

République Algérienne Démocratique et Populaire.  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de La Recherche Scientifique.

**Université de Blida-1-**  
**Institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales.**  
**Département de construction aéronautique**



**PROJET DE FIN D'ÉTUDES**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER**  
**EN AERONAUTIQUE**

**Option : Avionique**

**THEME :**

---

**Etude de contrôle d'un hélicoptère avec et sans la  
dynamique de Rotor**

---

*Réalisé par :*

Mr.GOURI Rchid Saleh

*Encadré par :*

Mm.KHELIFA. Yamina

☞ Promotion : 2015 ☛

## Résumé :

### ملخص :

كل دراسة للاستجابة الديناميكية لطائرة هليكوبتر معقدة لان كل شفرة من الدوار لديها درجة من الحرية الخاصة بها بلاضافة الى تلكم الخاصة بجسم المروحية, اذن نحن مهتمون في عملنا بالسيطرة على طائرة الهليكوبتر مع و بدون ديناميات الدوار من خلال تطبيق قوانين التحكم الخطية.

واحدة من التحديات الرئيسية للتحكم في الطيران هو تحديد هذه القيود بسبب تصميم قوانين مراقبة خطية التي تستند على النماذج الخاصة بالمروحيات.

الهدف من هذه الدراسة هو التحكم الخطي في الطيران للسيطرة على المروحية من الزوايا الهامة.

المرحلة الاولى من الدراسة تتمثل في معالجة النمذجة و التحليل الخطي من ديناميكيات الطيران اما المرحلة الثانية تتمثل في تطبيق قانون سيطرة التريبيعية الخطية.

### Résumé :

Toute étude de la réponse dynamique d'un hélicoptère est compliquée parce que chaque pale du rotor possède ses propres degrés de liberté, qui sont, en plus de celles du fuselage. alors dans notre travail nous sommes intéressés à le contrôle d'un hélicoptère avec et sans la dynamique de rotor par l'application des lois de la commande linéaire quadratique. . Un des principaux défis de la commande de vol est de se dégager les contraintes liées aux qualités de vol grâce à la conception de lois de commande linéaire basées sur des modèles des hélicos.

L'objectif de ce mémoire est de développer une commande de vol qui permet de contrôler un hélicoptère dans les angles significatifs.

La première phase de ce mémoire consiste à la modélisation et l'analyse de la dynamique de l'hélicoptère. Dans la deuxième phase, l'application des lois de commande LQP.

### **Summary:**

Any study of the dynamic response of a helicopter is complicated because each blade of the rotor has its own degrees of freedom, which are in addition to those of the fuselage. then in our work interested for the control of a helicopter by the application of the laws of the Linear Quadratic Control.

One of the main challenges of the ordering of flight is to release the stresses related to qualities from flight grace has the design of laws of linear control based on model of the helicopter.

The objective of this memory is to develop flight control makes it possible to control a helicopter in the angles significant. The first phase of this memory consists in treating modeling and dynamics of the helicopter analyzes. In the second phase, the application of the laws of Linear control Quadratic Problem.



dédicace

Je dédié ce modeste travail

A mes parents SETRIA et TURKI

Je vous remercie pour tout l'effort et le soutien incessant qui m'a toujours apporté et l'amour que vous me portez depuis mon enfance. Merci pour les sacrifices pour me voir atteindre ce jour et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Enfin merci tout simplement d'être ma mère et mon père

A la mémoire de ma très hère grand-mère « ZOHRA »

A ma deuxième mère FOUZIA

A mon frère MOHAMED qui mon énormément soutenu moralement

A mes chères sœurs KHADIDJA , AICHA,NAIMA,NESSRINE et leurs petits enfants

A toute ma famille

A la mémoire d'ABOUBAKER

A Mm REGUIGE pour son soutiens et conseille

A mes amis FOUAD ,SAFI ,NOUR ELDDINE

A tous mes amis et collègues de la promotion 2015 option AVIONIQUE

A tous ceux qui m'aime de prés ou de loin

Enfin à vous qui lirez ce mémoire

...✍

*Rached*





## Remerciements

*On dit souvent que le trajet est aussi important que la destination.*

*La durée des études nous a permis de bien comprendre la signification de cette phrase toute simple. Ce parcours, en effet, ne s'est pas réalisé sans défis et sans soulever de nombreuses questions pour lesquelles les réponses nécessitent de longues heures de travail.*

*En préambule, louange à **ALLAH**, seigneur de l'univers, qui nous a comblé de ses bienfaits, nous a guidé toutes les années de formation et nous a donné force, volonté, patience et courage afin d'accomplir ce travail.*

*Nous souhaitons adresser nos plus sincères remerciements à nos parents, nos frères et sœurs, nos proches et amis, qui nous ont accompagnés, soutenus et encouragés, ainsi qu'aux personnes avec lesquelles nous avons pu échanger et qui nous ont aidés pour la rédaction de ce mémoire.*

*Nous tenons à exprimer nos vifs remerciements à notre promoteur Mm. **Khelifa Yamina** pour tout le temps qu'il nous a consacré afin de réaliser notre projet*

*Nos remerciements s'adressent aussi à tous les **enseignants** de l'institut d'Aéronautique et des Etudes Spatiales (IAES) qui nous ont aidés dans notre cursus universitaire.*

*Pour conclure, aux membres du jury qui nous ont fait l'honneur de siéger dans notre soutenance. Veuillez trouver ici l'expression de nos salutations distinguées.*

... 

## Nomenclature

---

$I_x$	Moment d'inertie de roulis	$[\text{kg. m}^{-2}]$
$I_y$	Moment d'inertie de tangage	$[\text{kg. m}^{-2}]$
$I_z$	Moment d'inertie de lacet	$[\text{kg. m}^{-2}]$
$I_{xx}$	Produit d'inertie	$[\text{kg. m}^{-2}]$
$\mu$	Densité relative	$[\text{kg. m}^{-2}]$
$m$	Masse de l'hélicoptère	$[\text{kg}]$
$p$	vitesse angulaire de roulis	$[\text{rd. s}^{-1}]$
$q$	vitesse angulaire de tangage	$[\text{rd. s}^{-1}]$
$r$	vitesse angulaire de lacet	$[\text{rd. s}^{-1}]$
$\psi$	Azimut	$[\text{rd. s}^{-1}]$
$u$	Vitesse de l'hélicoptère selon l'axe x	$[\text{m. s}^{-1}]$
$v$	Vitesse de l'hélicoptère selon l'axe y	$[\text{m. s}^{-1}]$
$x_e$	position de l'hélicoptère vers le nord dans le repère terre	$[\text{m}]$
$y_e$	position de l'hélicoptère vers l'est dans le repère terre	$[\text{m}]$

## Nomenclature

---

$\phi$	Assiette de roulis	[rd. s <sup>-1</sup> ]
$\theta_F$	Assiette de tangage	[rd. s <sup>-1</sup> ]
R	Le rayon de lame de rotor	[m]
C	cord de pale	[m]
$\beta$	Angle de dérapage	[rd. s <sup>-1</sup> ]
W	Vitesse de l'hélico selon l'axe z	[m. s <sup>-1</sup> ]

angle tangage (F)

Résumé

Dédicace

Remerciement

Nomenclature

Tables des matières

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale

*Liste des ref  
pour le  
trans*

**Chapitres I : Description de fonctionnement des hélicoptères.....01**

I.1) Historique sur l'hélicoptère .....

I.2) Quelques définitions sur les hélicoptères .....

I.3) Modes de vol .....

I.3.1) Le Vol stationnaire (hover) .....

I.3.2) Le vol vertical .....

I.3.3) Le vol de translation .....

I.3.3.1) Les translations verticales .....

I.3.3.2) Les translations horizontales .....

I.3.3.3) La translation spatiale .....

I.4) Différentes configurations des rotors d'un hélicoptère .....

I.4.1) Hélicoptère standard .....

I.4.2) Hélicoptère à deux rotors principaux .....

I.4.2.1) Hélicoptère bi-rotor en tandem .....

I.4.2.2) Hélicoptère bi-rotor coaxial .....

I.4.2.3) Hélicoptère bi-rotor côte à côte .....

I.4.2.4) Hélicoptère à deux rotors pivotants .....

I.4.2.5) Les convertibles .....

I.4.3) Configuration à trois rotors .....

I.4.4) Configuration à quatre rotors .....

I.5) Description du rotor principal et du rotor de queue .....

I.5.1) Types de rotor principal .....	
I.5.2) Les pales .....	
I.5.3) Mât .....	
I.5.4) Moyeu.....	
I.5.5) Plateau cyclique .....	
I.5.6) Rotor de queue .....	
I.6) Les principales commandes .....	

## **Chapitre II : Modélisation des hélicoptères.....**

II-1) Repères et systèmes d'axes .....	
II.1.1) Paramètres cinématiques, cinétiques et d'efforts .....	
II.1.1.1) Paramètres cinématiques.....	
II.1.1.2) Paramètres cinétiques.....	
II.1.1.3) Paramètres d'efforts.....	
II.1.2) Dynamique de translation.....	
II.1.3) Dynamique de rotation .....	
II.1.4) Relations cinématiques .....	
II.1.4.1) Matrice de rotation.....	
II.1.4.2) Cinématique de rotation.....	
II.1.5) Composante de poids .....	
II.2) Equation de mouvement .....	
II.2.1) Le mouvement longitudinal .....	
II.2.2) Le mouvement latérale .....	
II.2.3) La forme canonique .....	

## **Chapitre III : Conception de la commande LQP .....**

III.1) Qualité de manœuvrabilité .....	
III.1.1) Qualité de manœuvrabilités longitudinales .....	
III.1.2) Qualité de manœuvrabilités latérales .....	
III.2) Problème linéaire-quadratique, applications à la régulation .....	
III.2.1) Existence de trajectoires optimales .....	

III.2.2) Principe du maximum dans le cas LQ .....	
III.2.3) Fonction valeur et équation de RICCATI.....	
III.2.3.1) Définition de la fonction valeur .....	
III.2.3.2) Equation de Riccati .....	
III.2.4) Applications de la théorie LQ .....	
III.2.4.1) Problèmes de régulation .....	
<b>Chapitres IV : Simulation et Interprétation des résultats.....</b>	
IV.1) L'étude du model avec la dynamique de rotor .....	
IV.1.1) Présentation sous forme d'espace d'état.....	
IV.1.1.1) La matrice d'état A .....	
IV.1.1.2) la matrice de commande B .....	
IV.1.2) Etude du système en boucle ouverte .....	
IV.1.2.1) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe .....	
IV.1.2.2) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor par une impulsion.....	
IV.1.3) Etude du système en boucle fermée .....	
IV.1.3.1) Les valeurs propres.....	
IV.1.3.2) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe .....	
IV.1.3.3) Réponse du système a l'impulsion .....	
IV.1.3.4) Reponse du système pour G2 .....	
IV.1.3.5) Reponse du système a impulsion .....	
IV.2) L'étude du modèle d'un hélicoptère sans dynamique de rotor .....	
IV.2.1) Présentation sous forme d'espace d'état.....	
IV.2.1.1) La matrice d'état A .....	
IV.2.1.2) la matrice de commande B .....	
IV.2.2) Etude du système en boucle ouverte .....	
IV.2.2.1) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe .....	
IV.2.2.2) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor .....	
IV.2.3.1) Les valeurs propres .....	
V.2.3) Application de la commande LQP .....	
IV.2.3.2) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe .....	

IV.2.3.3) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor par une impulsion .....

IV.2.3.4) Réponse du système a impulsion.....

IV.3) Les gains calculés par les simulations précédentes .....

**Conclusion générale**

**Annexes**

**Liste des Références**

## Liste des figures

---

Figure (I.1) : Composantes d'un hélicoptère.....	3
Figure (I.2): Vol vertical ascendant .....	5
Figure (I.3): Vol stationnaire .....	5
Figure (I.4): Vol de translation .....	5
Figure (I.5): Hélicoptère standard.....	6
Figure (I.6): Hélicoptère de type NOTAR.....	7
Figure (I.7): Hélicoptère bi-rotor en tandem.....	8
Figure (I.8): Hélicoptère bi-rotor coaxial.....	9
Figure (I.9): Hélicoptère bi-rotor côte à côte.....	9
Figure (I.10): Hélicoptère à deux rotors pivotants.....	10
Figure (I.11): Le convertible V22 Osprey.....	11
Figure (I.12): Hélicoptère à trois rotors.....	12
Figure (I.13): Hélicoptère à quatre rotors.....	12
Figure (I.14): Profil d'une pale d'hélicoptère.....	14
Figure (I.15): Les trois articulations d'une pale.....	15
Figure (I.16): Les articulations du rotor.....	16
Figure (I.17): Les angles de battement vertical longitudinal et latéral.....	17
Figure (I.18): L'angle de conicité $a_0$ et de battement vertical latéral.....	18
Figure (I.19): Le plateau cyclique.....	19
Figure (I.20): Le stabilisateur à inertie.....	20
Figure (I.21): Les principales commandes.....	20
Figure (II.1) : Repères et systèmes d'axes de la mécanique du vol avion.....	22

## Liste des figures

---

Figure (II.2 ) Représentation des angles d'Euler.....	27
Figure (III.1) : Echelle de cooper-Harper .....	39
Figure (IV.1) : représentation des valeurs propres du système dans le plan complexe.....	56
Figure (IV.2) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale.....	56
Figure (IV.3) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.....	57
Figure (IV.4) : représentation des pôles de système dans le plan complexe.....	60
Figure (IV.5) : réponse de système a impulsion longitudinale.....	60
Figure (IV.6) : réponse de système a l'impulsion latérale.....	61
Figure (IV.7) :réponse de système a l'impulsion longitudinale.....	62
Figure (IV.8) : réponse de système a l'impulsion latérale.....	62
Figure (IV.9) : représentation des valeurs propres du système dans les plans complexes.....	65
Figure (IV.10) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinal.....	65
Figure (IV.11) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.....	66
Figure (IV.12) : représentation des valeurs propres du système dans le plan complexe.....	69
Figure (IV.13) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale.....	69
Figure (IV.14) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.....	70
Figure (IV.15) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale.....	71
Figure (IV.16) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.....	71

## Liste des tableaux

---

Tableau (III.1) : Niveau de manœuvrabilité.....	40
Tableau (IV.1) : valeurs propres du système.....	55
Tableau (IV.2) : valeurs propres en boucle fermée.....	59
Tableau (IV.3) : les valeurs propres en boucle ouverte (sans dynamique de rotor).....	64
Tableau (IV.4) : les valeurs propres en boucle fermé (sans dynamique de rotor).....	68
Tableau (IV.5) : les gains de retour pour chaque modèle.....	72

# Introduction Générale :

---

L'hélicoptère est un système naturellement instable. Pour une machine sans aucune aide au pilotage, le pilote est amené à produire un effort permanent pour pallier ce défaut et maintenir sa machine stable. Au-delà, il doit gérer sa trajectoire en faisant face aux imperfections des qualités de vol naturelles de l'appareil. C'est pourquoi des technologies d'aide au pilotage comme les Commandes De Vol Electriques ont été progressivement introduites sur ces appareils afin de réduire la charge de travail de pilotage au bénéfice de tâches de gestion de missions et d'armement.

Les commandes électriques ont amené un plus indéniable au monde de l'aéronautique, aussi bien dans l'aviation civile que militaire. Elles permettent de substantielles réductions de masse et de cout. De point de vue du pilote, elles assurent une meilleure flexibilité en réponse du système, donc une meilleure manœuvrabilité de l'appareil sur tout le domaine de vol et une sécurité accrue avec la protection de l'enveloppe de vol.

La Commande LQP a pour but de présenter les aspects théoriques et numériques de cette discipline, ainsi que des applications dans des domaines très divers. La théorie du contrôle (ou commande) analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, chimie.... L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions pour un certain critère d'optimisation.

Un des principaux défis de la commande de vol est de se dégager de ces contraintes grâce à la conception des lois de commande linéaire adaptatives basé sur des modèles linéaires de l'hélicoptère.

## **Objectif :**

L'objectif principal de notre thèse est de concevoir un contrôleur de vol linéaire basé sur l'utilisation de la commande LQP. Dans le cadre d'une application sur un hélicoptère Sikorski S61 .L'étude se prolonge sur quatre chapitres.

# Introduction Générale :

---

Chapitre 1 : Une analyse de l'aérodynamique d'un hélicoptère est présentée dans ce chapitre, où nous présentons les aspects aérodynamiques généraux des hélicoptères en remarquant les similitudes et les différences entre les modes de vol.

Chapitre 2 : est consacré à la modélisation linéaire de l'hélicoptère, le système à l'étude. Ainsi les outils mathématiques sont présentés.

Chapitre 3 : L'hélico venant d'être modélisé. Il devient possible de concevoir des lois de commande permettant de piloter l'hélico, alors on prend dans cette partie la conception de la commande LQP, mais bien avant, les qualités de manoeuvrabilité sont abordées.

Chapitre 4 : il présente l'objectif de ce mémoire de fin d'étude, c'est la partie d'application et simulation, on prend deux modèles pour un hélicoptère avec et sans la dynamique de rotor pour les contrôler à fin de familiariser avec la commande LQP.

La simulation du modèle considéré est en premier lieu en boucle ouverte, à fin de visualiser les caractéristiques dynamiques naturelles de l'hélicoptère, puis, on introduit la commande pour contrôler.

On finalise notre travail par une conclusion générale, et quelques perspectives pour les futurs travaux.

***CHAPITRE I :***  
***Description de***  
***fonctionnement***  
***des***  
***hélicoptères***

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

Ce chapitre traite des notions de base du principe de fonctionnement des hélicoptères.

Dans le domaine aéronautique, un appareil volant est un aéronef. Pour pouvoir voler, un aéronef doit être à la fois soutenu et maintenu en l'air, ce qui a priori nécessite la production d'une force de sustentation (destinée à compenser le poids de l'appareil) et d'une force de propulsion (pour permettre le déplacement dans l'air). C'est pour cette raison qu'un avion possède une aile ainsi qu'une installation motrice (un ou plusieurs moteurs).

Sur l'hélicoptère, le rotor est toujours entraîné dans son mouvement de rotation, ce qui permet la production en permanence de la force de sustentation aérodynamique destinée à compenser le poids de l'appareil. Dans ces conditions, l'hélicoptère peut se maintenir immobile en l'air, ce qui constitue une prouesse remarquable et fort souvent utilisée.

## I.1) Historique sur l'hélicoptère :

L'hélicoptère fut inventé comme on le connaît aujourd'hui par de nombreux hommes car beaucoup ont tenté sans réussir mais il est difficile de savoir qui a vraiment eu l'idée le premier. Une chose est sûre, au IV<sup>e</sup> siècle, l'idée naissait parmi les chinois, enfin, Léonard de Vinci en eut l'idée. Ce n'est qu'au XVIII<sup>e</sup> siècle qu'une avancée réelle se produit, le russe Lomonossov essaya un modèle à deux rotors coaxiaux contrarotatifs.

Depuis cet événement, l'hélicoptère ne cesse d'évoluer vers ce qu'il est aujourd'hui avec le premier vrai vol le 13 novembre 1907, piloté et inventé par Paul Cornu.

## I.2) Quelques définitions sur les hélicoptères :

Les hélicoptères sont un type d'aéronefs et s'appellent aussi des giravions. La structure proprement dite d'un hélicoptère est plus simple que celle d'un avion puisqu'elle ne comprend ni aile ni gouverne mobile. La voilure dite tournante comprend l'ensemble des pales et le moyeu.

L'hélicoptère se compose d'un fuselage constitué du poste de pilotage, d'un réservoir d'énergie, d'un moteur et d'un train d'atterrissage pour faciliter les manœuvres au sol (figure (I.1)).

Le fuselage est la partie de l'hélicoptère qui représente la masse la plus significative du système et l'énergie cinétique de rotation la plus faible. Un ou plusieurs rotors fournissent la force nécessaire à l'avancement. Pour un hélicoptère à deux rotors, le rotor

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

principal génère la force de sustentation et permet à l'hélicoptère de décoller et de se maintenir à une certaine hauteur. Le rotor de queue sert à produire le couple qui annule le couple de réaction généré lors de la rotation des pales du rotor principal et qui ferait faire des rotations du fuselage si le rotor de queue n'existait pas. La portance est produite par la rotation des pales du rotor principal. Pendant le vol, l'hélicoptère peut voler vers l'avant à partir d'une vitesse d'avance nulle, il peut aussi voler vers l'arrière.

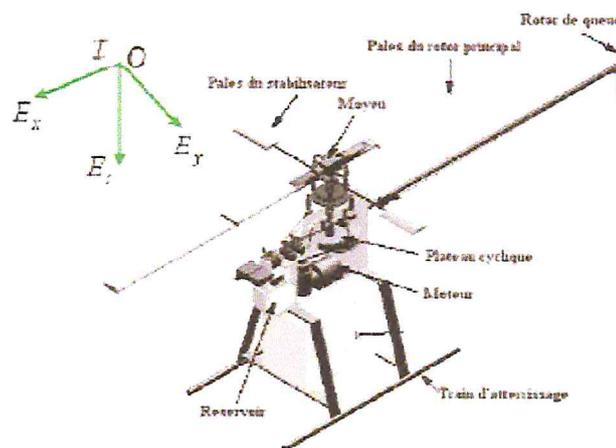


Figure (I.1) : Composantes d'un hélicoptère

## I.3) Modes de vol :

Dans la littérature, le fonctionnement aérodynamique et mécanique est analysé selon le type de vol que réalise l'hélicoptère. L'hélicoptère exécute en principe trois sortes de vols :

- vol stationnaire, l'appareil étant immobile par rapport à l'air.
- vol vertical (ascendant ou descendant).
- vol de translation (horizontalement ou incliné).

### I.3.1) Le Vol stationnaire (hover) :

Il est réalisé lorsque l'hélicoptère reste à une certaine hauteur par rapport au sol en ayant une vitesse de translation pratiquement nulle. Dans ce mode de vol, l'hélicoptère a la liberté de faire des rotations autour de l'axe  $E_z$ . Le vol stationnaire (figure 1.3) est obtenu lorsque la valeur de la force sustentatrice et la valeur de la force de pesanteur sont égales et opposées.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

## I.3.2) Le vol vertical :

Dans le vol vertical, la résultante vectorielle de deux forces, aérodynamique et la force totale de pesanteur sont deux forces ayant la même direction mais sont de sens opposés, le vol est ascendant ou descendant, suivant que l'effet aérodynamique est supérieur ou inférieur au poids de l'appareil, la figure 1.2 décrit un vol vertical ascendant.

## I.3.3) Le vol de translation :

Le vol de translation correspond à tout vol en avant, en arrière ou sur le coté. Pour la réalisation de ce déplacement, il faut incliner la résultante de la force aérodynamique de l'engin pour créer une force de traction horizontale, latérale ou les deux. On distingue les trois classements de vol de translation.

### I.3.3.1) Les translations verticales :

Elles sont définies quand l'hélicoptère se déplace dans deux directions simultanément, par exemple dans les plans  $E_x E_z$  ou  $E_y E_z$  ou bien lorsqu'il fait un vol vertical suivant l'axe  $E_z$ .

### I.3.3.2) Les translations horizontales :

Elles sont définies de façon similaire aux translations verticales mais cette fois-ci dans le plan  $xy$  ou dans les directions  $E_x$  ou  $E_y$ . Le vol dans la direction  $E_x$  de la (figure 2.4) est connu sous le nom de vol en palier (level flight).

