الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

---

UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA 1

Faculté des sciences

Département de Mathématiques

Mémoire DE MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : **Analyse Mathématiques et Applications**

Problème de Sturm-Liouville

Réalisé par

Abdallah El-Hirtsi Wassila

Soutenue publiquement devant le jury composé de :

Mr.Chouikrate AbdElkader	Maître Assistant Classe A	Université Blida 1	Président
Mr.Talbi Mohamed Amine	Maître de conférences	Université Blida 1	Examinateur
Mr.Rouaki Mohamed	Maître de conférences	Université Blida 1	Promoteur

Année universitaire : 2022/2023

REMERCIEMENT

Tout d'abord je remercie **ALLAH** qui me donné la volonté et le courage pour pouvoir réaliser ce travail.
Je remercie mon encadreur Monsieur **Rouaki.M** pour avoir accepté d'encadrer cette mémoire. Un grand merci pour son extrême patience au cours de ces mois.
Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de mathématique de l'université SAAD DAHLAB de Blida.
Je veux remercier également tous les membres de jury d'avoir bien voulu participer à l'évaluation de ce travail.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents qui m'ont toujours poussé et motivé pour donner le meilleur de moi-même.

A ma soeur radhia et mes frères malek et rafik .

A mon supporter abderraouf qui me donne toujours de la force et le soutien.

A mes oncles et mes cousines et tous ceux qui m'aiment.

Table des matières

.

Résumé

Nous nous sommes concentrés dans cette thèse sur le problème de Sturm-Liouville et on étudie les propriétés fondamentales et oscillatoires de l'opérateur différentiel, les solutions du problème c'est a dire les valeurs propres et les fonctions propres correspondant a des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville.
On a ensuite vérifié les propriétés obtenues dans certaines équations de la physique mathématique.

MOTS CLÉS : Théorie de Sturm - Liouville, valeurs propres, fonctions propres, polynômes orthogonaux, propriétés oscillatoires.

.

abstract

We have focused in this thesis on the Sturm-Liouville problem and we studies the fundamental and oscillatory properties of the differential operator, the solutions of the problem i.e. the values eigenfunctions corresponding to eigenvalues of the Sturm-Liouville problem.
We have then verified the properties obtained in some equations of the mathematical physics.

KEY WORDS : Sturm-Liouville theory, eigenvalues, eigenfunctions, polynomials orthogonal, oscillatory properties.

INTRODUCTION

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable (généralement notée $y(x)$ ou simplement y), elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'', $y^{(3)}$, . . .).

On parlons sur l'équation différentielle linéaire du 2eme ordre qui est une équation portant sur une fonction inconnue y, dans laquelle intervient sa dérivée seconde y'' On y passe en revue plusieurs méthodes de résolution d'équations différentielles, en particulier celles du second ordre, et on y présente sans trop de détails quelques fonctions spéciales qui sont des solutions de quelques équations importantes.

Le problème aux limites est le prototype d'une large classe de problème importants en math appliquée qui s'écrivent :

$$\begin{cases} [k(x)y'(x)]' - q(x)y(x) = -\lambda\rho(x)y \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \quad ; \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Où λ est un paramètre réel, où toutes les fonctions introduites dans (SL) sont continues sur $[a, b]$. Ces problèmes sont connus sous le nom de problème de Sturm-Liouville. Les valeurs de

λ pour les quelles l'équation a une solution sont appelées valeurs propres. Une solution non triviale satisfaisant pour une ecigenvalue s'appelle une fonction propre. Le système résultant est appelé un problème de valeurs propres de Sturm-Liouville. Ce mémoire est composé d'une introduction, de trois chapitres et d'une conclusion.

Dans le 1^{ier} chapitre nous avons cités les concepts fondamentaux liés aux équations différentielles, notamment le Wronskien et son lien à l'unicité des solutions.

Dans le 2^{ieme} chapitre nous avons étudiés les différents aspects des équations de Sturm-Liouville des Propriétés fondamentales et oscillatoires des solutions.

