

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA

Faculté des sciences

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE MASTER
En Mathématiques

Option : Recherche Operationelle

THÈME :

**Application de l'algorithme d'optimisation
chaotique basé sur une nouvelle carte
chaotique unidimensionnelle**

Réalisé par :

TAIBI Nesrine et HAMAIDI Ouafa

DJEMIA Noura	M.A.A	Université de Blida 1	Présidente
BOUKOFTANE Amina	M.A.A	Université de Blida 1	Examinatrice
MESSAOUDI Nadia Amel	M.C.B	Université de Blida 1	Encadreur

Juillet 2023

Résumé

Ce travail consiste à appliquer un algorithme d'optimisation chaotique pour résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes. Ils sont résolus par des méthodes d'optimisation déterministes et stochastiques.

Des notions sur les systèmes dynamique chaotiques , en particulier les systèmes dynamiques discrets sont présentées. Ils représentent des cartes chaotiques qui génèrent des valeurs numériques.

L'algorithme d'optimisation chaotique est une méthode d'optimisation stochastique qui fournit une solution globale. Cet algorithme utilise directement les valeurs générées par des cartes chaotiques pour chercher la solution optimale. La sensibilité aux conditions initiales et la propriété stochastiques du chaos font l'optimisation chaotique pour mieux obtenir la solution optimale globale et de s'échapper des minimaux locaux que les autres algorithmes stochastiques et déterministes.

Nous avons proposé une nouvelle carte chaotique unidimensionnelle qui est justifiée numériquement par les caractéristiques du chaos.

Nous avons appliqué l'algorithme d'optimisation chaotique sur quatre fonctions tests (Sphere, Griewank, Rastrigin) basé sur six cartes chaotiques : carte de Lozi, carte logistique, carte tente, carte circulaire, carte sinusoidale ainsi que la nouvelle carte chaotique proposée . Une étude comparative a été réalisée pour les différentes cartes chaotiques, montre que la carte chaotique proposée donne de résultat satisfaisant.

Abstract

This work involves to apply a chaotic optimization algorithm to solve unconstrained optimization problems. These problems are solved by using deterministic and stochastic optimization methods.

Concepts of chaotic dynamical systems, particularly discrete dynamical systems, are presented. They represent chaotic maps that generate numerical values. The chaotic optimization algorithm is a stochastic optimization method that provides a global solution. This algorithm directly uses the values generated by chaotic maps to search for the optimal solution. The sensitivity to initial conditions and the stochastic properties of chaos make chaotic optimization better at obtaining the global optimal solution and escaping local minima compared to other stochastic or deterministic algorithms.

We have proposed a new one-dimensional chaotic map that is numerically justified by the characteristics of chaos. We have applied the chaotic optimization algorithm to four test functions (Sphere, Griewank, Rastrigin , function test 4) based on six chaotic maps : Lozi map, logistic map, tent map, circular map, sinusoidal map, and the proposed new chaotic map. A comparative study was conducted for the different chaotic maps, showing that the proposed chaotic map yields satisfactory results.

ملخص

هذا العمل يهدف إلى تطبيق خوارزمية التحسين الفوضوية لحل مشكلات التحسين غير المقيدة. يتم حل هذه المشكلات باستخدام طرق التحسين المحددة والعشوائية.

يتم تقديم مفاهيم حول أنظمة الديناميكا الفوضوية ، وبشكل خاص أنظمة الديناميكا المتقطعة تمثل هذه الأنظمة خرائط فوضوية تولد قيمًا عديدة.

تعد خوارزمية التحسين الفوضوية طريقة تحسين عشوائية توفر حلاً عالميًا. تستخدم هذه الخوارزمية مباشرة القيم التي تم توليدها بواسطة الخرائط الفوضوية للبحث عن الحل الأمثل. تتيح الحساسية للظروف الابتدائية وخاصة الفوضى العشوائية للتحسين الفوضوي الحصول على الحل الأمثل العالمي والهروب من الأدنى المحلي أفضل من الخوارزميات الأخرى العشوائية والمحددة.

لقد قمنا بتقديم خريطة فوضوية جديدة أحادية البعد تُبرر عددًا كبيرًا من خصائص الفوضى.

لقد قمنا بتطبيق خوارزمية التحسين الفوضوية على أربعة وظائف اختبار (الكرة، جريوانك، راستريجين) استنادًا إلى ست خرائط فوضوية : خريطة لوزي، خريطة اللوجستية، خريطة الخيمة، خريطة دائرية، خريطة سينوسية، والخريطة الفوضوية الجديدة المقترحة. تم إجراء دراسة مقارنة للخرائط الفوضوية المختلفة، وأظهرت أن الخريطة الفوضوية المقترحة تعطي نتائج مرضية.

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir aidé à réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier énormément notre promotrice Madame **Messaoudi Nadia**, maître de conférences à l'université de Blida 1 pour son aide appréciable, sa confiance, sa disponibilité et ses précieux conseils durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent aux membres des jury à Madame **Djemea Noura** , maître assistante à l'université de Blida 1 qui nous à fait l'honneur de présider et de participer à l'évaluation de notre travail , à Madame **Boukoftane Amina** maître assistante à l'université de Blida 1 pour avoir accepté d'examiner ce mémoire et de faire partie de ce jury .

Nous tenons à exprimer notre gratitude a tous les enseignants de la spécialité mathématique .

Nous remercions nos très chers parents pour leur soutien moral qui nous a permis de réussir et de terminer nos études .

Dédicace

Le voyage n'était pas court et il n'aurait pas du l'être et la route n'était pas pleine de facilités , mais moi par ma volonté, je l'ai fait , par la grace de dieu .

Je dédie ce travail

À l'âme de ma grande mère **khedidja** allah yarhamha , je souhaite que vous soyez avec moi et partager mon bonheur avec vous , j'avais besoin de vous et de vos prières constantes .

À celui dont je porte le nom avec fierté , à celui qui m'a fait devenir une femme, ma source de vie, à mon soutien qui était toujours à mes côtés pour me soutenir et m'encourager. À mon cher père.**Djillali**.

À mon paradis, à la prunelle de mes yeux, à la source de ma joie et de mon bonheur, ma lune et le fil d'espoir qui allume mon chemin, ma chère mère. **Aicha**.

À mon adorable petite sœur **Khadidja** qui était toujours à mes côtés pour m'encourager

À mon frère **Youcef** malgré sa turbulence. .

À tous les membres de ma grande famille spécialement à ma cousine **ikram** .À mes amies et mes proches .

Et bien sur à ma petite chatte qui reste toujours éveillée avec moi .

Sans oublier mon binôme **Ouafa** pour son soutien moral , sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet .

TAIBI NESRINE

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

À l'âme de mon petit frère **Youcef** qui me manque énormément et que j'aurais souhaité avoir à mes côtés en ce jour, paix à son âme.

À **mes chers parents**, qui ont sacrifié leur vie pour ma réussite et m'ont éclairé le chemin par leur conseils judicieux, c'est grâce à vous et pour vous que j'ai fait mon mémoire. Aucun mot sur cette page ne saurait exprimer ce que je vous dois, ni combien je vous aime. J'espère qu'un jour, je pourrais leur rendre un peu de ce qu'ils ont fait pour moi, que dieu leur prête bonheur et longue vie.

À mes chers adorables sœurs **Zineb, Fatma El Zohraet Hanane** qui m'ont donné le sens de la vie.

À mon très cher frère **Houssam** pour leur soutien moral et leur présence à tout moment à mes coté .

À mon cher fiancé **Abdeslam** pour son soutien et son encouragement pendant tout la durée de ce travail que Dieu le garde toujours pour moi et à mes cotés.

À mon neveu **Youcef**.

À ma belle famille.

À mon binôme **Nesrin** pour sa patience et compréhension tout au long de ce projet.

À mes amies **Kahina, Yamina, Khadîdja, chaima**.

À toute la famille **HAMAIDI** et mes proches .

HAMAIDI OUAFA

Table des matières

Liste des tableaux	xii
Table des figures	xii
Introduction Générale	1
1 Généralités sur la théorie du chaos	3
1.1 Système dynamique	3
1.1.1 Système dynamique continu	4
1.1.2 Système dynamique discret	4
1.2 Systèmes autonomes et non autonomes	5
1.3 Comportement des système dynamique	6
1.3.1 L'espace des phases	6
1.3.2 Espace d'état	6
1.3.3 Orbite ou Trajectoire	6
1.3.4 Portrait de phase	7
1.3.5 Points d'équilibres	7
1.3.6 Points périodiques	7
1.3.7 Bassin d'attraction	7
1.3.8 Section de poincaré	8
1.4 Le Chaos	8
1.4.1 Histoire de chaos	8
1.4.2 Quelques définitions du chaos	8
1.4.3 Systèmes chaotiques	10
1.5 Carte chaotique	10
1.6 Les méthodes de détection du chaos :	10

1.6.1	Sensibilité aux conditions initiales	11
1.6.2	Exposant de Lyapunov	11
1.6.3	Bifurcation	14
1.6.4	Les Attracteurs	16
1.7	Scénarios chaotiques	17
1.7.1	Par doublement de période	17
1.7.2	Par Intermittences	17
1.7.3	Quasi-périodicité	18
1.8	Différence entre le chaos et l'aléatoire	18
1.9	Domaines d'application du chaos	19
2	Générateur de nombre basé sur une nouvelle carte chaotique unidimensionnelle	21
2.1	Application de Lozi (Lozi map)	21
2.2	Application Circulaire (circle map)	22
2.3	Application tente (tent map)	23
2.4	Application sinusoidale (sinusoidal map)	24
2.5	Application logistique (Logistic map)	24
2.5.1	Etude de l'application logistique	25
2.6	Nouvelle carte chaotique unidimensionnelle	27
2.7	Etude de nouvelle carte chaotique	28
2.7.1	Sensibilité aux conditions initiales	28
2.7.2	Étude de stabilité des points fixes	30
2.7.3	Diagramme de bifurcation pour la nouvelle carte chaotique	31
2.7.4	Exposant de Lyapunov de la nouvelle carte chaotique	33
2.7.5	Attracteur de la nouvelle carte chaotique	34
3	Application de l'algorithme d'optimisation chaotique basé sur la nouvelle carte chaotique	35
3.1	Méthodes d'optimisation	35
3.1.1	Définitions	35
3.2	Méthode d'optimisation global	37
3.2.1	Approches déterministes et approches probabilistes	37
3.3	La Recherche Chaotique de l'optimum	38

3.4	Le principe et les étapes de l'algorithme d'optimisation chaotiques (COA) .	39
3.5	Résultats expérimentaux et Analyses	41
3.6	Résultats numériques	43
3.6.1	Résultats pour la fonction test 1 (Griewank function)	44
3.6.2	Résultats pour la fonction test 2 (Sphere function)	47
3.6.3	Résultats pour la fonction test 3 (Rastrigin function)	51
3.6.4	Résultats pour la fonction test 4	55
	Conclusion Générale	58
	References	59

Liste des tableaux

1.1	Comparaison entre le chaos et l'aléatoire	18
3.1	L'ensemble des valeurs des paramètres pour chaque exécution de l'algorithme COA.	43
3.2	L'optimum de la fonction Griewank pour $n = 3$ avec différents Chao Map .	44
3.3	L'optimum de la fonction Griewank pour $n = 10$ avec différents Chao Map	45
3.4	L'optimum de la fonction Sphere pour $n = 3$ avec différents Chao Map . .	47
3.5	L'optimum de la fonction Sphere pour $n = 10$ avec différents Chao Map . .	49
3.6	L'optimum de la fonction Rastrigin pour $n = 3$ avec différents Chao Map .	51
3.7	L'optimum de la fonction rastrigin pour $n = 10$ avec différents Chao Map .	53
3.8	L'optimum de la fonction test 4 pour $n = 2$ avec différents Chao Map . . .	55
3.9	L'optimum de la fonction test 4 pour $n = 5$ avec différents Chao Map . . .	56

Table des figures

1.1	Caractérisation des attracteurs.	11
1.2	Diagramme de bifurcation de l'application logistique	15
1.3	(a) Un point fixe , (b) Un cycle limite , (c) Un tore	16
1.4	Attracteur de lozi (attracteur chaotique)	17
2.1	(a) Application de lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ ($X_0 = 0.7, N = 300$). (b) Attracteur de lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$	22
2.2	Application circulaire pour $a = 0.5$ et $b = 0.2$	23
2.3	Application tent pour $X_0 = 0.8$	23
2.4	Application sin pour $a = 2, 3$	24
2.5	(a) Application logistique pour $a = 2$. (b) Application logistique pour $a = 4$	25
2.6	(a)Exposant de lyapunov (b) diagramme de bifurcation de l'application logistique	26
2.7	New chao map ($a = 0.6, N = 300$)	27
2.8	(a) New chao map ($a = 1, N = 300, X_0 = 0.7$) (b) New chao map ($a = 1, N = 300, X_0 = -0.7$)	28
2.9	Sensibilité aux conditions initiales de la nouvelle carte chaotique ($x_0 = 0.7, x_0 = 0.75, a = 1$)	29
2.10	La différence entre $X(x'_0) = 0.7$ et $X(x_0) = 0.75$	29
2.11	Représentation graphique de $x = a \times \sin(\pi(1 - x))$	30
2.12	Diagramme de bifurcation pour la nouvelle carte chaotique $0 \leq a \leq 2.5$	32
2.13	Exposant de lyapunov , $0 \leq a \leq 2.5, N = 1000, x_0 = 0.7$	33
2.14	Attracteur de la nouvelle carte chaotique ($a = 1, N = 500, x_0 = 0.7$)	34
3.1	Minima locaux et minima globaux d'une fonction multimodale	36
3.2	l'Algorithme de recherche aléatoire et chaotique	38
3.3	Griewank function	42

3.4	sphere function	42
3.5	Rastrigin function	43
3.6	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Griewank (n=10)	46
3.7	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Sphere (n=3)	48
3.8	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Sphere (n=10)	50
3.9	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Rastrigin (n=3)	52
3.10	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Rastrigin (n=10)	54
3.11	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction test 4 (n=2)	56
3.12	Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction test 4 (n=5)	57

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques apparaissent dans plusieurs domaines, en physique, en météorologie, en biologie et en chimie, en économie et dans les sciences sociales. Ils sont exprimés par des expressions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps et d'étudier leur comportement.

La théorie des systèmes dynamiques [1] est une branche classique des mathématiques introduite par Newton depuis 1665, où l'étude de ces phénomènes doit permettre la possibilité de prédire et de réguler le comportement du système afin d'obtenir les résultats souhaités.

Elle fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équation différentielles ordinaires. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus. Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets. C'est-à-dire des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières.

Les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les systèmes continus et discrets.

Les systèmes dynamiques peuvent avoir différents comportements asymptotiques (tendre vers un équilibre, un cycle limite qui est une trajectoire fermée dans l'espace des phases..) en fonction des valeurs de leurs paramètres. Il peut donc exister certaines valeurs pour lesquelles le comportement du système passe d'un état qualitatif à un autre (par exemple l'attracteur du système était un équilibre et devient un cycle). Ce changement d'état qualitatif est une bifurcation et la valeur du paramètre associée est appelée valeur de bifurcation. Un système est donc structurellement instable sur un intervalle de valeurs d'un paramètre qui contient une valeur de bifurcation. Il existe plusieurs systèmes présentant ce comportement ils sont dits chaotiques, ils sont régis par des lois déterministes dépendent d'un ou de plusieurs paramètres et leur évolution dans le temps est imprévisible. Ces systèmes ne répètent jamais leur comportement et sont très sensibles aux conditions initiales.

Les recherches sur les systèmes dynamiques chaotiques ont connu un développement intensif, notamment depuis la découverte du phénomène de sensibilité aux conditions initiales par le météorologue Edward Lorenz en 1963 [2]. C'est en 1975 que Tien-Yien Li [3] et

James A. Yorke ont introduit le terme "chaos" pour décrire ces systèmes qui manifestent cette propriété. Cependant, les travaux de David Ruelle [4] et du mathématicien Floris Takens, réalisés bien avant cette découverte, ont grandement contribué à la compréhension de la dynamique chaotique.