### I.3.3.3) La translation spatiale :

Elle est développée dans l'espace  $E_x E_y E_z$  suivant les trois directions de déplacement en translation.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

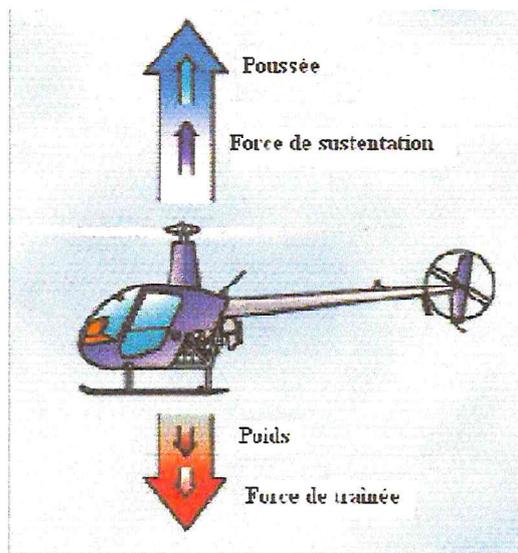


Figure (I.2): Vol vertical ascendant [1]

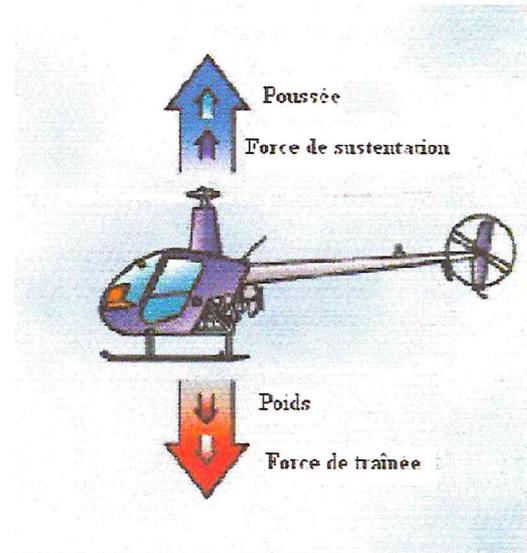


Figure (I.3): Vol stationnaire [1]

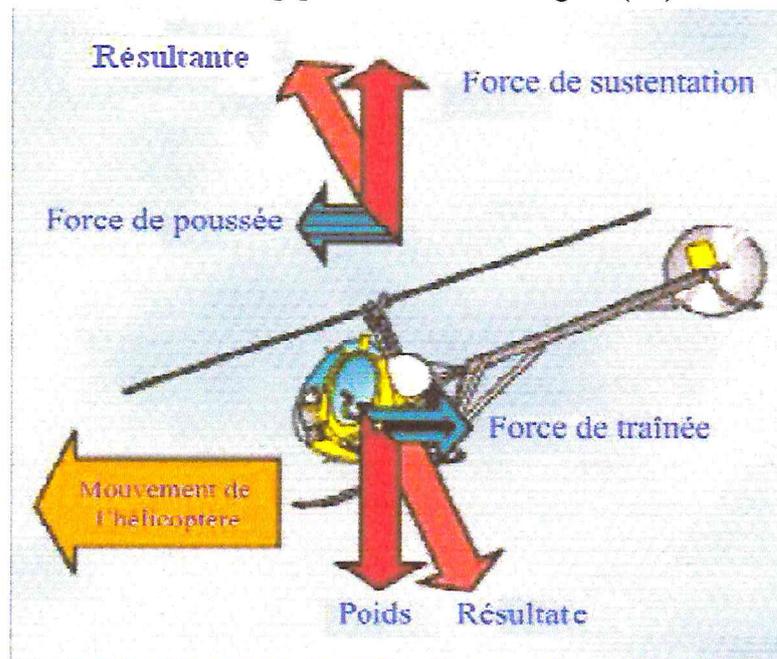


Figure (I.4): Vol de translation[1]

## I.4) Différentes configurations des rotors d'un hélicoptère :

Ce type d'aéronef possède des configurations diverses de rotors :

1. Configuration à rotor principal avec ou sans rotor de queue. Par la suite, nous appellerons hélicoptère standard ou simplement hélicoptère, la configuration correspondant à un rotor principal et un rotor de queue.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

2. Configurations à deux rotors principaux. On peut distinguer les cinq solutions suivantes :

- (a) Configuration à deux rotors principaux en tandem (bi-rotor en tandem).
- (b) Configuration à deux rotors principaux coaxiaux contrarotatifs (bi-rotor coaxial).
- (c) Configuration à deux rotors principaux côte à côte.
- (d) Configuration à deux rotors principaux pivotants.
- (e) Configuration à deux rotors principaux dit convertible.

3. Un hélicoptère à trois rotors.

4. Un hélicoptère à quatre rotors.

## I.4.1) Hélicoptère standard :

Dans un hélicoptère standard (Figure 1.5) qui a un seul rotor principal, ce rotor produit la poussée verticale (la force de sustentation). Si on incline le vecteur de la portance, l'hélicoptère peut accélérer dans les deux directions, longitudinalement et latéralement.



Figure (I.5): Hélicoptère standard

Le mouvement de rotation de l'axe du rotor principal produit un mouvement naturel en lacet. Il est compensé par le rotor de queue qui sert d'anti-couple. Ainsi, le rotor de queue gouverne la commande en lacet de l'hélicoptère. Cette méthode la plus commune

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

pour la commande de lacet a été employée la première fois par Igor Sikorsky en 1941 dans l'Ah-64 Apache.

Pour maximiser le couple du rotor de queue, le rotor de queue est habituellement monté sur une perche allongée. Aux Etats-Unis et en Grande-Bretagne, le rotor principal tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. En France, ce rotor tourne dans le sens des aiguilles d'une montre.

## – L'hélicoptère de type NOTAR :

La stratégie la plus récente de commande en lacet développée pour les hélicoptères est la conception du rotor de queue de NOTAR (NO Tail Rotor)(figure 1.6). Le rotor de queue est à l'origine d'une grande partie du bruit et des vibrations qui affectent un hélicoptère en vol. Le système NOTAR, conçu par McDonnell Douglas au début des années 80, permet de réduire ces nuisances et ces problèmes techniques, en faisant appel à une solution ingénieuse qui envoie de l'air pulsé par une soufflante alimentée par le rotor principal et logée dans la racine de la poutre de queue de l'hélicoptère.

Beaucoup moins bruyant, les hélicoptères NOTAR sont également plus sûrs, les risques de pannes du rotor arrière, causes de tant d'accidents, étant éliminés.



Figure (I.6): Hélicoptère de type NOTAR

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

## I.4.2) Hélicoptère à deux rotors principaux :

### I.4.2.1) Hélicoptère bi-rotor en tandem

Cette configuration (figure I.7) remplace le rotor de queue par un autre rotor placé aussi à l'extrémité du fuselage. Ces rotors tournent en sens opposé. Le résultat aérodynamique provoque une perte de puissance. Mais cette quantité perdue (8-10%) est la même que celle perdue dans le cas d'un hélicoptère à un seul rotor principal. Un exemple de réalisation est le Ka-50. Le couple de lacet de chaque rotor est donc compensé et l'interaction des deux rotors nous offre, pour cet appareil, une capacité de charge supérieure. La commande de lacet est réalisée en augmentant l'angle de tangage d'une pale sur un rotor tout en diminuant l'angle de tangage de l'autre. Puisque ces hélicoptères ont deux rotors qui sont habituellement égaux en taille, la solution simple au problème de commande de lacet est de tourner les rotors dans des sens opposés. La commande de lacet est réalisée en inclinant les rotors dans des directions opposées (à gauche et à droite dans le cas du CH-46).



Figure (I.7): Hélicoptère bi-rotor en tandem

### I.4.2.2) Hélicoptère bi-rotor coaxial :

Afin d'éviter l'utilisation du rotor de queue et afin de construire un grand hélicoptère pour soulever de lourdes charges, on comprend qu'il faut utiliser deux rotors contrarotatifs (figure 1.8), ils sont placés l'un au-dessus de l'autre et sur le même axe de rotation.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères



Figure (I.8): Hélicoptère bi-rotor coaxial

Nous remarquons que la taille du fuselage peut être inférieure à celle des autres types d'hélicoptères.



Figure (I.9): Hélicoptère bi-rotor côte à côte

### I.4.2.3) Hélicoptère bi-rotor côte à côte :

Cette configuration se retrouve surtout sur les hélicoptères Kaman. Comme pour les hélicoptères à rotors en tandem et coaxiaux, chaque rotor tourne dans un sens différent (figure 1.9). Les rotors, dont les plans de rotation sont inclinés, sont synchronisés par une boîte de transmission commune. Ainsi, à aucun moment les pales ne risquent de se percuter. Pour le déplacement latéral et la translation (avant/ arrière), chaque rotor assure la même fonction (inclinaison dans le sens désiré), on applique sur les deux rotors la même commande de pas collectif et de pas cyclique. Par contre, pour le contrôle en lacet, un rotor est incliné vers l'avant et l'autre vers l'arrière ce qui provoque la rotation du fuselage. On applique une commande antisymétrique sur l'angle de battement longitudinal de chaque rotor. Lorsque le rotor gauche (sens de la marche) est incliné vers l'avant et que le rotor droit est incliné vers l'arrière, la machine effectue une rotation sur elle-même sur la droite. Les dérives situées à l'arrière de la machine participent aussi au contrôle de l'axe de lacet.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

La poussée totale résultante est effectivement la somme des poussées de chaque rotor : l'efficacité est meilleure que celle d'un double rotor contrarotatif "empilé", et l'encombrement est moins grand que pour un double rotor en tandem. Ce type de véhicule est très propice au transport de charges lourdes.

L'inconvénient majeur reste la complexité de la boîte de transmission des deux rotors.

## I.4.2.4) Hélicoptère à deux rotors pivotants :

Il présente une nouvelle configuration pour un petit hélicoptère baptisé BIROTAN (BI-Rotor Orientable en TANdem)(Figure 1.10). Cet hélicoptère comporte deux hélices contrarotatives à pas fixe. Les rotors peuvent pivoter dans deux directions différentes pour générer les couples de tangage et de lacet. Le couple de roulis est obtenu par la différence de vitesses de rotation des deux rotors. Contrairement aux hélicoptères classiques, cette configuration ne nécessite pas de plateaux cycliques ou d'anti-couple.

Elle est donc beaucoup moins compliquée mécaniquement.

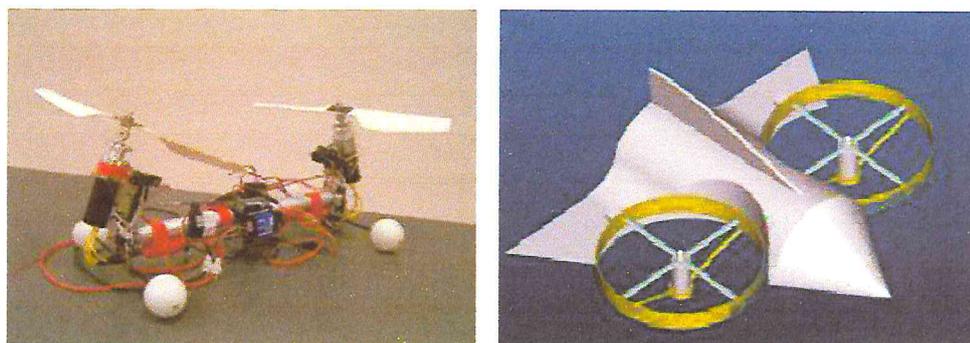


Figure (I.10): Hélicoptère à deux rotors pivotants[2]

## 1.4.2.5) Les convertibles :

Devant la limitation de la vitesse de croisière des hélicoptères, des études ont été réalisées pour le développement de véhicules qui se comporteraient comme des hélicoptères en vol stationnaire, et comme des avions en vol d'avancement. Cette famille de véhicule est appelée convertible (figure 1.11). Le gros avantage des convertibles réside dans leur polyvalence. Leur comportement de type avion leur permet de se déplacer très vite en consommant peu d'énergie, tout en assurant les missions variées (observation, soutien, évacuation) de type hélicoptère. En pratique, la conception de tels engins est mécaniquement complexe, et d'une fragilité consternante. L'enveloppe de vol très étendue rend les solutions technologiques de ces types de véhicule sous optimales, tant du point de

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

vue du comportement avion que du comportement hélicoptère. Par exemple pour les convertibles à élément basculant (tilt-body), le principe est de faire basculer l'hélice d'une position verticale en vol stationnaire à une position horizontale en vol d'avancement. En vol stationnaire, l'hélice assure la sustentation. L'appareil est muni de voilures fixes qui assurent la sustentation du véhicule en vol d'avancement pendant que l'hélice joue un rôle propulsif. Dans cette configuration, le véhicule est équipé de deux rotors libres tournant en sens contraires, situés à l'extrémité d'une voilure fixe. Chaque groupe moteur plus rotor est articulé autour du plan fixe. L'inclinaison de chaque rotor est indépendante, bien qu'une liaison mécanique permette une articulation commune si l'un des moteurs commandant le basculement tombe en panne. Un basculement symétrique provoque le départ en translation du véhicule. Lors du vol stationnaire, un basculement antisymétrique permet de contrôler le lacet, et la différence de vitesse de rotation des deux hélices crée un couple de roulis. Lors du vol d'avancement, le lacet est géré par les dérives situées à l'arrière du véhicule, et le plan fixe est muni d'ailerons qui commandent la mise en virage, comme pour un avion traditionnel. La position des rotors en extrémité de voilure permet d'accroître la taille des hélices et d'augmenter la sustentation en conséquence. Cependant, l'exposition des pales rend ce véhicule peu manœuvrable en milieu urbain. L'articulation indépendante des rotors augmente les coûts de maintenance du véhicule. La caractérisation des effets aérodynamiques en phase de transition reste largement méconnue, et le pilotage de ces engins est délicat.



Figure (I.11): Le convertible V22 Osprey

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

## I.4.3) Configuration à trois rotors :

Dans cette catégorie, nous trouvons le tri rotor (figure 1.12), le vectron et l'hélicoptère auto-stable. Le trirotor est constitué de 2 rotors à l'avant qui tournent dans des sens opposés et un rotor à l'arrière avec orientation réglable. Le fonctionnement est similaire à celui d'un quadrirotor mais la performance en vol n'est pas aussi satisfaisante. Le Vectron est constitué de 3 rotors qui tournent dans le même sens. Le corps circulaire de l'appareil tourne par conséquent dans le sens contraire. Les vitesses des moteurs sont modifiées à des instants très précis de manière à obtenir des couples de tangage et de roulis.



Figure (I.12): Hélicoptère à trois rotors

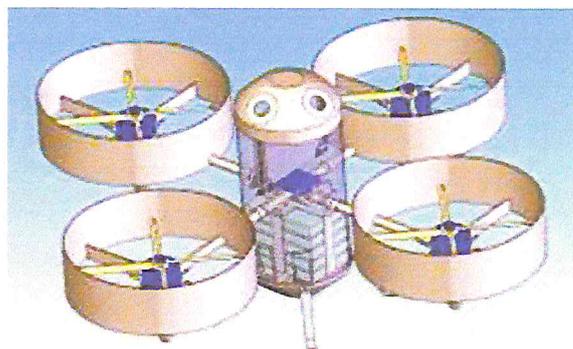


Figure (I.13): Hélicoptère à quatre rotors

## I.4.4) Configuration à quatre rotors :

Cette configuration, qui n'existe qu'en modèle réduit, est destinée principalement à des missions de vol dans des environnements intérieurs. Le sens de rotation des deux rotors situés sur l'axe  $E_x$  de l'engin est différent du sens de rotation des deux autres situés sur l'axe  $E_y$  (figure 1.13). La montée et la descente sont assurées par les quatre rotors à la fois. En effet, chaque rotor en développant sa propre poussée, contribue à la génération d'une force totale de sustentation qui assure à la fois la montée et la descente de l'engin. La différence de poussée entre les rotors arrière et avant produit un couple de roulis qui contrôle le mouvement de translation (avant/arrière). Le déplacement gauche/droite, quant à lui, est assuré par la différence de poussée entre les rotors situés sur la gauche et sur la droite. Enfin, pour le contrôle en lacet de l'appareil, c'est la somme des anti-couples produits par les quatre rotors qui définit le sens de rotation.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

## I.5) Description du rotor principal et du rotor de queue :

### I.5.1) Types de rotor principal :

Un rotor est un ensemble de pièces mécaniques complexes. Il existe plusieurs types de rotors, les plus connus sont le rotor rigide et le rotor articulé. On distingue trois grandes familles de rotor :

- Rigide : quand le battement, la traînée et la variation du pas des pales sont réalisés par torsion grâce à l'emploi de matériaux composites souples, on utilise des charnières à la racine des pales qui permettent un mouvement libre dans la direction normale sur les pales. A la charnière d'une pale, on remarque que le moment de flexion est nul, où il n'existe pas de moment transmis à partir de la racine de la pale vers le fuselage d'un hélicoptère. Ce sont les plus chers à fabriquer, car ils exigent l'emploi de matériaux composites et de titane.
- Articulé : lorsque les articulations de battement, de traînée et de pas sont constituées par des axes mécaniques, cette conception élimine les charnières. Les rotors articulés ont un coût de fabrication et d'entretien plus élevé que les rotors semi-rigides.
- Semi-rigide : Les rotors semi-rigides constituent une solution intermédiaire entre le rotor articulé et le rotor rigide. Moins chers à fabriquer que les rotors rigides, ils sont d'un entretien relativement peu onéreux. C'est la solution retenue pour la conception des rotors modernes.

Un rotor est constitué des pales, du mât, du moyeu et du plateau cyclique.

### I.5.2) Les pales :

Un rotor est composé d'au moins deux pales flexibles. La forme du profil d'une pale (figure 1.14) joue un rôle très important parce qu'elle détermine les qualités aérodynamiques de la pale. Les différentes parties d'un profil sont : le bord d'attaque, le bord de fuite, et la corde qui joint le bord d'attaque et le bord de fuite[3].

La corde d'un profil est une droite de référence servant à la définition de la forme de ce profil, c'est en général la droite joignant les extrémités de la ligne moyenne. Pour des raisons de facilité de construction, le profil d'une pale revêt souvent une allure symétrique, et dans ce cas l'angle que fait la corde de portance nulle avec la corde proprement dite est toujours faible. Il convient toutefois de noter que la corde de portance nulle peut varier en

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

direction lorsque des "tabs" se trouvent ajoutés à une pale. Il arrive enfin souvent que, à des fins de simplification, la corde proprement dite soit confondue avec la corde de portance nulle, et désigne tout simplement la droite reliant le bord d'attaque au bord de fuite.

L'angle de pas  $j$  représente l'angle que fait la corde avec un plan de référence fixe et perpendiculaire à l'axe de rotation du rotor. La face supérieure de la pale s'appelle extrados et la face inférieure s'appelle intrados, elles sont soumises à des forces de dépression et de pression respectivement lorsque le profil est placé dans le vent relatif. Ce dernier est créé par la différence entre la vitesse de la pale et le vent. L'angle d'incidence dénote l'angle  $i_e$  entre la corde et la direction du vent relatif. Finalement, le centre de poussée est le point où est appliquée la force aérodynamique résultante  $F_N$ , donnée par l'addition de toutes les forces appliquées à l'intrados. Nous pouvons décomposer cette force résultante en deux forces, la portance qui est perpendiculaire au vent relatif et la traînée qui est parallèle au vent relatif.

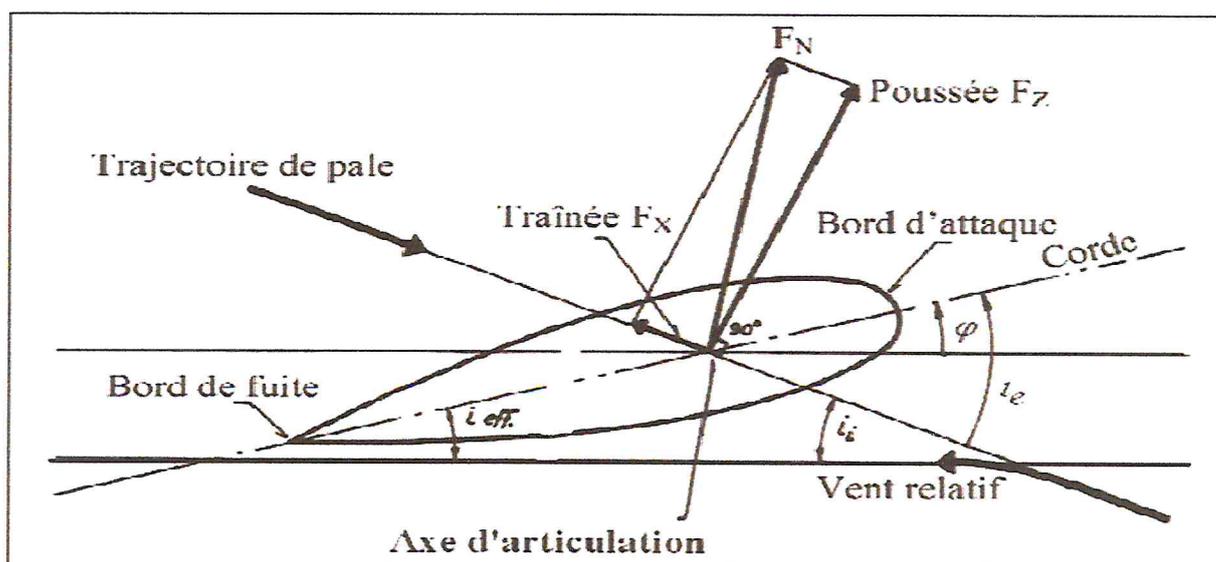


Figure (I.14): Profil d'une pale d'hélicoptère

Les pales d'un même rotor sont en principe fixées sur un moyeu par l'intermédiaire de fusées, et le moyeu est relié directement à l'arbre (ou mat) du rotor. Chaque pale peut tourner autour d'un axe longitudinal, généralement situé à 25% de la corde à partir du bord d'attaque, ce mouvement correspond mécaniquement à une variation de l'angle de pas  $j$ , c'est-à-dire de l'angle de calage du profil à une section donnée de la

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

pale,  $j$  représente en général l'angle que fait la corde de portance nulle avec un plan de référence en principe perpendiculaire à l'axe de rotation. Toute variation de l'angle de pas se traduit aérodynamiquement par une variation de l'angle d'incidence  $i_e$  du profil de pale, c'est-à-dire de l'angle que fait sa corde de portance nulle avec la direction du vent relatif, généralement appelée flux local.

Au voisinage immédiat du profil, l'écoulement aérodynamique est modifié, et il apparaît une déviation du flux d'air matérialisée par angle induit  $i_i$ , de sorte que, au droit du profil, l'angle d'incidence est en réalité défini par un angle d'incidence effectif  $i_{eff}$ , tel que :

$$i_{eff} = i_e - i_i \quad (I.1)$$

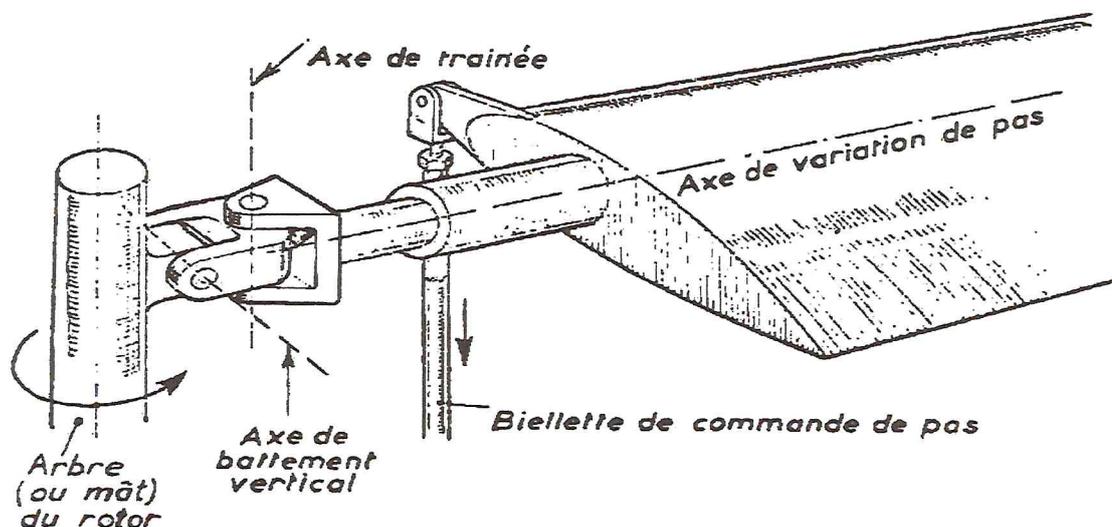


Figure (I.15): Les trois articulations d'une pale[4].

Chaque élément de pale supporte une force aérodynamique élémentaire (poussée et traînée), la résultante de ces forces élémentaires correspond, pour une pale complète, à une force aérodynamique appliquée au centre de poussée, lequel est situé sur l'axe longitudinal de la pale, au deuxième tiers à partir de l'emplanture, sauf dans certains cas particuliers[4].

En tournant autour de leur axe vertical de rotation, les pales décrivent sur un plan perpendiculaire un cercle communément appelé "disque balayé" ou disque rotor. Par ailleurs, on définit :

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

- Le plan de rotation : qui est un plan perpendiculaire à l'axe virtuel de rotation.
- Le plan d'entraînement : qui est un plan perpendiculaire au mât rotor.

Le fonctionnement aérodynamique du rotor est relativement complexe et nécessite une étude mathématique poussée. Une pale de rotor articulé comprend essentiellement les trois articulations représentées sur les figures 1.15 et plus visible sur la figure 1.16 :

1. Une articulation de battement vertical, permettant un mouvement dans un plan vertical, au moyen d'une charnière à axe horizontal communément appelée charnière de battement, le mouvement correspondant est appelé battement vertical.

**Remarque[5]:** le battement vertical (flapping) est un phénomène aérodynamique qui se présente lors du vol en palier. Il s'agit d'un battement cyclique des pales du rotor principal (figure I.17).

Le mouvement occasionné par la différence de vitesses relatives de l'air sur les profils des pales avançant et reculant produit le battement longitudinal. Le mouvement produit par l'augmentation de l'angle d'attaque des pales en  $\gamma = -\pi$  et par sa diminution en  $\gamma = 0$  est appelé battement latéral (figure I.18). On peut exprimer l'équation de battement vertical.