Dans le 3^{ieme}chapitre on prouve certaines de ces propriétés sur les valeurs propres et les fonctions propres de quelques équations de la physique.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

1.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 1.1. *D'une manière générale, une équation différentielle ordinaire à une seule inconnue (ou en bref EDO) est l'équation dont l'inconnue est une fonction (réelle dans ce travail).Elle se présente sous la forme d'une relation entre une variable réelle notée en général x (ou t) et la fonction inconnue notée en général y et ses dérivées successives $y^{'}$, $y^{''}$, ... jusqu'à un certain ordre.*
Ces EDO sont en général de la forme :

$$F(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0. \tag{1.1.1}$$

Ou bien

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y^{'}(x), ..., y^{(n-1)}(x)). \tag{1.1.2}$$

Avec f et F des fonctions définies sur $I \times \mathbb{R}^n$ et $I \times \mathbb{R}^{n+1}$ respectivement.

Définition 1.2. - *On appelle ordre d'une équation différentielle ordinaire le plus grand ordre de dérivées à coeficients non nulles.*

-Une équation différentielle ordinaire de la forme (1.1.1)(resp.(1.1.2))est dit linéaire si F (resp. f) est une fonction linéaire par rapport à toutes les variables $y, y^{'}, y^{''} ..., y^{(n)}$ *(resp* $y, y^{'} ..., y^{(n-1)}$*). Ainsi, l'équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n a la forme générale suivante :*

$$p_0(x).y^{(n)} + p_1(x).y^{(n-1)} + ... + p_n(x).y = h(x) \tag{1.1.3}$$

Avec $p_0, ..., p_n, h(x)$ *des fonctions définies au moins sur un intervalle* $I \subseteq \mathbb{R}$ *L'équation différentielle ordinaire linéaire (1.1.3) est dite homogène si le second membre de l'équation h(x) est identiquement nul. C'est exactement l'équation :*

$$p_0(x).y^{(n)} + p_1(x).y^{(n-1)} + ... + p_n(x).y = 0 \tag{1.1.4}$$

Définition 1.3. *Une solution de l'équation différentielle ordinaire (1.1.2) sur l'intervalle* $I \subseteq \mathbb{R}$ *est une fonction* φ *telle que* $\varphi^{'}, \varphi'', ..., \varphi^{(n)}$ *existent, continues et satisfont*

$$\varphi^{(n)} = f(x, \varphi(x), \varphi^{'}(x), ..., \varphi^{(n-1)(x)}) \qquad \forall x \in I.$$

Définition 1.4. *Toute solution de l'équation (1.1.3) écrit sous la forme :*

$$y = y_p + y_h \tag{1.1.5}$$

telle que : y_h *solution de l'équation homogène (1.1.4) et* y_p *est une solution particulière de (1.1.3).*

Définition 1.5. *On définit les trois types de conditions suivantes :*

-Une condition aux limites de Dirichlet (nommée d'après Johann Dirichlet) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières ou limites du domaine,par exemple la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[a, b]$ *s'exprime par :*

$$y(a) = \alpha \quad et \quad y(b) = \beta \tag{1.1.6}$$

où α *et* β *sont deux nombres donnés.*

-Une condition aux limites de Neumann (nommée d'après Carl Neumann) est imposée à une équation différentielle ou à une équation aux dérivées partielles, lorsque l'on spécfie les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier sur les frontières ou limites du domaine, par exemple la condition aux limites de Neumann sur l'intervalle $[a, b]$ s'exprime par :

$$y^{'}(a) = \alpha \quad et \quad y^{'}(b) = \beta \tag{1.1.7}$$

où α et β sont deux nombres donnés.

-Une condition aux limites de Robin ou condition aux limites de Fourier (nommée d'après Victor Gustave Robin) est imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine, par exemple en dimension un, si on a le domaine $[a, b]$, la condition aux limites de Robin s'écrit :

$$\begin{cases} py(a) + qy'(a) = g(a) \\ py(b) + qy'(b) = g(b) \end{cases} \tag{1.1.8}$$

où p, q et g sont des fonctions définies sur la frontière de $[a, b]$, et y est la solution définie dans $[a, b]$ que l'on cherche à déterminer.

1.2 Équations différentielles linéaires de seconde ordre

Définition 1.6. *On dit qu'une équation différentielle du second ordre est linéaire s'il prend la forme :*

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x)$$

1.2.1 Équations différentielles linéaires homogène de second ordre à coeficients constants

Elle est dite homogène si f(x) = 0 et non homogène sinon.

Dans cette section, nous supposerons que p(x), q(x) et r(x) sont des fonctions constantes et que f(x) = 0. Ainsi nos équations prendront la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1.2.1}$$

avec $a \neq 0$. Il est clair que la fonction $y \equiv 0$ est une solution, et elle sera appelée la solution triviale comme précédemment. Tout autre type de solution sera dit non trivial. Le sujet des équations différentielles est consacré à trouver des solutions non triviales aux équations différentielles, ce qui est exactement ce que nous allons faire ici.

