industrielle» Conseil Général des Mines et Conseil Général des Technologies de l'Information, 2004.
- [26] Vasavi Boggarapu et al. , «State of the art in functionally graded materials» Composite Structures, 2021.
- [27] J. C. Halpin, «Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites» Journal of Composite Materials, 1969.
- [28] Shaoyu Zhaoa et al. , «Functionally graded graphene reinforced composite structures: A review», Engineering Structures, 2020.
- [29] Varadan et al. , Plates Theories and Applications, Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Technology ,2021.

- [30] Wang et al. , SHEAR DEFORMABLE BEAMS AND PLATES Relationships with Classical Solutions, 2000.
- [31] Khalfi Yassine. «Utilisation des théories avancées d'ordre élevé pour l'analyse des plaques solaires en FGM», Thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès, 2016.
- [32] J. REDDY, «A simple higher-order theory of laminated composite plates» ASME Journal of applied mechanics, 1984.
- [33] E. Reissner et al. «On the transverse bending of plates including the effects of tanscense shear deformation» Int J Solid Struct, 1975.
- [34] M. Touratier et al. «An efficient standard plate theory» International journal of engineering science, 1991.
- [35] Karama et al «Mechanical behavior of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity» International journal of solids and structures, 2003.
- [36] M. Aydogdu et al. «A new shear deformation theory for laminated composite plates» 2009.
- [37] El Meiche et al. «A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate» International journal of mechanical sciences, 2011.
- [38] Atmane et al. «Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Plasternak elastic foundations using a new shear deformation theory» International journal of Mechanics and materials in design, 2010.
- [39] Amale Mahi et al. «A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates», Applied Mathematical Modeling, 2014.
- [40] Shimpi, «Refined plate theory and its variants» AIAA Journal, 2002.
- [41] Mehran Safarpour et al. «Theoretical and Numerical Solution for the Bending and Frequency Response of Graphene Reinforced Nanocomposite Rectangular Plates», Applied sciences, 2021.
- [42] Kubiak et al. «Criteria of dynamic buckling estimation of thin-walled structures», Thin-Walled Structures, 2007.
- [43] Mitao Song et al. «Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates re inforced with graphene nanoplatelets », Composite Structures, 2016.

# ANNEXE: DE LA TECHNOLOGIE VERS L'ENTREPRISE

## Présentation de l'idée innovante

---

L'innovation technologique et l'entrepreneuriat sont deux domaines étroitement liés, créant une synergie puissante pour transformer des idées novatrices en entreprises prospères. Dans le secteur des matériaux, une approche émergente et prometteuse consiste à exploiter les Functionally Graded Materials (FGM). Ces matériaux offrent des possibilités uniques en termes de performances, de durabilité et de fonctionnalités avancées. L'incorporation de nanoplaquettes de graphène dans les FGM ouvre la voie à de nouvelles perspectives en termes de renforcement et de comportement vibratoire.

Dans ce contexte, l'identification de l'influence du renforcement en nanoplaquettes de graphène sur les vibrations libres d'une plaque FGM constitue une opportunité d'innovation pour une startup spécialisée dans les études paramétriques.

Cette idée innovante offre une opportunité de créer une startup spécialisée dans l'étude des matériaux FGM renforcés par le graphène, en développant des modèles numériques avancés, en réalisant des simulations paramétriques et en fournissant des conseils d'ingénierie pour la conception et l'optimisation de structures vibratoires. La combinaison de compétences techniques en matériaux, en modélisation numérique et en entrepreneuriat permettrait à cette startup de devenir un acteur clé dans le domaine de l'ingénierie des matériaux avancés.

Dans le reste de cette annexe, nous explorons plus en détail les opportunités commerciales et des impacts potentiels de la création d'une startup axée sur cette idée innovante, mettant en évidence son potentiel de croissance et ses perspectives d'applications industrielles.

## Qu'est-ce qu'une Startup/micro-entreprise ?

---

La distinction entre une startup et une micro-entreprise repose sur des caractéristiques essentielles qui les différencient tant au niveau de leur nature que de leurs objectifs et de leur potentiel de croissance.