Dans notre travail, on s'intéresse aux systèmes dynamiques chaotiques discrets qui sont définis comme des équations récurrence (ou aux différences) d'un espace métrique à lui-même. Ils représentent également des cartes chaotiques. Il existe de nombreux exemples de cartes chaotiques [5] [6]. De nouvelles cartes chaotiques ont été présentées (voir [7],[8] [9]) .

Nous proposons une nouvelle carte chaotique unidimensionnelle. Nous démontrons que ce système est chaotique et vérifie les caractéristiques du chaos comme la sensibilité des conditions initiales , l'exposant de Lyapunov , le diagramme de bifurcation et l'attracteur.

Ensuite pour tester l'efficacité de notre carte chaotique . Nous l'avons utilisé l'algorithme d'optimisation chaotique .

L'idée fondamentale de l'algorithme d'optimisation chaotique est d'utiliser des systèmes dynamiques chaotiques pour explorer l'espace des solutions à la recherche des optima locaux ou globaux.

Notre mémoire contient trois chapitres.

Dans le chapitre un, nous introduisons quelques notions sur la théorie des systèmes dynamiques chaotiques. On définit les systèmes dynamiques, son comportement et la notion du chaos. On présente les systèmes dynamiques chaotiques, ainsi que leurs propriétés et ses caractéristiques. On donne la définition des cartes chaotiques et celle du diagramme de bifurcation , ainsi que les différents types d'attracteurs. On cite quelques domaines d'application de la théorie du chaos.

Le chapitre deux est consacré à la présentation de certaines cartes chaotiques , à savoir Lozi map, circle map, tent map, sinusoidal map, Logistic map. Une carte chaotique unidimensionnelle a été proposée basée sur deux cartes chaotiques : logistic map et sinusoidal map . L'étude des caractéristiques du chaos map proposé montre que l'application est chaotique.

Le dernier chapitre présente un algorithme d'optimisation chaotique (COA). Il est appliqué sur quatre fonctions testées dont les variables à déterminer sont générées chaotiquement par les chaos maps : Lozi map, circle map, tent map, sinusoidal map, Logistic map ainsi que le chaos map proposé. Une étude comparative des solutions obtenues a été également présentée. Des programmes des COA basés sur les différentes cartes chaotiques ont été élaborés à l'aide de logiciel Matlab.

On clôture notre mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie du chaos

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons donner quelques notions sur les systèmes dynamiques, en particulier les systèmes dynamique discret. On définit également, la trajectoire, l'orbit, les points d'équilibres, les espaces de phase et les attracteurs. Ensuite, nous définissons le chaos, ses propriétés, et les systèmes chaotiques.

1.1 Système dynamique

Définition :

Un système dynamique [10] est la donnée d'un système et d'une loi décrivant l'évolution de ce système. Ce peut être l'évolution d'une réaction chimique au cours du temps, le mouvement des planètes dans le système solaire (régé par la loi universelle de la gravitation de Newton) ou encore l'évolution de la mémoire d'un ordinateur sous l'action d'un programme informatique. On distingue les systèmes dynamiques à temps discrets (comme un programme informatique) des systèmes dynamiques à temps continu (comme une réaction chimique).

Définition : Un système dynamique est une structure qui évolue au cours du temps de façon [1] :

- Causale, c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes passés ou présents .
- déterministe, c'est-à-dire qu'à une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

Types d'évolution déterministe du système dynamique :
L'évolution déterministe du système dynamique peut se modéliser de deux façons dis-

tinctes :

* Une évolution continue dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire.

* Une évolution discret dans le temps. Ce second cas est souvent le plus simple à décrire mathématiquement . Cependant l'étude théorique de ces modèles discrets est fondamentale, car elle permet de mettre en évidence des résultats importants, qui se généralisent souvent aux évolutions dynamiques continues.

1.1.1 Système dynamique continu

Définition : Un système dynamique continu est présenté par un système d'équations différentielles de la forme[11] :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, \mu); x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

où :
 $x \in \mathbb{R}^n$ et $\mu \in \mathbb{R}^r$,
 $t \in \mathbb{R}^+$ représente la variable de temps,
 $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Exemple 1.1.1 Le système de Lorenz est défini par les équations suivantes [2] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1.2)$$

Où x, y, z sont les variables d'état du système σ, r et b sont des paramètres réels .

1.1.2 Système dynamique discret

Définition : Un système dynamique dans le cas discret, est représenté par des équations aux différences, appelées également équations de récurrences [11] :

$$x_{k+1} = f(x_k, k, \mu), \quad x(k_0) = x_0, \quad (1.3)$$

où :
 $k \in \mathbb{N}$, est l'instant discret,

k_0 est l'instant discret initial,
 $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des états du système.
 x_0 est le vecteur des états initiaux ,
 $\mu \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des paramètres,
 f est appelé application ou fonction itération de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ qui indique la dynamique du système en temps discret.

Exemple 1.1.2 Système de Lozi [12] :

$$\begin{cases} X_{k+1} = 1 - a|X_k| + Y_k \\ Y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (1.4)$$

Où a et b sont des paramètres réels .

1.2 Systèmes autonomes et non autonomes

Système autonome

Définition : Un système différentiel est dit autonome si f ne dépend pas de temps (t) [13] :

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1.5)$$

Système non autonome

Définition : Un système différentiel [13]est dit non autonome si f dépend de temps (t) :

Exemple 1.1.3

L'équation suivante est non autonome :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{3+t} \quad (1.6)$$

Remarque1.1.1 :

-Par un changement de variable approprié, on peut toujours transformer un système dynamique non autonome de dimension n en un système dynamique autonome équivalent de dimension $n + 1$.

-Dans le cas des système dynamique discret , on peut parlé des systèmes autonome si f ne depend pas de k .

1.3 Comportement des système dynamique

Le comportement dynamique du système à un instant donné est lié à l'évolution d'un certain nombre de variables d'état qui le caractérisent [14].

1.3.1 L'espace des phases

L'espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable.

1.3.2 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées qui doivent être fournies pour la description complète du système, cet espace peut être discret ou continu.

$$\forall t, f(t, x_1) = f(t, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

1.3.3 Orbite ou Trajectoire

Soit $f \rightarrow D, D \subseteq \mathbb{R}^n$ une application continue. f^k désigne la k^{ieme} itérée de f , c'est-à-dire : $f^0(x) = x, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots, f^k(x) = f(f^{k-1}(x)) \forall k = 0, 1, 2, \dots$

Définition :

L'orbite positive de x par le système dynamique f est définie par :

$$\mathcal{O}_f^+ = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Si f est bijective, on définit l'orbite de x par :

$$\mathcal{O}_f = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Ainsi que l'orbite négative :

$$\mathcal{O}_f^- = \{f^{-k}(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

1.3.4 Portrait de phase

Le portrait de phase d'un système dynamique est une représentation graphique de plusieurs trajectoires représentatives dans l'espace des phases. La lecture de cette représentation graphique sera très utile pour avoir une idée de comportement du système.

1.3.5 Points d'équilibres

On appelle point d'équilibre(ou point fixe) d'un système le point x^* pour laquelle on obtient $f(x^*) = 0$ dans le cas continu et $f(x^*) = x^*$ dans le cas discret.

Stabilité du point fixe

La stabilité du point x^* est déterminée par la pente $m = f'(x^*)$ de la tangente au point x^* à la courbe représentant f

Nous avons les quatre cas suivants :

1. Le point x^* est attractif (ou stable) si $|m| < 1$.
2. Le point x^* est répulsif (ou instable) si $|m| > 1$.
3. Le point x^* est indifférent si $|m| = 1$.
4. Le point x^* est super attractif (ou super stable) si $m = 0$.

1.3.6 Points périodiques

S'il existe $k \geq 1$, tel que $F^k(x) = x$, on dit que x est un point périodique. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que :

$$F^k(x) = x \tag{1.7}$$

1.3.7 Bassin d'attraction

Le bassin d'attraction est l'ensemble des points initiaux de l'espace de phases dont les trajectoires convergent vers l'attracteur (qui est une forme géométrique de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires de phase) et le parcourent d'une façon spécifique et unique.

1.3.8 Section de Poincaré

La technique dite des sections de Poincaré facilite l'étude des systèmes dynamiques considérés en ramenant l'analyse d'un système différentiel (temps continu) à celle d'une application (temps discret). Par le biais de cette méthode, la dimension d du problème initial sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension $d - 1$.

1.4 Le Chaos

1.4.1 Histoire de chaos

En 1880 le Roi Oscar II de Suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n -corps des orbites des corps célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu [15].

En 1890 Henri Poincaré gagne le premier prix du Roi Oscar II. Etant le plus proche à résoudre le problème de n -corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est né (mais pas encore mentionné!) [15].

En 1963 Edward Lorenz découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange [15].

En 1975 Tien-Yien Li et James A. Yorke [15] ont présenté pour la première fois le terme "chaos" dans un article intitulé "Period three implies chaos" .

En 1978, Mitchell Feigenbaum [15] introduit un nombre universel associé au chaos.

Edward Ott, Celso Grebogi et James A. Yorke [15] introduisent la notion de contrôle du chaos .

1.4.2 Quelques définitions du chaos

On trouve dans la littérature plusieurs définitions mathématiques du chaos, mais jusqu'à présent, il n'existe aucune définition mathématique universelle du chaos. On rappelle quelques définitions utiles.

1. Soit J un ensemble . $f : J \rightarrow J$ est dite topologiquement transitive si pour toute paire d'ensembles ouverts $U, V \subset J$, il existe $k > 0$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.
2. $f : J \rightarrow J$ a une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in J$ et tout voisinage N_x de x , il existe $y \in N_x$ et $n > 0$ tels que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.
3. Supposons que X soit un ensemble et Y un sous-ensemble de X ($Y \subset X$). On dit que Y est dense dans X si, pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ arbitrairement proche de x , autrement dit, Y est dense dans X si pour tout $x \in X$, on peut trouver une suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Y qui converge vers x .

Définition 2.1

Soit un sous-ensemble V de X , la fonction $f : X \rightarrow X$ est dite chaotique sur V si :

1. La fonction f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. La fonction f est topologiquement transitive.
3. L'ensemble des points périodiques de la fonction f est dense dans X .

Définition 2.2 (Chaos au sens de Li-Yorke)

Une application continue $f : I \rightarrow I$ où I est l'intervalle unitaire ($I = [0, 1]$), est chaotique au sens de Li-York s'il y a un ensemble indénombrable S tel que les trajectoire de deux points distincts x, y dans S sont proximaux et non asymptotique [16] :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \text{ et } \limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$$

Définition 2.3 (Chaos au sens de Devaney)

Soit V un ensemble. Une application continue $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si [17] :

- f est topologiquement transitif : pour toute paire d'ensembles ouverts non vides $U, W \subset V$ il existe un $K > 0$ tel que $f^K(U) \cap W \neq \emptyset$
- Les points périodiques de f sont denses dans V .
- f possède une dépendance sensible aux conditions initiales : il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in V$ et tout voisinage $v(x)$, ils existent un $y \in v(x)$ et un $n > 0$ tel que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

1.4.3 Systèmes chaotiques

Les systèmes dynamiques chaotiques [18] sont les systèmes dynamiques satisfaisant aux conditions suivantes :

- **La non-linéarité** : un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire, ne peut pas être chaotique.
- **Le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.
- **La sensibilité aux conditions initiales** : de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à des comportements radicalement différents dans son état final.
- **L'imprévisibilité** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales.

1.5 Carte chaotique

Une carte chaotique (en anglais chao map) [19] : est une relation de récurrence (suite ou une équation aux différences) décrivant un système dynamique chaotique discret.

$$x_i(k+1) = f(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)), k = 0, 1, 2, \dots$$

où : $x \in S$, $f : S^n \rightarrow S^n$ est une fonction à n dimensions $S \subset [0, 1]^n$ ou $[-1, 1]^n$

n : la dimension de l'espace d'état

$x_i(k+1)$: l'état suivant. Et $x_i(k)$: l'état du système au temps k .

k : désigne le temps discret

Il existent des cartes chaotiques unidimensionnelles , comme Logistic map, Tent map, sinus map, et des cartes bidimensionnelles telle que : Hénon map et Lozi map.

Remarque : Les cartes chaotiques se produisent souvent dans l'étude des systèmes dynamiques (discret ou continu). Dans la littérature, il existe des chao maps qui décrivent les systèmes dynamiques continus, le lecteur peut se référer aux ([6]) pour plus de détail.

1.6 Les méthodes de détection du chaos :

Il existe plusieurs techniques que nous utilisons pour déterminer si un système est chaotique ou non :

La sensibilité aux conditions initiales

Exposants de Lyapunov

Espace de phase

Section de Poincaré

1.6.1 Sensibilité aux conditions initiales

Cette propriété a été observée pour la première fois par E.Lorenz sur son modèle le météorologique. Elle est connue sous le nom populaire d'effet papillon. La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique, puisque la plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables. [20]

1.6.2 Exposant de Lyapunov

L'exposant de Lyapunov [21] sert à mesurer le degré de stabilité d'un système et de permet de quantifier la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Le nombre des exposants de Lyapunov est égal à la dimension de l'espace des phases et ils sont généralement indexés du plus grand au plus petit. L'apparition du chaos exige que les exposants de Lyapunov doivent remplir trois conditions :

- Au moins l'un d'eux est positif pour expliquer la divergence des trajectoires.
- Au moins l'un d'eux est négatif pour justifier le repliement des trajectoires.
- Au somme de tous les exposants est négative pour expliquer qu'un système chaotique est dissipatif, c'est-à-dire qu'il perd de l'énergie.

Type d'Attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
Point fixe	-, -, -
Cycle limite périodique	0, -, -
Cycle limite quasi-périodique	0, 0, -
Attracteur étrange	+, 0, -

FIGURE 1.1 – Caractérisation des attracteurs.

Cas des systèmes discrets unidimensionnels

On choisit deux conditions initiales très proches, soit x_0 et x'_0 séparées d'une distance d_0 , et on regarde comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. On sait que

$$d_0 = |x'_0 - x_0|$$

après une itération d_0 devient d_1 :

$$d_1 = |x'_1 - x_1|$$

après n itérations la distance évolue à d_n :

$$d_n = |x'_n - x_n|$$

La valeur $\frac{d_1}{d_0}$ décrit l'évolution de l'erreur d_1 dans la 1^{ière} itération :

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0}$$

et pour d_0 infinitésimale

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = |f'(x_0)|$$

On suppose que les deux trajectoires $x(x_0, t)$ et $x(x'_0, t)$ s'écartent à un rythme exponentiel à la 1^{ière} itération. On pourra alors trouver un réel $\lambda(x_1)$ tel qu'après une (1) itération :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = e^{\lambda(x_1)}$$

par comparaison avec la limite précédente

$$e^{\lambda(x_1)} = |f'(x_0)|$$

en passant au logarithme, on trouve :

$$\lambda(x_1) = \ln |f'(x_0)|$$

$\lambda(x_1)$ est appelé exposant de Lyapunov local, qui mesure la divergence ou la convergence après la 1^{ière} itération.
on sait que

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^2(x_{n-2}) = \dots = f^n(x_0)$$

donc, l'évolution de l'erreur après n itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|x'_n - x_n|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0}$$

et pour d_n infinitésimale

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

l'erreur d_n tend vers une limite, un réel λ qui représente l'exposant de Lyapunov

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = e^{\lambda(x_n)}$$

d'où

$$e^{\lambda(x_n)} \simeq \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

par conséquent [10]

$$\lambda(x_1) = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

En faisant tendre n vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne [10] [22], on obtient :

$$\lambda(x_1) \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{n-1}(x_0)}{dx} \right| = \dots = \frac{1}{n} \ln(|f'(x_{n-1})| \dots |f'(x_2)| |f'(x_1)|)$$

$$\lambda(x_1) \simeq \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^n |f'(x_i)|$$

on consulte

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|$$

avec la notation :

$$f'(x_i) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}$$

On a :

- si $\lambda < 0$, alors x^* est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale x_0 ($ie\{x_i\}$) est asymptotiquement stable au voisinage de x^* .
- si $\lambda = 0$, x^* est stable et par conséquent la trajectoire issue de x_0 est périodique donc stable.
- si $\lambda > 0$, x^* est instable (chaotique) ainsi que la trajectoire issue de x_0

Les exposants de Lyapunov pour le cas continu et le cas discret multidimensionnel sont donnés dans la thèse [6] pour plus de détail.