1.2.2 Le polynôme caractéristique

Comment trouver des solutions à (1.2.1) ?

Supposer que y est une solution de (1.2.1). Cette équation est une combinaison linéaire de y, y' et y''(une combinaison linéaire de deux fonctions f et g est une somme de la forme : $c_1 f + c_2 g$ où c_1 et c_2 sont deux nombres quelconques). Ainsi, nous essayons $y = e^{rx}$ depuis $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$.

Nous avons

$$ay'' + by' + cy = ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

Ce qui implique que, puisque e^{rx} n'est jamais nul :

$$(ar^2 + br + c) = 0 \tag{1.2.2}$$

On a donc au moins une solution de la forme e^{rx} et généralement deux. Il y a trois cas :

1. deux racines réelles distinctes.

2. une racine réelle répétée.

3. conjugués complexes.

Dans les trois prochaines sous-sections, nous aborderons ces trois cas. L'équation (1.2.2) est appelée la caractéristique polynôme de (1.2.1).

1.2.3 2 racines réelles distinctes

Supposons que nous soyons dans le cas où le polynôme caractéristique nous donne deux racines réelles distinctes. Appelons-les r_1 et r_2. On a alors deux solutions : l'une de la forme $e^{r_1 x}$ et $e^{r_2 x}$.

Théorème 1.1. *Supposons que le polynôme caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$ a deux racines réelles distinctes : r_1 et r_2. Alors la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ est*

$$y_G = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

Démonstration. Puisque r_1 et r_2 sont les racines du polynôme $ar^2 + br + c = 0$ nous savons que

$$ar_1^2 + br_1 + c = 0$$

et

$$ar_2^2 + br_2 + c = 0$$

Sachant cela, insérons y_G dans l'équation différentielle. Calculez d'abord $y_G^{'}$ et $y_G^{''}$:

$$y_G^{'} = c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}$$

et

$$y_G^{''} = c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x}$$

et introduire dans l'équation différentielle pour obtenir :

$$\begin{aligned} ay_G^{''} + by_G^{'} + cy_G &= a(c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x}) + b(c_1 r_1 e^{r_1 x} + c_2 r_2 e^{r_2 x}) + c(c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}) \\ &= (ar_1^2 + br_1 + c)c_1 e^{r_1 x} + (ar_2^2 + br_2 + c)c_2 e^{r_2 x} \\ &= 0(c_1 e^{r_1 x}) + 0(c_2 e^{r_2 x}) \end{aligned}$$

Ainsi y_G est la solution générale de notre équation différentielle □

Exemple 1.2.1. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Solution : Commencez par trouver le polynôme caractéristique :

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Maintenant, cela prend en compte :

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$$

donc nos racines sont : r =-1, 2. Ainsi notre solution générale est de la forme :

$$y_G = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

1.2.4 Racines réelles doubles

Maintenant que nous avons couvert quand nous avons deux racines réelles distinctes, nous devons traiter le cas où il y a une racine réelle double. Supposons donc que notre polynôme caractéristique n'ait qu'une seule racine k(i.e le polynôme facteurs tels que $(r-k)^2 = 0$). Je prétends que la solution générale est

$$y_G = c_1 e^{kx} + c_2 e^{kx}$$

Notons d'abord que si le polynôme caractéristique a une racine k double, il peut s'écrire sous la forme :

$$(r-k)^2 = r^2 - 2kr + k^2 = 0$$

et donc l'équation différentielle ressemble à :

$$y'' - 2ky' + k^2 y = 0$$

Théorème 1.2. *Supposons que le polynôme caractéristique de $y'' - 2ky' + k^2 y = 0$ a une racine double k, Alors la solution générale de $y'' - 2ky' + k^2 y = 0$ est*

$$y_G = c_1 e^{kx} + c_2 e^{kx}.$$

Démonstration. Nous savons déjà que $y_1 = e^{kx}$ est une solution à $y'' - 2ky' + k^2 y = 0$ mais on devrait avoir une seconde solution linéairement indépendante. Pour trouver la solution générale, supposons qu'elle ait la forme $y_G = uy_1 = ue^{kx}$. Alors

$$y_G^{'} = u'e^{kx} + kue^{kx}$$

et

$$y_G'' = u''e^{kx} + 2ku'e^{kx} + k^2 ue^{kx}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_G'' - 2ky_G' + k^2 y_G &= u''e^{kx} + 2ku'e^{kx} + k^2ue^{kx} - 2ku'e^{kx} + kue^{kx} + k^2ue^{kx} \\ &= u''e^{kx} = 0 \end{aligned}$$