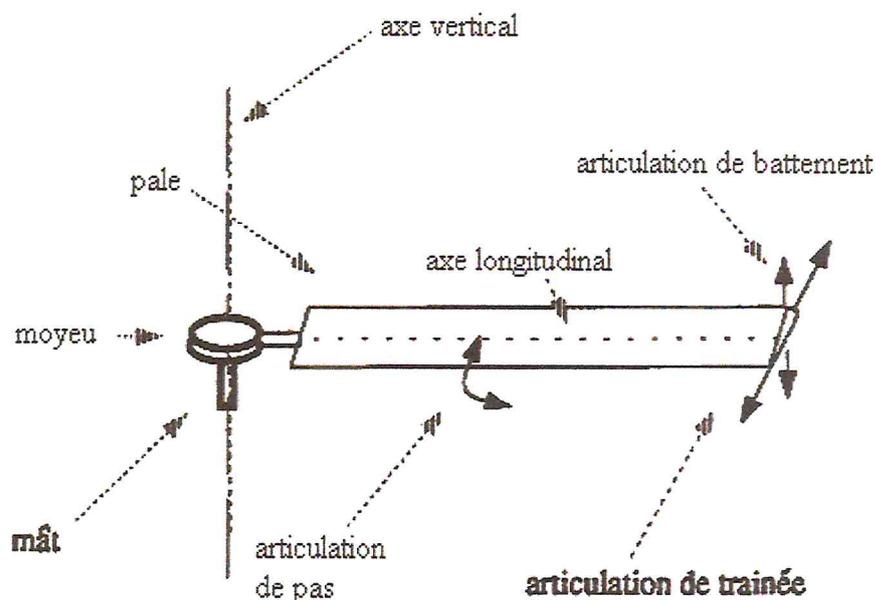


Figure (I.16): Les articulations du rotor[4]

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

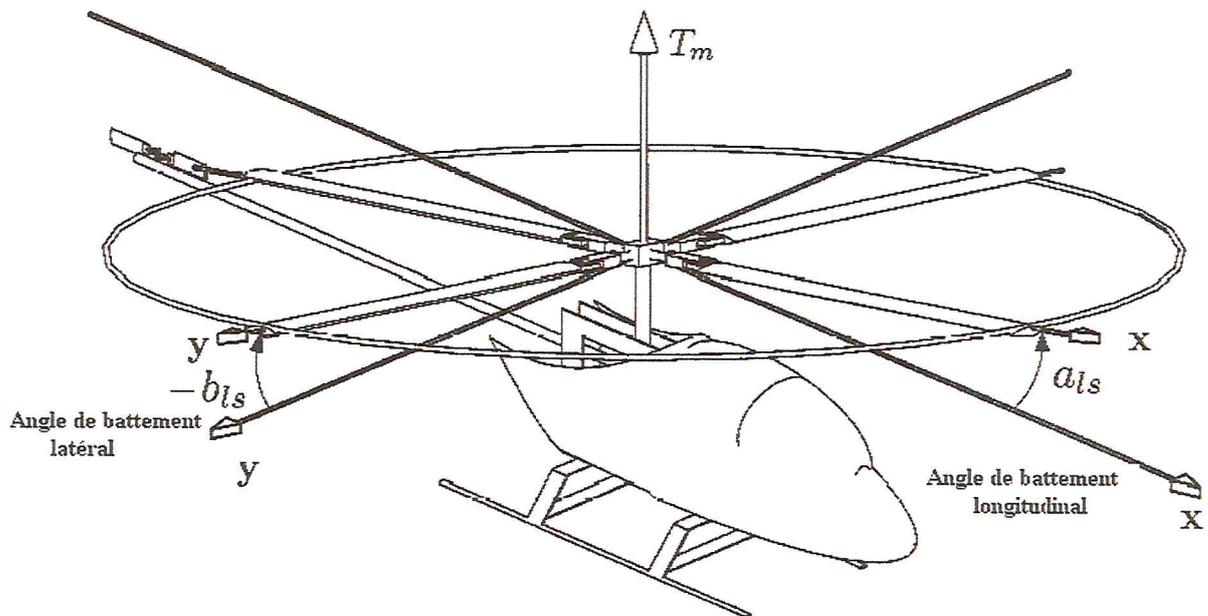


Figure (I.17): Les angles de battement vertical longitudinal et latéral

battement vertical [5][6]:

$$\beta(\gamma) = \alpha_0 - \alpha_{ls} \cos(\gamma) - b_{ls} \sin(\gamma) \quad (I.2)$$

Où  $\alpha_0$  est l'angle de conicité,  $\alpha_{ls}$  et  $b_{ls}$  sont les angles longitudinal et latéral de battement vertical, respectivement. Il est évident que les mouvements de battement vertical (Flapping) et celui de pas cyclique (Feathering) sont des mouvements équivalents dans le sens qu'une variation d'un degré en  $\beta$  produit les mêmes effets aérodynamiques qu'une variation d'un degré en  $\varphi$  (l'angle de pas des pales du rotor principal).

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

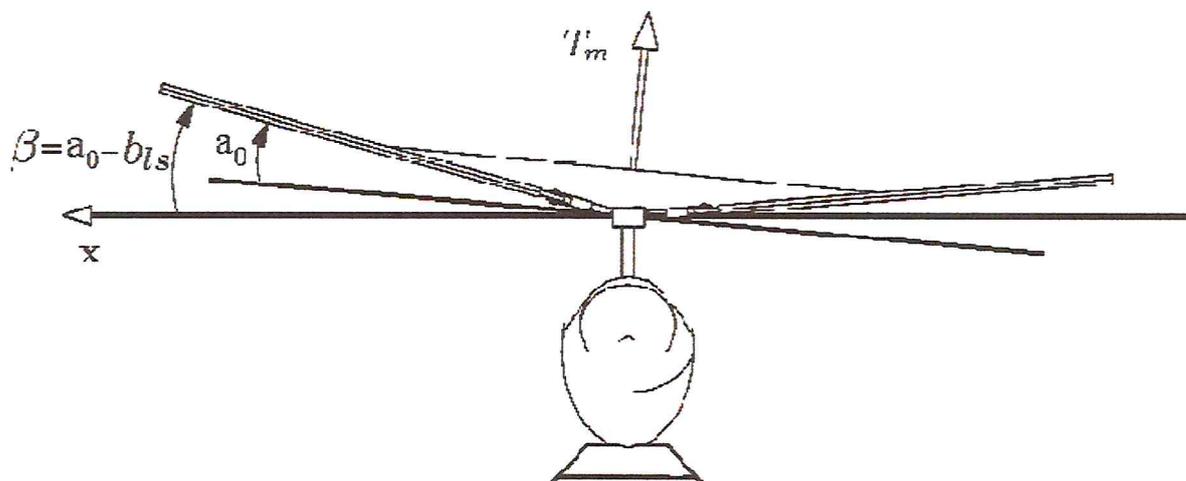


Figure (I.18): L'angle de conicité  $a_0$  et de battement vertical latéral.

2. Une articulation de battement horizontal, permettant un mouvement dans un plan horizontal, au moyen d'une charnière à axe vertical communément appelée charnière de traînée, le mouvement correspondant est un battement de traînée.
3. Une articulation de pas, permettant de faire varier le pas d'une pale tout entière, au moyen d'une charnière longitudinale parallèle à l'envergure de la pale.

### I.5.3) Mât :

Le mât sur lequel sont fixés un moyeu et des pales reçoit la puissance motrice, généralement transmise par l'intermédiaire d'un réducteur.

### I.5.4) Moyeu :

La seule fonction du moyeu est d'assurer la liaison entre le mât et les pales.

### I.5.5) Plateau cyclique :

Le plateau cyclique (figure 1.19) produit l'inclinaison des pales et l'inclinaison du plan de rotation. Il est l'élément essentiel pour la variation du pas cyclique, c'est-à-dire, le mouvement des bielles du système mécanique pour incliner le plan de rotation. Lorsque le pilote décide d'augmenter ou de diminuer la force de portance. Un changement dans la hauteur du plateau cyclique qui représente une autre entrée de commande sert à modifier l'angle de pas des pales du rotor principal de façon collective et donc à faire varier l'amplitude de la force de sustentation. L'équation suivante représente la commande de pas cyclique[5] :

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

$$\varphi(r_e, \gamma, u_1, u_3, u_4) = \varphi_0 + \frac{r_e}{R_M} \varphi - A_1 \cos \gamma - B_1 \sin \gamma \quad (I.3)$$

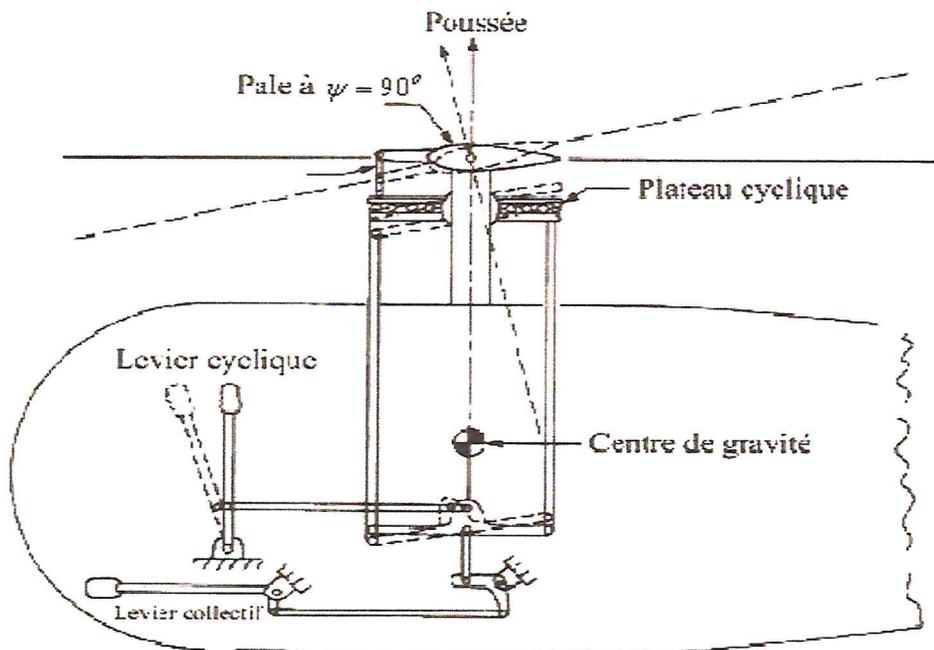


Figure (I.19): Le plateau cyclique

$A_1$  et  $B_1$  sont les angles de pas cyclique latéral et longitudinal respectivement, ils sont définis par rapport au plan perpendiculaire à l'arbre moteur et représentent respectivement les entrées de commande  $u_4$  et  $u_3$ .  $\varphi_0$  est l'angle moyen de pas par rapport au centre de rotation, et  $u_1$  est l'entrée de commande représentant le levier collectif du rotor principal.  $r_e$  est la distance du centre du rotor à chaque élément différentiel de la pale,  $R_M$  est le rayon du rotor principal[5].

## I.5.6) Rotor de queue :

En ce qui concerne le rotor de queue, il est composé du même mécanisme que le rotor principal sauf qu'il ne contient pas l'ensemble des articulations qui aident à la commande du pas cyclique. Ce rotor est aussi entraîné par le moteur qui fait tourner le rotor principal.

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères



Figure (I.20): Le stabilisateur à inertie

## I.6) Les principales commandes :

Dans un hélicoptère standard, il y a 4 commandes de vol. Chaque action sur une commande génère une réaction qu'il faut éventuellement corriger avec une ou deux des commandes restantes (figure 1.21). Le pilote possède trois systèmes principaux de commandes, le levier cyclique 5 (manche), le collectif 1, et les pédales de palonnier 6.

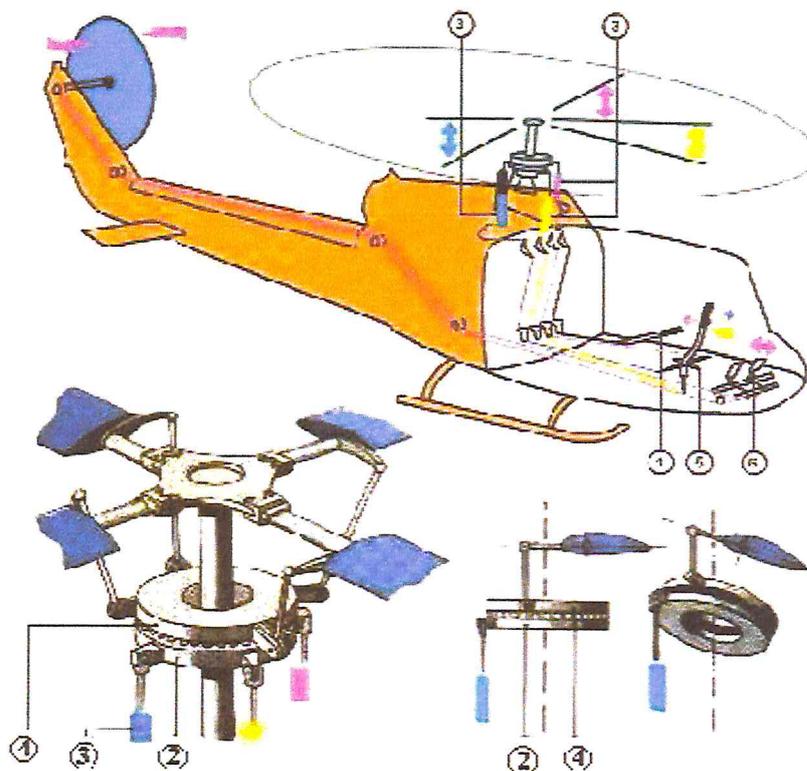


Figure (I.21): Les principales commandes

# Chapitre 1 : Description de fonctionnement des hélicoptères

---

- Le collectif : Il permet de faire monter ou descendre l'hélicoptère. Cette commande agit sur toutes les pales du rotor en même temps. Cette action produit une force de sustentation variable (une première entrée de commande  $u_1$ ).
- L'anti-couple : Deux pédales commandées par les pieds du pilote agissent sur le rotor anti-couple située à l'arrière de l'hélicoptère. Principalement, elles permettent d'adapter la force (puissance) nécessaire pour annuler la rotation du fuselage autour de l'axe du rotor principal. Cette action produit un couple (une deuxième entrée de commande  $u_2$ ) pour contrôler le mouvement du lacet de l'appareil.
- Le manche cyclique : Il produit deux types d'action (avant/arrière et gauche/droite). En effet, une action sur le manche cyclique provoque une inclinaison du rotor, par rapport à son plan de rotation initial et donc une modification de l'assiette (inclinaison) de la machine. Cette action produit deux couples qui commandent les mouvements de tangage et de roulis (deux entrées de commande  $u_3$  et  $u_4$ ). Normalement le manche contrôle l'angle du rotor principal en inclinant la tête du rotor sur lequel sont fixées les pales à l'aide de biellettes de pas 3, dans la direction du déplacement désiré par l'intermédiaire du plateau cyclique fixe 2 et tournant 4 .

Nous avons traité dans ce chapitre les notions de base du principe de fonctionnement des hélicoptères. Quelques définitions sur les hélicoptères et leurs différentes composantes ont été présentées. Et nous présentons aussi les différentes configurations du rotor d'hélicoptère et une description détaillée du rotor principal et du rotor de queue où il existe plusieurs types de rotors.

***CHAPITRE II :***  
***Modélisation des***  
***hélicoptères***

Cette partie traite la modélisation et l'analyse de la dynamique de l'hélicoptère. Dont elle est basée actuellement sur la mécanique de vol. En effet le développement d'une modélisation mathématique traduisant le comportement de l'hélicoptère. C'est une phase préliminaire indispensable, tout comme l'établissement de lois de commande pour aider à l'analyse et à la conception des hélicoptères. Ce sont des objectifs importants afin d'assurer une meilleure sécurité aux phases critiques de décollage et atterrissage ainsi que d'améliorer le confort des passagers.

### II-1) Repères et systèmes d'axes :

Les repères inertiels et liés au corps présentés dans ce paragraphe sont couramment utilisés en mécanique du vol.

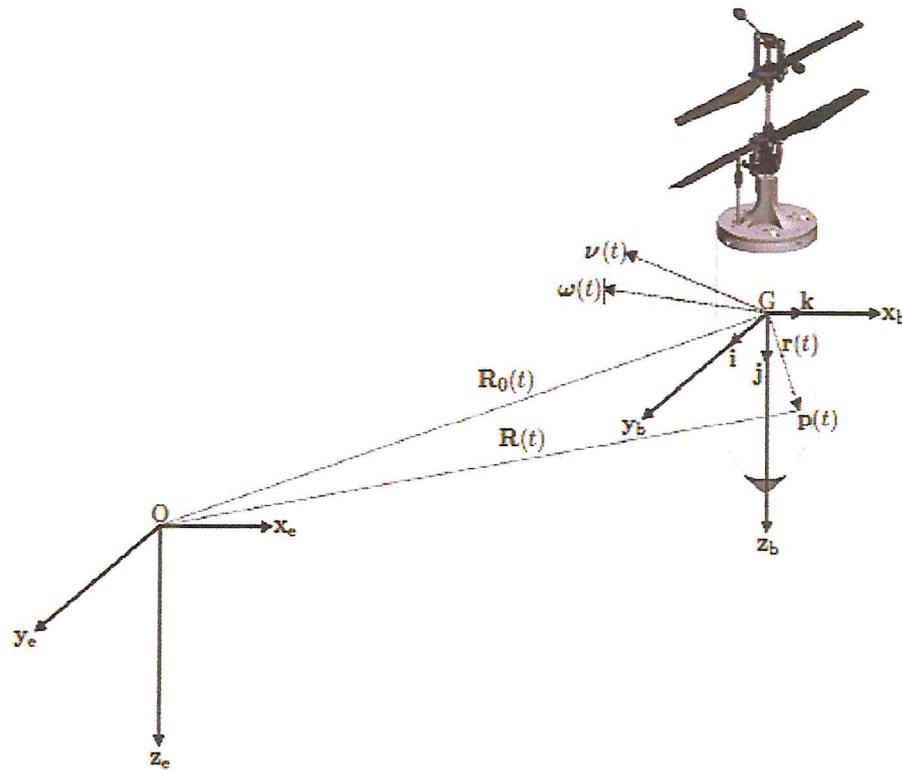


Figure (II.1) : Repères et systèmes d'axes de la mécanique du vol avion.

- *I* est un repère inertiel. Il s'agit d'un repère orthonormé lié à un point O à la surface de la Terre appelé l'origine. Au repère *I* est associé la base  $\{x_e, y_e, z_e\}$  où par convention,  $\{x_e\}$  pointe vers le Nord,  $\{y_e\}$  pointe vers l'Est et  $\{z_e\}$  pointe vers le centre de la Terre ; là où la première loi de Newton s'applique

*pour l'atterrissage*

- $B$  est un repère mobile lié au corps, dont l'origine  $G$  est confondue avec le centre de gravité de l'engin. Au repère  $B$  est associé la base  $\{x_b, y_b, z_b\}$  ou par convention  $\{x_b\}$  est l'axe de roulis,  $\{y_b\}$  est l'axe de tangage et  $\{z_b\}$  l'axe de lacet du véhicule, tels qu'ils apparaissent sur la figure (II.1).

Les repères suivants nécessaires dans la construction des modèles aérodynamiques :

- $B_r$  est un repère dont l'origine  $O_2$  est lié au centre de rotation du rotor inférieur.  $B_r$  est un repère non tournant dont l'orientation de sa base  $\{x_r, y_r, z_r\}$  est similaire à celle de  $B$
- ${}^n A_{aero}$  est un repère aérodynamique lié à l'ailette numéro  $n$  dans le cas du modèle avec quatre ailettes. Son origine  $A_n$  est au centre de l'ailette  $n$ . Dans  ${}^n A_{aero}$  est exprimé le vecteur vitesse total de l'air autour de l'engin avec pour base  $\{{}^n x_{aero}, {}^n y_{aero}, {}^n z_{aero}\}$  ;
- ${}^n A_{ail}$  est un repère de base  $\{{}^n x_{ail}, {}^n y_{ail}, {}^n z_{ail}\}$  dont l'origine  $A_n$  est confondue avec  ${}^n A_{aero}$ . Cependant, ce repère tourne avec l'ailette considérée suivant l'axe  $\{{}^n y_{ail}\}$  contrairement au cas du repère  ${}^n A_{aero}$ .

### II.1.1) Paramètres cinématiques, cinétiques et d'efforts :

Dans cette section sont présentés les paramètres utilisés pour la description du modèle. Il s'agit des paramètres nécessaires à l'étude des mouvements du l'hélicoptère.

#### II.1.1.1) Paramètres cinématiques:

Les paramètres cinématiques constituent l'état du système. L'état comprend quatre vecteurs de 3 éléments chacun définissant la position et la vitesse du centre de gravité (CG) ainsi que l'orientation et la vitesse angulaire de l'engin. Le CG est le centre instantané de rotation. Les paramètres sont donc définis comme suit :

- $\mathbf{p}(t) = [x \ y \ z]^T$  est la position du CG par rapport à  $I$  et exprimé dans  $I$ ;
- $\boldsymbol{\eta}(t) = [\varphi \ \theta \ \psi]^T$  est le vecteur des angles d'Euler représentant la position

angulaire du repère mobile  $B$  par rapport à  $I$  et exprimé dans  $I$ ;

- $v(t) = [u \ v \ w]^T$  est le vecteur de la vitesse linéaire du CG par rapport à  $I$  et exprimé dans  $B$ ;
- $\omega(t) = [p \ q \ r]^T$  est le vecteur de rotation instantané entre  $I$  et  $B$  et exprimé dans  $B$ .

### II.1.1.2) Paramètres cinétiques:

Trois paramètres cinétiques caractérisent l'hélico, à savoir : sa masse, la position de son centre de gravité encore appelé centrage et sa matrice d'inertie. Ces paramètres restent toujours constants dans notre cas. Ainsi nous définissons :

- la masse du véhicule  $m$ ;
- le centre de gravité (CG) de l'engin noté  $G$  qui est le point d'application des résultantes de force et de moment;
- la matrice d'inertie exprimée au point  $G$  dans  $B$  quantifie la résistance du véhicule à sa mise en rotation et a pour expression :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Où les éléments diagonaux de  $I$  sont les moments d'inertie et les autres éléments sont les produits d'inertie, qui quantifient une asymétrie géométrique ou massique de l'engin.

Usuellement, la matrice d'inertie est approximée par la matrice diagonale de  $I$  avec

$$\tilde{I} \cong L$$

D'après les propriétés de symétrie de l'engin, ce qui simplifie également l'expression de la dynamique de rotation dans ce modèle, c'est à dire :

$$\tilde{I} = \text{diag}(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}) \quad (\text{II.2})$$

En supposant que l'engin est mécaniquement bien équilibré, ce qui engendre l'annulation des éléments non diagonaux de  $I$ , De plus, pour la même raison d'axisymétrie il vient que :

$$I_{xx} \cong I_{yy} \tag{II.3}$$

**II.1.1.3) Paramètres d'efforts:**

Les paramètres d'efforts sont simplement les trois forces et les trois moments qui interviennent dans les dynamiques de translation et de rotation du véhicule. Le développement de ces efforts constituera le modèle aérodynamique. Nous notons alors :

- $F_f = [X Y Z]^T$  les trois composantes du vecteur de force exprimées dans  $B$ ;
- $F_m = [L M N]^T$  les trois composantes du vecteur de moment exprimées dans  $B$ ;

Et :  $F = [X \ Y \ Z \ L \ M \ N]^T \tag{II.4}$

**II.1.2) Dynamique de translation:**

Il s'agit ici de déterminer la relation liant les forces  $X, Y, Z$  à l'accélération du CG. Pour cela, on exprime d'abord le vecteur vitesse de translation du centre de gravité dans le repère du corps, dérivé dans  $I$  et exprimé dans  $B$ . Ainsi, en se référant à la figure (2.5) et en notant  $R_0(t)$  le vecteur entre les points O et G, il vient :

$$\left. \frac{dR_0(t)}{dt} \right|_Z = u.i + v.j + w.k \tag{II.5}$$

Si P est un point rigidement lié au corps V, sa vitesse  $v_p(t) = [u_p \ v_p \ w_p]^T$  s'exprime comme suit :

$$V_p(t) = \left. \frac{dR(t)}{dt} \right|_Z = \left. \frac{dR_0(t)}{dt} \right|_Z + \left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_Z \tag{II.6}$$

Avec :  $\left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_Z = \left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_B + \omega(t) \wedge r(t) \tag{II.7}$

Ou  $\left. \frac{dr(t)}{dt} \right|_B = 0$  car  $r(t)$  ne varie pas au cours du temps dans le repère du corps. Ainsi, la vitesse du véhicule  $v_p(t)$  exprimé dans le repère  $B$  a pour expression :

$$V_p(t) = v(t) + \tilde{\omega}(t) r(t) \tag{II.8}$$

Où  $\tilde{\omega}(t)$  est la matrice antisymétrique associée au vecteur  $\omega(t)$ , telle que :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{II.9}$$

Par analogie avec l'équation (2.8), l'accélération du centre de gravité du véhicule par rapport à  $I$  et exprimée dans  $B$ , notée  $a_{CG}$  s'écrit alors :

$$a_{CG} = \dot{v}(t) + \tilde{\omega}(t)r(t) + a_c \quad (II.10)$$

Finalement, connaissant la seconde loi de Newton  $\sum F = m a_{CG}$ , la relation liant les forces à l'accélération du centre de gravité  $a_{CG}$  est :

$$m \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (II.11)$$

### II.1.3) Dynamique de rotation :

L'égalité du moment dynamique avec le moment des forces exprimée dans  $B$  s'écrit :

$$\left. \frac{d(I\omega)}{dt} \right|_Z = \left. \frac{d(I\omega)}{dt} \right|_B + \omega \wedge I\omega = I \left. \frac{d(\omega)}{dt} \right|_B + \tilde{\omega}I\omega \quad (II.12)$$

La dynamique de rotation de l'engin s'écrit alors :

$$I \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (II.13)$$

### II.1.4) Relations cinématiques :

Nous allons ici déterminer les relations de passage entre les repères inertiel  $I$  et mobile  $B$  à travers la représentation des angles d'Euler, ceci pour les vitesses linéaires en angulaires de l'engin.