1.6.3 Bifurcation

La bifurcation est un changement dans les points d'équilibre, ou dans les propriétés de stabilité d'un système non linéaire.

Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeur de bifurcation.

Diagramme de bifurcation

Un diagramme de bifurcation est la représentation des points d'équilibre en fonction du paramètre de bifurcation.

Le diagramme de bifurcation est un outil qui permet de repérer les valeurs du paramètre qui induisent des bifurcations, c'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une variable d'état. En fixant les valeurs des autres paramètres du système, on obtient le diagramme de bifurcation par rapport au paramètre considéré.

Exemple : Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

L'équation logistique est décrite par :

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k) \tag{1.8}$$

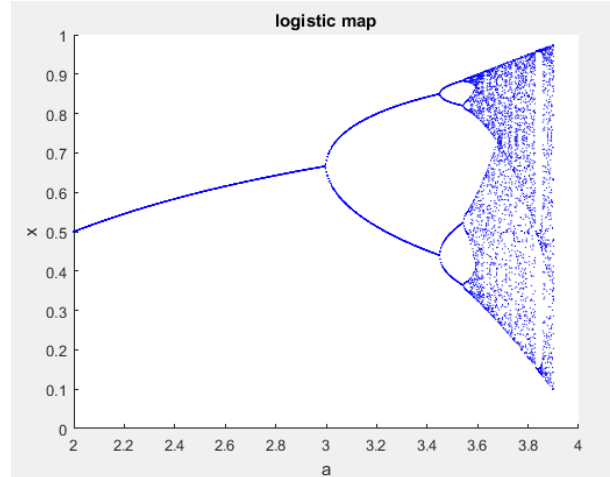


FIGURE 1.2 – Diagramme de bifurcation de l’application logistique

Types de bifurcation

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonction $F(x(k), \mu)$. Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale qui est l’équation générale typique de ce type de bifurcation. Parmi les différents types de bifurcations, pour les systèmes dynamiques discrets, on peut citer [23] :

1. **Bifurcation de type noed-col(ou tangente,ou pli)** : Cette bifurcation se produit lorsque l’une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ (DF c’est la dérivé de F) est égale à $+1$: sur le diagramme des bifurcations on observe, dans ce cas, une courbe de points fixes continue tangente à la ligne droite verticale. Deux points d’équilibres existent (un stable et un instable) avant la bifurcation. Après la bifurcation, plus aucun équilibre n’existe.
2. **Bifurcation transcritique** : Sur le diagramme de bifurcations cela se traduit par deux branches différentes de points fixes qui se croisent en un point et par le changement de stabilité des deux branches au passage par le point d’intersection.
3. **Bifurcation de doublement de période (ou flip)** : Cette bifurcation a lieu lorsque l’une des deux valeurs propres de $DF(x(k), \alpha)$ est égales à -1 . Un point fixe stable d’ordre 1, devient instable en même temps que l’apparition d’un cycle d’ordre 2 stable.
4. **Bifurcation de Neimark-Sacker** : Cette bifurcation se produit lorsque $DF(x(k), \alpha)$ possède deux valeurs propres complexe égales à $\exp(\pm i\theta)$

1.6.4 Les Attracteurs

Lors de l'étude du comportement asymptotique des solutions d'un système dynamique, on trouve des objets dans l'espace des phases qui attirent un grand nombre de solutions issues de conditions initiales différentes. Ces objets sont appelés attracteurs [24] .

Il y a deux types d'attracteurs [24] :
Les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges (chaotiques).

Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et il existe trois types (voir figure 1.2) :

- L'attracteur **"point fixe"** est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
- L'attracteur **"cycle limite"** est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
- L'attracteur **"tore"** il est caractérisé par un régime quasi-périodique ayant n fréquences de base indépendantes .

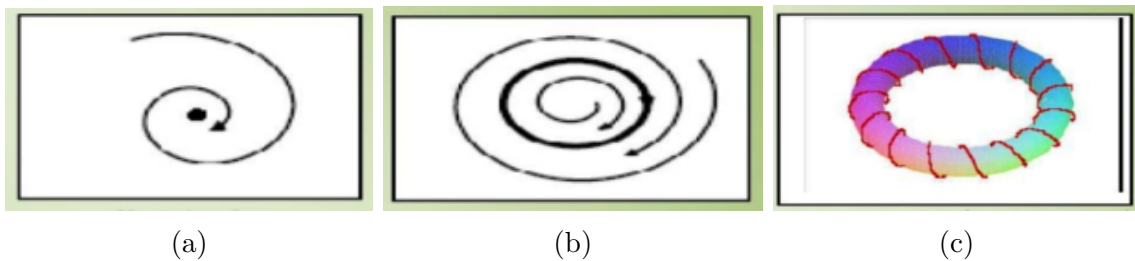


FIGURE 1.3 – (a) Un point fixe , (b) Un cycle limite , (c) Un tore

Attracteurs étranges (Chaotique)

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange. L'attracteur étrange se caractérise par :

- 1) La propriété de récurrence exclut la présence de phénomènes transitoires ou d'éventuelles solutions instables dans un attracteur.

- 2) Un attracteur ne peut pas être divisé en deux attracteurs élémentaires du fait de l'irréductibilité mais il est possible d'isoler plusieurs attracteurs dans un ensemble attracteur.

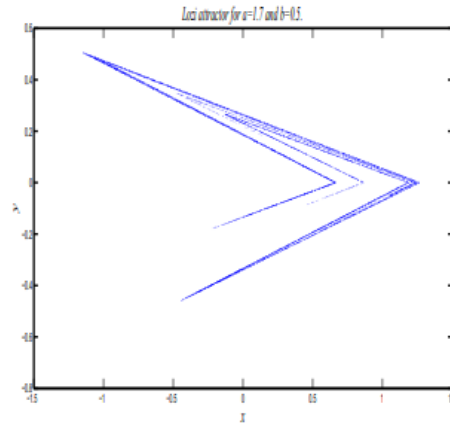


FIGURE 1.4 – Attracteur de lozi (attracteur chaotique)

1.7 Scénarios chaotiques

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos . On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre [25] :

1.7.1 Par doublement de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par R.May en dynamique des populations sur l'application logistique. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [26] .

1.7.2 Par Intermittences

Ce scénario via les intermittences se caractérise par l'apparition erratique de bouffées chaotiques dans un système qui oscille de manière régulière. Le système conserve pendant un certain laps de temps un régime périodique ou pratiquement périodique, c'est à dire une certaine "régularité", et il se déstabilise, brutalement, pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise de nouveau ensuite, pour donner lieu à une nouvelle

”bouffée” plus tard. On a constaté que la fréquence et la durée des phases chaotiques avaient tendance à s’accroître plus on s’éloignait de la valeur critique de la contrainte ayant conduit à leur apparition. L’intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l’état périodique d’où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu’il n’yait pas d’attracteur à proximité. [19]

1.7.3 Quasi-périodicité

Le scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens 1971 [4]. Dans un système à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle, le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau paramètre et il apparaît une troisième fréquence, et ainsi de suite jusqu’au chaos.

1.8 Différence entre le chaos et l’aléatoire

Le chaos et l’aléatoire sont deux concepts distincts, bien qu’ils puissent sembler similaires à première vue , voici quelques différences pour bien différencier entre les deux.

chao	Aléatoire
La théorie du chaos a été créée avec l’aide de plusieurs scientifiques et mathématiciens	Le hasard est lié à l’inconnu et à l’inattendu
Phénomene déterministe	Phénomene non déterministe
prévisible	imprévisible
Il a de l’ordre.	Il n’a pas d’ordre.
des petites variations dans les conditions initiales peuvent conduire à des résultats complètement différents	les événements sont généralement indépendants et répétables

TABLE 1.1 – Comparaison entre le chaos et l’aléatoire

1.9 Domaines d'application du chaos

La théorie du chaos a des applications étendues dans différents domaines, en voici quelques exemples :

1. Physique :

En physique, le chaos est utilisé pour étudier des phénomènes tels que la convection dans les fluides, les systèmes dynamiques chaotiques tels que le mouvement des corps célestes, les oscillateurs non linéaires comme les pendules doubles et les systèmes complexes tels que les réseaux neuronaux. La théorie du chaos permet de modéliser et de comprendre ces systèmes complexes et d'expliquer certains comportements imprévisibles observés dans la nature.

2. Mécanique quantique :

La théorie du chaos est également appliquée en mécanique quantique, où elle permet de comprendre les propriétés statistiques des systèmes quantiques complexes. Les systèmes quantiques chaotiques présentent des propriétés de spectre statistique qui sont universelles et indépendantes des détails spécifiques du système, ce qui a des implications dans des domaines tels que la physique des particules, la théorie des cordes et la physique de la matière condensée.

3. Biologie :

En biologie, la théorie du chaos aide à comprendre les modèles de population, les interactions écologiques et les processus évolutifs. Les systèmes écologiques peuvent souvent présenter des comportements chaotiques, tels que des fluctuations dramatiques des populations, des régimes de prédation complexes et des dynamiques évolutives non linéaires.

La modélisation du chaos en biologie permet d'explorer ces phénomènes et de mieux comprendre les écosystèmes et la diversité biologique.

4. Économie et finance :

La théorie du chaos trouve des applications importantes en économie et en finance. Elle est utilisée pour étudier les marchés financiers, les modèles économiques complexes et les systèmes socio-économiques. Les marchés financiers sont souvent caractérisés par des mouvements erratiques des prix, des comportements collectifs et des phénomènes d'auto-corrélation.

La théorie du chaos permet de modéliser ces comportements et d'explorer les facteurs qui contribuent à l'instabilité et à la volatilité des marchés.

5. Informatique :

En informatique, la théorie du chaos est utilisée pour générer des nombres aléatoires de haute qualité, essentiels dans de nombreux domaines, y compris la simulation, la cryptographie et les systèmes de codage. Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires basés sur des systèmes chaotiques sont capables de produire des séquences de nombres qui semblent aléatoires, mais qui sont déterministes et reproductibles.

Conclusion

Dans ce chapitre , nous avons présenté la définition d'un système dynamique , en particulier le système dynamique discret . En suite nous avons décrit tout ce qui concerne le chaos et les systèmes dynamiques chaotiques , ainsi que les caractéristiques du chaos telle que les exposants de Lyapunov , la bifurcation et les attracteurs.

Des exemples de systèmes chaotiques discrets (ou chaos maps) comme Lozi map, Logistic map, Tent map , circle map sont présentés dans le chapitre deux. Ces systèmes chaotiques sont employés pour générer des nombres. Ils sont utilisés comme des solutions initiales dans la recherche de l'optimum de fonction de plusieurs variables , ce que nous allons voir dans le dernier chapitre.

Chapitre 2

Générateur de nombre basé sur une nouvelle carte chaotique unidimensionnelle

Introduction

De nombreuses méthodes existent pour générer des séquences chaotiques. La carte logistique est la carte non linéaire discrète la plus étudiée. Dans ce chapitre nous allons présenter quelques cartes chaotiques comme celle de Lozi map, cercle map, sinusoidal map, tente map et logistique map. Une nouvelle carte chaotique a été proposée.

2.1 Application de Lozi (Lozi map)

L'application Lozi [12] a été proposée par René Lozi en 1978, est définie comme suit :

$$\begin{cases} X_{k+1} = 1 - a|X_k| + Y_k \\ Y_{k+1} = bx_k \end{cases} \quad (2.1)$$

$$Z(k) = \frac{y(k) - \alpha}{\beta - \alpha}, \quad k=0,1,2,\dots,N$$

La séquence $Z(k)$ génère une suite chaotique dans l'intervalle $[0,1]$. avec $[\alpha, \beta] = [-0.6418, 0.6716]$

Cette fonction présente un attracteur chaotique pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ ce qui montre la Figure 2.1

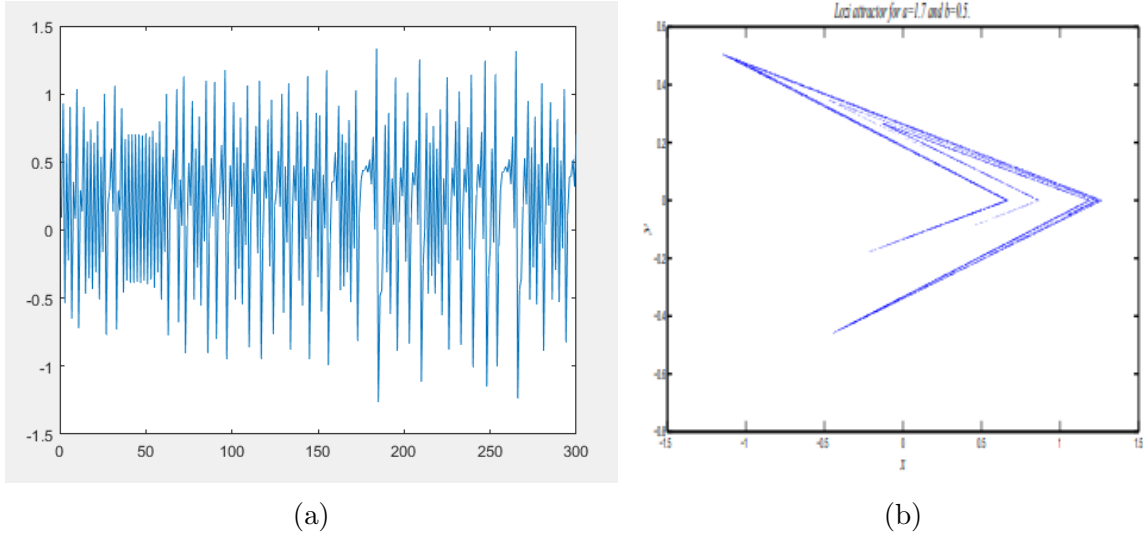


FIGURE 2.1 – (a) Application de lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$ ($X_0 = 0.7, N = 300$). (b) Attracteur de lozi pour $a = 1.7$ et $b = 0.5$

Quelques propriétés de l’application de Lozi :

- L’application de Lozi n’est pas différentiable.
- Si $a = 0$, l’application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$

2.2 Application Circulaire (circle map)

L’application circulaire [27] est représentée par l’équation suivante :

$$X_{k+1} = X_k + b - \left(\frac{a}{2\pi}\right)\sin(2\pi X_k) \text{mod}(1) \quad (2.2)$$

Dans cette équation, $a = 0.5$ et $b = 0.2$.

La fonction ”mod” représente le reste de la division du nombre par 1, c’est-à-dire la partie fractionnaire .

La fonction génère une séquence chaotique dans l’intervalle $[0,1]$, ce qui montre la figure (2.2) .