Une startup désigne une entreprise récente et innovante dont l'objectif principal est de développer un modèle d'affaires novateur et extensible. Son activité est souvent axée sur la création et le développement de produits, de services ou de technologies disruptifs. Les startups ont généralement une vision ambitieuse de croissance rapide et cherchent à perturber le marché en proposant des idées révolutionnaires. Elles bénéficient souvent d'investissements externes et cherchent activement à obtenir des financements supplémentaires pour soutenir leur expansion. En conséquence, les startups se distinguent par leur capacité à se développer rapidement et à générer d'importants revenus à l'échelle mondiale.

En revanche, une micro-entreprise correspond à une petite entreprise qui emploie généralement moins de dix personnes et dont l'activité se concentre souvent sur un domaine spécifique ou une niche de marché. Les micro-entreprises sont souvent créées par des entrepreneurs individuels ou de petites équipes et se concentrent principalement sur la fourniture de services locaux ou de produits spécialisés. Contrairement aux startups, les micro-entreprises ont généralement des ambitions de croissance plus modestes et cherchent à développer une activité stable et rentable à petite échelle. Elles peuvent être financées par leurs propres moyens ou bénéficier de financements limités provenant de sources personnelles ou de prêts bancaires.

Il convient de souligner que la frontière entre les startups et les micro-entreprises peut parfois être floue, car certaines entreprises peuvent commencer en tant que micro-entreprises et évoluer vers une croissance plus rapide et adopter une approche plus semblable à celle des startups. De plus, le terme "startup" est souvent utilisé de manière plus générale pour désigner toute entreprise en phase de démarrage, qu'elle soit réellement une startup ou une micro-entreprise.

En résumé, la distinction principale entre une startup et une micro-entreprise réside dans leur objectif de croissance, leur potentiel d'innovation et leur attitude face au risque. Les startups cherchent à perturber le marché avec des idées novatrices et à réaliser une croissance rapide à grande échelle, tandis que les micro-entreprises se concentrent davantage sur la stabilité et la rentabilité à petite échelle.

## Leur rôle en développement des matériaux et recherche scientifique

---

Les startups et les micro-entreprises occupent une position essentielle dans le domaine de l'innovation en technologie des matériaux, jouant un rôle prépondérant dans la recherche et

le développement. Leur caractère agile et novateur les positionne souvent en tant que pionnières, apportant des idées nouvelles et des solutions créatives pour relever les défis inhérents aux matériaux dans des secteurs variés tels que l'électronique, l'énergie, l'aérospatiale, et bien d'autres encore.

La nature même des startups et des micro-entreprises favorise l'innovation. Leur taille réduite leur permet d'être plus flexibles et plus réactives aux évolutions du marché et aux nouvelles technologies émergentes. Elles sont souvent composées de jeunes entrepreneurs passionnés, de chercheurs talentueux et de spécialistes expérimentés qui s'efforcent de repousser les limites des matériaux existants et de créer de nouvelles solutions technologiques.

L'une des principales raisons pour lesquelles les startups et les micro-entreprises sont en mesure de catalyser l'innovation en technologie des matériaux réside dans leur capacité à prendre des risques. Étant donné qu'elles opèrent dans un environnement entrepreneurial dynamique et concurrentiel, ces entreprises sont souvent prêtes à explorer de nouvelles idées et à investir dans des projets ambitieux. Elles sont également plus susceptibles de remettre en question les approches conventionnelles et de repenser les matériaux existants pour répondre à des besoins spécifiques ou pour améliorer les performances.

De plus, les startups et les micro-entreprises bénéficient souvent de partenariats avec des universités, des instituts de recherche et d'autres acteurs de l'industrie. Ces collaborations offrent un accès à des ressources supplémentaires, telles que des laboratoires de pointe, des experts en la matière et des financements pour la recherche et le développement. Cela permet aux entrepreneurs de matériaux d'explorer de nouvelles idées et de transformer leurs concepts innovants en produits et services tangibles.

L'innovation en technologie des matériaux dans les startups et les micro-entreprises se manifeste de différentes manières. Certaines entreprises se concentrent sur la découverte de nouveaux matériaux aux propriétés exceptionnelles, tels que des matériaux plus légers, plus résistants ou plus conducteurs. D'autres se spécialisent dans la fabrication de matériaux fonctionnels, capables de s'adapter à des conditions changeantes ou d'effectuer des tâches spécifiques. Certaines startups explorent également des techniques de fabrication avancées, telles que l'impression 3D ou les nanotechnologies, pour créer des produits innovants.