#### II.1.4.1) Matrice de rotation :

La figure (II.2) illustre les trois rotations d'angles  $\varphi$  (roulis),  $\theta$  (tangage) et  $\psi$  (lacet) entre les trois nouveaux repères  $B1$ ,  $B2$  et  $B3$ , tous d'origine  $G$  et ayant respectivement pour bases  $\{x1, y1, z1\}$ ,  $\{x2, y2, z2\}$  et  $\{x3, y3, z3\}$ .

Les trois rotations successives permettent de construire la relation entre les composantes d'un vecteur exprimées dans le repère  $I$  et celles exprimées dans le repère mobile  $B$ . Ainsi, en se référant à la figure (II.2) :

- la première rotation est d'angle  $\psi$  autour de  $z1$  et amène le repère  $B1$  (dont les axes sont parallèles avec le repère  $I$ ) en  $B2$  avec pour matrice de rotation

$$R_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ tel que le vecteur } V_z = R_1 V_{B_2} \quad (II.14)$$

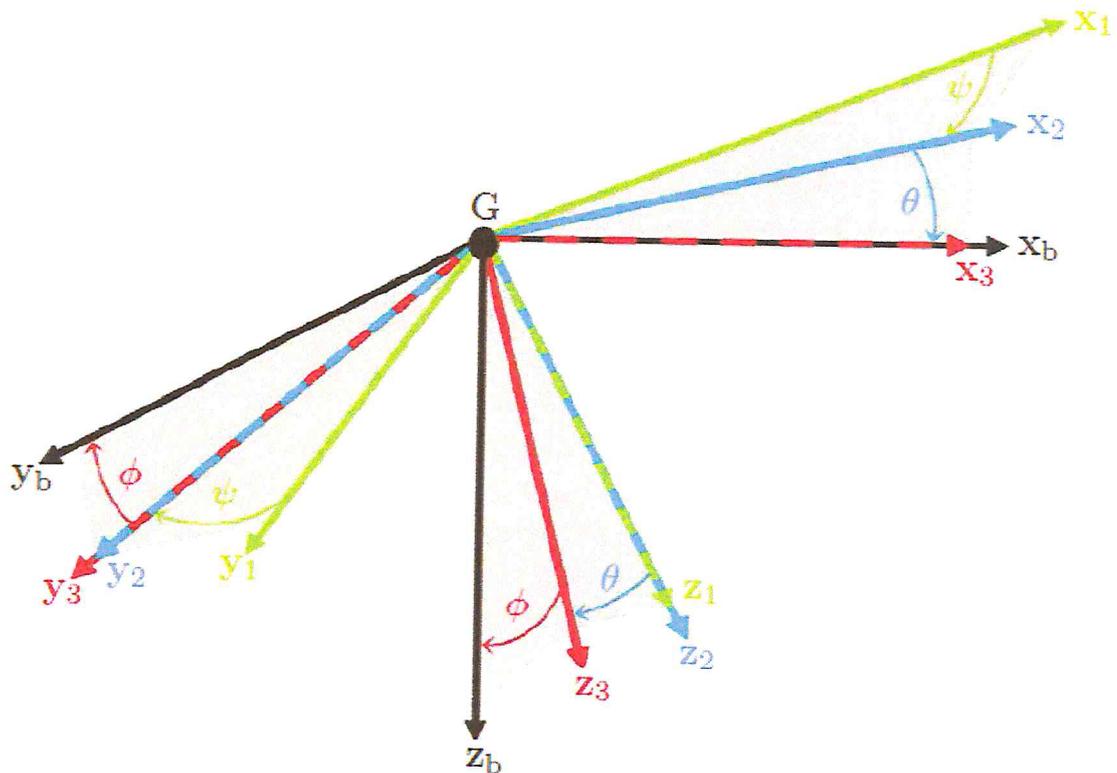


Figure II.2 – Représentation des angles d'Euler.

- la seconde rotation est d'angle  $\theta$  autour de  $y_2$  et amène le repère  $B_2$  en  $B_3$

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ tel que } V_{B_2} = R_2 V_{B_3} \quad (\text{II.15})$$

- la dernière rotation d'angle  $\varphi$  autour de  $x_3$  amène le repère  $B_3$  en  $B$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ tel que } V_{B_3} = R_3 V_B \quad (\text{II.16})$$

Le produit des trois matrices (II.14)-(II.16) permet d'exprimer le passage des composantes d'un vecteur exprimées dans  $I$  en fonction des composantes d'un vecteur exprimées dans  $B$ , c'est-à-dire :

$$V_Z = E_{\varphi,\theta,\psi} V_B \quad (\text{II.17})$$

$$\text{ou: } E_{\varphi,\theta,\psi} = R_1 R_2 R_3 \quad (\text{II.18})$$

En particulier, la cinématique de translation de l'engin s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = E_{\varphi,\theta,\psi} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Avec :

$$E_{\varphi,\theta,\psi} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\varphi\sin\theta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{II.20})$$

#### II.1.4.2) Cinématique de rotation

La cinématique de rotation exprime la relation entre les angles d'Euler  $\eta(t)$  et les composantes du vecteur vitesse de rotation instantanée  $\omega(t)$ . Il s'agit donc de projeter les axes  $x_3$ ,  $y_2$  et  $z_1$  dans le repère mobile  $B$ , qui sont respectivement les vecteurs directeurs des angles  $\phi$ ,  $\theta$  et  $\psi$ .

Puisque  $\omega(t)$  s'écrit :

$$\omega(t) = \dot{\phi}x_3 + \dot{\theta}y_2 + \dot{\psi}z_1 \quad (\text{II.21})$$

Il s'ensuit que :

- les composantes de  $x_3$  dans  $B_3$  sont les mêmes que dans  $B$ , c'est à dire que  $x_3 = x_b = [1 \ 1 \ 0]^T$
- puisque les vecteurs  $y_2$  et  $y_3$  sont identiques, alors  $y_2 = [0 \ 1 \ 0]_{B_3}$  et nous pouvons donc exprimé  $y_2$  dans  $B$ , c'est-à-dire :

$$y_2 = R_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

Le vecteur  $z_1$  a pour composantes dans  $Iz_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_I$  et donc dans  $B$ .

$$Z_1 = R_{\varphi,\theta,\psi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_z = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.23})$$

Avec  $R_{\varphi,\theta,\psi} = E_{\varphi,\theta,\psi}^{-1} = E_{\varphi,\theta,\psi}^T$

On obtient finalement :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (\text{II.24})$$

Où ne doit pas atteindre les valeurs extrêmes  $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$  ce qui est physiquement réaliste puisque l'engin ne doit pas se retourner selon ses angles de roulis ou de tangage. Ceci

justifie également le fait de conserver la représentation des angles d'Euler par rapport aux quaternions qui introduiraient une contrainte algébrique supplémentaire dans les équations du mouvement. En réécrivant l'équation (II.24) nous obtenons l'équation (II.25), où apparaît clairement la contrainte sur l'angle  $\theta$ , puisque quatre éléments sont divisés par le cosinus de ce même angle.

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \tan \theta \sin \varphi & \tan \theta \cos \varphi \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} & \frac{\cos \varphi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (\text{II.25})$$

### II.1.5) Composante de poids :

Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre comme tous les corps au voisinage de la Terre, et l'accélération de la pesanteur est notée  $g$ . La composante de poids  $\mathbf{P}$  est la force à laquelle est soumis l'engin, et dont la direction est normale à la surface de la Terre. La valeur de  $g$  est exprimée et connue dans le repère inertiel  $I$ , c'est-à-dire :

$$[g]_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}_z \quad (\text{II.26})$$

Par conséquent,  $\mathbf{P}$  exprimé dans  $B$  s'écrit :

$$\mathbf{P} = m[g]_B = m R_{\varphi,\theta,\psi} [g]_z = mg \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix}_z \quad (\text{II.27})$$

A la surface de la Terre, le champ de pesanteur  $g$  vaut approximativement  $9,81 \text{ m/s}^2$  à altitude nulle.

### II .2) Equation de mouvement :

Considérez le roulis couplé qui peut résulter par le mouvement de lacet, Cependant les pédales dans le cockpit sont déplacées, une accélération de roulis est expérimentée parce que le rotor de queue est généralement au-dessus de l'axe de roulis. Ceci peut être facilement vu d'un examen des équations régissant le mouvement de roulis et lacet :

$$L = I_{xx} \ddot{\varphi} - I_{xz} \ddot{\psi} \quad (\text{II.28})$$

$$N = I_{zz} \ddot{\psi} - I_{xz} \ddot{\varphi} \quad (\text{II.29})$$

Pour un hélicoptère, si  $T_{tr}$  représente la poussée produite par le rotor de queue,  $h$  représente la taille du moyeu du rotor de queue au-dessus de l'hélicoptère CG. et  $l$  est la distance à l'arrière du CG. ou le rotor de queue est localisé . puis :

$$L = h T_{tr} \quad (II.30)$$

$$N = -l T_{tr} \quad (II.31)$$

Il est simple de prouver que le rapport du roulis à l'accélération de lacet peut être exprimé comme :

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\ddot{\Psi}} = \frac{hI_{zz} - lI_{xz}}{hI_{xz} - lI_{xx}} \quad (II.32)$$

Depuis  $I_{xz} < I_{xx}$  en générale, puis :

$$\frac{\ddot{\Phi}}{\ddot{\Psi}} \approx - \frac{h}{l} \frac{I_{zz}}{I_{xx}} + \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \quad (II.33)$$

$I_{xz}/-I_{xx}$  peut prendre une valeur dans la gamme 0.1-0.25

### II.2.1) Le mouvement longitudinal :

Dans des rafales de vent les équations linéaires de mouvement sont :

$$m \dot{u} = -mg \Theta_f \cos \gamma + \Delta X \quad (II.34)$$

$$m \dot{w} = mv \Theta_f - mg \Theta_f \sin \gamma + \Delta Z \quad (II.35)$$

$$I_{yy} \ddot{\Theta}_f = \Delta M \quad (II.36)$$

Ou  $\Delta X$  et  $\Delta Z$  sont des incréments dans les forces aérodynamiques résultant un vol dérangé,  $\Delta M$  l'incrément correspondant dans le moment de tangage. Puisqu'on le suppose que les perturbations dans  $u$ ,  $w$  et  $\Theta_f$  sont petites, les incréments dans les forces et le moment peuvent être écrits comme premières limites d'une expression de série de TAYLOR ,i.e. :

$$\Delta X = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial q} q + \frac{\partial X}{\partial \delta_B} \delta_B + \frac{\partial X}{\partial \delta_{\Theta_0}} \delta_{\Theta_0} \quad (II.37)$$

Ou  $\delta_B$  le terme cyclique de la commande de lacet, et  $\delta_{\Theta_0}$  le terme collectif de commande de lacet.

Les coefficients  $\partial X / \partial u$  ,  $\partial X / \partial w$  etc.(ou par simplification  $X_u$  et  $X_w$  ,etc.) sont la dérivation de stabilité. Ainsi :

$$m\dot{u} = X_u u + X_w w + X_q q + mg \Theta_f \cos \gamma + X_{\delta_B} \delta_B + X_{\delta_{\Theta_0} w} \delta_{\Theta_0} \quad (\text{II.38})$$

$$m\dot{w} = Z_u u + Z_w w + Z_q q + mv \Theta_f - mg \Theta_f \sin \gamma + Z_{\delta_B} \delta_B + Z_{\delta_{\Theta_0} w} \delta_{\Theta_0} \quad (\text{II.39})$$

$$I_{yy} \ddot{\Theta}_f = M_u u + M_w w + M_q q + M\dot{w} \dot{w} + M_{\delta_B} \delta_B + M_{\delta_{\Theta_0} w} \delta_{\Theta_0} \quad (\text{II.40})$$

Le terme  $m\dot{w}$  est habituellement inclus pour expliquer l'effet du « downwash » sur quel rotor de queue qui peut être adapté, Puisque la portance est produite par les lames tournantes dont les angles d'inclinaison sont considérés comme entrées de commande. il s'avère utile d'utiliser une forme de non-dimensionnel de ces équations. le rayon des lames de rotor être dénoté près  $R$ . La vitesse d'extrémité de n'importe quelle lame est donc indiquée près  $\Omega R$ . La surface de lame est  $s\pi R^2$ . Là où le facteur de solidité  $s$  de rotor est donné par :

$$S = b/\pi R \quad \rightarrow \text{signature } \epsilon \quad (\text{II.41})$$

ou  $b$  présente le nombres des lames utilisé dans le rotor ,  $c$  présent la corde de ces lames (bien sur qu'ils sont tous identiques )

On a:

$$\hat{u} = u/\Omega R \quad (\text{II.42})$$

$$\hat{w} = w/\Omega R \quad (\text{II.43})$$

$$\hat{q} = q/\Omega \quad (\text{II.44})$$

Laissé là également soyez défini en tant que temps non-dimensionnel,  $\tau$  :

$$\tau = \hat{t}/t \quad (\text{II.45})$$

ou :

$$\hat{t} = \frac{m}{\rho s A_{ref} \Omega R} \quad (\text{II.45})$$

La surface de référence est donné par :

$$A_{ref} \triangleq \pi R^2 \quad (\text{II.46})$$

Et on a :

$$\hat{t} = m/\rho b c \pi R^2 = m/\rho s \pi R^3 \Omega \quad (\text{II.47})$$

Noter sa :

$$\hat{q} \neq d \Theta_f / d\tau \quad (\text{II.48})$$

Mais :

$$\hat{q} = \Omega \hat{t} (d \Theta_f / d\tau) \quad (\text{II.49})$$

Un paramètre de la densité relative,  $\mu^*$ , est défini pour le mouvement longitudinale comme :

$$\mu^* = \Omega \hat{t} = m / \rho s A_{ref} R \quad (\text{II.50})$$

Donc :

$$\hat{q} = \mu^* (d \Theta_f / d\tau) \quad (\text{II.51})$$

Le moment d'inertie non-dimensionnel est défini comme :

$$i_{yy} = I_{yy} / m R^2 \quad (\text{II.52})$$

Et les dérivés non-dimensionnels de stabilité sont définis comme :

$$x_u = X_u / \rho s A_{ref} \Omega R \quad (\text{II.53})$$

$$x_w = X_w / \rho s A_{ref} \Omega R \quad (\text{II.54})$$

$$x'_q = X_q / \rho s A_{ref} \Omega R^2 \quad (\text{II.55})$$

La signification de prime est expliqué a pris l'équation (2.71) :

$$z_u = Z_u / \rho s A_{ref} \Omega R \quad (\text{II.56})$$

$$z_w = Z_w / \rho s A_{ref} \Omega R \quad (\text{II.57})$$

$$z'_q = Z_q / \rho s A_{ref} \Omega R^2 \quad (\text{II.58})$$

$$m'_u = M_u / \rho s A_{ref} \Omega R^2 \quad (\text{II.59})$$

$$m'_w = M_w / \rho s A_{ref} \Omega R^2 \quad (\text{II.60})$$

$$m'_{\dot{w}} = M_{\dot{w}} / \rho s A_{ref} \Omega R^2 \quad (\text{II.61})$$

$$m'_q = M_q / \rho s A_{ref} \Omega R^3 \quad (\text{II.62})$$

$$x_{\delta_B} = X_{\delta_B} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^2 \quad (\text{II.63})$$

$$z_{\delta_B} = Z_{\delta_B} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^2 \quad (\text{II.64})$$

$$m'_{\delta_B} = M_{\delta_B} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^3 \quad (\text{II.65})$$

$$x_{\delta_{\Theta_0}} = X_{\delta_{\Theta_0}} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^2 \quad (II.66)$$

$$z_{\delta_{\Theta_0}} = Z_{\delta_{\Theta_0}} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^2 \quad (II.67)$$

$$m'_{\delta_{\Theta_0}} = M_{\delta_{\Theta_0}} / \rho s A_{ref} \Omega^2 R^3 \quad (II.68)$$

Si on divise les équations (II.38) et (II.39) par  $\rho s A_{ref} \Omega^2 R^2$ , et l'équation (II.40) par  $\rho s A_{ref} \Omega^2 R^3$  on peut obtenir les équations suivantes :

$$\frac{d\hat{u}}{d\tau} = X_u \hat{u} + X_w \hat{w} + \frac{x'_q}{\mu^*} \frac{d\hat{\Theta}_F}{d\tau} - mg \hat{\Theta}_F \cos \gamma + X_{\delta_B} \delta_B + X_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\delta_{\Theta_0}} \quad (II.69)$$

$$\frac{d\hat{w}}{d\tau} = Z_u \hat{u} + Z_w \hat{w} + (V + \frac{z'_q}{\mu}) - mg \Theta_f \sin \gamma + Z_{\delta_B} \delta_B + Z_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\delta_{\Theta_0}} \quad (II.70)$$

$$\frac{d^2 \hat{\Theta}_F}{d\tau^2} = \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_u \hat{u} + \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_w \hat{w} + \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_w \hat{w} + \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_w \frac{d\hat{w}}{d\tau} + \frac{m'_q}{i_{yy}} \frac{d\hat{\Theta}_F}{d\tau} + \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_{\delta_B} \delta_B + \frac{\mu^*}{i_{yy}} m'_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\delta_{\Theta_0}} \quad (II.71)$$

Ces équations non-dimensionnelles de mouvement (équation (II.69),(II.71)) est dû à Bryant et Gate 1930, il est , cependant une notation encombrante. La perfection a été employée ici pour indiquer que la forme étant développée n'est pas la finale. Pour la convenance d'écriture on lui propose d'écrire :

$$\mu^* m'_u / i_{yy} = m_u \quad (II.72)$$

Ou bien :

$$x'_q / \mu^* = X_q \quad (II.73)$$

De même, le circonflexe sera distribué avec du héron. Ainsi :

$$\frac{du}{d\tau} = X_u u + X_w w + x_q \frac{d\Theta_F}{d\tau} - mg \Theta_F \cos \gamma + x_{\delta_B} \delta_B + x_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\Theta_0} \quad (II.74)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = Z_u u + Z_w w + (V + Z_q) \frac{d\Theta_F}{d\tau} - mg \Theta_F \sin \gamma + Z_{\delta_B} \delta_B + Z_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\Theta_0} \quad (II.75)$$

$$\frac{dq}{d\tau} = m_u u + m_w w + m_{\dot{w}} \dot{w} + m_q q + m_{\delta_B} \delta_B + m_{\delta_{\Theta_0}} \delta_{\Theta_0} \quad (II.76)$$

$$d\Theta_F / d\tau = q \quad (II.77)$$

**II.2.2) Mouvement latérale :**

Pour commander le mouvement latéral les entrées suivantes sont employées, l'angle de débattement de la répétition latérale,  $\delta_A$  et l'angle collectif de tangage du rotor de queue  $\delta_T$ , les équation de mouvement correspondantes sont :

$$m \dot{v} = Y_v v + Y_p p - mV_r + Y_r r + mg \phi \cos \gamma + mg \psi_F \sin \gamma + Y_{\delta_A} \delta_A + Y_{\delta_T} \delta_T \tag{II.77}$$

$$I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_A} \delta_A + L_{\delta_T} \delta_T \tag{II.78}$$

$$-I_{xz} \dot{p} - I_{zz} \dot{r} = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_A} \delta_A + N_{\delta_T} \delta_T \tag{II.79}$$

$I_{xx}, I_{xz}$  et  $I_{zz}$  sont les moments d'inertie.  $Y_p$  et  $Y_r$  soyez habituellement négligeable dans l'études d'hélicoptère. En utilisant le même procédé de non-dimensionnalité avec ces équations comme cela utilisé avec le mouvement longitudinal produit :

$$i_{xx} = I_{xx} / mR^2 \tag{II.80}$$

$$i_{zz} = I_{zz} / mR^2 \tag{II.81}$$

$$i_{xz} = I_{xz} / mR^2 \tag{II.82}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = Y_v v + mg\phi \cos \gamma - \frac{vd\psi_F}{d\tau} + mg \psi_F \sin \gamma + y_{\delta_A} \delta_A + y_{\delta_T} \delta_T \tag{II.83}$$

$$\frac{dp}{d\tau} = l_v v + l_p p + l_r r + \frac{i_{xz}}{i_{xx}} \dot{r} + l_{\delta_A} \delta_A + l_{\delta_T} \delta_T \tag{II.84}$$

$$\frac{dr}{d\tau} = n_v v + n_p p + n_r r + \frac{i_{xz}}{i_{zz}} \dot{p} + n_{\delta_A} \delta_A + n_{\delta_T} \delta_T \tag{II.85}$$

**II.2.3) La forme canonique :**

Si ce qui suit est choisi comme vecteurs d'état :

$$\mathbf{x}'_{long} \triangleq [u \ q \ w \ \Theta_F] \tag{II.86}$$

$$\mathbf{x}'_{lat} \triangleq [v \ p \ r \ \psi_F] \tag{II.87}$$

Et le suivant comme vecteurs de commande :

$$\mathbf{u}'_{long} \triangleq [\delta_B \ \delta_{\Theta_0}] \tag{II.88}$$

$$\mathbf{u}'_{lat} \triangleq [\delta_A \ \delta_T] \tag{II.89}$$

Alors les équations du mouvement peuvent être représentées sous la forme canonique, à savoir :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (II.90)$$

C'est-à-dire :

$$\dot{x}_{long} = A_{long} x_{long} + B_{long} u_{long} \quad (II.91)$$

$$\dot{x}_{lat} = A_{lat} x_{lat} + B_{lat} u_{lat} \quad (II.92)$$

Ou :

$$A_{long} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q & -mg \cos \gamma \\ Z_u & Z_w & (V + Z_q) & -mg \sin \gamma \\ \widetilde{m}_u & \widetilde{m}_w & \widetilde{m}_q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.93)$$

$$B_{long} = \begin{bmatrix} x_{\delta_B} & x_{\delta_{\theta_0}} \\ Z_{\delta_B} & Z_{\delta_{\theta_0}} \\ \widetilde{m}_{\delta_B} & \widetilde{m}_{\delta_{\theta_0}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.94)$$

Dans quel :

$$\widetilde{m}_u = (m_u + m_w Z_u) \quad (II.95)$$

$$\widetilde{m}_w = (m_w + m_w Z_w) \quad (II.96)$$

$$\widetilde{m}_q = (m_q + m_w (V + Z_q)) \quad (II.97)$$

$$\widetilde{m}_{\delta_B} = (m_{\delta_B} + m_w Z_{\delta_B}) \quad (II.98)$$

$$\widetilde{m}_{\delta_{\theta_0}} = (m_{\delta_{\theta_0}} + m_w Z_{\delta_{\theta_0}}) \quad (II.99)$$

Et :

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} Y_v & 0 & -V & mg & 0 \\ \widetilde{l}_v & \widetilde{l}_p & \widetilde{l}_r & 0 & 0 \\ \widetilde{n}_p & \widetilde{n}_p & \widetilde{n}_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.100)$$

$$B_{lat} = \begin{bmatrix} \overline{Y_{\delta_A}} & \overline{Y_{\delta_B}} \\ \overline{l_{\delta_A}} & \overline{l_{\delta_T}} \\ \overline{n_{\delta_A}} & \overline{n_{\delta_T}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (II.101)$$

La modélisation de la dynamique de l'hélicoptère, ainsi que la mise en équation a permet d'obtenir une représentation d'état pour le mouvement latérale et longitudinale, afin de pouvoir synthétiser des lois de commande dans les partie qui viennent dans ce mémoire.

***CHAPITRE III :***  
***Conception de***  
***la commande***  
***LQP***

La stabilité est une exigence critique dans la conception d'un asservissement. Une perte de stabilité entraîne au mieux un comportement oscillatoire et donc une incapacité à réguler ou poursuivre, au pire la génération des signaux de grande énergie qui vont endommager ou détruire les systèmes.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux systèmes de contrôle linéaires avec un coût quadratique. Ces systèmes sont d'une grande importance dans la pratique. En effet un coût quadratique est souvent très naturel dans un système linéaire.

Les milieux de recherches dans le domaine de l'aéronautique et de spatiale sont intéressés de cette approche et on essayé de l'utiliser dans les différentes applications allant de la stabilisation de modes naturels oscillants au suivi de trajectoires, d'où les exigences du contrôle, aussi appelées qualité de manœuvrabilité, sont d'abord mises en évidence. La structure globale de contrôleur est ensuite explicitée. Après avoir rapidement exposé la théorie de contrôle utilisé.