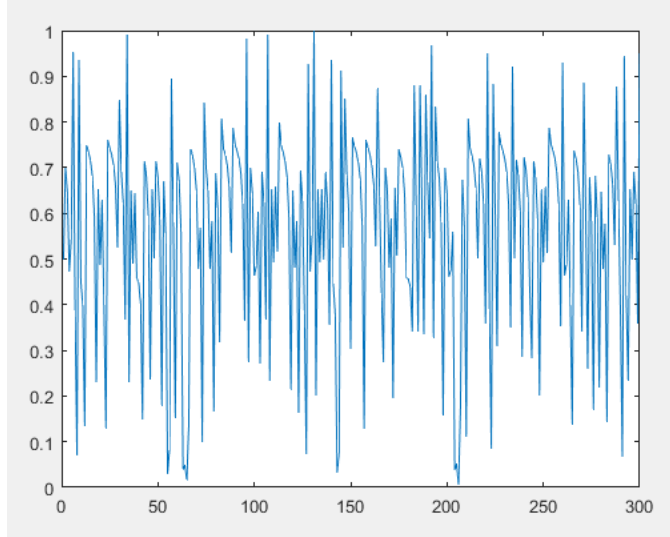


FIGURE 2.2 – Application circulaire pour $a = 0.5$ et $b = 0.2$

2.3 Application tente (tent map)

L'application tente [28] est très similaire à l'application logistique et présente certains effets chaotiques spécifiques. cet application est définie par l'équation suivante :

$$X_{k+1} = \begin{cases} X_k & X_k < 0.7 \\ \frac{10}{3}(1 - X_k) & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.3)$$

La figure suivante montre que l'application tente génère des valeurs entre 0 et 1 :

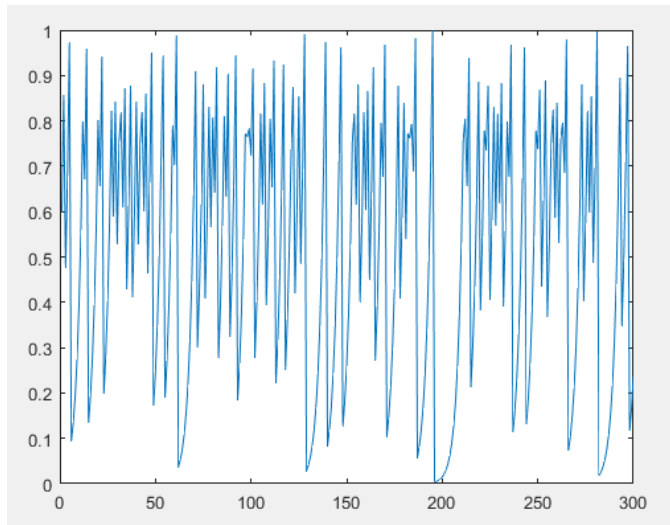


FIGURE 2.3 – Application tent pour $X_0 = 0.8$

2.4 Application sinusoidale (sinusoidal map)

L'application sinusoidale [29] décrite par l'équation d'itération, est donnée comme suit :

$$X_{k+1} = aX_k^2 \sin(\pi X_k) \quad (2.4)$$

où $a = 2,3$ et $X_0 = 0,7$

L'application sinusoidale combine un terme quadratique (X_k^2) avec un terme sinusoidal ($\sin(\pi X_k)$). Le paramètre a détermine le comportement global de l'application. L'application est chaotique pour $a = 2,3$, ce qui montre la figure suivante :

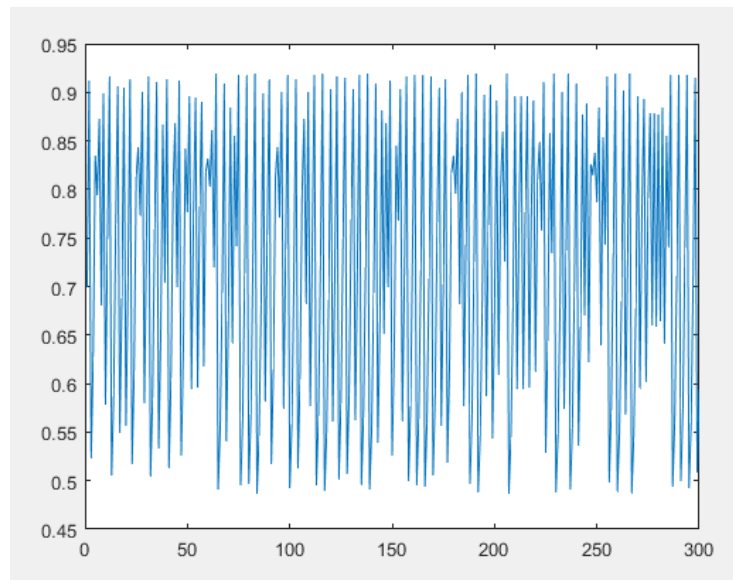


FIGURE 2.4 – Application sin pour $a = 2,3$

2.5 Application logistique (Logistic map)

L'application logistique [30] est une équation mathématique utilisée en théorie du chaos et en dynamique non linéaire pour modéliser la croissance d'une population ou d'un système dynamique similaire. Elle est définie par l'équation récurrente suivante :

$$X_{k+1} = aX_k(1 - X_k) \quad (2.5)$$

où X_0 est choisi parmi $\{0; 0,25; 0,5, 0,75; 1,0\}$

X_k est la population ou l'état du système au temps k .

X_{k+1} est l'état au temps $k + 1$.

a est un paramètre qui détermine la croissance de la population ou du système.

Le paramètre a doit être compris entre 0 et 4 pour que le système soit stable . il existe une valeur critique de a (qui est égale a 4), appelée la constante de Feigenbaum, pour laquelle le système devient chaotique.

La figure suivante présente l'attracteur de l'équation logistique, qui justifie le choix du paramètre a entre 0 et 4.

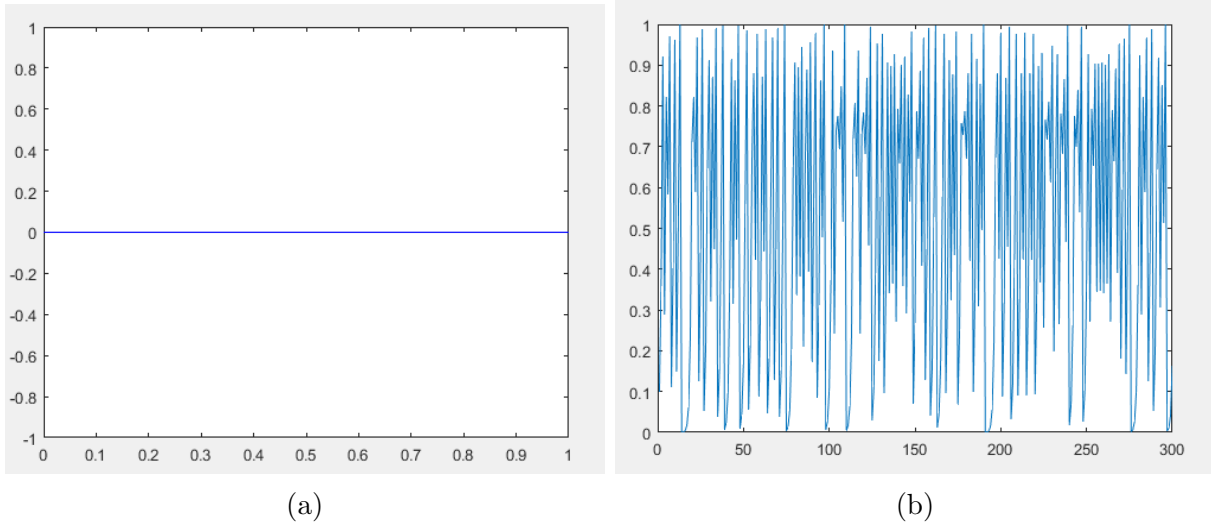
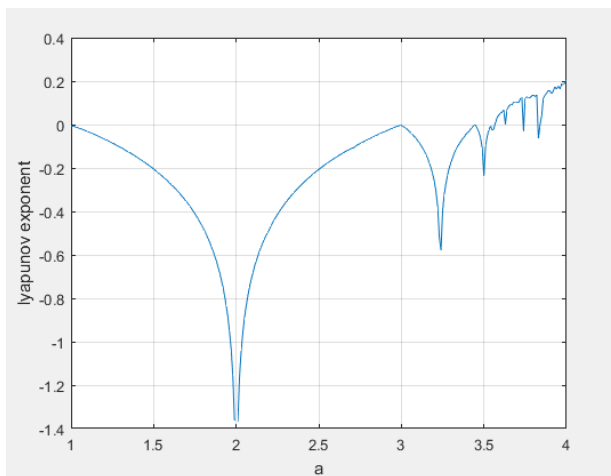


FIGURE 2.5 – (a) Application logistique pour $a = 2$. (b) Application logistique pour $a = 4$

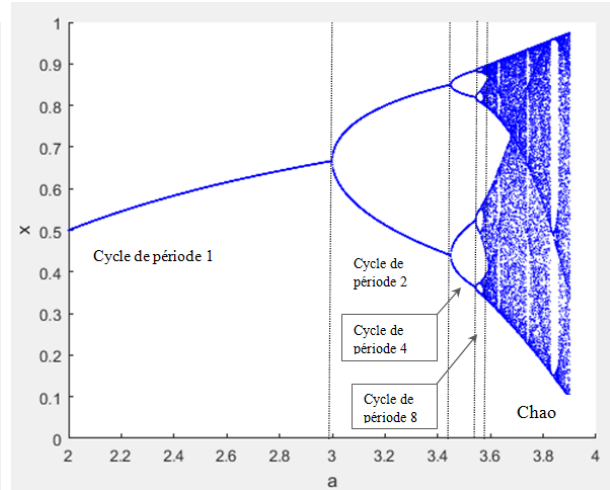
L'application logistique est chaotique pour $a = 4$

2.5.1 Etude de l'application logistique

L'étude de la stabilité de l'application logistique peut être réalisée à l'aide du graphe de l'exposant de Lyapunov et le diagramme de bifurcation .



(a)



(b)

FIGURE 2.6 – (a)Exposant de lyapunov (b) diagramme de bifurcation de l'application logistique

A partir de la figure (2.6)(a) on obtient deux zones :
 une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle $[1 ; 3,5]$ et une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle $]3,5 ; 4]$.

Pour bien voir la dynamique du système, on trace le diagramme de bifurcation, voir la figure (2.6)(b). Sur cette figure On remarque que pour :

- $a \in [1 ; 2,98] \longrightarrow 1$ cycle stable ,
- $a \in]2,98 ; 3,46] \longrightarrow 2$ cycles stables,
- $a \in]3,46 ; 3,59] \longrightarrow 4$ cycles stables,
- $a \in]3,59 ; 3,99]$, le phénomène est chaotique.

2.6 Nouvelle carte chaotique unidimensionnelle

Dans cette partie , nous proposons une nouvelle application chaotique qui est basée sur la fonction sinus et l'équation $(1 - X)$.

Cet application est décrit comme suit :

$$X_{k+1} = a \times \sin(\pi(1 - X_k)), k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (2.6)$$

où :

X_0 représente la condition initiale , $X_0 \in [-1, 1]$

X_k représente la valeur actuelle ,

X_{k+1} est la valeur suivante ,

a est le paramètre de bifurcation.

La fonction sinus, définie de \mathbb{R} dans l'intervalle $[-1, 1]$ est une application bijective , on restreint son domaine de définition à l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$

Pour $x \in [\frac{-\pi}{2}, 0]$, $-1 \leq \sin(x) \leq 0$

Donc la suite (2.6) génère des valeurs sur $[-1, 1]$

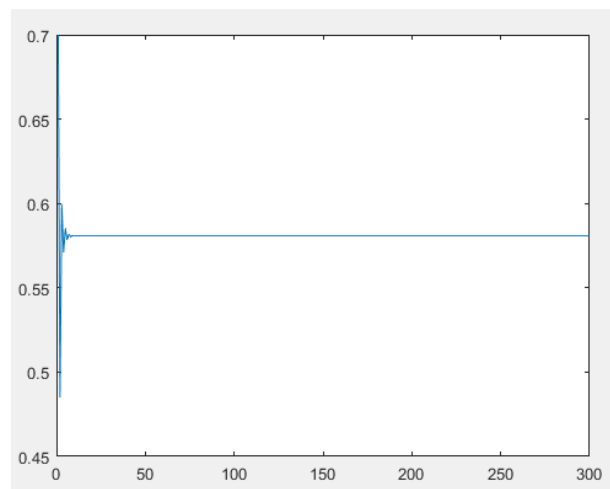


FIGURE 2.7 – New chao map ($a = 0.6, N = 300$)

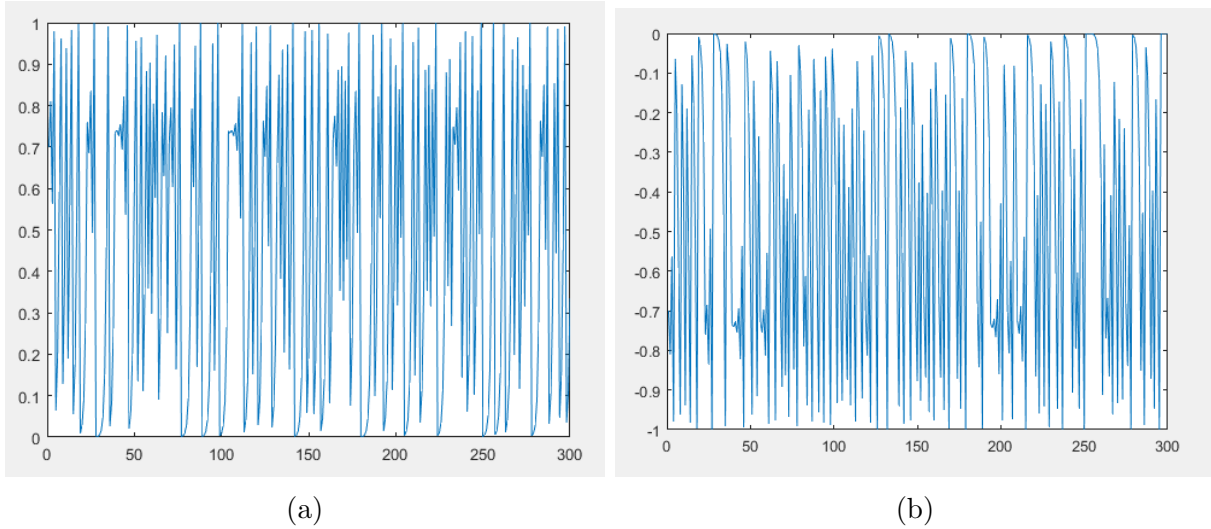


FIGURE 2.8 – (a) New chao map ($a = 1, N = 300, X_0 = 0.7$) (b) New chao map ($a = 1, N = 300, X_0 = -0.7$)

A partir des deux figures (2.7) et (2.8) nous pouvons observer que l'application que nous étudions présente des comportements chaotiques lorsque la valeur du paramètre $a = 1$ (Voir le diagramme de bifurcation , section 2.7.2)

2.7 Etude de nouvelle carte chaotique

Dans cette section, le comportement dynamique du système (2.6) est étudié numériquement.

La séquence chaotique proposée génère des nombres sur $[-1,1]$ et doit vérifier les propriétés suivantes :

- A. Sensibilité aux conditions initiales.
- B. Bifurcation.
- C. Exposants de Lyapunov.

2.7.1 Sensibilité aux conditions initiales

La valeur de paramètre pour laquelle le système présente un comportement chaotique pour la nouvelle carte chaotique est $a = 1$ (voir le diagramme de bifurcation , section 2.7.2) .