Il nous reste donc

$$u'' = 0$$

qui donne

$$u = c_1 + c_2 x$$

En introduisa cela dans la formule de notre solution générale, nous obtenons :

$$y_G = uy_1 = (c_1 + c_2 x)e^{kx} = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$$

□

Exemple 1.2.2. *Résoudre l'équation différentielle*

$$2y'' + 4y' + 2y = 0$$

Solution : Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est :

$$2r^2 + 4r + 2 = 0$$

En divisant les deux côtés par 2 et en factorisant, nous avons

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

donc la racine est r =-1. Ainsi notre solution générale est :

$$y_G = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}$$

1.2.5 Racines complexes

Enfin, nous arrivons au cas où les racines du polynôme caractéristique sont une paire conjuguée de nombres complexes, nous disons $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$. Cela signifie que nos deux solutions devraient ressembler à :

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$$

et

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

C'est correct, mais pas vraiment utile car cela ne nous donne que des données dans le plan complexe, pas des données strictement réelles (la sortie peut être complexe, pas seulement réelle). Cependant, il existe un moyen de manipuler ces deux solutions, en prenant combinaisons linéaires complexes d'entre eux, pour obtenir des solutions qui ne donnent que des données réelles.

En utilisant la formule d'Euler ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) pour réécrire y_1 et y_2

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

et

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

Considérez maintenant ce qui suit :

$$y_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\frac{1}{2}(2 \cos \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

et

$$y_4 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\frac{1}{2}(2 \sin \beta x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Avec ces deux nouvelles solutions (ce sont toujours des solutions puisque ce ne sont que des combinaisons linéaires de y_1 et y_2) nous peut construire une nouvelle solution générale qui ne produit que des données réelles :

$$y_G = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Vérifions qu'il s'agit toujours d'une solution de l'équation différentielle .

Si le polynôme caractéristique a bien pour racines $\alpha \pm i\beta$ alors il est de la forme

$$r^2 - 2\alpha r + (\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

et donc l'équation différentielle ressemble à : $y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2)y = 0$. Maintenant pour les dérivées :

$$y_G = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

$$y'_G = e^{\alpha x}(\alpha c_1 \cos \beta x + \beta c_2 \cos \beta x + \alpha c_2 \sin \beta x - \beta c_1 \sin \beta x)$$

$$y''_G = e^{\alpha x}(\alpha^2 c_1 \cos \beta x - \beta^2 c_1 \cos \beta x + \alpha^2 c_2 \sin \beta x - \beta^2 c_2 \sin \beta x + 2\alpha\beta c_2 \cos \beta x - 2\alpha\beta c_1 \sin \beta x)$$

Remplacon dans l'équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
y_G'' - 2\alpha y_G' + (\alpha^2+\beta^2)y_G &= e^{\alpha x}(\alpha^2 c_1\cos\beta x - \beta^2 c_1\cos\beta x + \alpha^2 c_2\sin\beta x - \beta^2 c_2\sin\beta x + 2\alpha\beta c_2\cos\beta x \\
&\quad -2\alpha\beta c_1\sin\beta x - 2\alpha(e^{\alpha x}(\alpha c_1\cos\beta x + \beta c_2\cos\beta x + \alpha c_2\sin\beta x \\
&\quad -\beta c_1\sin\beta x)) + (\alpha^2+\beta^2)e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x) \\
&= e^{\alpha x}[0\cos\beta x + 0\sin\beta x] = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi y_G est notre solution générale.

Théorème 1.3. *Supposons que le polynôme caractéristique de $ay''+by'+cy=0$ a deux racines complexes : $r_1=\alpha+i\beta$ et $r_2=\alpha-i\beta$. Alors la solution générale de $ay''+by'+cy=0$ est :*

$$y_G = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Exemple 1.2.3. *Résoudre l'équation différentielle*

$$y''+9y=0$$

Solution : Le polynôme caractéristique est

$$r^2+9=0$$

donc les racines sont $r=\pm 3i$. Donc notre solution générale est :

$$y_G = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$$

1.2.6 Équations différentielles linéaires homogène de second ordre à coeficients non constants

Dans la sous-section précédente, nous étions préoccupés par les équations linéaires avec des coeficients constants, mais nous revenons maintenant au cas plus général où les coeficients peuvent être des fonctions de x c'est-à-dire les équations de la forme :

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0 \tag{1.2.3}$$

Contrairement à la section précédente, il n'y a pas une méthode générale pour résoudre les équations de cette forme, les méthodes changent avec l'échange de coeficients. Nous parlerons de quelques méthodes de résolution.