### **III.1) Qualité de manœuvrabilité :**

Les spécifications de qualité de manœuvrabilité, essaient la facilité ou bien la difficulté avec laquelle est piloté un hélicoptère dans une catégorie donnée de vol (le comportement dynamique de l'hélicoptère). Un outil systématique pour la quantification a été proposé, nommé échelle de Cooper-Harper.

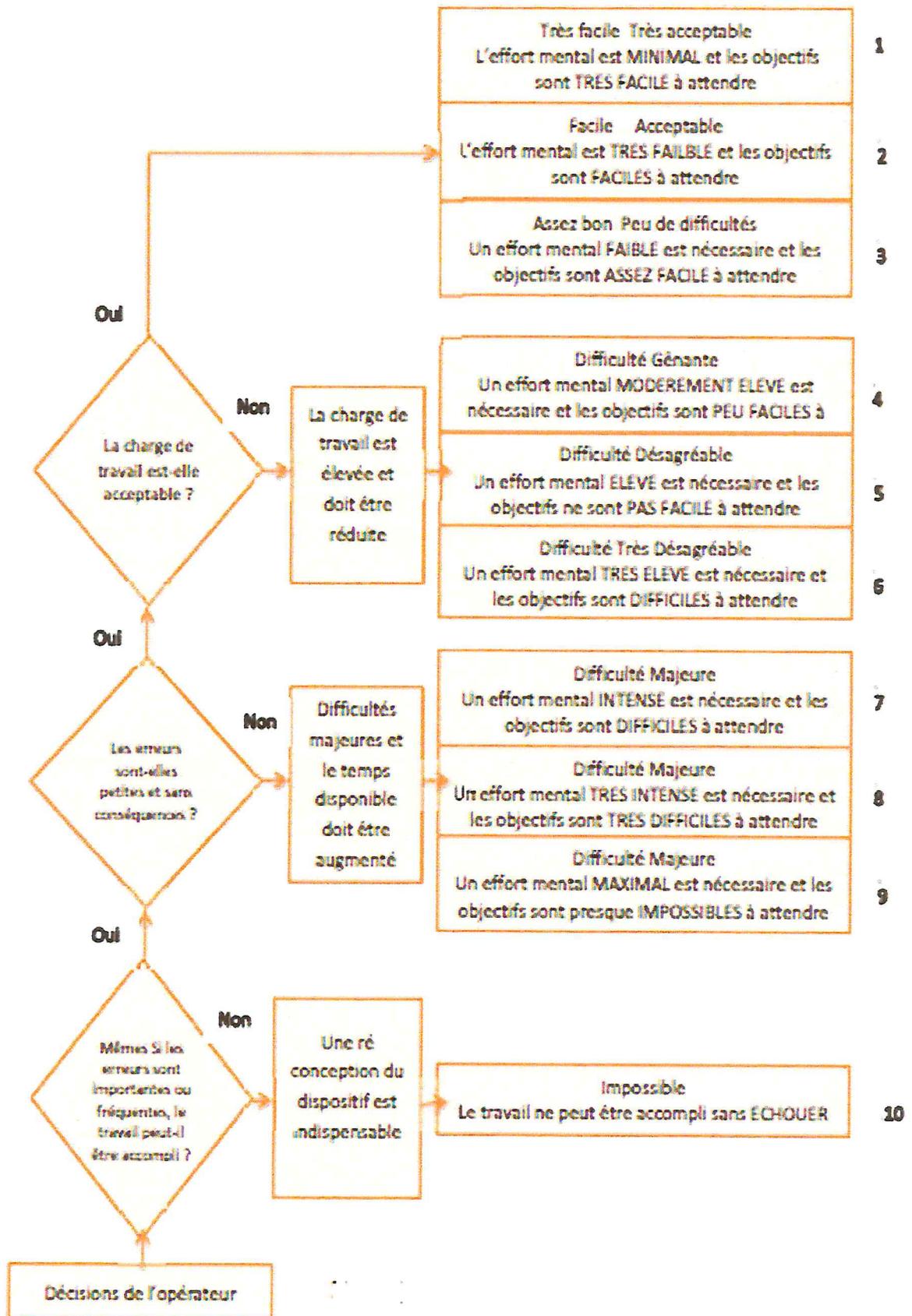


Figure (III.1) :Echelle de Cooper-Harper [11]

Ce dernier distingue trois niveaux de manœuvrabilité répertoriés dans le tableau suivant :

Niveau	Description
1	Qualité de manœuvrabilité totalement adéquate pour la phase de la mission considérée
2	Qualité de manœuvrabilité adéquaté pour accomplir la phase de la mission considérée lorsque l'effort de pilote est quelque peu augmenté ou que l'efficacité de la mission se dégrade ou les deux
3	Qualité de manœuvrabilité telles que la mission peut être contrôlée de manière sécuritaire, mais l'effort du pilote est excessif ou l'efficacité de la mission est inadéquate, ou les deux

Tableau (III.1) : Niveau de manœuvrabilité[10]

- Le premier niveau du tableau précédant correspond aux niveaux 1 à 3 de l'échelle de Cooper-Harper .
- Second correspond aux niveaux 4 à 6 de l'échelle.
- Le troisième correspond aux niveaux 7 à 9 de l'échelle.

Pour chaque niveau de manœuvrabilité correspond des spécifications sur les modes longitudinales et latéraux de vol. ces spécifications dépendent de plus de la classe d'hélicoptère et la catégorie de phase de vol.

- qualité de manœuvrabilité longitudinale
- qualité de manœuvrabilité latérale

### III.1.1) Qualité de manœuvrabilités longitudinales :

Les qualités de manœuvrabilités longitudinales s'expriment en fonction des coefficients d'amortissement des modes phugoïde et rapide, ainsi que la pulsation propre de ce dernier

Le mode phugoïde est un mode à basse fréquence. Il est caractérisé par une oscillation lente de la vitesse et de l'altitude  $h$ , ainsi que l'assiette de tangage ( $\theta$ ) et la pente ( $\gamma$ ).

Le mode rapide ou « short period » est un mode rapide fortement amortie. En l'absence de contrôle de cette oscillation dure quelques secondes, habituellement moins de 10 s, pendant lesquelles l'angle d'attaque, le taux de tangage  $q$  et le facteur de charge  $n_z$  varient rapidement tandis que la vitesse longitudinales  $u$  reste quasiment constante.

### III.1.2) Qualité de manœuvrabilités latérales :

Les qualités de manœuvrabilités latérales dépendent des trois modes latéraux sont : Le mode roulis, roulis spiral et le roulis hollandais.

Le mode roulis : est un mouvement rapide très amorti durant lequel l'hélicoptère a un mouvement de roulis autour de l'axe des  $x$ . il affecte principalement le taux de roulis  $p$ , tandis que l'angle de dérapage  $\beta$ , l'azimut  $\psi$  et la vitesse angulaire de lacet  $r$  restent quasiment constants[11].

Le mode spiral est un mode lent qui peut s'avérer légèrement instable, il donne alors au roulis une amplitude croissante.

Le roulis hollandais est une oscillation latérale et directionnelle, qui effets principalement l'angle de dérapage  $\beta$  et le taux de lacet  $r$ , ce mouvement ressemble a celui des patineurs hollandais d'où son nom. Cependant il est possible qu'il y ait un certains mouvement de roulis du au couplage roulis-lacet des coefficients aérodynamique.

### III.2) Problème linéaire-quadratique, applications à la régulation :

Nous allons donc considérer un système de contrôle linéaire dans  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0, \quad (\text{III.1})$$

Muni d'un coût quadratique du type

$$C(u) = \underbrace{x(T)^T Q x(T)} + \int_0^T (x(t)^T W(t)x(t) + u(t)^T U(t)u(t)) dt, \quad (\text{III.2})$$

Où  $T > 0$  est fixé, et où, pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $U(t) \in M_m(\mathbb{R})$  est symétrique définie positive,  $W(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est symétrique positive, et  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique positive. On suppose que les dépendances en  $t$  de  $A$ ,  $B$ ,  $W$  et  $U$  sont  $L^\infty$  sur  $[0, T]$ . Par ailleurs le coût étant quadratique, l'espace naturel des contrôles est  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ [14].

Le problème de contrôle optimal est alors le suivant, que nous appellerons problème LQ (linéaire-quadratique).

Problème LQ : Un point initial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  étant fixé, l'objectif est de déterminer trajectoires partant de  $x_0$  qui minimisent le coût  $C(u)$ .

Notons que l'on n'impose aucune contrainte sur le point final  $x(T)$ . Pour toute la suite, on pose :

$$\|x(T)\|_W^2 = x(T)^T W(T) x(T), \quad \|U(T)\|_W^2 = \int_0^T u(t)^T U(t) u(t) dt, \quad (III.3)$$

Et :

$$g(x) = x(T)^T Q x(T) \quad (III.4)$$

De sorte que :

$$C(x) = g(x(T)) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|U(t)\|_W^2) dt \quad (III.5)$$

Les matrices  $Q, W, U$  sont des matrices de pondération.

Remarque 1 : Par hypothèse les matrices  $Q$  et  $W(t)$  sont symétriques positives, mais pas nécessairement définies. Par exemple si  $Q = 0$  et  $W = 0$  alors le coût est toujours minimal pour le contrôle  $u = 0$ .

Remarque 2 : On suppose pour alléger les notations que le temps initial est égal à 0. Cependant tous les résultats qui suivent sont toujours valables si on considère le problème LQ sur un intervalle  $[t_0, T]$ , avec des contrôles dans l'espace  $L^2([t_0, T], \mathbb{R}^m)$ . Les résultats des sections (III.1) et (III.2) seront en fait valables pour des systèmes linéaires perturbés  $\dot{x}(t) = Ax + Bu + r$ , et avec une fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  continue ou  $C_1$ . De même nous envisagerons le cas où  $T = +\infty$ .

### III.2.1) Existence de trajectoires optimales :

Introduisons l'hypothèse suivante sur  $U$ .

$$\exists \alpha > 0 \forall u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \quad \int_0^T \|U(t)\|_W^2 dt > \alpha \int_0^T u(t)^T u(t) dt \quad (III.6)$$

Par exemple cette hypothèse est vérifiée si l'application  $t \rightarrow U(t)$  est continue sur  $[0, T]$  et  $T < +\infty$ , ou encore s'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, T]$  et pour tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^m$  on ait  $v^T U(t) v \geq c v^T v$ .

On a le théorème d'existence suivant.

Théorème 1 : il existe une trajectoire unique minimisant pour le problème LQ.

$$x_n(t) = M(t) x_0 + M(t) \int_0^t M(s)^{-1} B(s) u_n(s) ds \quad (III.7)$$

Est la formule analogue pour  $x(t)$ . On montre alors aisément que, à sous-suite près, la suite  $(x_n)$  converge simplement vers l'application  $x$  sur  $[0, T]$  (en fait on peut même montrer que la convergence est uniforme).

Passant maintenant à la limite dans (3.4), on obtient, pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$x(t) = M(t)x_0 + M(t) \int_0^T M(S)^{-1}B(S) u(s) ds \quad (III.8)$$

Et donc  $x$  est une solution du système associée au contrôle  $u$ . Montre qu'elle est minimisant. Pour cela on utilise le fait que puisque  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2$ , on a l'inégalité

$$\int_0^T \|u(T)\|_u^2 dt \leq \liminf \int_0^T \|u_n(T)\|_u^2 dt \quad (III.9)$$

et donc  $C(u) \leq \liminf C(u_n)$ . Mais comme  $(u_n)$  est une suite minimisante,  $C(u)$  est égal à la borne inférieure des coûts, i.e. le contrôle  $u$  est minimisant, ce qui montre l'existence d'une trajectoire optimale.

Pour l'unicité on a besoin du lemme suivant.

Lemme 3.1.2. La fonction  $C$  est strictement convexe.

Preuve du lemme. Tout d'abord remarquons que pour tout  $t \in [0, T]$ , la fonction

$f(u) = u^T U(t)u$  définie sur  $\mathbb{R}^m$  est strictement convexe puisque par hypothèse la matrice  $U(t)$  est symétrique définie positive. Ensuite, notons  $x_u(\cdot)$  la trajectoire associée à un contrôle  $u$ . On a pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$x_u(t) = M(t) x_0 + M(t) \int_0^T M(S)^{-1}B(S) u(s) ds. \quad (III.10)$$

Par conséquent, l'application qui à un contrôle  $u$  associe  $x_u(t)$  est convexe, ceci pour tout  $t \in [0, T]$ . La matrice  $W(t)$  étant symétrique positive, ceci implique la convexité de l'application qui à un contrôle  $u$  associe  $x(t)^T W(t)w(t)$ . On raisonne de même pour le terme  $x(t)^T Qx(T)$ . Enfin, l'intégration respectant la convexité, on en déduit que le coût est strictement convexe en  $u$ .

L'unicité de la trajectoire optimale en résulte trivialement.

Remarque 3 : Si la fonction  $g$  apparaissant dans le coût est une fonction continue quelconque de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , et/ou si le système de contrôle est perturbé par une fonction  $r(t)$ , alors le théorème précédent reste vrai.

Proposition : Considérons le problème de déterminer une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \quad (III.11)$$

sur  $[0, +\infty[$  et minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_W^2) dt \quad (III.12)$$

## III.2.2) Principe du maximum dans le cas LQ :

Théorème : La trajectoire  $x$ , associée au contrôle  $u$ , est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe un vecteur adjoint  $p(t)$  vérifiant pour presque tout  $t \in [0, T]$ .

$$\dot{p}(t) = -p(t)A(t) + x(t)^T W(t) \quad (III.13)$$

Et la condition finale

$$p(t) = -x(T)^T Q \quad (III.14)$$

De plus le contrôle optimal  $u$  s'écrit, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T p(t)^T \quad (III.14)$$

Ce théorème résulte du principe du maximum faible. En effet, définissons la fonction  $H$

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x, p, u) = p(Ax + Bu) - \frac{1}{2}(x(t)^T Wx + u^T Uu). \quad (III.15)$$

En utilisant toujours la convention que  $p$  est un vecteur ligne de  $\mathbb{R}^n$ . Alors les équations données par le principe du maximum LQ s'écrivent  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu, \quad (III.16)$$

$$p = -\frac{\partial H}{\partial x} = -pA + x(t)^T W \quad (III.17)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (III.18)$$

Puisque  $pB - u^T U = 0$  Ce sont bien les équations du principe du maximum.

Mais en fait ici dans le cas LQ on peut dire mieux : d'une part le principe du maximum LQ est une condition nécessaire et suffisante de minimalité (alors que dans le cas général c'est une condition nécessaire seulement), d'autre part il est possible d'exprimer le contrôle sous forme de boucle fermée, grâce à la théorie de Riccati (voir section suivante).

Notons d'autre part que la preuve de ce théorème peut se faire dans le cadre du calcul des variations classique.

Remarque 5 : Si le système de contrôle est perturbé par une fonction  $r(t)$ , alors le théorème précédent reste vrai. Il le reste, de même, si la fonction  $g$  apparaissant dans le coût est une fonction  $C^1$  quelconque d' $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , sauf que la condition finale sur le vecteur adjoint (III.14) devient.

$$x(t) = -\frac{1}{2} \nabla g(x(t)) \quad (III.19)$$

C'est la condition de transversalité.

Remarque 6 : Dans le cas d'un intervalle infini ( $T = +\infty$ ) la condition devient.

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(t) = 0 \tag{III.20}$$

### III.2.3) FONCTION VALEUR ET ÉQUATION DE RICCATI :

#### III.2.3.1) Définition de la fonction valeur :

Soit  $T > 0$  fixé, et soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = 0 \tag{III.21}$$

minimisant le coût quadratique :

$$C_T(u) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_W^2) dt \tag{III.22}$$

Définition : La fonction valeur  $S_T$  au point  $x$  est la borne inférieure des coûts pour le problème LQ. Autrement dit

$$S_T = \inf\{C_T(u) | x_u(0) = x\} \tag{III.23}$$

#### III.2.3.2) Equation de Riccati :

Théorème : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  il existe une unique trajectoire optimale  $x$  associée au contrôle  $u$  pour le problème (III.21), (III.22). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée[14].

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)x(t) \tag{III.24}$$

Où  $E(t) \in M_n(\mathbb{R})$  est solution sur  $[0, T]$  de l'équation matricielle de Riccati

$$\dot{E}(t) = W(t) - A(t)^T E(t) - E(t)A(t) - E(t)B(t)U(t)^{-1}B(t)^T E(t), E(T) = -Q \tag{III.25}$$

De plus, pour tout  $t \in [0, T]$ , la matrice  $E(t)$  est symétrique, et

$$S_T(x) = -x^T E(0)x \tag{III.26}$$

Remarque : En particulier le théorème affirme que le contrôle optimal  $u$  se met sous forme de boucle fermée

$$u(t) = K(t)x(t), \tag{III.27}$$

Où  $K(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)$ . Cette forme se prête bien aux problèmes de stabilisation, comme nous le verrons plus loin.

L'équation de Riccati est un cas particulier de l'équation d'Hamilton-Jacobi dans le cas LQ. Nous donnons cependant ci-dessous une démonstration directe du théorème.

$$\dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T \tag{III.28}$$

$$\dot{p} = -pA + x^T W \tag{III.29}$$

Il faut donc montrer que l'on peut écrire  $p(t) = x^T E(t)$ , ou  $E(t)$  est solution de (III.25)

Notons que si  $p$  s'écrit ainsi, alors, d'après l'équation vérifiée par le couple  $(x, p)$ , on trouve facilement que  $E(t)$  doit être solution de l'équation (III.25). En utilisant l'unicité de la trajectoire optimale, on va maintenant montrer que  $p$  s'écrit effectivement ainsi. Soit  $E(t)$  solution de l'équation.

$$\dot{E} = W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E, E(T) = -Q \tag{III.30}$$

Tout d'abord  $E(t)$  est symétrique car le second membre de l'équation différentielle l'est, et la matrice  $Q$  est symétrique. A priori on ne sait pas cependant que la solution est bien définie sur  $[0, T]$  tout entier. On montrera cela plus loin.

Posons maintenant  $p_1(t) = x_1(t)^T E(t)$

$$\text{Est solution de } \dot{x}_1 = Ax_1 + Bu_1 \tag{III.31}$$

$$\text{Et } u_1 = U^{-1}B^T E x_1 .$$

$$\text{on a alors } \dot{p}_1 = \dot{x}_1^T E + x_1^T \dot{E}$$

$$= (Ax_1 + U(t)^{-1}B(t)^T E x_1)^T E + x_1^T (W - A^T E - EA - EU^{-1}B^T E)$$

$$= -p_1 A + x_1^T W \tag{III.32}$$

Autrement dit le triplet  $(x_1, p_1, u_1)$  vérifie exactement les équations du théorème 2. Par conséquent la trajectoire  $x_1$  est optimale, et par unicité il vient  $x_1 = x, p_1 = p, u_1 = u$ . En particulier on a donc  $p = x^T E$  et  $u = U^{-1}B^T E x$  Déduisons-en la formule (III.26). Pour cela calculons d'abord, le long de la trajectoire  $x(t)$

$$\frac{d}{dt} x(t)^T E(t) x(t) = \frac{d}{dt} p(t) x(t)$$

$$= x(t)^T W(t) x(t) + p(t) B(t) u(t) \tag{III.33}$$

Par ailleurs de l'expression de  $u$  on déduit :

$$u^T U u = (U^{-1}B^T E x)^T U U^{-1}B^T E x = p B u \tag{III.34}$$

Finalement on a l'égalité :

$$\frac{d}{dt} x(t)^T E(t) x(t) = x(t)^T W(t) x(t) + u(t)^T U(t) u(t) \quad (III.35)$$

Et par conséquent :

$$S_T(x) = x(T)^T Q x(T) + \int_0^T \left( \frac{d}{dt} x(t)^T E(t) x(t) \right) dt \quad (III.36)$$

$$\text{Or puisque } E(T) = -Q \text{ et } x(0) = x, \text{ il vient } S_T(x) = -x^T E(0)x \quad (III.37)$$

L'application  $t \rightarrow E(t)$  est bien définie sur  $[0, T]$  tout entier.

Preuve du lemme. Si l'application  $E(t)$  n'est pas définie sur  $[0, T]$  entier, alors il existe  $0 < t_0 < T$  tel que  $\|E(t)\|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $t_0$  par valeurs supérieures. En particulier pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $t_0 \in ]t_0, T]$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , avec  $\|x_0\| = 1$ , telle que :

$$|x_0^T E(t_0) x_0| \geq \alpha \quad (III.38)$$

il existe une unique trajectoire optimale  $x(\cdot)$  pour le problème LQ sur  $[t_0, T]$ , telle que

$x(t_0) = x_0$ . Cette trajectoire est caractérisée par le système d'équations :

$$\dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T, \quad x(t_0) = x_0 \quad (III.39)$$

$$\dot{p} = -pA + x^T W, \quad p(T) = -x(T)^T Q \quad (III.40)$$

Il résulte du théorème de dépendance continue des solutions d'une équation différentielle par rapport à la condition initiale que les extrémités  $x(T)$  au temps  $T$  des trajectoires issues au temps  $t_0$  de  $x_0$ , sont uniformément bornées lorsque  $0 < t_0 < T$  et  $\|x_0\| = 1$ , et donc les solutions correspondantes  $x(t), p(t)$  du système différentiel précédent sont uniformément bornées sur  $[0, T]$  En particulier la quantité  $x(t_0), p(t_0)$  doit être bornée indépendamment  $t_0$ . on sait que :

$$p(t) = x(t)^T E(t) \quad (III.41)$$

Soit  $x_0$  tel que  $x_0^T E(0)x_0 = 0$ , et montrons que  $x_0 = 0$ .

Pour cela on considère le problème LQ

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad (III.42)$$

$$\text{Le critère minimal : } x(T)^T Q x(T) + \int_0^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \quad (III.43)$$

Pour lequel, le coût minimal vaut  $-x_0^T E(0)x_0 = 0$  Par conséquent, puisque pour tout  $t$  la matrices  $U(t)$  est définie positive, on a  $u(t) = 0$  sur  $[0, T]$ . si par ailleurs  $Q$  est définie positive on a aussi  $x(T) = 0$ . Donc la trajectoire  $x(\cdot)$  est solution du problème de Cauchy

$$\dot{x} = Ax.$$

$x(T) = 0$  Et par unicité  $x(\cdot)$  est identiquement nulle. En particulier  $x(0) = x_0 = 0$  ce qui achève la preuve. Dans le deuxième cas où  $W(t)$  est définie positive, la conclusion est immédiate.

Variante du problème précédent. Soit  $T > 0$  fixé. Pour tout  $t \in [0, T]$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$  considérons le problème LQ de trouver une trajectoire solution de

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(t) = x \tag{III.44}$$

Minimisant le coût quadratique

$$C_T(t, u) = g(x(T)) + \int_t^T (\|x(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \tag{III.45}$$

Définition : La fonction valeur  $S$  au point  $(t, x)$  est la borne inférieure des coûts pour ce problème LQ. Autrement dit

$$S_T(t, u) = \inf\{C_T(t, u) | x_u(t) = x\} \tag{III.46}$$

Théorème : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in [0, T]$  il existe une unique trajectoire optimale  $x$  associée au contrôle  $u$  pour le problème (3.43), (3.44). Le contrôle optimal se met sous forme de boucle fermée

$$u(s) = U(s)^{-1} B(s)^T E(s) x(s), \tag{III.47}$$

pour tout  $s \in [t, T]$ , et où  $E(s) \in M_n(\mathbb{R}^n)$  est solution sur  $[t, T]$  de l'équation matricielle de Riccati

$$\dot{E} = W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E, \quad E(T) = -Q \tag{III.48}$$

De plus pour tout  $s \in [t, T]$  la matrice  $E(s)$  est symétrique, et pour tout  $t \in [0, T]$  on a

$$S_T(t, x) = -x^T E(t) x \tag{III.49}$$

Démonstration : La différence par rapport au cas précédent est que l'on paramétrise le temps initial. Le seul changement est donc la formule (3.47). Comme dans la démonstration précédente, on a :

$$S_T(t, u) = x(t)^T Q x(T) + \int_t^T \frac{d}{ds} x(s)^T E(t) x(s) \tag{III.50}$$

Avec  $E(T) = -Q$  et  $x(t) = x$ , il vient  $S_T(t, x) = -x^T E(t)$

$$\text{Soit : } R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_3(t) & R_4(t) \end{pmatrix} \tag{III.51}$$

La résolution du système linéaire :

$$\dot{x} = Ax + BU^{-1}B^T p^T \tag{III.52}$$

$$\dot{p}^T = -A^T p^T + Wx \tag{III.53}$$

Tel que  $R(t) = \text{Id}$ . Alors pour tout  $t \in [0, T]$  on a :

$$E(t) = (R_3(t) - R_4(t)Q) (R_1(t) - R_2(t)Q)^{-1} \quad (\text{III.54})$$

Démonstration : Par définition de la résolvante on a

$$x(t) = R_1(t)x(T) + R_2(t)p(T)^T \quad (\text{III.55})$$

$$p(t)^T = R_3(t)x(T) + R_4(t)p(T)^T \quad (\text{III.56})$$

$$\text{On sait que : } p(t)^T = -Qx(T) \quad (\text{III.57})$$

Donc :

$$x(T) = (R_1(t) - R_2(t)Q)x(T) \quad , \text{ et } p(t)^T = (R_3(t) - R_4(t)Q)x(T) \quad (\text{III.58})$$

On conclut en remarquant que  $p(t)^T = E(t)x(t)$ . Notons que la matrice  $R_1(t) - R_2(t)Q$  est inversible sur  $[0, T]$  car le problème LQ est bien posé, comme nous l'avons vu précédemment.