Il convient également de mentionner que les startups et les micro-entreprises jouent un rôle crucial dans la durabilité environnementale. De nombreuses entreprises axées sur les matériaux recherchent des solutions respectueuses de l'environnement, telles que des matériaux recyclables, des alternatives aux plastiques à usage unique et des processus de production plus économes en énergie.

En résumé, les startups et les micro-entreprises sont des moteurs essentiels de l'innovation en technologie des matériaux. Leur agilité, leur créativité et leur capacité à prendre des risques leur permettent de repousser les limites des matériaux

## BMC (Business Model Canvas)

### Son importance

Le Business Model Canvas (BMC) est un cadre visuel utilisé par les entrepreneurs et les propriétaires d'entreprise pour décrire, concevoir et analyser leurs modèles d'affaires. Il joue un rôle crucial dans la création d'une entreprise en fournissant une vue d'ensemble des différents aspects clés de l'entreprise et en analysant comment ils interagissent pour générer des revenus et créer de la valeur. L'avantage qu'offre le BMC peut être résumé en quelques points essentiels :

- Vision holistique en identifiant les segments de clientèle, les canaux de distribution, les sources de revenus, les ressources clés, les partenaires et les activités clés.
- Identification des opportunités de marché, les segments de clientèle sous-exploités et les moyens de créer une proposition de valeur unique. En utilisant le BMC, les entrepreneurs peuvent identifier les domaines potentiels d'amélioration de leurs modèles d'affaires et créer des stratégies pour optimiser leurs opérations et augmenter leur rentabilité.
- Analyse de la viabilité économique de l'entreprise en analysant les flux de revenus, les coûts clés et les ressources nécessaires.
- Flexibilité, ajustements rapides et itérations pour s'adapter aux changements du marché et aux nouvelles opportunités.
- Communication et alignement entre les membres de l'équipe et les parties prenantes externes, en offrant un langage commun pour décrire le modèle économique de l'entreprise.

### Les composants clés de notre BMC

En se basant sur le rôle crucial du Business Model Canvas (BMC) dans la création d'une entreprise, il est pertinent d'explorer les neuf composants clés du BMC appliqués à notre startup spécialisée dans l'étude paramétrique de l'influence du renforcement en nanoplaquettes de graphène sur les vibrations libres d'une plaque FGM (Functionally Graded Materials).

### Partenaires clés



- Fournisseur de logiciels
- Universités et instituts de recherche
- Fabricants de matériaux
- Entreprises d'ingénierie spécialisées dans la modélisation et la simulation

### Activités clés



- modélisation numérique
- analyse des résultats

### Ressources clés



- Équipe d'experts en matériaux
- Logiciels de modélisation avancés
- Accès aux laboratoires spécialisés
- Équipements de bureau et de communication

### Offre



- Expertise dans l'analyse des vibrations des FGM renforcés
- Optimisation de la conception et amélioration des performances structurelles
- modélisation à la carte des matériaux FGM nano-renforcés.

### Relation client



- Engagement proactif et suivi régulier
- Services de conseil personnalisé
- Promotions exclusives aux clients fidèles

### Canaux



- Partenariats avec des entreprises établies
- Présence en ligne solide
- Campagnes publicitaires ciblées
- Participation aux événements de l'industrie

### Client



- Industrie aérospatiale
- Industrie navale
- Industrie automobile
- Industrie électronique
- Génie civil
- Énergies renouvelables

### Coûts

- les coûts de personnel
- les coûts d'exploitation
- La veille technologique
- les frais de recherche et développement
- les investissements nécessaires pour acquérir les ressources clés.