La figure (2.9), représente la sensibilité de la nouvelle carte chaotique, avec un coefficient

$a = 1$, la longueur $N = 200$, la valeur initiale des deux séquences données par la nouvelle carte chaotique est respectivement $x_0 = 0.7$ et 0.75

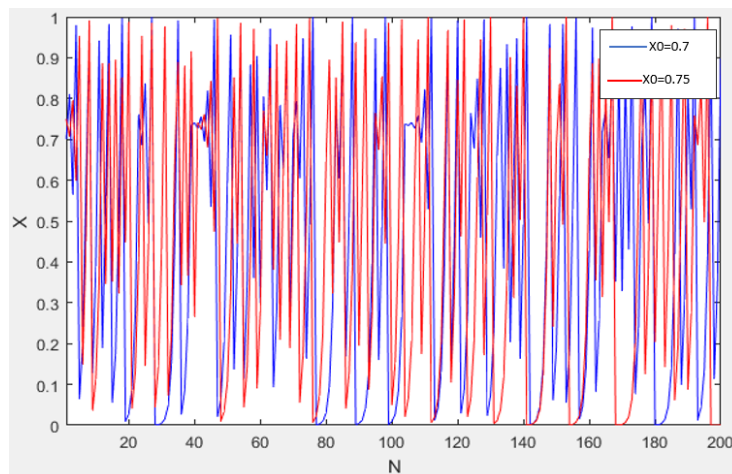


FIGURE 2.9 – Sensibilité aux conditions initiales de la nouvelle carte chaotique ($x_0 = 0.7, x_0 = 0.75, a = 1$)

L'application (2.6) possède une sensibilité aux conditions initiales $x'_0 = 0.7, x_0 = 0.75$, car il existe $\delta > 0$ tel que $|X(x_0) - X(x'_0)| > \delta$, ce qui montre la figure 2.10

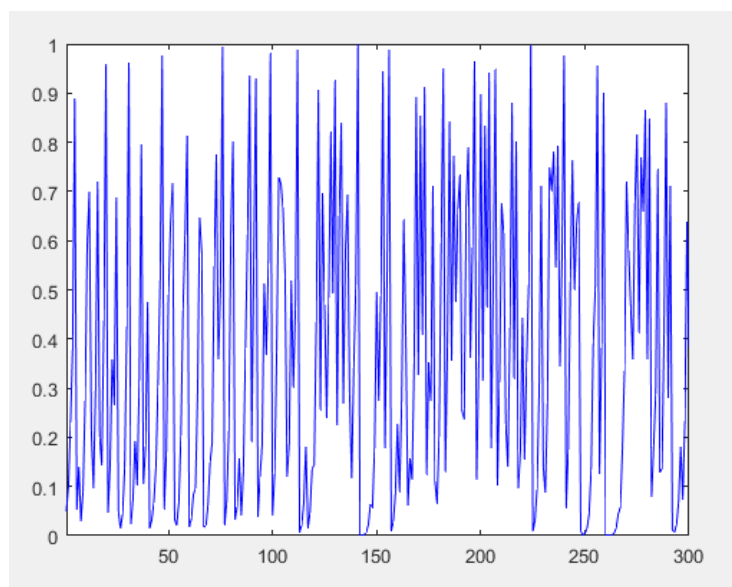


FIGURE 2.10 – La différence entre $X(x'_0) = 0.7$ et $X(x_0) = 0.75$

2.7.2 Étude de stabilité des points fixes

Calcul des points fixes

Le calcul des points fixes consiste à résoudre l'équation :

$$x = f(x) \implies x = a \times \sin(\pi(1 - x)) \quad (2.7)$$

une résolution numérique de l'équation (2.7) est réalisé à l'aide du logiciel Matlab , le graphe correspondant est donné par la figure suivante :

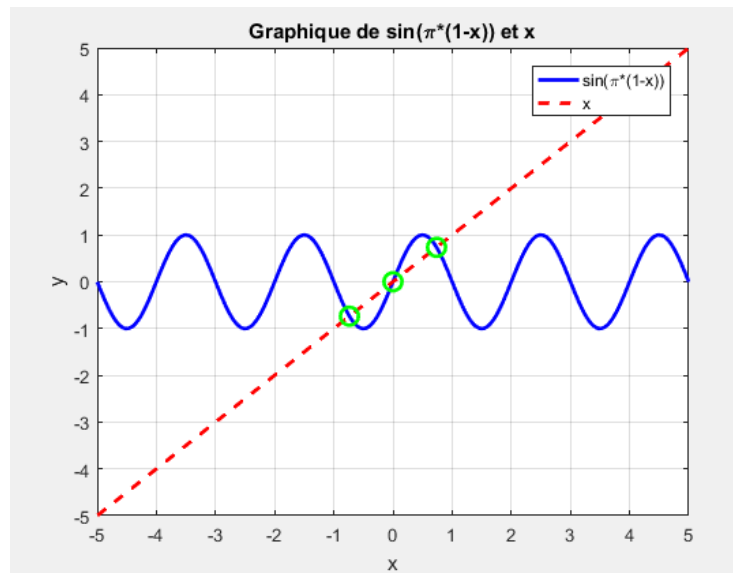


FIGURE 2.11 – Representation graphique de $x = a \times \sin(\pi(1 - x))$

On remarque sur la figure 2.11 trois points fixes :

$$x = -0.736484, x = 0, x = 0.736484$$

- pour $x_0 = -0.736484$ on a :

$$x_1 = f(x_0) = -0.736484; x_2 = f(x_1) = -0.736484; x_3 = f(x_2) = -0.736484 \dots \text{ect}$$

Donc $x = -0.736484$ est un point fixe

- pour $x_0 = 0$ on a :

$$x_1 = f(x_0) = 0; x_2 = f(x_1) = 0; x_3 = f(x_2) = 0 \dots \text{ect}$$

Donc $x = 0$ est un point fixe

- pour $x_0 = 0.736484$ on a :

$$x_1 = f(x_0) = 0.736484; x_2 = f(x_1) = 0.736484; x_3 = f(x_2) = 0.736484 \dots \text{ect}$$

Donc $x = -0.736484$ est un point fixe

Stabilité des points fixes

$$\text{On a } f'(x) = -\pi \cos(\pi(1-x))$$

Pour $x = -0.736484$:

$$f'(-0.736484) = -\pi \cos(\pi(1 - (-0.736484))) = -2.12514153 \rightarrow |-2.12514153| > 1$$

donc le point fixe $x = -0.736484$ est répulsif .

Pour $x = 0$:

$$f'(0) = -\pi \cos(\pi(1-0)) = \pi \rightarrow |\pi| > 1$$

donc le point fixe $x = 0$ est répulsif .

Pour $x = 0.736484$:

$$f'(0.736484) = -\pi \cos(\pi(1 - 0.736484)) = -2.12514153 \rightarrow |-2.12514153| > 1$$

donc le point fixe $x = 0.736484$ est répulsif .

2.7.3 Diagramme de bifurcation pour la nouvelle carte chaotique

On trace le diagramme de bifurcation en fonction du paramètre, Pour bien voir la dynamique du système a .

La figure (2.9) montre que le paramètre de bifurcation "a" est représenté sur l'axe horizontal du graphique et l'axe vertical représente les valeurs possibles de la fonction chaotique proposée.

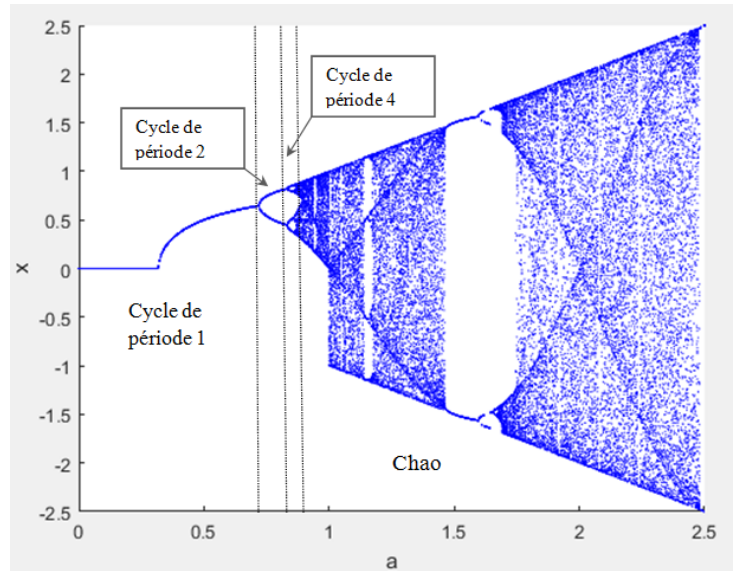


FIGURE 2.12 – Diagramme de bifurcation pour la nouvelle carte chaotique $0 \leq a \leq 2.5$

Les résultats sont obtenus à partir des simulations sous Matlab.

On observe sur la figure 2.12 que lorsque la valeur de :

- "a" se situe dans l'intervalle $[0, 0.7]$, le système présente un seul cycle stable.
- "a" se situe dans l'intervalle $[0.7, 0.85]$, le système présente deux cycles stables.
- "a" se situe dans l'intervalle $[0.85, 0.9]$, le système présente quatre cycles stables.
- "a" se situe dans l'intervalle $[0.9, 2]$, le système manifeste un comportement chaotique

2.7.4 Exposant de Lyapunov de la nouvelle carte chaotique

À partir de la figure (2.13) , deux zones distinctes sont observées :

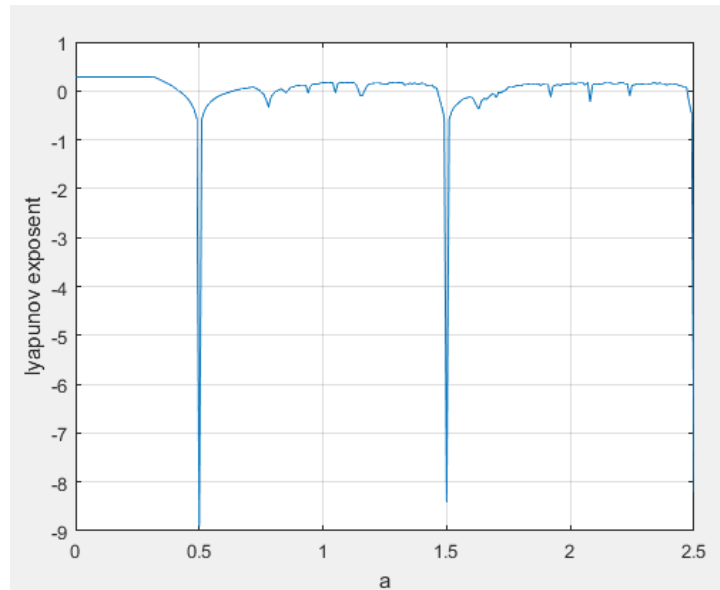


FIGURE 2.13 – Exposant de lyapunov , $0 \leq a \leq 2.5$, $N = 1000$, $x_0 = 0.7$

1. Une zone stable : lorsque la valeur de "a" varie dans l'intervalle $[0, 0.78]$, on observe une zone de stabilité. Cela signifie que les valeurs de "a" dans cette intervalle conduisent à un comportement stable du système.
2. Une zone chaotique : quand la valeur de "a" varie dans l'intervalle $]0.78, 2.5]$, on observe une zone chaotique. Cela indique que les valeurs de "a" dans cette l'intervalle génèrent un comportement chaotique dans le système.

2.7.5 Attracteur de la nouvelle carte chaotique

Nous avons constaté après avoir présenté l'exposant de lyaponov et le diagramme de bifurcation que notre chao map proposée est chaotique pour $a=1$ et pour cela on tracé son l'attracteur.

L' attracteur chaotique de chao map proposée est donnée par la figure suivante :

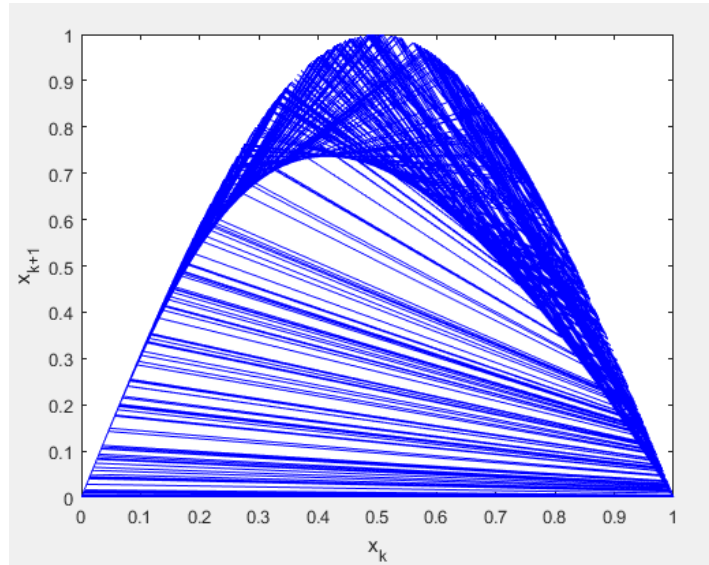


FIGURE 2.14 – Attracteur de la nouvelle carte chaotique ($a = 1, N = 500, x_0 = 0.7$)

Sur ce graphique, on remarque des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution de système chaotique au bout d'un certain temps.

Chapitre 3

Application de l'algorithme d'optimisation chaotique basé sur la nouvelle carte chaotique

Introduction

L'optimisation est en effet l'une des branches les plus importantes des mathématiques appliquées modernes. Elle consiste à trouver la meilleure solution possible parmi un ensemble des solutions possibles.

Dans le cadre de l'optimisation, on cherche généralement à minimiser ou maximiser une fonction appelée fonction objectif, souvent notée comme une fonction coût, en fonction des paramètres ou des variables de décision.

3.1 Méthodes d'optimisation

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer quelles sont les solutions satisfaisant un objectif quantitatif .

L'optimisation consiste à rechercher le minimum ou le maximum d'une fonction avec ou sans contraintes [31] .

3.1.1 Définitions

Définition 3.1 Un problème d'optimisation est usuellement formulé comme un problème de minimisation et s'écrit sous la forme [32] :

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{telque,} \\ h_i(x) \leq 0; i = 1, \dots, m \\ g_j(x) = 0; j = 1, \dots, p \\ x \in S \end{cases} \quad (3.1)$$

Où f est la fonction (scalaire) à minimiser, appelée "fonction coût" ou "fonction objectif", x représente le vecteur des variables d'optimisation, h_i sont les contraintes d'inégalité et g_j les contraintes d'égalité, et S est l'espace des variables (appelé aussi espace de recherche). S indique le type de variables considérées : réelles, entières, mixtes (réelles et entières dans un même problème), discrètes, continues, bornées, etc .

Définition 3.2 [33]

x^* est un minimum global de f si et seulement si $f(x^*) \leq f(x); \forall x \in S$.

x^* est un minimum local de f si et seulement si $f(x^*) \leq f(x); \forall x \in S / \|x - x^*\| \leq \epsilon, \epsilon > 0$

Définition 3.3 [33]

Une fonction multimodale présente plusieurs minima (locaux et globaux), et une fonction unimodale n'a qu'un minimum, le minimum global.

Définition 3.4 [33]

On appelle "méthode (ou algorithme ou recherche) locale" celle qui converge vers un minimum local.

Les recherches locales partent usuellement d'un point initial x_0 avec un pas initial.

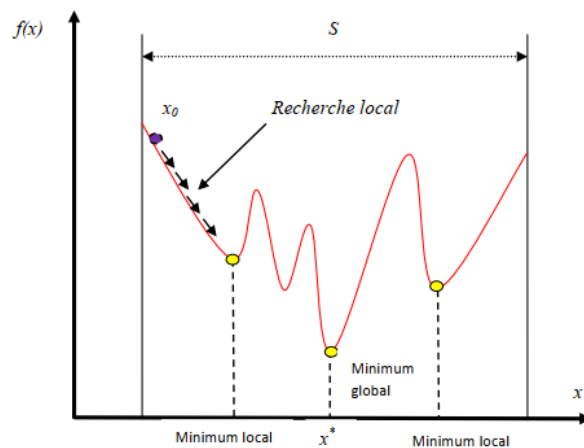


FIGURE 3.1 – Minima locaux et minima globaux d'une fonction multimodale

3.2 Méthode d'optimisation global

Dans la littérature il existe différentes classifications des méthodes d'optimisation globale [34]. On présente dans cette section les approches d'optimisation global.

3.2.1 Approches déterministes et approches probabilistes

-Approches déterministes

Dans ce type de méthodes, l'aléatoire n'intervient pas, c'est-à-dire que pour résoudre un problème, l'algorithme se comportera toujours de la même façon et donnera toujours la même réponse.

Ces algorithmes peuvent se classer en fonction du type de problèmes pouvant être résolu les programmes linéaires, les problèmes convexes, quadratiques, polynomiaux ou plus généraux.

Ces techniques ont généralement l'avantage de ne pas nécessiter de point de départ. Mais avant tout elles fournissent une réponse déterminante sur la qualité des solutions trouvées : l'optimum est-il local ou global? Quel est le degré de certitude? etc. Cette précision a une importance significative, car il est souvent beaucoup moins coûteux de trouver une solution que de prouver qu'il s'agit bien de l'optimum global. [35]

-Approches stochastiques

Les approches stochastiques sont souvent plus aptes à résoudre ce type de problèmes de manière plus facile et plus efficace que les algorithmes déterministes. Les algorithmes stochastiques explorent l'espace des solutions en utilisant des procédures de transition aléatoires. Ainsi, plusieurs exécutions successives de ces algorithmes peuvent conduire à des résultats différents, même avec le même point initial. L'avantage des méthodes stochastiques réside dans leur simplicité et leur pertinence pour les problèmes où les évaluations de la fonction objectif sont corrompues par un bruit aléatoire, ainsi que leur robustesse face à l'augmentation de la dimension du problème. Cependant, leur principal inconvénient est qu'ils peuvent diverger et passer à plusieurs reprises à côté de la solution recherchée. L'obtention de l'optimum global n'est pas garantie, mais il est probablement identifié avec une probabilité proche de 1.