Par conséquent pour résoudre l'équation de Riccati, il suffit d'intégrer un système linéaire (il faut calculer une résolvante), ce qui est très facile à programmer.

### III.2.4) Applications de la théorie LQ

#### III.2.4.1) Problèmes de régulation

Le problème du régulateur d'état (ou "problème d'asservissement", ou "problème de poursuite")

Considérons le système de contrôle linéaire perturbé

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (\text{III.59})$$

Soit  $\xi(t)$  une certaine trajectoire de  $\mathbb{R}^n$  sur  $[0, T]$ , partant d'un point  $\xi_0$  (et qui n'est pas forcément solution du système (III.58)). Le but est de déterminer un contrôle tel que la trajectoire associée, solution de (III.59), suive le mieux possible la trajectoire de référence  $\xi(t)$  (voir figure III.1).

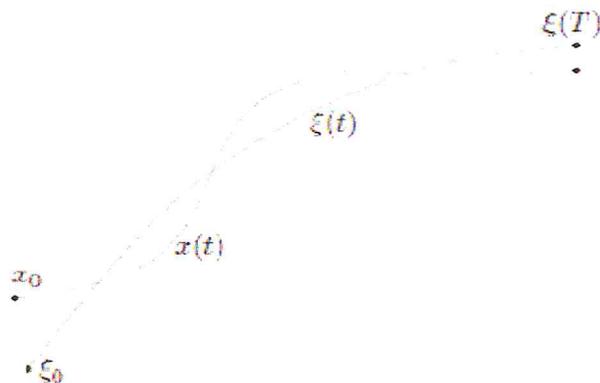


Figure (III.1) : Problème du régulateur

On introduit alors l'erreur sur  $[0, T]$

$$z(t) = x(t) - \xi(t) \tag{III.60}$$

Qui est solution du système de contrôle :

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)u(t) + r_1(t), z(0) = z_0 \tag{III.61}$$

Où  $z_0 = x(0) - \xi(0)$  et  $r_1(t) = A(t)\xi(t) + \dot{\xi}(t) + r(t)$  Il est alors raisonnable de vouloir minimiser le coût :

$$C(u) = z(T)^T Q z(T) + \int_0^T (\|z(t)\|_W^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \tag{III.62}$$

où  $Q, W, U$  sont des matrices de pondération. Pour absorber la perturbation  $r_1$ , on augmente le système d'une dimension, en posant :

$$z_1 = \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} A & r_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que l'on se ramène à minimiser le coût

$$C(u) = z_1(T)^T Q_1 z_1(T) + \int_0^T (\|z_1(t)\|_{W_1}^2 + \|u(t)\|_U^2) dt \tag{III.63}$$

pour le système de contrôle :

$$\dot{z}_1 = A_1 z_1 + B_1 u \tag{III.64}$$

partant du point  $z_1(0)$

La théorie LQ faite précédemment prévoit alors que le contrôle optimal existe, est unique, et s'écrit :

$$u(t) = U^{-1} B_1(T)^T E_1(T) z_1(T), \tag{III.65}$$

Où  $E_1(t)$  est solution pour l'équation du Riccati :

$$\dot{E}_1 = W_1 - A_1^T E_1 - E_1 A_1 - E_1 B_1 U^{-1} B_1^T E_1, \quad E_1(T) = -Q_1 \quad (\text{III.66})$$

Posons : 
$$E_1(T) = \begin{pmatrix} E(t) & h(t) \\ h(t) & \alpha(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.67})$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on établit facilement les équations différentielles de  $E, h, \alpha$ :

$$\dot{E} = W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E, E(T) = -Q \quad (\text{III.68})$$

$$\dot{h} = -A^T h - Er_1 - EBU^{-1}B^T h, h(T) = 0 \quad (\text{III.69})$$

$$\dot{\alpha} = -2r_1^T h - h^T BU^{-1}B^T h, \alpha(T) = 0 \quad (\text{III.70})$$

Résumons tout ceci dans la proposition suivante.

**Proposition :** Soit  $\xi$  une trajectoire de  $\mathbb{R}^n$  sur  $[0, T]$ . Considérons le problème de poursuite pour le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0 \quad (\text{III.71})$$

où l'on veut minimiser le coût :

$$C(u) = (x(t) - \xi(t))^T Q (x(t) - \xi(t)) + \int_0^T (\|x(t) - \xi(t)\|_W^2 + \|x(t) - \xi(t)\|_U^2) dt \dots \dots \dots (\text{III.72})$$

Alors il existe un unique contrôle optimal, qui s'écrit

$$u(t) = U(t)^{-1}B(t)^T E(t)(x(t) - \xi(t)) + U(t)^{-1}B(t)^T h(t) \quad (\text{III.73})$$

Où  $E(t) \in M_n(\mathbb{R}^n)$  et  $h(t) \in \mathbb{R}^n$  sont solutions sur  $[0, T]$  de

$$\dot{E} = W - A^T E - EA - EBU^{-1}B^T E, E(T) = -Q \quad (\text{III.74})$$

$$\dot{h} = -A^T h - E(A\xi - \dot{\xi} + r) - EBU^{-1}B^T h, h(T) = 0 \quad (\text{III.75})$$

et de plus  $E(t)$  est symétrique. Par ailleurs le coût minimal est alors égal à

$$\begin{aligned} & -(x(0) - \xi(0))^T E(0)(x(0) - \xi(0)) - 2h(0)^T (x(0) - \xi(0)) \\ & - \int_0^T (2(A(t)\xi(t) - \dot{\xi}(t) + r(t))^T h(t) + h(t)^T B(t)U(t)^{-1}B(t)^T h(t)) dt \quad (\text{III.76}) \end{aligned}$$

Notons que le contrôle optimal s'écrit bien sous forme de boucle fermée

$$u(t) = k(t)(x(t) - \xi(t)) + H(t) \quad (\text{III.77})$$

Remarque : Si  $\dot{\xi} = A\xi + r$  i.e. la trajectoire de référence est solution du système sans contrôle, alors dans les notations précédentes on a  $r_1 = 0$  et d'après les équations (3.23) on en déduit que  $h(t)$  et  $\alpha(t)$  sont identiquement nuls. On retrouve alors le cadre LQ de la section précédente. En fait,

- si  $\xi = 0$  et  $r=0$ , le problème est un problème LQ standard
- si  $r=0$  il s'agit d'un problème de poursuite de la trajectoire  $\xi$
- si  $\xi = 0$ , c'est un problème de régulation avec la perturbation  $r$ .

La structure de la commande a été mise en évidence dans ce chapitre. La commande LQP permet d'assurer un comportement du système conforme aux qualités de manœuvrabilité et permet d'annuler l'effet de petites erreurs de modélisation ou de perturbation constantes.

***CHAPITRE IV :***  
***Simulation et***  
***interprétation***

La commande développée dans le chapitre précédent est appliquée dans ce chapitre au Sikorski S-61 (Annexe C) à l'aide de l'outil informatique MATLAB. Pour maintenir la position fixée d'un hélicoptère dans l'espace (pour garder sa station) pendant des périodes tout à fait longues. Evidemment, la situation exige que le vol est effectué au vol plané ou presque plané, c'est-à-dire, Avec une vitesse de translation inférieure à 1 m/s .pour le modèle Sikorski S-61.

Dans la ce qui suit on va contrôler un hélico avec et sans la dynamique de rotor par la commande LQP pour faire la différence entre les deux modèles.

### IV.1) L'étude du modèle avec la dynamique de rotor :

La dynamique de pale est également prise en considération la matrice d'état et le vecteur de contrôle est défini comme suit :

$$x' = [\theta_R \ \phi_R \ q_R \ p_R \ \theta_F \ \phi_F \ q_F \ p_F \ u \ v]$$

Et :  $u = [\delta_A \ \delta_B]'$

Avec :

$\delta_A$  cyclique longitudinal

$\delta_B$  cycliques latéraux

#### IV.1.1) Présentation sous forme d'espace d'état:

##### IV.1.1.1) La matrice d'état A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -41.3 & -600. & -30.3 & -42.6 & 0 & 0 & -30.4 & -50.6 & 0.14 & -0.26 & 0 \\ 600 & -54.3 & 41.4 & -27.3 & 0 & 0 & 50.2 & -30.3 & -0.28 & -0.12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -0.92 & -0.04 & 0.004 & 0 & 0 & -0.050 & 0.03 & 0.001 & 0.002 & 0 \\ 3.5 & 18.4 & -0.01 & -0.017 & 0 & 0 & -0.1 & -0.2 & -0.0008 & -0.06 & 0 \\ -15 & 21.6 & 1 & -0.05 & -32.2 & 0 & 4.37 & 1.44 & -0.017 & 0.007 & 0 \\ 22 & 15 & -0.05 & -1 & 0 & 32.2 & 1.4 & -4.4 & -0.007 & -0.017 & 0 \end{bmatrix}$$

IV.1.1.2) la matrice de commande B :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & -1.5 \\ 5.5 & 600 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.94 & 1.32 \\ -5 & -3.5 \\ 21.8 & -16.8 \\ -16.8 & -21.8 \end{bmatrix}$$

IV.1.2) Etude du système en boucle ouverte :

Les valeurs propres obtenues sont :

*Damping*

Valeurs propres	atténuation	Fréquence $(\text{rad/s})$
$-14.3591 \pm 37.2049i$	0.36	39.9
$-13.5262 \pm 5.5449i$	0.925	14.6
-1.9710	1	1.97
-0.8504	1	0.85
$0.2443 \pm 0.9837i$	-0.24	1.01
$0.1097 \pm 0.3715i$	0.28	0.38

Tableau (IV.1) : valeurs propres du système

## IV.1.2.1) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe :

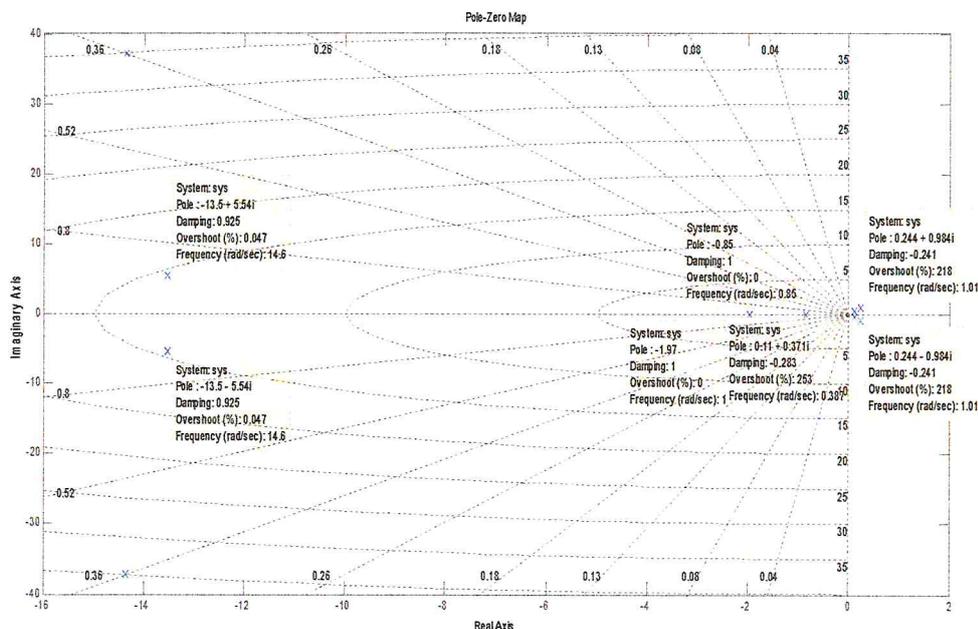


Figure (IV.1) : représentation des valeurs propres du système dans le plan complexe

## IV.1.2.2) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor par une impulsion :

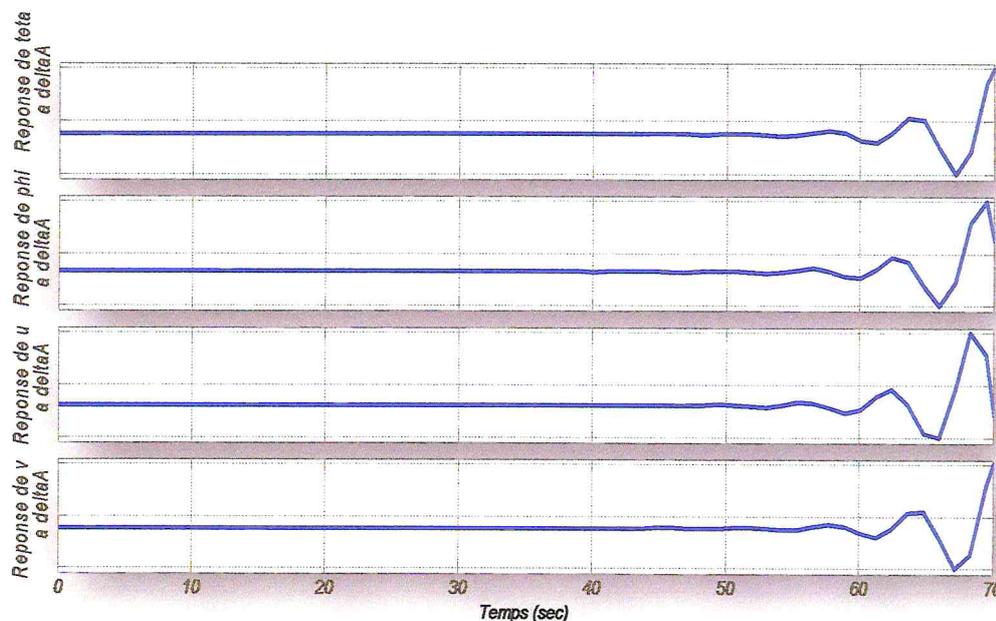


Figure (IV.2) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale.

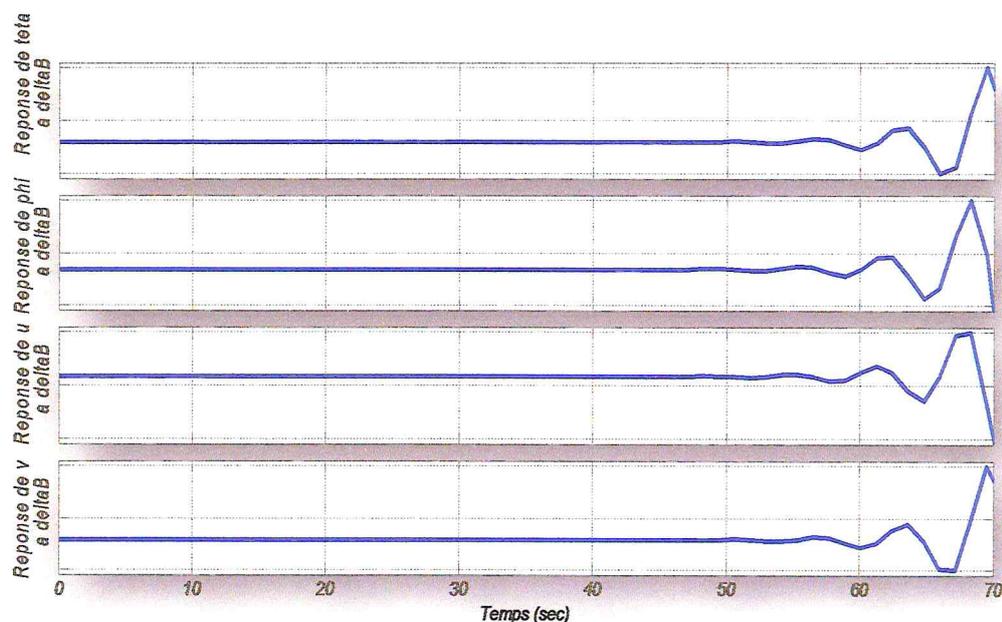


Figure (IV.3) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.

Nous constatons qu'il existe dans ce système des valeurs propres a partie réel positive. qui implique que le système est instable .on observant sa réponse a l'impulsion qui diverge, le temps de réponse est important avec une présence d'oscillation considérable. Ceci inacceptable en pratique.

#### IV.1.3) Etude du système en boucle fermée :

On présente les résultats obtenus par simulation des systèmes contrôlés par la technique de contrôle LQP sur le modèle précédent pour le familiariser avec le concept de la commande. Cette méthode est basée sur le choix de la matrice de pondération  $Q$  à fin d'atteindre les performances voulues. Mais avant de passer à la simulation il faut s'assurer que le système soit contrôlable et observable.

##### -La contrôlabilité :

Nous allons déterminer la matrice  $\Gamma = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ , par l'application de la fonction `ctrb` qui est reconnue par MATLAB et calculons les déterminants des sous matrices. [Annexe B].

La matrice de contrôlabilité :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & -0.0012 & 0.0459 & 0.0086 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0.0003 & 0.0082 & -0.0479 \\ 0 & 0 & 0 & & 0.0086 & -1.0386 & 1.6285 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0.0005 & -0.0228 & 0.0016 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -0.0009 & 0.0225 & 0.0359 \\ 0 & 0 & 0 & & 0.0005 & -0.0327 & 0.0232 \end{bmatrix}$$

Le déterminant est différent de zéro et le rang de cette matrice est égal à 5.

Le système est donc contrôlable et on peut y appliquer toutes les lois de commande possibles.

### -L'observabilité :

Pour tester l'observabilité d'un système, nous appliquerons l'instruction `obsv` sur **MATLAB** [AnnexeB]

La matrice d'observabilité est :

$$T = \begin{bmatrix} & & 0 & 0 & 0 & & 1.2880 & 0.00000 & -1.2880 \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0.0000 \\ & & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & -0.0258 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ -3.4780 & 2.7501 & -0.1511 & \cdots & 0.3979 & 0.0011 & 0.0022 \\ 2.4354 & 3.1383 & 0.21740 & & 0.1559 & -0.0018 & 0.0005 \end{bmatrix}$$

Les déterminants des sous matrices ne sont pas nuls, Le rang n est égal à 8 alors, le système est observable. *(correct)*

Les matrices A et Q ont l'ordre (10 \* 10), B de l'ordre 10\*2 et G de l'ordre 2\*2.

Résolution de l'Équation algébrique Ricatti

La matrice Q est la *matrice de pondération*. La matrice G est positive définie.

$P = \text{constante} \rightarrow dP/dt = 0 \rightarrow \text{Éq. ARE}$

$$PA + A'P - PBG^{-1}B'P + Q = 0$$

$\rightarrow u_0 = -G^{-1}B'P x = K x$  où K est la *matrice de gain de retour*.

Alors on choisit la matrice de pondération Q comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Et :

$$G = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

IV.1.3.1) Les valeurs propres obtenues sont :

Valeurs propres	atténuation	Fréquence
$-14.4645 \pm 37.2757i$	0.36	39.9
$-12.3811 \pm 7.5950i$	0.925	14.6
-1.9531	1	1.95
-14.2444	1	14.2
$-2.2354 \pm 3.7797i$	0.5	4.39
$-1.2978 \pm 2.3119i$	0.48	2.65

Tableau (IV.2) : valeurs propres en boucle fermée.

## IV.1.3.2) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe :

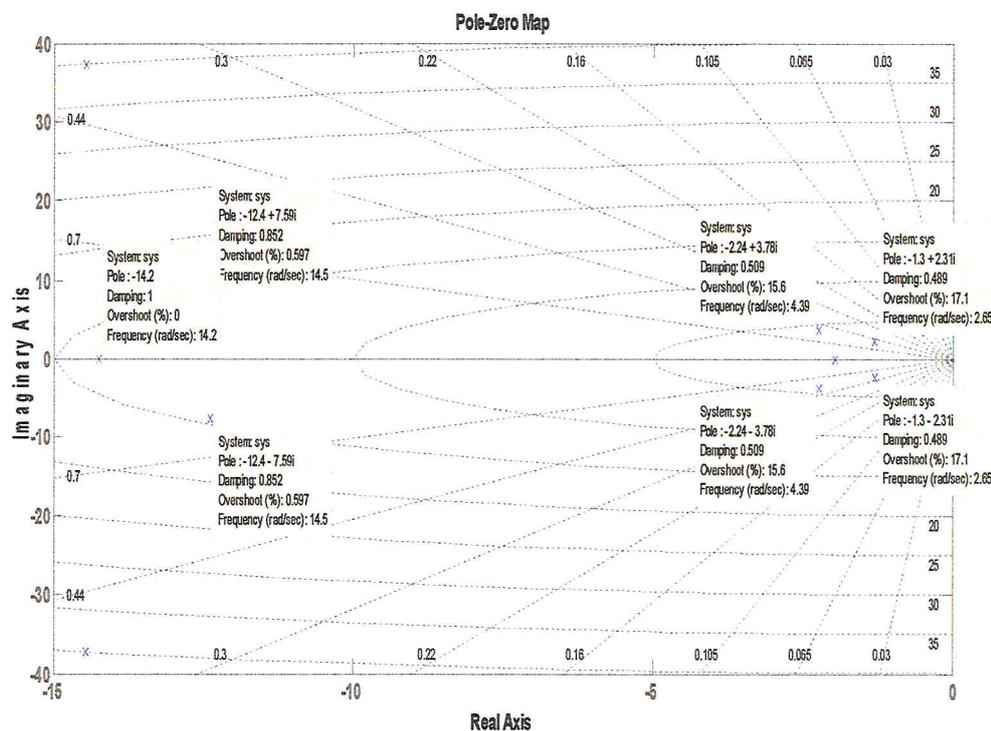


Figure (IV.4) : représentation des pôles de système dans le plan complexe

## IV.1.3.3) Réponse du système a l'impulsion :

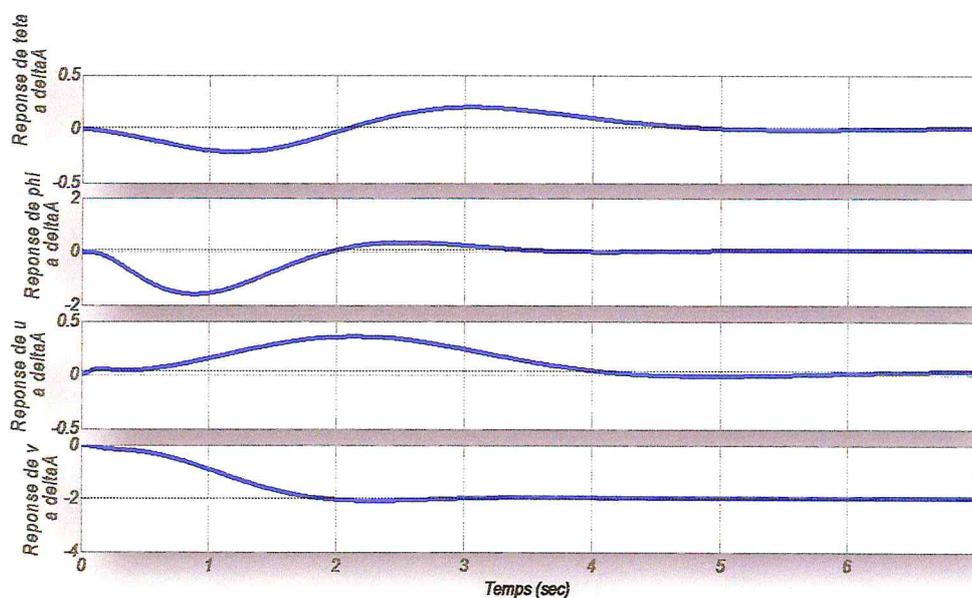


Figure (IV.5) : réponse de système a impulsion longitudinale

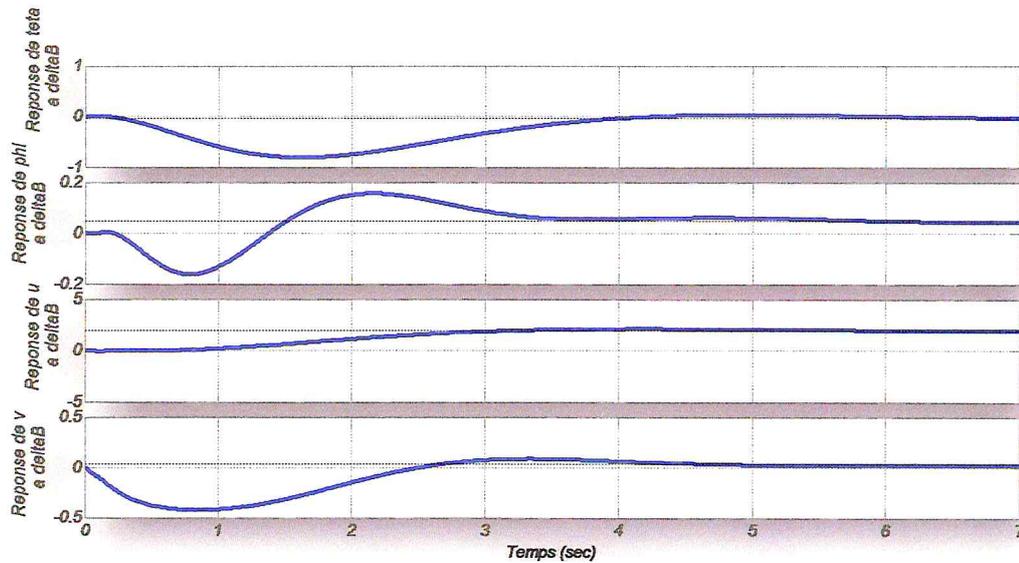


Figure (IV.6) : réponse de système à l'impulsion latérale .

nous constatons que les valeurs propres du système sont tous à partie réelle négatives, qui implique que le système est stable .

on observant sa réponse à impulsion qui converge mais avec un temps de réponse n'est pas acceptable en pratique.

on remarque aussi, d'une manière évidente que la réponse du système par rapport aux angles de rotation est très lente.