Méthode de Frobenius

On va voir que beaucoup des fonctions spéciales(ou polynômes orthogonaux) proviennent de la méthode de Frobenius de nombreuses fonctions spéciales apparaissent dans l'examen des solutions de l'équation de la forme

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xq(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=0 \tag{1.2.4}$$

Où q(x) et r(x) sont des fonctions développable en série entière (q(x) et r(x) sont analytiques) C'est-à-dire on peut l'écrire sous la forme

$$q(x)=\sum_{m=0}^{\infty}q_m x^m$$

$$r(x)=\sum_{m=0}^{\infty}r_m x^m$$

convergent pour un range de x incluant le point x = 0.

Algorithme de la méthode :

La base de la méthode de Frobenius est d'essayer une solution de l'équation (1.2.3) de la form

$$z(x,s)=x^s(a_0+a_1x+....+a_nx^n+...)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{s+n} \tag{1.2.5}$$

avec $a_0 \neq 0$ (On peut toujours prendre $a_0 \neq 0$, car sinon on devrait simplement avoir une autre série du type (1.2.4) avec une valeur différente de s, le premier coeficient dont on peut maintenant appeler a_0). Nous calculons $\frac{dz}{dx}(x,s)$ et $\frac{d^2z}{d^2x}(x,s)$ les remplaçons dans l'équation (1.2.3) et comparons les coeficients de chaque degré pour obtenir les relations de récurrence entre les a_n.

Réduction d'ordre

On sait que pour résoudre complètement une équation différentielle linéaire homogène de

second ordre, on a besoin de deux solutions linéairement indépendantes. Dans cette partie on prouve que si on connaît, ou devine une solution d'une équation comme (1.2.3) alors il y a un moyen systématique de trouver une seconde solution linéairement indépendante.
La réduction d'ordre fait exactement ce qu'elle semble faire elle réduit l'ordre de l'équation différentielle. Plus précisément, il la réduit d'une équation du second ordre à une équation du premier ordre. Si on connaît une solution, par exemple $y_1(x)$ ou plus simplement y_1, alors la substitution $y = uy_1$ dans l'équation différentielle permettra après simplifications d'obtenir une équation d'ordre 1.

Exemple 1.2.4. *Trouver la solution générale à*

$$xy'' - (4x+1)y' + (4x+2)y = 0$$

sachant que $y_1 = e^{2x}$ *est une solution*

Solution

Comme d'habitude laissez $y = uy_1 = ue^{2x}$*.Alors*

$$\begin{aligned} y' &= u'e^{2x} + 2ue^{2x} \\ y'' &= u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x} \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'équation on obtient :

$x(u''e^{2x} + 4u'e^{2x} + 4ue^{2x}) - (4x+1)u'e^{2x} + 2ue^{2x} + (4x+2)ue^{2x} = xe^{2x}u'' - e^{2x}u' = 0$

Soit $v = u'$ *et divise par* xe^{2x}*, alors*

$$v' - \frac{1}{x}v = 0$$

Qui est séparable en :

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{x}$$

On obtient par intégration :

$$\ln|v| = \ln x + c_2$$

Où

$$v = c_2 x$$

$$u = \int v dx = c_2 x^2 + c_1$$

Alors

$$y_G = u y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 x^2 e^{2x}.$$

1.2.7 Wronskian

Définition 1.7. *Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes sur l'intervalle (a, b) si ni l'un ni l'autre n'est un multiple constant de l'autre sur $[a, b]$, c'est-à-dire pour toute valeur de c le suivant l'équation n'est jamais vraie pour tout $x \in [a, b]$: $y_1(x) = cy_2(x)$. Si deux fonctions ne sont pas linéairement indépendantes, elles sont dit linéairement dépendantes.*

Définition 1.8. *Le Wronskien de deux fonctions y_1 et y_2 au point x est donné par :*

$$W(x, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Lorsqu'il est clair quelles fonctions sont impliquées, nous raccourcirons souvent la notation en W(x).