### Revenues

- Services de consultation payants
- Vente de rapports d'analyse détaillés
- Contrats de recherche et développement



Ces composants fournissent une structure pour décrire et analyser notre modèle économique. Nous passons en revue les neuf éléments clés :

#### 1. Segmentation de clientèle

Nous ciblons un large éventail de clients ou de marchés que nous ciblons avec notre expertise en étude paramétrique des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène notamment les industries de aérospatiale, automobile, électronique, génie civile et les énergies renouvelables . Notre objectif est d'apporter des solutions innovantes et d'améliorer les performances des matériaux utilisés dans ces domaines en exploitant les avantages uniques des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène. Nous travaillons en étroite collaboration avec des fabricants, des ingénieurs et d'autres acteurs de l'industrie pour optimiser la conception, réduire le poids, améliorer la résistance et les performances structurelles, tout en répondant aux besoins spécifiques de chaque industrie.

#### 2. Proposition de valeur

La valeur unique que nous offrons à nos clients englobera l'expertise dans l'analyse des vibrations des FGM renforcés par nano-plaquettes de graphène, permettant d'optimiser la conception et d'améliorer les performances structurelles et ainsi permettre une modélisation à la carte des matériaux FGM nano-renforcés.

#### 3. Canaux de distribution

Nous utiliserons une approche multicanaux pour communiquer avec nos clients potentiels. Cela inclura des partenariats stratégiques avec des entreprises établies, une présence en ligne solide via un site web professionnel et les médias sociaux, des campagnes publicitaires ciblées et la participation à des événements de l'industrie. Grâce à ces différentes stratégies, nous atteindrons efficacement notre public cible et promouvrons nos services d'étude paramétrique des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène.

#### 4. Sources de revenus

Notre entreprise a identifié différentes sources de revenus potentielles. Nous offrirons des services de consultation payants, où nous fournirons notre expertise en étude paramétrique des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène, comprenant des analyses personnalisées et des conseils techniques. Nous prévoyons également de générer des revenus en vendant des rapports d'analyse détaillés, fournissant des évaluations approfondies des performances des matériaux FGM et des

recommandations de conception. Enfin, nous établirons des contrats de recherche et développement avec des clients et des partenaires de l'industrie pour collaborer sur de nouvelles solutions innovantes et explorer de nouvelles applications pour les plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène.

#### 5. Relation client

La manière dont nous interagissons et cultiverons nos relations avec nos clients se basera en premier lieu sur un engagement proactif avec les clients via les e-mails et les médias sociaux pour partager du contenu pertinent et interagir avec notre audience, renforçant ainsi notre visibilité en ligne. Cette relation comprendra des services de conseil personnalisé, des formations ou un suivi régulier pour garantir leur satisfaction ainsi que des promotions exclusives aux clients fidèles.

#### 6. Ressources clés

Pour fournir nos services, nous aurons besoin de ressources clés telles qu'une équipe d'experts en matériaux, des logiciels de modélisation avancés. Il sera crucial de disposer des licences appropriées et de maintenir ces logiciels à jour pour garantir des résultats de haute qualité ainsi qu'un accès à des laboratoires spécialisés pouvant nous fournir des informations sur les dernières avancées en matière de matériaux, nous aider à accéder à des données spécifiques et à des caractéristiques de performance des matériaux.

#### 7. Activités clés

Les principales activités que nous devons entreprendre pour offrir nos services vont inclure la modélisation numérique, la réalisation d'expériences, l'analyse des données et la fourniture de rapports d'analyse détaillés.

#### 8. Partenaires clés

Les partenaires stratégiques pouvant renforcer notre offre et accélérer notre croissance sont sans aucun doute des universités, des instituts de recherche, des fabricants de matériaux ou des entreprises d'ingénierie spécialisées dans la modélisation et la simulation, qui peuvent fournir des logiciels et des outils avancés pour renforcer nos capacités d'analyse des vibrations des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène.

#### 9. Structure des coûts

Les coûts associés à notre activité comprennent les coûts de personnel, les coûts d'exploitation, les frais de recherche et développement, ainsi que les investissements nécessaires pour acquérir les ressources clés.

### Conclusion

En conclusion, cette annexe "De la technologie vers l'entreprise" présente les différents éléments clés de notre Business Model Canvas (BMC). Nous avons examiné nos sources de revenus potentielles, nos ressources clés, nos partenaires stratégiques, nos canaux de communication et nos coûts associés. Ces éléments sont essentiels pour mettre en place notre entreprise et exploiter les opportunités offertes par l'étude paramétrique des plaques FGM renforcées par nano-plaquettes de graphène.