#### IV.1.3.4) Réponse du système pour G2 :

On choisie :

$$G2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.1.3.5) Réponse du système a impulsion :

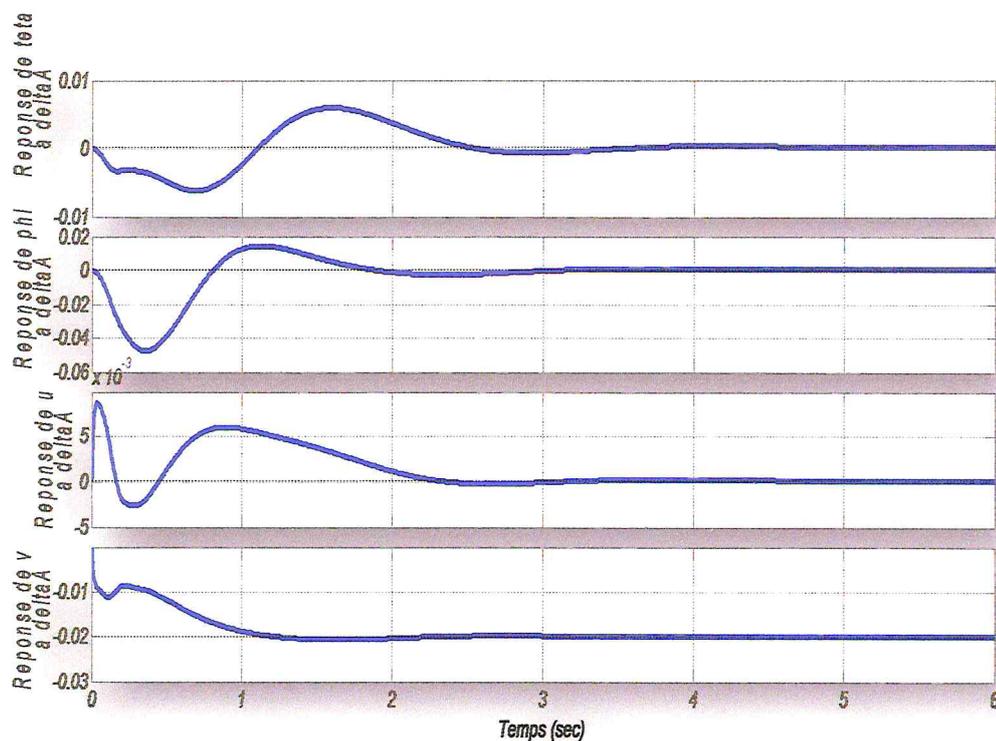


Figure (IV.7) :réponse de système a l'impulsion longitudinale

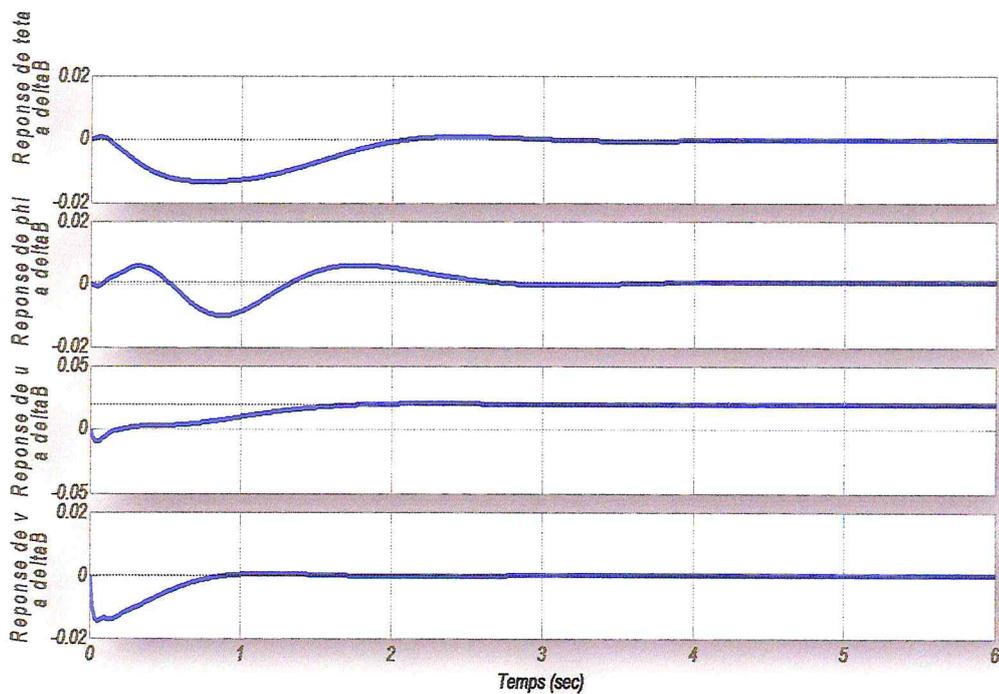


Figure (IV.8) : réponse de système a l'impulsion latérale .

La réponse du système moins oscillation avec un temps de réponse répond aux exigences du système dynamique. On déduit que la commande est robuste face à ces perturbations et maintient le système stable

**IV.2) L'étude du modèle d'un hélicoptère sans dynamique de rotor :**

Il est évident d'une inspection de A qu'il y a des effets de couplage profonds impliqués en raison de l'inclusion de la dynamique de rotor, qui résulte du mouvement s'agitant de pale

Si on le suppose que le disque de rotor peut être incliné instantanément le modèle approprié devient

On a le système suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x' = [\theta_F \ \phi_F \ q_F \ p_F \ u \ v]$$

$$u = [\delta_A \ \delta_B]'$$

Avec :  $\delta_A$  inclinaison de rotor lateral

$\delta_B$  inclinaison de rotor longitudinale

**IV.2.1) Présentation sous forme d'espace d'état:**

IV.2.1.1) La matrice d'état A :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.042 & 0.32 & 0.003 & 0.001 \\ 0 & 0 & -1.23 & -1.6 & 0.004 & -0.12 \\ -32.20 & 0 & 4.7 & -1 & -0.02 & -0.005 \\ 0 & 32.2 & -1 & -4.7 & 0.005 & -0.02 \end{bmatrix}$$

IV.2.1.2) la matrice de commande B :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.3 & 6.3 \\ -23 & -1.1 \\ 1 & -32.2 \\ -32.2 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.2.2) Etude du système en boucle ouverte :

Les valeurs propres obtenues sont :

Valeurs propres	atténuation	Fréquence
-2.3539	1	2.35
-0.5108	1	0.5
0.2131+ 0.3846i	- 0.48	0.44
0.2131- 0.3846i	- 0.48	0.44
0.3783 + 1.2169i	-0.3	1.27
0.3783 - 1.2169i	-0.3	

Tableau (IV.3): les valeurs propres en boucle ouverte (sans dynamique de rotor)

## IV.2.2.1) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe :

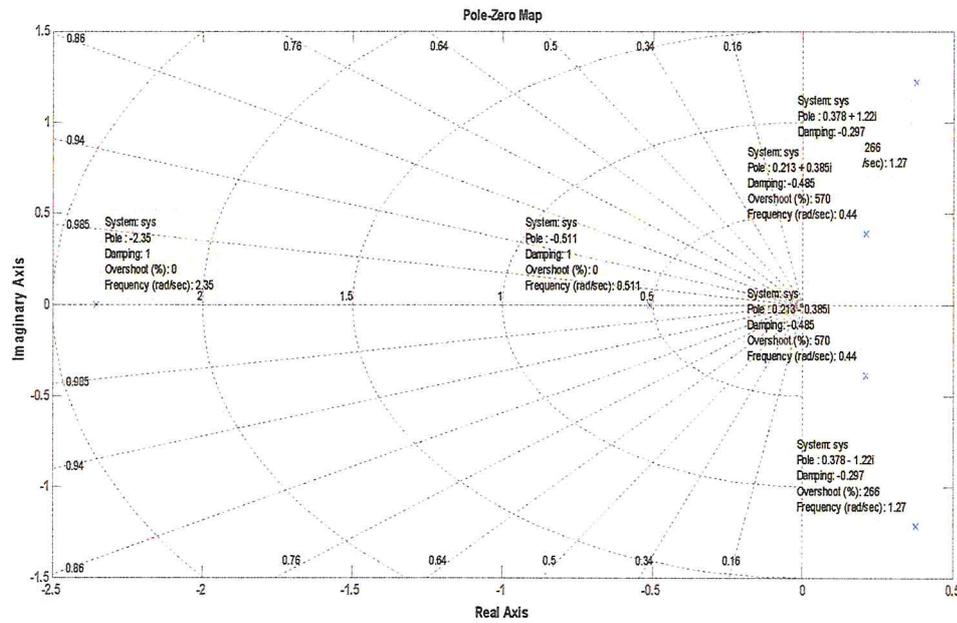


Figure (IV.9) : représentation des valeurs propres du système dans le plans complexe

## IV.2.2.2) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor :

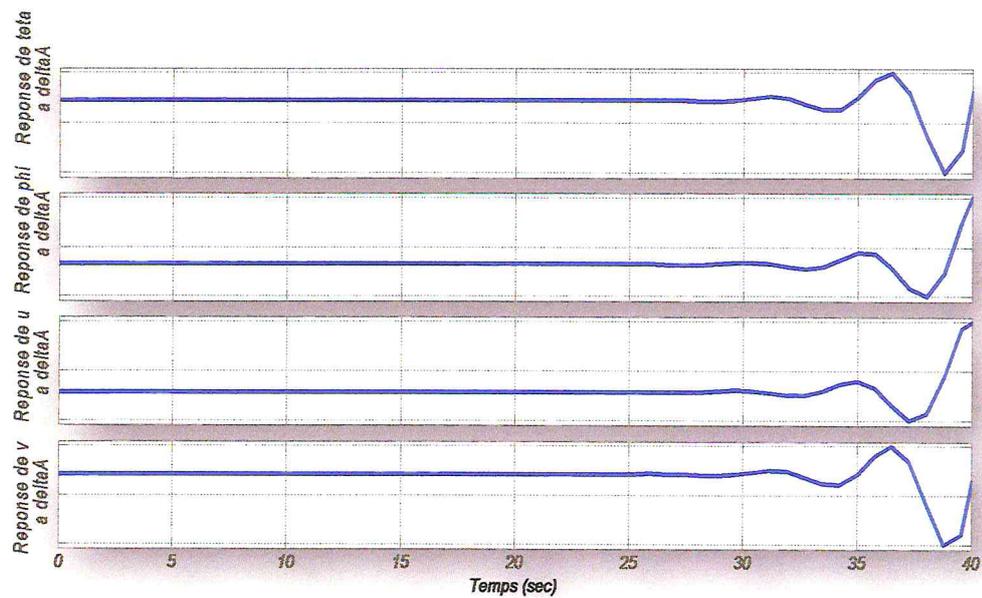


Figure (IV.10) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinal.

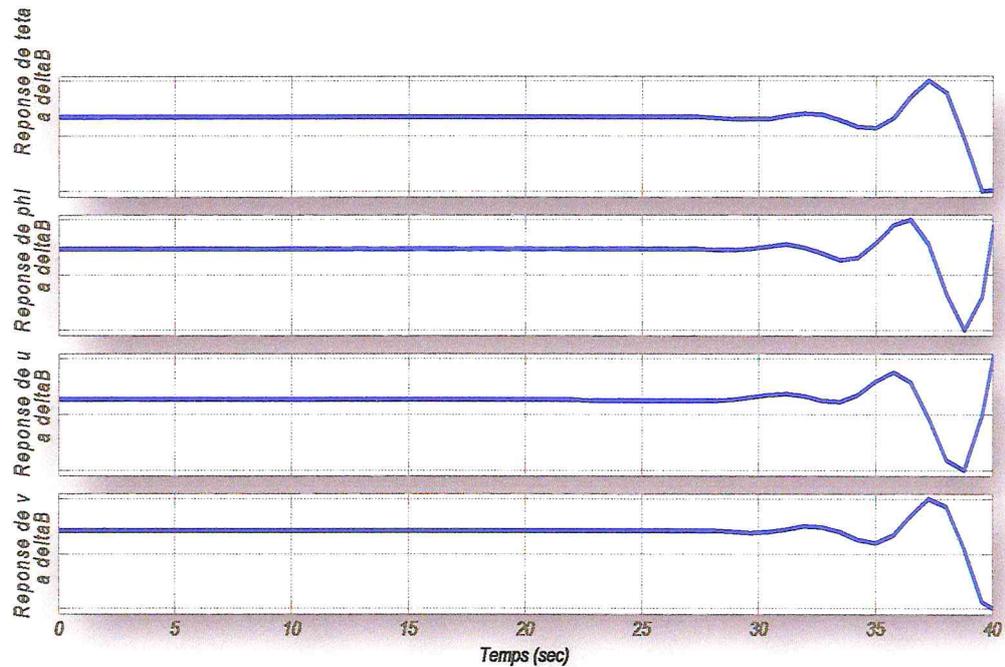


Figure (IV.11) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor à une impulsion latérale.

Nous constatons qu'il existe dans ce système des valeurs propres à partie réelle positive, ce qui implique que le système est instable. En observant sa réponse à l'impulsion qui diverge, le temps de réponse est important avec une présence d'oscillation considérable.

On remarque aussi, d'une manière évidente que la réponse du système par rapport aux angles de rotation est très lente.

#### IV.2.3) Application de la commande LQP :

Dans ce qui suit, on va appliquer la commande LQP sur le modèle (sans la dynamique de rotor) pour assurer la stabilité du système.

#### La contrôlabilité :

A l'aide de la fonction « ctrb » nous allons calculer la matrice de contrôlabilité suivante :

$$F1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.003 & & 0.0030 & 0.0696 & -0.0054 \\ 0 & 0 & -0.0230 & \dots & -0.0157 & -0.4965 & 0.0175 \\ 0 & 0 & 0.0063 & & 0.0696 & -0.1673 & 0.0175 \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ -0.0230 & -0.0011 & 0.0410 & & -0.4965 & 1.0914 & -0.1278 \\ 0.0010 & -0.0322 & 0.0217 & \dots & -0.7726 & 1.6270 & -0.1787 \\ -0.0322 & 0.0010 & 0.1090 & & -3.2146 & 8.9479 & -0.7511 \end{bmatrix}$$

Le rang de cette matrice est 6 alors le système est contrôlable.

La matrice d'observabilité est

$$T1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0.00000 & 0.00000 & -0.0002 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -0.1880 & 0.00000 & -0.0008 \\ 0 & 0 & 0 & & 0.3200 & 0.0002 & 0.0000 \\ & & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0.0896 & 2.4501 & -1.5266 & \dots & -2.6021 & 0.0076 & -0.1480 \\ 0.5597 & 10.0378 & -7.0537 & & -14.6064 & 0.0329 & -0.6156 \end{bmatrix}$$

Les déterminants des sous matrices ne sont pas nuls, Le rang n est égal à 6 alors, le système est observable.

Les matrices  $A_1$  et  $Q_1$  ont l'ordre  $(6 * 6)$ ,  $B_1$  de l'ordre  $6*2$  et  $G_3$  de l'ordre  $2*2$ .

*Résolution de l'Équation algébrique Ricatti*

La matrice  $Q_1$  est la *matrice de pondération*. La matrice  $G_3$  est positive définie.

$P_1 = \text{constante} \quad \rightarrow \quad dP_1/dt = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Éq. ARE}$

$P_1 A_1 + A_1' P_1 - P_1 B_1 G_3^{-1} B_1' P_1 + Q_1 = 0$

$\rightarrow \quad u = - G_3^{-1} B_1' P_1 x = K_1 x \quad \text{où} \quad K_1 \quad \text{est la} \quad \text{matrice de gain de retour.}$

Alors on choisit la matrice de pondération Q comme suit :

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Et :

$$G_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

**IV.2.3.1) Les valeurs propres :**

Valeurs propres	atténuation	Fréquence
-8.1873	1	8.19
-7.1935	1	7.19
-0.6941 + 2.2728i	0.292	2.38
-0.6941 - 2.2728i	0.292	2.38
-1.7874 + 3.8633i	0.42	4.26
-1.7874 - 3.8633i	0.42	4.26

Tableau (IV.4) : les valeurs propres en boucle fermé (sans dynamique de rotor).

IV.2.3.2) La représentation des valeurs propres dans le plan complexe :

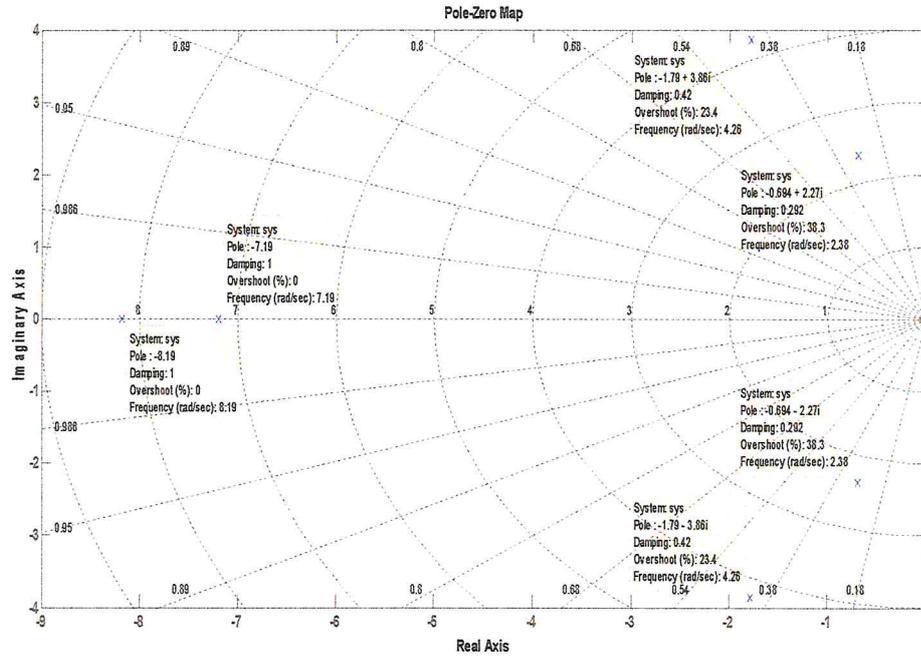


Figure (IV.12) : représentation des valeurs propres du système dans le plan complexe.

IV.2.3.3) Réponse du système a l'inclinaison de disque de rotor par une impulsion :

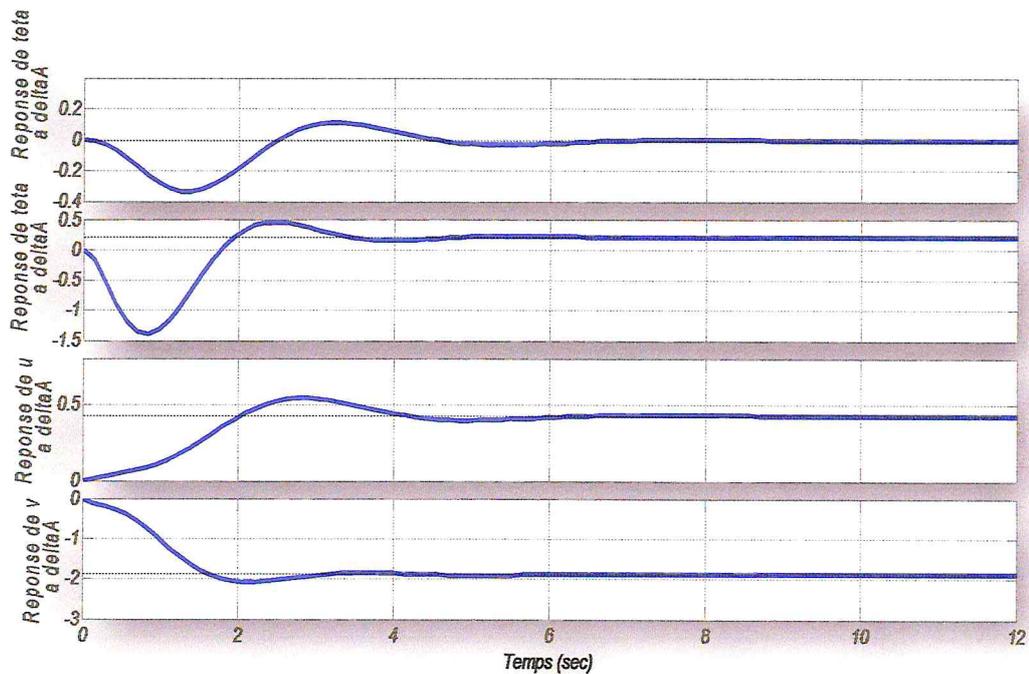


Figure (IV.13) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale .

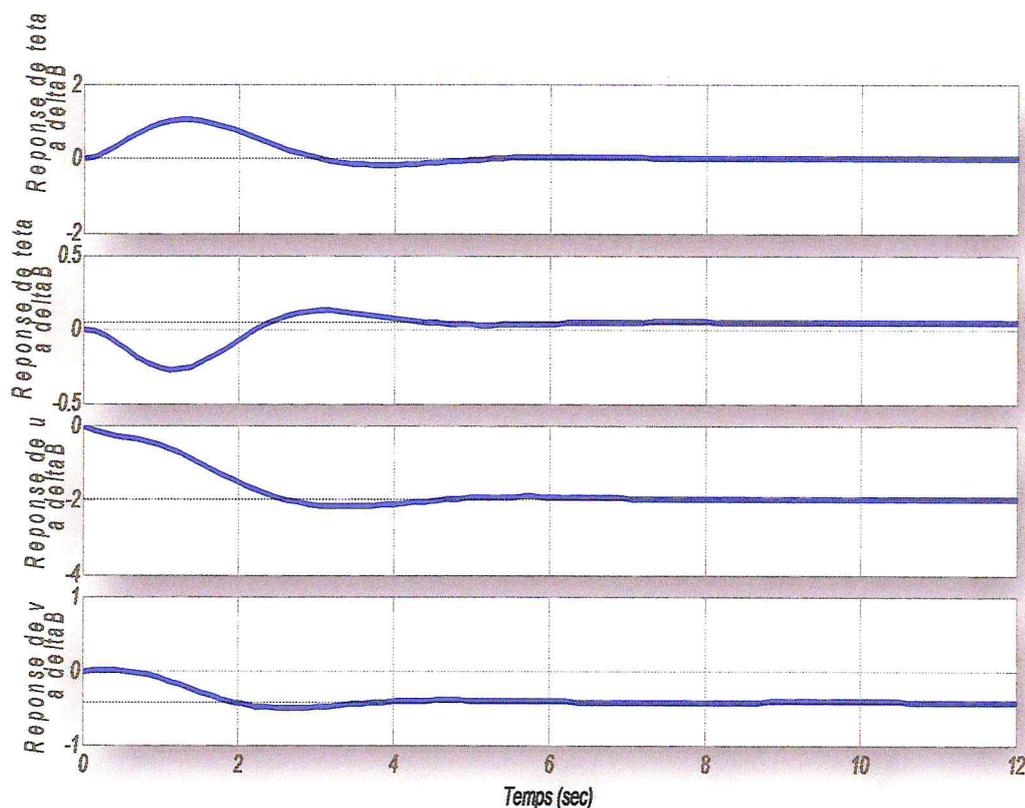


Figure (IV.14) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale .

La stabilité théoriquement est assurée mais ces résultats ne sont pas acceptables en pratique car les pôles sont très proches de l'axe imaginaire, ce qui peut conduire l'hélico vers le problème de décrochage. Ainsi que le temps de réponse est très lent.