De nombreux algorithmes utilisant des éléments aléatoires et des arguments statistiques ont été proposés de manière heuristique. Ces algorithmes sont inspirés des processus naturels. Les exemples les plus connus de tels algorithmes sont l'optimisation évolutive, le recuit simulé, l'algorithme génétique et la recherche tabou. Les algorithmes heuristiques d'optimisation globale sont largement utilisés dans diverses applications. Le recuit simulé, en tant que méthode importante, a fait l'objet de nombreuses études de la part de chercheurs. [35]

3.3 La Recherche Chaotique de l'optimum

La méthode de la recherche chaotique est une méthode très simple, non affectée par la dimension du problème d'optimisation. Cette méthode est basée sur l'exploration de l'espace de recherche S d'une manière chaotique afin de trouver un point qui minimise la fonction objective f .

Cette méthode consiste à :

- 1- sélectionner à chaque itération une solution au hasard , cette solution est généré par une carte chaotique (Lozi map, Tent map, new map,...etc) .
- 2- Evaluer la fonction objective f en ce point .
- 3- Faire un test : la nouvelle valeur est comparée à la précédente, si elle est meilleure que la précédente, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante, et le processus continue. Sinon on repart du point précédent et on recommence le procédé, jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient atteintes.

La figure suivante représente une comparaison entre la méthode de recherche aléatoire dont les variables de la fonction objectif sont générées selon une loi uniforme sur l'espace de recherche avec la méthode de recherche chaotique , ici la variable de la fonction objectif sont générées chaotiquement selon un modèle chaotique (ou une application chaotique) sur l'espace de recherche S .

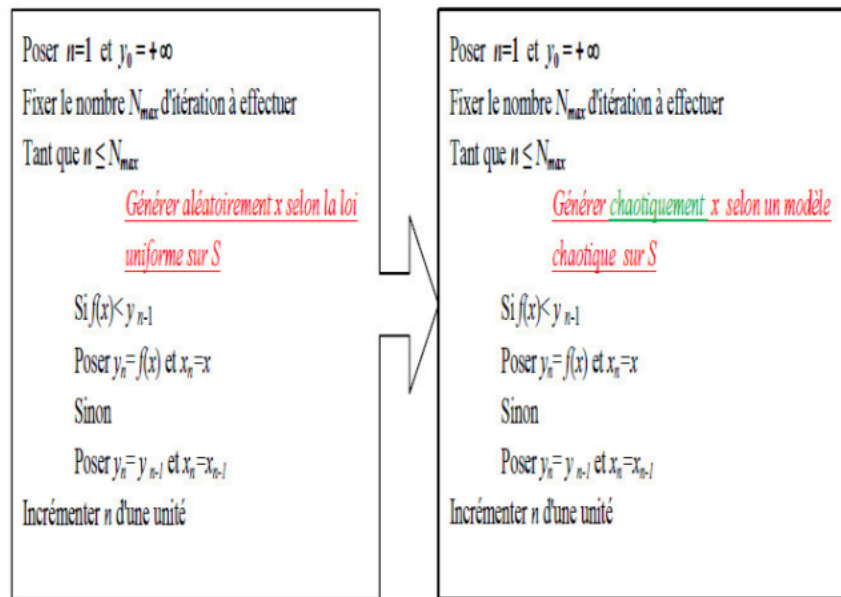


FIGURE 3.2 – l'Algorithme de recherche aléatoire et chaotique

3.4 Le principe et les étapes de l'algorithme d'optimisation chaotiques (COA)

Beaucoup de problèmes d'optimisation sans contrainte impliquant des variables continues peuvent être formulés de la manière suivante [5] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x f(x) \\ \text{telque} \\ X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \\ x_i \in [L_i, U_i], i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \quad (3.2)$$

La fonction f est appelée fonction objectif, X représente le vecteur des variables d'optimisation .

La procédure de recherche chaotique, basée sur une carte chaotique spécifique, peut être illustrée de la manière suivante [36] [37] [38] :

Entrées :

M_g :le nombre maximal d'itérations de la recherche globale chaotiques.

M_l :le nombre maximum d'itérations de la recherche locale chaotiques.

$M_l + M_g$: le critère d'arrêt de la méthode d'optimisation chaotique.

λ : le pas de la recherche locale chaotique

Sorties :

\bar{X} : la meilleure solution d'exécution en cours de recherche chaotique.

\bar{f} : la meilleure fonction objectif.

Algorithm

1. **Step 1** : Initialize the number M_g, M_l of chaotic search and initialization of variables and initial conditions Set $k = 0$. $X(0)$ is the initial condition of chao map, Set the initial best objective function $\bar{f} = +\infty$.
2. **Step 2** : **algorithm of chaotic global search** :
while $k \leq M_g$ **do**
 $x_{(k)} = L_i + z_i(k) \times (U_i - L_i)$
if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**
 $\bar{X} = X(k)$
 $\bar{f} = f(x(k))$
end if
 $k = k + 1$
end while
end
3. **Step 3** : **algorithm of chaotic local search** :
while $k \leq (M_g + M_l)$ **do**
For $i = 1$ to n
if $r \leq 0.5$ **then** (r is a uniformly distributed random variable within range)
 $x_i(k) = \bar{x}_i + \lambda z_i(k) \times |(U_i - L_i)|$
else if
 $x_i(k) = \bar{x}_i - \lambda z_i(k) \times |(U_i - L_i)|$
end if
end for

if $f(X(k)) < \bar{f}$ **then**
 $\bar{X} = X(k)$
 $\bar{f} = f(x(k))$
end if
 $k = k + 1$
end while

L'algorithme décrit est une méthode d'optimisation chaotique qui combine une recherche globale et une recherche locale pour résoudre un problème d'optimisation.

L'algorithme commence par l'initialisation des paramètres, tels que le nombre maximum d'itérations pour la recherche globale et locale, les largeurs des intervalles de recherche, et les conditions initiales .

Ensuite, il effectue une recherche globale chaotique en générant des points à l'aide de la fonction objectif. Il met à jour la meilleure solution trouvée à chaque itération si un point nouvellement généré a une valeur de fonction objectif inférieure.

Enfin, l'algorithme effectue une recherche locale chaotique en utilisant la fonction objectif pour générer des points dans le voisinage de la meilleure solution. Il met à jour la meilleure solution si un point nouvellement généré a une valeur de fonction objectif inférieure.

L'algorithme répète les étapes de recherche globale et locale jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt basé sur le nombre d'itérations soit atteint.

À la fin de l'algorithme, les sorties sont la meilleure solution \bar{X} obtenue lors de l'exécution de la recherche chaotique et la meilleure valeur de la fonction objectif \bar{f} correspondante. Ces résultats représentent la solution optimale trouvée par l'algorithme pour le problème d'optimisation donné .

3.5 Résultats expérimentaux et Analyses

En mathématiques appliquées, les fonctions de test [39][40] sont utiles pour évaluer les caractéristiques des algorithmes d'optimisation. Pour tester l'efficacité de cet algorithme, nous l'avons appliqué sur quatre fonctions tests (La fonction Griewank , La fonction Rastrigin et La fonction Sphère et la fonction test 4) : D'autre part, nous avons étudié l'efficacité de quelques cartes chaotiques en tant que générateurs de variables chaotiques dans cet algorithme qui sont : circl map logistic map , tent map, lozi map, sinusoidale map et new map.

1. Fonction test 1 (Griewank function)

La fonction de Griewank [41] est une fonction mathématique utilisée pour tester les algorithmes d'optimisation. Elle porte le nom de son créateur, David Griewank.

La fonction de Griewank est définie par :

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos \frac{x_i}{\sqrt{i}} \quad (3.3)$$

ou $-500 \leq x \leq 500$, son minimum global se trouve à $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ avec une valeur minimale $f(x^*) = 0$

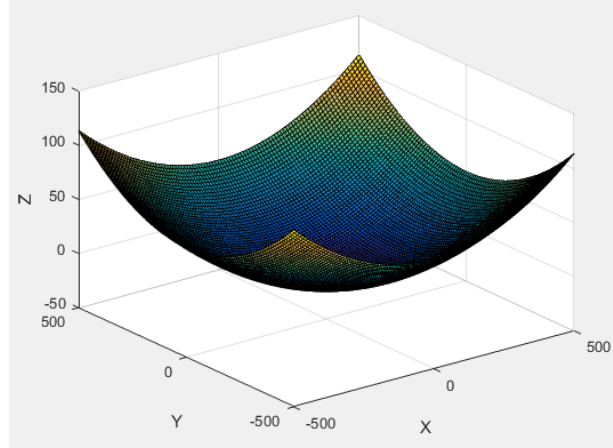


FIGURE 3.3 – Griewank function

2. Fonction test 2 (sphere function)

La fonction sphère [42] est définie comme suit :

$$f_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (3.4)$$

où $-100 \leq x \leq 100$, son minimum global se trouve à $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ avec une valeur minimale $f(x^*) = 0$

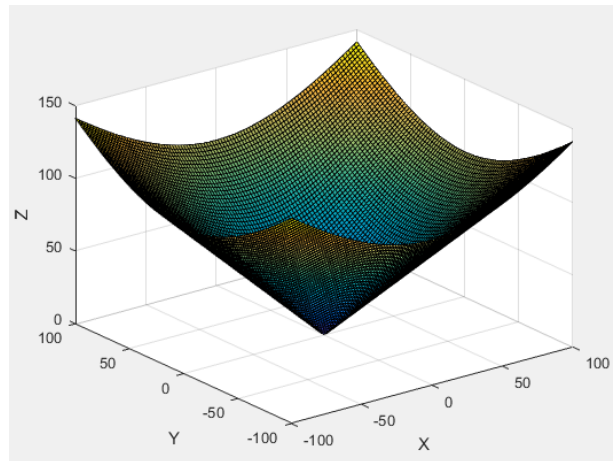


FIGURE 3.4 – sphere function

3. Fonction test 3 (Rastrigin function)

La fonction rastrigin [43] est définie comme suit :

$$f_3(x) = 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] \quad (3.5)$$

ou $-5.12 \leq x \leq 5.12$, son minimum global se trouve à $x^* = (0, 0, \dots, 0)$ avec une valeur minimale $f(x^*) = 0$

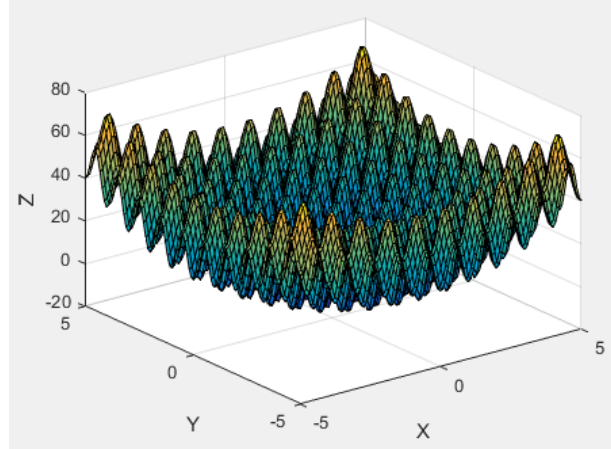


FIGURE 3.5 – Rastrigin function

4. Fonction test 4 [44]

$$f_4(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 6(x_1x_2)$$

ou $-2 \leq x_1 \leq 2$ et $-2 \leq x_2 \leq 2$ son minimum global se trouve à $(x_1^*, x_2^*) = (-2, -2)$ avec une valeur minimale $f(x_1^*, x_2^*) = -6$

3.6 Résultats numériques

Dans l’algorithme d’optimisation chaotique (COA) on fait varier les valeurs de λ et les nombres d’itérations Mg et Ml , comme indiqué dans le tableau suivant (3.1) :

Cas	λ	Mg	Ml
Cas 1	0.1	100	100
Cas 2	0.01	200	200

TABLE 3.1 – L’ensemble des valeurs des paramètres pour chaque exécution de l’algorithme COA.

Les tableaux suivants présentent les résultats numériques de la recherche des minima globaux des fonctions de test f_1, f_2, f_3 et f_4 .

3.6.1 Résultats pour la fonction test 1 (Griewank function)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f	X^*
Circl	cas1	2.0612e-04	0.1719	0.1835	-0.1095 0.0841 0.8134
	cas2	9.8494e-04	0.0040	0.0028	-1.2080 -0.0693 1.1479
Tent	cas1	7.6601e-04	0.0259	0.0445	1.0292 -0.2379 1.0338
	cas2	3.6277e-04	0.0073	0.0199	0.7510 -0.2593 0.6154
Lozi	cas1	9.6265e-04	0.0184	0.0268	-0.6125 -1.4377 0.6763
	cas2	6.4078e-05	0.261	0.2475	-0.2953 0.2573 0.1570
Sinusoidale	cas1	0.0345	0.0392	0.0081	1.5327 0.0608 -1.5570
	cas2	3.6760e-04	5.3324e-04	5.4355e-04	-0.9046 -0.0846 -0.3462
Logistic	cas1	5.4988e-04	7.625e-04	7.2508e-04	-0.6035 1.0861 0.2486
	cas2	2.5332e-04	0.0646	0.1853	-0.0974 - 0.3512 -0.8342
New Map	cas1	1.2864e-05	5.7760e-04	0.0021	-0.1430 -0.1193 0.9884
	cas2	1.2572e-06	0.0011	0.0017	-0.0539 -0.0099 0.0136

TABLE 3.2 – L’optimum de la fonction Griewank pour $n = 3$ avec differents Chao Map

Nous présentons dans le tableau 3.2 les résultats obtenus par l’algorithme COA en utilisant six applications chaotiques pour la recherche minimum global de la fonction test 1

(Griewank function) en dimension 3. Nous avons remarqué que l'application chaotique (new map) donne un cout minimale par rapport aux autres applications chaotiques. On remarque que l'ecart type obtenu par logistic map est minimale par rapport aux autres chao maps .

Les couts optimaux pour la fonction test 1 (Griewank function) pour $n = 3$ sont proches de zéro . Il est unitile de tracer le diagramme des couts correspondant .

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f
Circl	cas1	0.0087	0.134	0.0091
		$X^* = (-1.0045 \ 1.4110 \ -1.3699 \ -3.2550 \ 0.1781 \ 0.4542 \ -3.2543 \ -1.3697 \ 1.4101 \ 0.4556)$		
	cas2	0.0222	0.261	0.0075
	$X^* = (-1.5035 \ -2.2007 \ 4.2242 \ 1.1140 \ -5.8229 \ 2.0230 \ 2.1465 \ -1.3079 \ 0.9677 \ 2.2721)$			
Tent	cas1	0.0030	0.0036	0.0025
		$X^* = (-1.2679 \ 0.9388 \ -0.8242 \ -0.7423 \ -0.1041 \ 0.6919 \ -2.3532 \ 0.2150 \ -0.1688 \ 0.3464)$		
	cas2	0.0097	0.0106	0.0037
	$X^* = (1.3402 \ -1.8188 \ -1.4760 \ 0.3348 \ -1.3463 \ -1.6135 \ -0.6996 \ 1.2756 \ 2.7344 \ -3.6068)$			
Lozi	cas1	0.0046	0.0060	0.0026
		$X^* = (-0.2623 \ 1.4588 \ 2.3998 \ 0.8247 \ 0.1139 \ -2.2356 \ -1.0554 \ 0.9119 \ 0.2502 \ 0.5319)$		
	cas2	0.0073	0.0082	0.0023
	$X^* = (2.0942 \ -1.6215 \ -2.2135 \ -0.7713 \ 1.4298 \ 0.6782 \ -1.0654 \ -2.1690 \ -1.0331 \ -1.3456)$			
Sinusoidale	cas1	0.0168	0.0233	0.0191
		$X^* = (0.2720 \ -0.7566 \ 1.2941 \ -0.4700 \ 0.3802 \ 6.5368 \ -0.6054 \ 2.0182 \ 0.7076 \ 3.2975)$		
	cas2	0.0151	0.0295	0.0251
	$X^* = (-0.1383 \ -0.2496 \ 1.1220 \ 0.8211 \ 1.524 \ -0.1676 \ -0.2485 \ 4.6777 \ 0.4238 \ 5.4760)$			
Logistic	cas1	0.0095	0.0144	0.0090
		$X^* = (-3.3945 \ 0.3070 \ 1.5212 \ -1.2539 \ -1.3153 \ -0.2833 \ 2.9395 \ -0.7978 \ -0.5127 \ -1.5281)$		
	cas2	0.0084	0.0265	0.0076
	$X^* = (0.5134 \ -1.4795 \ 1.7230 \ -0.2738 \ -0.7687 \ -0.7548 \ 4.2533 \ 0.8714 \ -2.398 \ -0.3768)$			
New Map	cas1	0.0040	0.0058	0.0024
		$X^* = (1.1883 \ 1.5200 \ 0.5960 \ -0.8616 \ -0.8454 \ -1.1690 \ 0.8595 \ 1.3644 \ 1.8515 \ -0.7192)$		
	cas2	0.0059	0.0071	0.0018
	$X^* = (-1.4805 \ 0.3838 \ -2.1061 \ 1.8790 \ -0.6569 \ -1.41185 \ -0.2922 \ 0.7001 \ 0.3362 \ -2.5498)$			

TABLE 3.3 – L'optimum de la fonction Griewank pour $n = 10$ avec differents Chao Map

Le tableau 3.3 représente les résultats obtenus par l'algorithme COA pour différentes applications chaotiques de la fonction test 1 (Griewank function) en dimension 10. On remarque que les applications chaotiques Tente et New map donnent les meilleures résultats (en terme de coût) par rapport aux autres applications chaotiques. on remarque que l'ecart type obtenu par new map est minimale par rapport à celui d'aux autres chao maps .