Pour :

$$G4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.2.3.4) Réponse du système a impulsion:

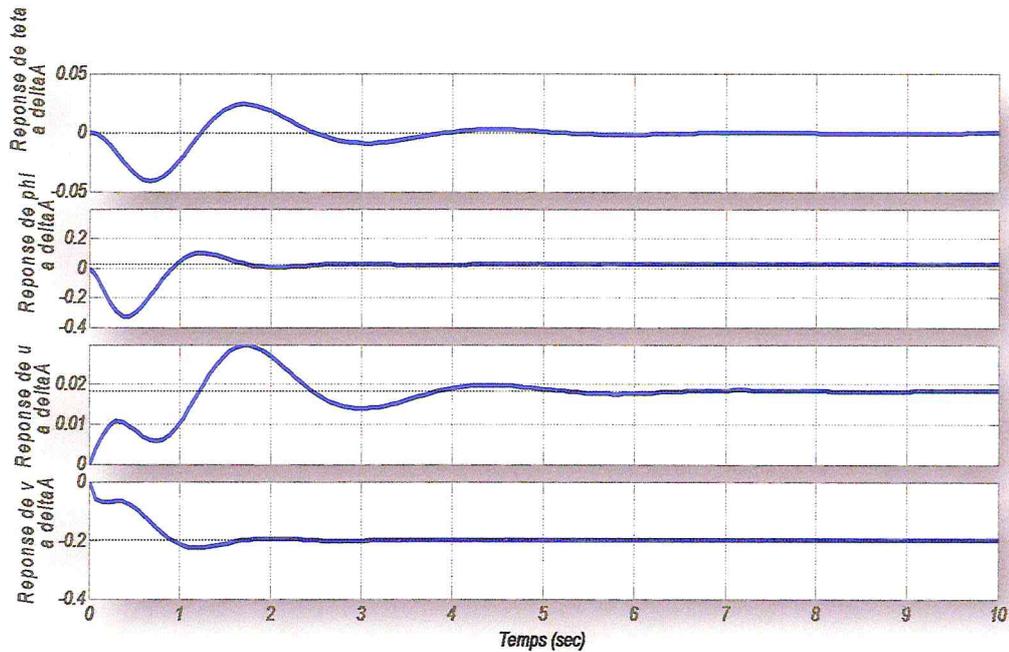


Figure (IV.15) : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion longitudinale.

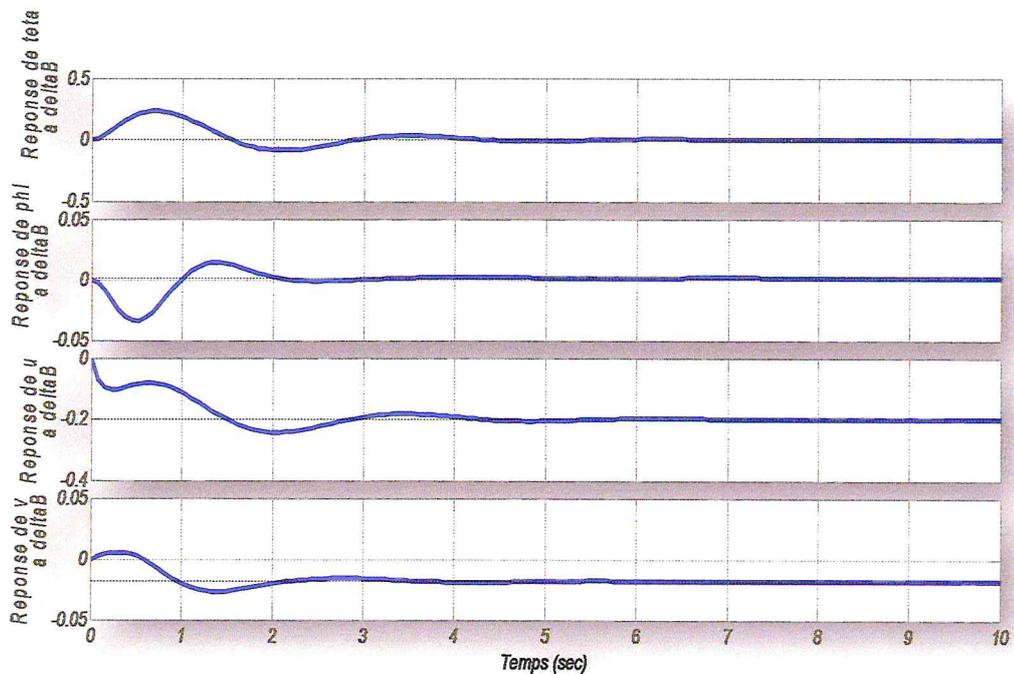


Figure 4.16 : la réponse du système à une perturbation de disque de rotor a une impulsion latérale.

nous constatons que les valeurs propres du système sont tous a partie réel négatives.

on observant sa réponse l'a impulsion qui converge avec un temps de réponse acceptable.

A près l'intervention de la commande LQP (Linéaire Quadratique Problème) en trouve des résultats acceptables en pratique. On remarque que ce type de commande répond fidèlement aux exigences de notre système dynamique.

Dont la comparaison entre les résultats de simulation du modèle de l'hélicoptère avec la dynamique de rotor et sans la dynamique de rotor en trouve que le premier modèle est répondre plus lent et moins oscillant.

### IV.3) Les gains calculés par les simulations précédentes :

		Gain calculé								
Modèle avec la dynamique de rotor G1	K1=	0.0740	0.2452	0.0044	0.0014	-0.1758	0.6339	-0.2689	0.1393	-
		0.0011	0.0170							
		0.2758	-0.2387	-0.0013	-0.0064	1.1488	-0.2012	0.7670	-0.0095	-
		0.0181	0.0021							
Modèle avec la dynamique de rotor G2	K2=	-3.4078	6.9300	0.0487	0.1069	-19.3318	22.6247	-14.4341	1.0616	-0.0537
		8.7736	-12.2313	-0.1079	-0.2199	66.4882	-19.8589	24.1230	-0.1115	-1.931
Modèle sans la dynamique de rotor G3	K3=	0.1813	2.6190	-0.0985	0.1550	-0.0182	0.2060			
		-3.3755	0.3673	-0.3380	-0.0148	0.1982	0.0199			
Modèle sans la dynamique de rotor G4	K4=	0.1389	0.5767	-0.0107	0.1295	-0.0041	0.0176			
		-0.7942	0.1638	-0.3820	0.0017	0.0189	0.0048			

Tableau (IV.5) : les gains de retour pour chaque modèle

*refo*

## Conclusion Générale

---

Cette étude s'ouvre avec une brève introduction à l'hélicoptère et à ses systèmes de rotor. Quelques dispositifs distinctifs de vol d'hélicoptère qui provoquent des problèmes particuliers de contrôle ont été indiqués avant la marche à suivre à un développement des équations appropriées de petit mouvement de perturbation pour le mouvement longitudinal et latérale.

L'objectif de ce travail était d'élaborer une commande linéaire dédiée de contrôle du mouvement de l'hélicoptère Sikorski S61 .donc l'élaboration d'une commande linéaire a fin de commander les angles significatifs de l'hélicoptère et pour faire une comparaison entre deux modèles avec et sans la dynamique de rotor.

La commande LQP permet d'assurer un comportement du système conforme aux qualités de manœuvrabilité.

Le travail a été porté sur la commande linéaire quadratique. L'avantage de cette commande est qu'elle est relativement flexible même elle possède des très bonnes propriétés de robustesse. Dont la comparaison entre les résultats de simulation du modèle de l'hélicoptère avec dynamique de rotor et sans la dynamique de rotor en trouve que le premier modèle est répondre plus lent et moins oscillant.

Cette thèse permet notamment de démontrer l'intérêt des techniques de commande des systèmes linéaires et principalement la commande LQP.

On propose en perspectives quelque piste pour des travaux future. Tel que toute la dynamique de l'hélico est prise en compte (latérale et longitudinal) en appliquant la non-linéarité des coefficients aérodynamique: ces dernier peuvent être calculé par un module d'identification.

# ***Annexes***

## Annexe A

### Stabilité :

Un hélico est stable quand ,étant écarté de sa position d'équilibre sous l'action d'une force extérieure accidentelle ,il revient de lui-même a sa position initiale, sans intervention du pilote, lorsque cesse l'action perturbatrice .

### Axes de stabilité

La stabilité d'un hélico est étudiée sur trois axes :

- La stabilité de lacet, capacité de l'hélico de conserver sa direction
- La stabilité en tangage, capacité de l'hélico de conserver son assiette (l'assiette désigne la position ou l'état d'équilibre d'un élément e ns son milieu par rapport au plans horizontal.)
- La stabilité en roulis, capacité de l'hélico a conservé son inclinaison en ligne droit et en virage.

Lorsque l'hélico est stable sur un axe, il conserve son équilibre sur cet axe sans action sur les commandes de vol.

Au contraire, un hélico instable s'écart de cet axe, ce qui demande d'agir sur les commande pour corriger.

On distingue deux types de stabilité :la stabilité statique et la stabilité dynamique

#### 1- Stabilité statique :

Est l'aptitude de l'hélico de retrouver un état d'équilibre a prés en avoir été écarté. La stabilité statique sera dite positive s'il a tendance à retrouver son état d'équilibre initial

Ou bien ; la stabilité est la tendance de l'hélico de développer des forces ou des moments qui s'apposent directement a une perturbation instantané d'un variable de mouvement pour une condition de vol d'équilibre.

## 2-la stabilité dynamique :

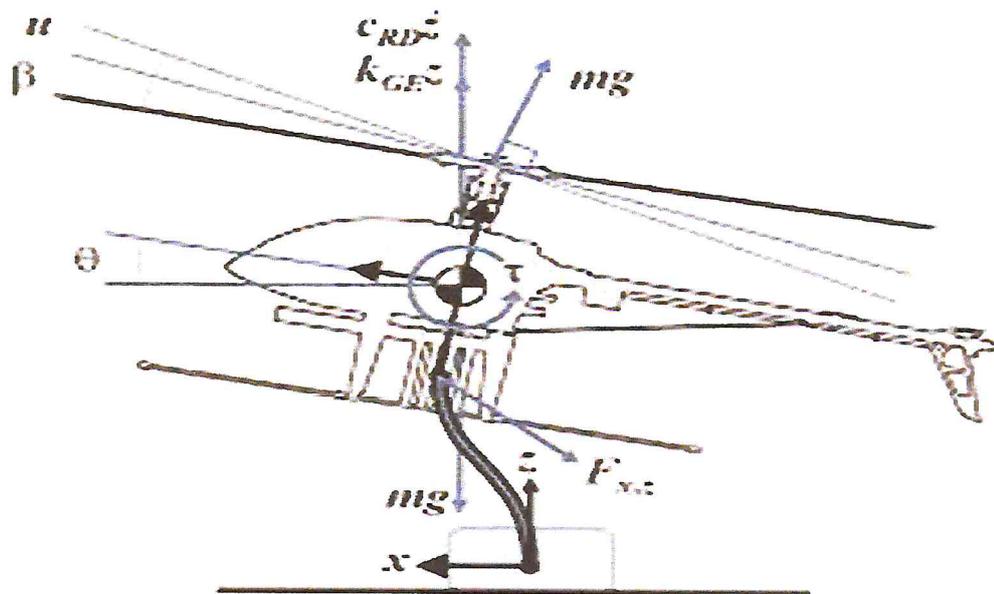


Figure : angles intervenant dans la stabilité d'un hélicoptère.

La notion de la stabilité dynamique fait intervenir le temps nécessaire pour que l'hélicoptère retrouve sa stabilité statique après une perturbation. Il faut, en fait, considérer simultanément l'aspect statique et dynamique de la stabilité lorsqu'on étudie les effets de forces extérieures sur un hélicoptère.

Un hélicoptère doit être conçu et construit de telle sorte qu'il soit doté d'une stabilité statique et dynamique positives pour retrouver son état d'équilibre initiale après quelque oscillation dont l'amplitude s'atténue en fonction de temps.

- S'il a une stabilité statique positive et une stabilité dynamique indifférente, il tentera de retrouver son équilibre initial.
- Si sa stabilité statique est positive et sa stabilité dynamique est négative, l'amplitude des oscillations après perturbation, ne fait que augmenter avec le temps. Les deux derniers cas exigent l'intervention du pilote.

### **Manœuvrabilité Et Maniabilité :**

#### **Manœuvrabilité :**

Désigne les qualités intrinsèques d'un véhicule terrestre, naval ou aérien permettant de lui faire effectuer certain types de manœuvres .ET a ne pas confondre avec la maniabilité.

#### **Maniabilité :**

Elle désigne la plus ou moins bonnes aptitude d'un véhicule terrestre, naval ou aérienne à réagir aux sollicitations de son conducteur ou pilote pour effectuer les manœuvrabilités.

Un hélico maniable réagira rapidement et sensiblement aux moindres actions du pilote sur les commandes de vol. contrairement a un hélico peu maniable qui réagira lentement et difficilement aux actions, même large , du pilote les commandes.

#### **Echelle Cooper-Harper :**

Les commentaires d'un pilote sur la façon dont se comporte l'hélicoptère en vol sont toujours la meilleure source d'informations. En travaillant avec un large nombre de configurations et de pilotes, il a vite été nécessaire de mettre des échelles en place, ou de moins un système de quantification. Le laboratoire **Cornell Aeronautics** ou travaillait Harper, utilisa longtemps sa propre échelle pour évaluer les qualités de vol alors que Cooper de la NASA était à l'origine d'une échelle en 10 points, qui était alors beaucoup plus utilisée par le monde. Combinant leurs expériences respectives, ils publièrent en 1960 l'échelle Cooper-Harper qui est à présent utilisée universellement. Elle fut adoptée en 1970 par l'armée américaine qui s'en sert comme base pour les spécifications militaires américaines des qualités de vol.

L'échelle fut établie à partir de notions élémentaires de psychométrie qui consiste en l'évaluation des capacités psychiques d'un individu. Un classement en 10 points peut paraître excessif pour souder l'opinion d'une personne mais l'échelle Cooper-Harper est un condensé de plusieurs évaluations. C'est en fait une échelle ordinale et non linéaire, dans le sens ou l'intervalle entre deux points, ne correspond pas à un degré de dégradation fixe. Autrement dit, c'est une échelle dichotomique ou l'on force le pilote à prendre des décisions afin d'établir sa véritable opinion.

## AnnexB

**La contrôlabilité :**

La notion de contrôlabilité a été inventée en 1960 par « Kalman » à propos des systèmes linéaires de la forme :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (1)$$

Où :

$u = (u_1, \dots, u_m)$  et  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sont, respectivement, la commande et l'état.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sont des matrices constantes.

On dit que (1) est *contrôlable*, ou *commandable*, si on peut joindre deux points de l'espace d'état  $E$ , c'est-à-dire : si, et seulement si, étant donnés deux points  $P_0, P_1 \in E$  et deux instants  $t_0, t_1$ , tel que :  $t_0 < t_1$ , il existe une commande  $u$ , définie sur  $[t_0, t_1]$ , telle que  $x(t_i) = P_i, i = 0, 1$

**1-Cas sans contrainte sur le contrôle : condition de Kalman :**

**Théorème :** On suppose que  $\Omega = \mathbb{R}^m$  (pas de contrainte sur le contrôle).

Le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$  est contrôlable en temps  $T$  (quelconque) si et seulement si la matrice :

$$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$$
 est de rang  $n$ .

La matrice  $C$  est appelée matrice de Kalman, et la condition  $\text{rang } C = n$  est appelée condition de Kalman.

**2-Cas avec contrainte sur le contrôle :**

**Remarque :** Les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice  $A$ .

Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini (éventuellement grand).

Dans le cas mono-entrée  $m = 1$ , on a un résultat plus précis que nous admettrons.

**Théorème :** Soit  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un intervalle contenant 0 dans son intérieur.

Considérons le système  $\dot{x} = Ax + Bu, u \in \Omega$ . Alors tout point de  $\mathbb{R}^n$  peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la condition de Kalman est satisfaite pour la paire  $(A, B)$  et toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  sont de partie réelle négative ou nulle.

## Annexe C

1 Le Sikorsky S-61 (nomenclature constructeur), plus connu sous son appellation militaire de SH-3 Sea King est un hélicoptère bi-turbine de lutte anti-sous-marine et de secours en mer. Il est en service dans l'US Navy et dans un grand nombre d'autres forces armées de par le monde.

Le Sea King a été construit sous licence au Royaume-Uni, en Italie et au Japon. Les principales versions civiles sont le S-61L et le S-61N

Le premier vol du prototype eut lieu le 11 mars 1959, et il devint opérationnel au sein de l'US Navy en juin 1961 sous l'appellation de HSS-2. La désignation de l'appareil fut changée à l'introduction du nouveau système de désignation des aéronefs en 1962 pour devenir SH-3A. Bien qu'initialement destiné à la lutte anti-submersible, d'autres missions furent confiées au SH-3, entraînant l'apparition de nombreuses versions.

Parmi ces missions, on peut citer la lutte anti-surface, la recherche et sauvetage, le transport, les communications le transport de personnalités, et l'alerte avancée.



---

### Dimension

---

Diamètre du rotor	19 m
Longueur	16,70 m
Hauteur	5,13 m

### Masses

À vide	5 382 kg
Charge utile	2779 kg
Maximale	10 000 kg

---

---

### Performances

---

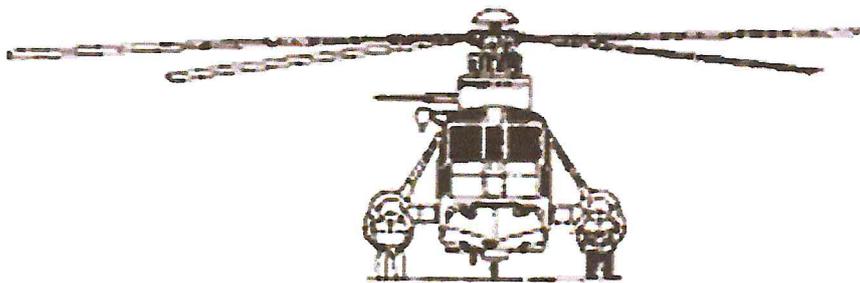
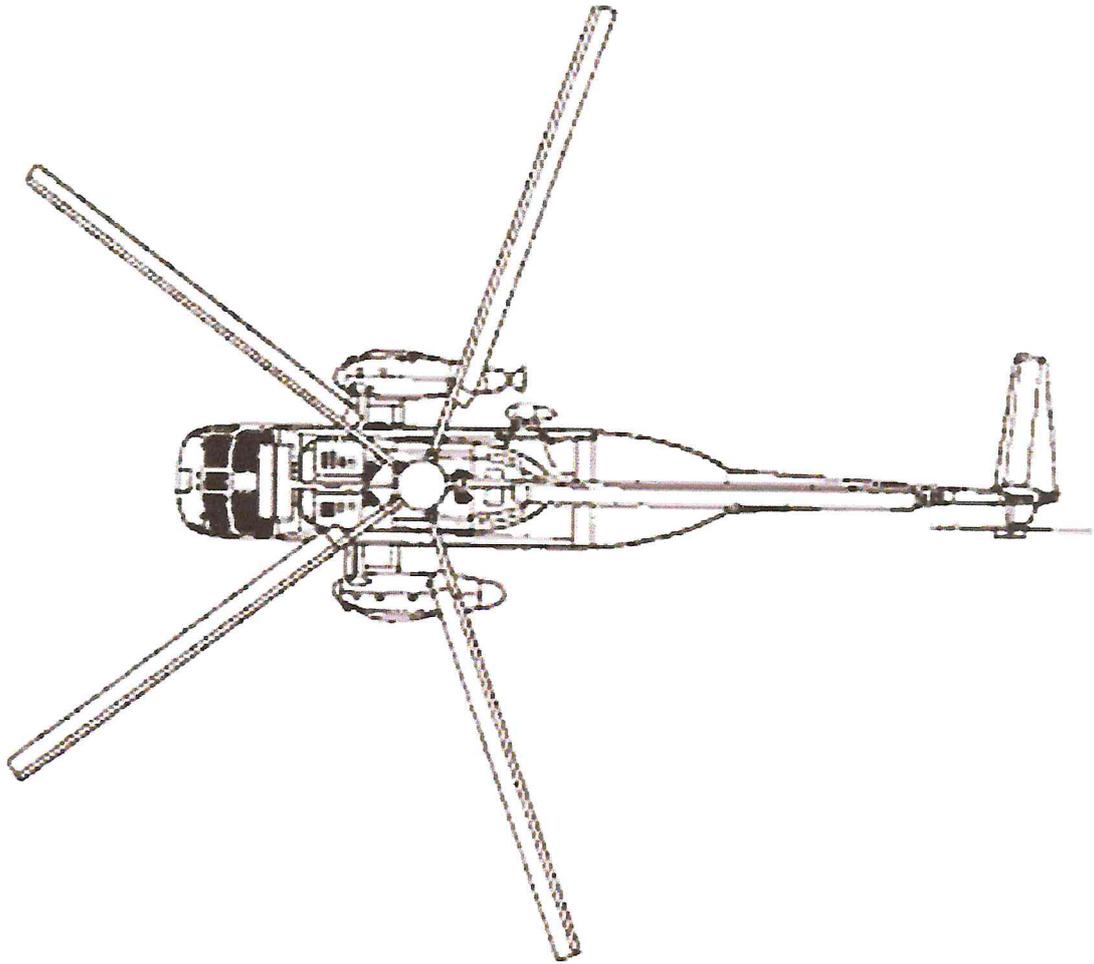
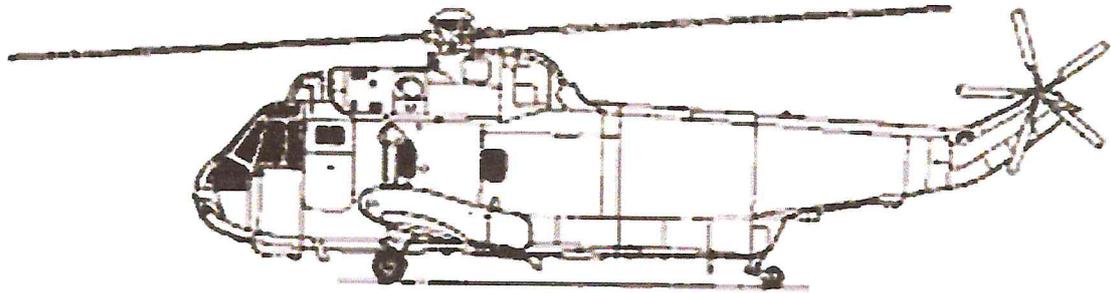
Vitesse maximale	267km/h
Plafond	4 481 m
Vitesse ascensionnelle	400-670 m/min
Distance franchissable	1 000 km

### Armement

Interne	<b>2 torpilles anti-sous-marines Mk 46/44 (SH-3H) grenade anti-sous-marine nucléaire B-57</b>
Externe	<b>Sonar immergé Diverses bouées sonars Mitrailleuses ou Minigun pour certaines missions</b>

---

Plan de l'hélicoptère :



Le Sea King a été conçu pour être un appareil embarqué de l'aéronavale. Le rotor principal à 5 pales et la queue de l'hélicoptère peuvent donc être repliés pour faciliter le stockage. Grâce à sa coque amphibie, le Sea King peut amerrir. Cependant, cette opération est particulièrement périlleuse du fait des vagues notamment et n'est utilisée qu'en cas d'urgence. De plus, la coque n'a qu'une étanchéité limitée.

Les flotteurs ont été conçus avec des aides à la flottabilité gonflables.

En fonction des missions, l'équipement et l'armement des Sea King sont très variables. Un exemple d'armement pour une patrouille maritime offensive pourrait être l'emport de deux torpilles (MK-46/44), quatre grenades sous-marines ou deux missiles anti-navires (Sea Eagle ou Exocet).

Fiche Sikorski s16 :

Type Hélicoptère de transport militaire et de lutte anti-sous-marine

---

Statut en production

Premier vol 11 mars 1959

Mise en service 1961

Date de retrait toujours en service

#### Équipage

4 (2 pilotes et 2 opérateurs de systèmes de lutte anti-sous-marine) + 3 passagers

#### Motorisation

Moteur GE Aviation T58-GE-10

Nombre 2

Type Turbine

Puissance unitaire 1 400 ch

---

### Bibliographie :

- [1]: Federal Aviation Administration. Rotorcraft Flying Handbook. Aviation Supplies and Academics, 2000.
- [2]: F. Kendoul, I. Fantoni, and R. Lozano. Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors. 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference, Seville, Spain, pages 8144–8149, 2005.
- [3]: P. Lefort and J. Hamann. L'hélicoptère théorie et pratique. Chiron, deuxième édition, 2002.
- [4]: P. Lefort and J. Hamann. L'hélicoptère théorie et pratique. Chiron, 1975.
- [5]: A. Vilchis. Modélisation et Commande d'Hélicoptère. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001.
- [6]: R.W.Prouty. Helicopter Performance, Stability, and Control. Krieger, 1995.
- [7]: Y. Su and Y. Cao. A nonlinear inverse simulation technique applied to coaxial rotor helicopter maneuvers. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, 74(6) :525–533, 2002
- [8]: B. Mettler, C. Dever, and E. Feron. Scaling effects and dynamic characteristics of miniature rotorcraft. Journal of guidance, control, and dynamics, 27(3) :466–478, 2004.
- [9]: DONALD McLEAN, Automatic Flight Control Systems 1990
- [10]: MIL-HDBK -1797, US Department of Defense (1997) tablu Roulis
- [11]: Anne Girard « identification des coefficient aérodynamique et commande de vol non linéaire » EPM-RT
- [12]: Gibson (1997,1999) :Hodgkinson 1999 us departement of defense 1990
- [13]: E. Trélat, Contrôle optimal : théorie & applications, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes" (2005), 246 pages. ISBN 2 7117 7175 X.73
- [14]: cours Commande optimale Emmanuel Trélat Notes du cours A08 2007/2008