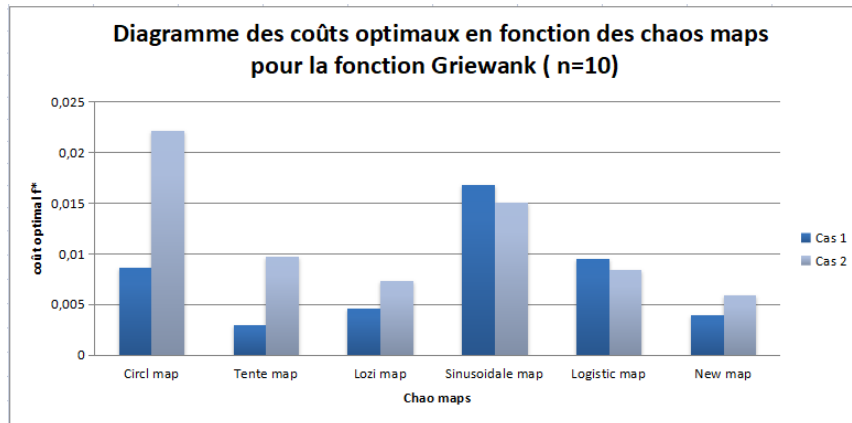


FIGURE 3.6 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Griewank (n=10)

3.6.2 Résultats pour la fonction test 2 (Sphere function)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f	X^*
Circl	cas1	0.5351	17.2613	42.3922	-0.1044 -0.1327 -0.5083
	cas2	0.8687	2.3782	1.9877	0.4776 0.3930 0.6111
Tent	cas1	1.3571	4.2835	5.7032	-0.8421 0.8446 0.6475
	cas2	0.951	0.4738	0.3178	-0.0137 0.836 -0.0432
Lozi	cas1	0.5931	1.1663	0.8512	0.1790 0.2571 0.5037
	cas2	0.5550	0.5360	0.6446	-0.1162 -0.0430 -0.0310
Sinusoidale	cas1	0.0345	0.0392	0.0081	1.5327 0.0608 0.5037
	cas2	0.2654	0.6127	1.0271	-0.2476 -0.4580 0.0059
Logistic	cas1	1.7868	1.8786	0.8857	-0.7013 1.0894 -0.0026
	cas2	0.5482	1.1636	0.8190	0.5465 -0.0421 -0.0088
New Map	cas1	0.2097	0.6541	0.5509	0.0531 -0.1944 -0.0531
	cas2	0.0373	1.1042	0.8724	0.0170 -0.0332 -0.0014

TABLE 3.4 – L’optimum de la fonction Sphere pour $n = 3$ avec differents Chao Map

Le tableau 3.4 représente les résultats obtenus par l’algorithme COA pour différentes applications chaotiques de la fonction test 2 (Sphere function) en dimension 3 . On re-

marque que les applications chaotiques Sinusoidale et New map donnent les meilleures résultats (en terme de coût) par rapport aux autres applications chaotiques. On remarque que l'écart type obtenu par sinusoidale map est minimale par rapport aux autres chao maps .

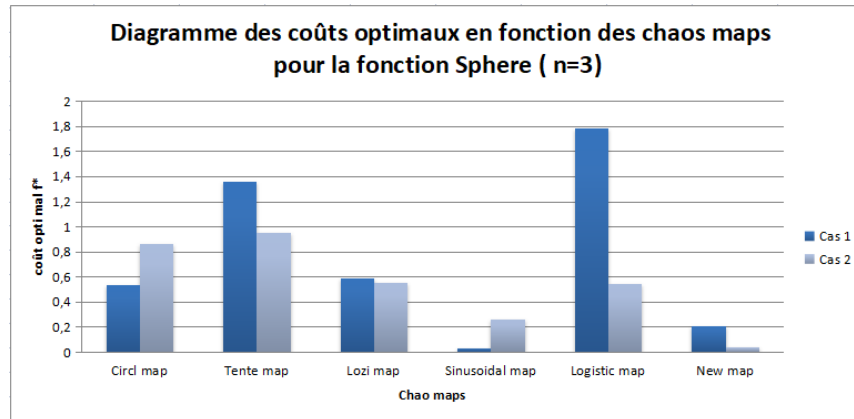


FIGURE 3.7 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Sphere (n=3)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f
Circl	cas1	5.8576	6.2413	1.3539
	$X^* = (0.1900 \ 1.5464 \ 0.7860 \ 0.2687 \ -1.1193 \ 0.140 \ 3.8789 \ -3.4218 \ -1.3957 \ 1.1048)$			
	cas2	5.8012	8.0468	2.7517
Tent	$X^* = (1.6976 \ -1.3072 \ -0.7278 \ 1.8136 \ 1.0872 \ -1.11324 \ -3.8901 \ 2.1313 \ 1.5926 \ -0.7541)$			
	cas1	3.5172	4.8146	1.2295
	cas2	4.5903	4.8359	0.8733
Lozi	$X^* = (-0.7418 \ -2.7768 \ 0.3787 \ -2.1358 \ -0.7598 \ 0.7802 \ 1.6854 \ -0.7226 \ 0.2109 \ 1.8740)$			
	cas1	3.4677	3.8826	0.8916
	cas2	5.0129	5.0757	0.4228
Sinusoidale	$X^* = (1.1837 \ -0.9641 \ -1.5295 \ -2.3490 \ -0.3004 \ 0.9483 \ 0.6257 \ 0.4852 \ 3.5840 \ 0.6927)$			
	cas1	7.4458	10.3273	3.0128
	cas2	5.6550	6.3856	0.9167
Logistic	$X^* = (0.4768 \ 1.2652 \ 0.4702 \ -0.0673 \ 2.1271 \ 0.9733 \ 0.1000 \ -0.1633 \ 0.5533 \ -4.9102)$			
	cas1	6.9702	7.8291	0.9528
	cas2	7.6230	9.6594	1.8069
New Map	$X^* = (3.4515 \ 3.7713 \ 2.1984 \ -1.0455 \ 1.9418 \ 0.6440 \ -3.5776 \ 0.2066 \ -0.6883 \ -2.9237)$			
	cas1	3.3083	3.4451	0.5186
	cas2	4.5794	4.7732	0.3129
$X^* = (-0.6239 \ -2.2611 \ 0.8328 \ -2.8833 \ 0.7350 \ -0.9842 \ 0.8302 \ 0.3707 \ 1.5697 \ -1.2893)$				

TABLE 3.5 – L’optimum de la fonction Sphere pour $n = 10$ avec differents Chao Map

Le tableau 3.5 représente les résultats obtenus par l'algorithme COA pour différentes applications chaotiques de la fonction test 2 (Sphere function) en dimension 10 . On remarque que New map est donne le meilleure résultat par rapport aux autres applications chaotiques.

On remarque que l'écart type obtenu par new map est minimale par rapport aux autres chao maps .

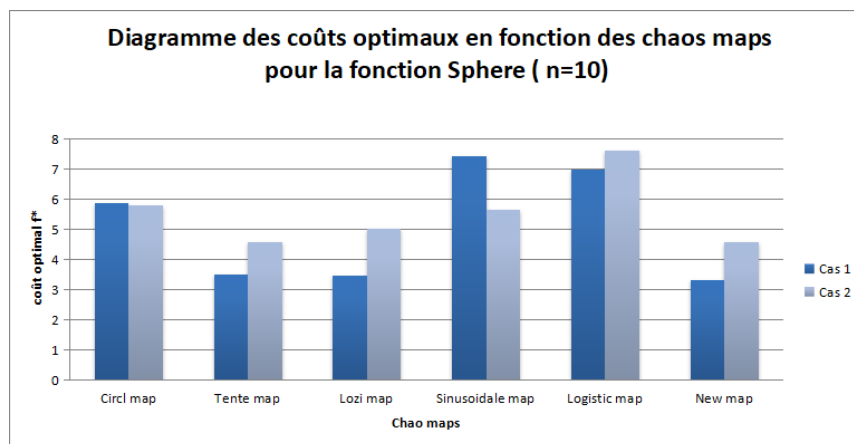


FIGURE 3.8 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Sphere (n=10)

3.6.3 Résultats pour la fonction test 3 (Rastrigin function)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f	X^*
Circl	cas1	2.0235	2.1809	0.7347	-1.0028 -0.0103 -0.9943
	cas2	2.9853	6.2379	3.0590	-0.9941 -0.9941 -0.9941
Tent	cas1	0.5403	0.9218	1.1390	0.9119 -0.1073 -1.0000
	cas2	0.6759	2.1272	1.2403	0.0074 -0.0576 -0.0084
Lozi	cas1	0.6357	1.2233	2.3219	-1.0863 1.9626 -0.0188
	cas2	0.0844	0.8857	1.0203	0.0118 -0.0079 -0.0105
Sinusoidale	cas1	2.3084	6.5810	4.7745	1.9283 1.0892 1.1037
	cas2	0.1000	1.8448	6.1120	-0.0004 0.0225 0.0000
Logistic	cas1	0.5082	2.3586	1.2679	0.0345 0.0305 -0.0211
	cas2	1.0182	3.5012	3.3340	0.9911 0.0009 0.0101
New Map	cas1	0.3493	0.5418	1.0886	-0.0228 0.0336 -0.0108
	cas2	0.0633	1.6565	2.3772	0.0079 -0.0122 0.0104

TABLE 3.6 – L’optimum de la fonction Rastrigin pour $n = 3$ avec differents Chao Map

Le tableau 3.7 donne les résultats obtenus par l’algorithme COA en utilisant six applications chaotiques pour la recherche minimum global de la fonction test 3 (Rastrigin

function) en dimension 3. Nous avons remarqué que New map et sinusoidal map donnent les meilleurs résultats (en terme de coût)par rapport aux autres applications chaotiques.

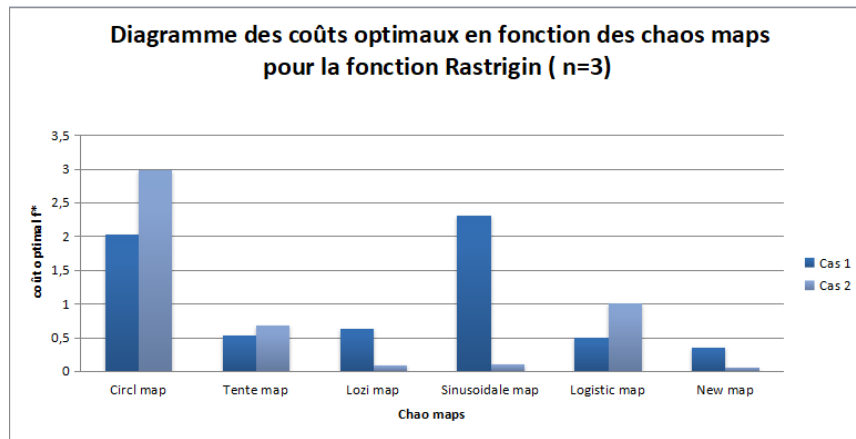


FIGURE 3.9 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Rastrigin (n=3)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f
Circl	cas1	47.3733	54.3995	5.9848
		$X^* = (-2.9258 \ 1.9141 \ -0.9223 \ -0.9706 \ 0.7916$ $-0.9732 \ -3.9444 \ -0.9852 \ 1.0701 \ -0.9693)$		
	cas2	52.8919	63.3592	7.6939
		$X^* = (-3.9985 \ -0.8095 \ -1.0170 \ 2.7782 \ -0.9678$ $-0.9580 \ -2.0648 \ -1.0209 \ -0.9836 \ 2.1326)$		
Tent	cas1	40.002	49.1638	4.0533
		$X^* = (-2.0955 \ -0.1031 \ 1.0665 \ 0.9330 \ -0.9348$ $-0.8027 \ 0.6172 \ -0.0241 \ 0.9839 \ -0.0189)$		
	cas2	40.0002	49.1638	4.0533
		$X^* = (-2.0955 \ -0.1031 \ 1.0665 \ 0.9330 \ -0.9348$ $-0.8027 \ 0.6172 \ -0.0241 \ 0.9839 \ -0.0189)$		
Lozi	cas1	40.9687	50.3804	8.2782
		$X^* = (1.1471 \ 0.1132 \ 3.0324 \ 0.1811 \ -0.0034$ $-2.1090 \ -3.9767 \ 0.0214 \ -0.3539 \ -0.2904)$		
	cas2	40.9687	50.3804	8.2782
		$X^* = (1.1471 \ 0.1132 \ 3.0324 \ 0.1811 \ -0.0034$ $-2.1090 \ -3.9767 \ 0.0214 \ -0.3539 \ -0.2904)$		
Sinusoidale	cas1	49.6336	56.5922	17.8906
		$X^* = (0.1560 \ 0.1868 \ -0.1025 \ 1.8554 \ 0.8491$ $-4.0839 \ 0.9741 \ 0.0655 \ 1.9666 \ 0.0629)$		
	cas2	49.6336	56.5922	17.8906
		$X^* = (0.1560 \ 0.1868 \ -0.1025 \ 1.8554 \ 0.8491$ $-4.0839 \ 0.9741 \ 0.0655 \ 1.9666 \ 0.0629)$		
Logistic	cas1	47.9310	58.9655	5.8892
		$X^* = (0.0688 \ -0.1123 \ -1.9494 \ 0.8928 \ 1.0244$ $0.2463 \ 0.2301 \ -4.0311 \ -0.0202 \ -0.9933)$		
	cas2	47.9310	58.9655	5.8892
		$X^* = (0.0688 \ -0.1123 \ -1.9494 \ 0.8928 \ 1.0244$ $0.2463 \ 0.2301 \ -4.0311 \ -0.0202 \ -0.9933)$		
New Map	cas1	47.0852	57.4301	8.6126
		$X^* = (-1.8254 \ 1.0233 \ 0.8076 \ 1.0031 \ -0.0673$ $-0.1235 \ 1.8484 \ 0.0424 \ -3.9811 \ 1.0393)$		
	cas2	47.0852	57.4301	8.6126
		$X^* = (-1.8254 \ 1.0233 \ 0.8076 \ 1.0031 \ -0.0673$ $-0.1235 \ 1.8484 \ 0.0424 \ -3.9811 \ 1.0393)$		

TABLE 3.7 – L’optimum de la fonction rastrigin pour $n = 10$ avec différents Chao Map

Nous présentons dans le tableau 3.7 les résultats obtenus par l’algorithme COA en utilisant six applications chaotiques pour la recherche minimum global de la fonction test 3 (Rastrigin function) en dimension 10 . Nous avons remarqué que l’applications chaotique Tent donne le meilleure coût par rapport aux autres applications chaotiques.

On remarque que l'écart type obtenu par tente map est minimale par rapport aux autres chaos maps .

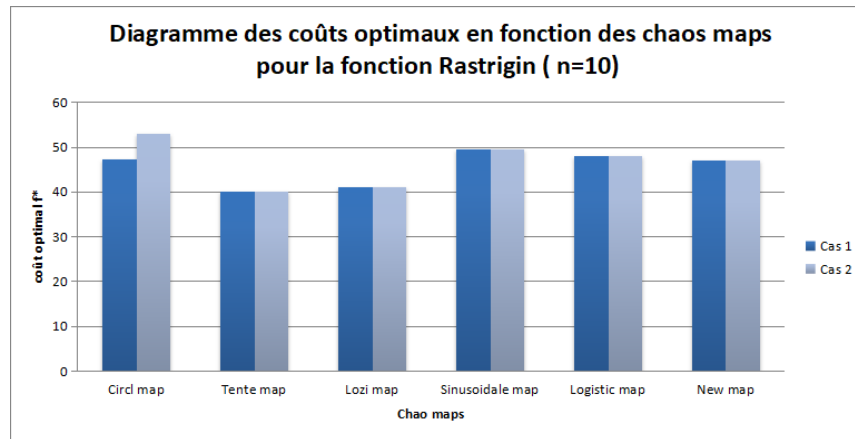


FIGURE 3.10 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction Rastrigin (n=10)

3.6.4 Résultats pour la fonction test 4

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f	X^*
Circl	cas1	-4.3359	4.7198	47.4687	1.1088 1.1048
	cas2	-4.2000	1.6951	10.4379	1.4367 1.0554
Tent	cas1	-4.4061	6.9324	135.0907	1.3720 1.3426
	cas2	-4.2028	1.3291	12.4642	1.2800 1.5209
Lozi	cas1	-4.4087	2.1782	29.3066	1.3653 1.1524
	cas2	-4.4855	27.3270	139.2746	1.1930 1.2695
Sinusoidale	cas1	-4.2131	6.4263	20.0636	1.5159 1.2181
	cas2	-4.4254	12.9139	138.0777	1.3955 1.3006
Logistic	cas1	-4.2060	247.0143	1.8425e+03	1.4953 1.1345
	cas2	-4.4868	1.8887	35.6337	1.3935 1.2607
New Map	cas1	-4.4870	197.1174	1.988e+03	1.2980 1.2806
	cas2	-4.4880	241.4010	627.3918	1.2885 1.2109

TABLE 3.8 – L'optimum de la fonction test 4 pour $n = 2$ avec différents Chao Map

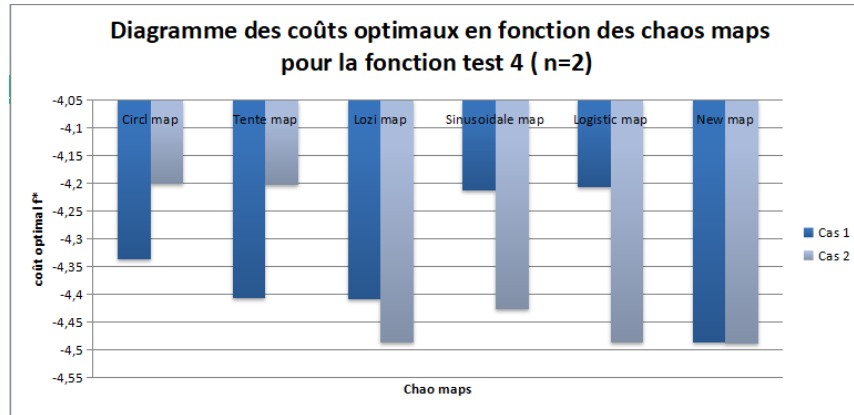


FIGURE 3.11 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction test 4 ($n=2$)

Chao Map	Cas	Meilleure valeur f^*	La moyenne \bar{f}	Ecart type σ_f
Circl	cas1	272.3399	274.1900	4.4044
		$X^* = (1.9464 \ 1.6309 \ 1.9464 \ 1.6309 \ 1.4462)$		
	cas2	271.5153	272.9851	4.5259
		$X^* = (1.9461 \ 1.4926 \ 1.9461 \ 1.9461 \ 1.6644)$		
Tent	cas1	270.7799	272.8213	5.0880
		$X^* = (1.9219 \ 1.8622 \ 1.6879 \ 1.9964 \ 1.7308)$		
	cas2	270.9257	271.0792	1.4769
		$X^* = (1.9234 \ 1.8406 \ 1.6796 \ 1.9298 \ 1.6957)$		
Lozi	cas1	271.6875	274.7040	2.7058
		$X^* = (1.6960 \ 1.7375 \ 2.1535 \ 1.7132 \ 1.6067)$		
	cas2	271.7890	275.5223	2.5365
		$X^* = (1.7908 \ 1.7683 \ 1.5439 \ 1.8305 \ 1.6638)$		
Sinusoïdale	cas1	272.7673	274.2106	4.9693
		$X^* = (1.6729 \ 1.6926 \ 1.5955 \ 1.6634 \ 1.5381)$		
	cas2	272.7564	275.8780	9.5299
		$X^* = (1.5921 \ 1.6084 \ 1.6551 \ 1.6173 \ 1.6776)$		
Logistic	cas1	270.0129	270.1296	0.3321
		$X^* = (1.9716 \ 1.9749 \ 1.9609 \ 1.9839 \ 1.9986)$		
	cas2	270.5264	270.8562	0.7044
		$X^* = (1.7479 \ 1.9780 \ 1.8635 \ 1.9947 \ 1.7789)$		
New Map	cas1	270.0697	270.2414	1.5518
		$X^* = (1.9090 \ 1.9950 \ 1.9985 \ 1.9795 \ 1.9068)$		
	cas2	270.0877	270.5358	0.8890
		$X^* = (1.9584 \ 1.9189 \ 1.9619 \ 1.9896 \ 1.8903)$		

TABLE 3.9 – L'optimum de la fonction test 4 pour $n = 5$ avec différents Chao Map

Dans les tableaux 3.8 et 3.9 nous donnons les résultats de l'algorithme COA pour différents applications chaotiques à la fonction test 4 en dimension 2 et 5 respectivement.

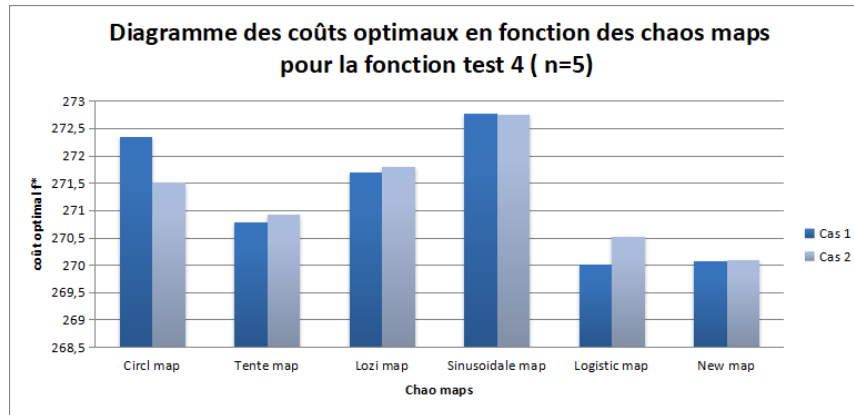


FIGURE 3.12 – Diagramme des coûts optimaux en fonction des cartes chaotiques pour la fonction test 4 ($n=5$)

On constate que l'application New map donne un bon résultat de la fonction test 4 en dimension 2 par rapport aux autres applications chaotiques. Pour la fonction test 4 en dimension 5, les applications Logistic et new map donnent le meilleur coût.

On remarque que l'écart type obtenue par New map est minimale par rapport aux autres chao maps .

discusion

On constate que lorsque l'on augmente le nombre de variables, le coût de les fonctions test devient très élevé la solution x^* s'éloigne de la solution optimale, ainsi que le temps de calcul devient assez grand. Pour remédier à ce problème, on utilise d'autres améliorations de l'algorithme d'optimisation chaotique , ce qui a été fait dans [6] .

nous avons remarqué que le new chao map proposé fournit de bon résultat du fait qu'on a obtenue le minimum global avec cout optimal.

Il convient de souligner que différentes applications chaotiques peuvent fonctionner différemment, mais pour une application donnée, il n'y a pas de meilleure application chaotique à recommander car il existe souvent quelques applications chaotiques qui peuvent fonctionner presque aussi bien. Il est donc pas facile de choisir une application chaotique sans expérimentation réelle.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire nous avons utilisé un algorithme d'optimisation chaotique pour résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes basé sur des chao maps. Une étude bibliographique a été présentée afin de maîtriser et de comprendre la notion du chao et les cartes chaotiques. Nous avons cités également quelques domaines d'applications du chaos.

Nous avons proposé une nouvelle carte chaotique et justifier numériquement qu'elle est chaotique.

Nous avons présenté un algorithme d'optimisation chaotique (COA). Nous avons établi un programme sur MATLEB qui donne une solution globale par l'AOC à quatre fonctions tests, dont les variables de ces fonctions sont générées chaotiquement par des applications chaotiques :Lozi map ,cercle map ,tente map ,sinusoidale map,logistic map ainsi que le new chao map proposé .

Une étude statistique sinificative a été faite afin de déterminer l'application chaotique qui donnera la meilleure solution. Les résultats numériques sont satisfaisants pour les fonctions tests qui donnent le minimum global .

Perspectives

-Cependant les générateurs des nombres basés sur les cartes chaotiques présente de nombreux avantages notamment dans de nombreuses applications dans le domaine des télécommunications, de la cryptographie, des simulations numériques ou encore des jeux de hasard.

-Proposer d'autres chao map.

-Proposer une amélioration de l'algorithme d'optimisation chaotique.

References

- [1] Jean-Louis Pac. Systèmes dynamiques : cours et exercices corrigés. *Sciences sup. Dunod*, 2016.
- [2] Lorenz .E.N. Deterministic non-periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*,, 20(130–141), 1963.
- [3] Li.T.Yet Yorke.J.A. Period therre implies chaos. *American Mathematical Monthly*,, 82 :(985-992,), 1975.
- [4] Ruelle.D and Takens.F. On the nature of turbulence,. *Commun. math.Physique*, 20(167–192), 1971.
- [5] Mohammadreza Ebrahimib.S Pourmousaa.N. Parameter estimation of photovoltaic cells using improved lozi map based chaotic optimization algorithm. (182-183), 2019.
- [6] Hamaizia.T. Systemes dynamiques et chaos'application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique. *thèse doctorat*, Université de Constantine 1, 2013.
- [7] Jarad.F Bououden.R, Abdelouahab.M.S. Chaos in new 2-d discrete mapping and its application in optimization. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, (144-152), 2020.
- [8] Krim.M. Implémentation des séquences chaotiques sur les systèmes de communication moderne :etalement de spectre à séquence directe ds-ss. *thèse Doctorat*, Université de Oran, 2019.
- [9] Hassan.N. Conception et simulation des générateurs, crypto-systèmes et fonctions de hachage basés chaos performants. *thèse Doctorat*, Université de Nantes, 2012.
- [10] Talbi.I. Systèmes dynamiques non linéaires et phénomène(applications à la cryptographie). *Mémoire de magistère.Université. Mentouri Constantine-1*, 2010.
- [11] Badaoui.A Khemidja.S, Guendouz. A. Etude des suites chaotiques et leurs applications en cryptage d'images. *Université Mohamed El-Bachir El-Ibrahimi-Bordj Bou Arreridj*, (30-31), 2021.
- [12] Lozi.R. Un attracteur Étrange du type attracteur de henon. *Journal de Physique*, Colloque C5, Supplément 8, Tome 39(9-10), 1978.
- [13] Lakhdari.K. Analyse et contrôle de systèmes dynamiques chaotiques. *mémoire de master*, Université mohamed khider, Biskra, 2021.
- [14] Dib.S. Etude des systèmes dynamiques à temps discrets. *mémoire de master*, Université Abd elhafid boussouf Mila, 2022.

- [15] Boukabou.A. Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. *thèse doctorat*, Université de Constantine, 2006.
- [16] Yorke J. A Li, T. Y. Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, 82(10)(985-992), 1975.
- [17] Wiggins.S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. *Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York,*, 2003.
- [18] Ainouz.B. Le transport anormal dans les systèmes hamiltoniens. *thèse de Magistère*, Université A.MIRA de Béjaia, 2010.
- [19] Nettari.A Osmani.R. Etallement de spectre par la séquence carte logistique et son application dans le système de communication ds-ss. *Mémoire de master*, Université Saad Dahleb – Blida, 2021.
- [20] Bugola .A Cathala.J-C Mira .C, Gardini.L. Chaotic dynamics in twodimensional noninvertible maps. *World Scientific*, 1996.
- [21] Strogatz.H. Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. westview press. 2014.
- [22] Eric Goncalvès Da Silva. Introduction aux systèmes dynamiques et chaos. 2004.
- [23] keziou.A Bouhamar.H. Algorithme d'optimisation chaotique de la mouche des fruits. *Mémoire de master*, Université Abd elhafid boussouf Mila, 2022.
- [24] Menasri.A. Chaos et bifurcations dans les systemes dynamiques en dimensions $n(n > 1)$. *thèse doctorat*, Université Larbi ben M'hidi, 2016.
- [25] C DANG-VU.H, DELCARTE. Bifurcations et chaos. *Paris : Ellipses.*, 2000.
- [26] Ouannas.A. Sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets. *thèse de Doctorat*, Université Mentouri Constantine 1,, 2015.
- [27] Hilborn.RC. Chaos and nonlinear dynamics :an introduction for scientists and engineer. *2nd ed. New York : Oxford University Press*, (200).
- [28] Ott.E. Chaos in dynamical systems. uk, cambridge. : *Cambridge University Press*, 2002.
- [29] Xiao.D Li YT, Deng.SJ. A novel hash algorithm construction based on chaotic neural network. *Neural Comput Appl*, (20-41), 2011.
- [30] May.R.M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *nature.*, 261(5560)(459-467), 1976.
- [31] Zhigljavsky.A. Theory of global random search. *Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers,*, 1991.
- [32] Rao.S. Engineering optimization theory and practice. *Wiley,*, 2009.
- [33] Boumaza.H Hammou.A. Application de l'algorithme d'optimisation chaotique. *mémoire de mester*, université saad dahleb blida, 2022.
- [34] Tuy.H Horst.R. Global optimization, deterministic approach,. *Springer-Verlag, Berlin*, 1993.

- [35] Derouiche.F. Analyse de l'effet d'utilisation du chaos sur l'amélioration des performances des méthodes numériques. *thèse doctorat*, université(Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi), 2021.
- [36] coelho.L.D.S. Tuning of pid controller for an automatic regulator voltagesystem using chaotic optimisation approach. *Chaos solitons and Fractals*, 2009.
- [37] Shayanfar.H.A Safari.A Shayeghi.H, Jalilzadeh.S. A pso based unified power flow controller for damping of power system oscillations. *Energy Conversion and Management.*, 50(10).(2583-2592), 2009.
- [38] Shayanfar.H.A Safari.A Shayeghi.H, Jalilzadeh.S. Robust pss design using chaotic optimization algorithm for a multimachine power system. *Pattaya, Thailand.*, (40-43), 2009.
- [39] Bedri.O Alatas.B, Erhan.A. Chao embedded particle swarm optimization algorithms. *Chao,Solitons and Fractals*, (1715-1734), 2009.
- [40] Talatahari.S Gandomi.A.H, Yang.X.S. Chaos-enhanced accelerated particle swarm optimization. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, (327-340), 2013.
- [41] Griewangk.AO. Generalized descent of global optimization. *J Optim Theor Appl*, (11-39), 1981.
- [42] Yang.XS Gandomi.AH. Benchmark problems in structural optimization. in : Koziel s, yang xs, editors. *Computational optimization methods and algorithms.*, Berlin : Springer-Verlag, 2011.
- [43] Rastrigin.LA. External control systems. *In : Theoretical foundations of engineering cybernetics series.*, Moscow, Russian, 1974.
- [44] Messaoudi.N. Identification et controle des systemes indetermines non lineaires par la methode combinee adomian / alienor. *Mémoire de magister*, Université Saad Dahleb de Blida 1, 2006.