Pour voir comment cela nous est utile, considérons le théorème suivant :

Théorème 1.4. *Soient y_1 et y_2 des fonctions sur un intervalle $[a, b]$. Si les fonctions linéairement dépendentes de $[a, b]$, alors $W(x, y_1, y_2) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Ainsi si $W(x, y_1, y_2) \neq 0$ pour au moins un point de $[a, b]$, les fonctions sont linéairement indépendantes.*

Théorème 1.5. *Considérons l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(a) Si le polynôme caractéristique a deux racines réelles distinctesr_1 et r_2, alors $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$ forment un ensemble fondamental de solutions pour $ay'' + by' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Si le polynôme caractéristique a une racine réelle double, k, alors $y_1 = e^{kx}$ et $y_2 = xe^{kx}$ forment un ensemble fondamental de solutions pour $ay'' + by' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}$.
(c) Si le polynôme caractéristique a deux racines conjuguées complexes, $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$,

alors $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ forment un ensemble fondamental de solutions pour $ay'' + by' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 1.2.5. *On a l'équation différentielle*

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$

qui a les deux solutions $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}$ et $y_2 = e^{3x}$
Le Wronkien de ces deux fonctions est

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} & e^{3x} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{7}{2}e^{\frac{5}{2}x}$$

Car W est non nulle pour tout x, les fonctions y_1 et y_2 forme un systèm fondamental des solutions de l'équation.

1.2.8 Équations différentielles linéaires non homogène de seconde ordre

Dans cette section, nous allons introduire des équations linéaires non homogènes et étudier certains types. Rappeler que une équation différentielle linéaire du second ordre non homogène a la forme :

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x) \tag{1.2.6}$$

Ou $f(x) \neq 0$. Dans les sections précédentes, nous avons étudié la même équation, mais avec f(x) =0. Alors, comment traitons-nous ce cas ? Nous devons en quelque sorte brancher une fonction dans le côté gauche de l'équation différentielle $(y'' + q(x)y' + r(x)y)$ et produire $f(x)$. Supposons qu'une telle fonction existe et appelons-la y_p pour une solution particulière. Est-ce le solution générale de (1.2.6) ? La réponse est non. La solution générale est de la forme $y_G = y_H + y_p$, où y_H est la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

1.3 Polynômes orthogonaux

Définition 1.9. *En mathématiques, la fonction gamma, notée par la lettre* $\Gamma(x)$ *est une fonction réelle, considérée également comme une fonction spéciale. Historiquement, c'est Euler qui a introduit et développé cette fonction. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres réels(à l'exception des entiers négatifs), est définie par :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \tag{1.3.1}$$

Définition 1.10. *On appelle fonction poids sur intervalle* $[a, b]$ *, toute fonction* $\rho(x)$ *vérifie les deux conditions :*

-la positivité $\quad \rho(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

-la convergence $\quad \int_a^b \rho(x)dx < \infty$.

1.3.1 Polynômes de L'egendre

Souvent désignés par $P_n(x)$. Observez que ces polynômes sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour la fonction poids $\rho(x) = 1$.

Définition 1.11. *Pour tout* $n \neq 0$*, On a la formule de Rodrigues pour les polynômes de L'egendre* $P_n(x)$ *définie comme suit :*

$$p_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(1 - x^2)^2] \tag{1.3.2}$$

c'est la solution de l'équation diférentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + ky = 0 \tag{1.3.3}$$

1.3.2 Fonctions de Bessel

Définition 1.12. *Soit* $v \in \mathbb{R}^+$. *On appelle fonctions de Bessel de 1er espèce d'indice* v *la fonction notée* $J_v(x)$ *qui est définie par :*

$$J_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k + v + 1)} (\frac{x}{2})^{2k+v} \tag{1.3.4}$$

Les cas les plus importants sont lorsque v *est un entier ou un demi-entier(c.à.d :* $v = n$ *ou* $v = n + \frac{1}{2}$ *avec* $n \in \mathbb{N}$*). Dans le cas où* $v = n \in \mathbb{N}, J_n(x)$*sont dits les polynômes de Bessel.*

1.3.3 Polynômes de Laguerre

En mathématiques, les polynômes de Laguerre, nommés d'après Edmond Laguerre, sont les solutions normalisées de l'équation de Laguerre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0 \tag{1.3.5}$$

Cette équation a des solutions non singulières seulement si n est un entier positif. Les solutions L_n forment une suite de polynômes orthogonaux .

Cette suite de polynômes peut être définie par la formule de Rodrigues pour les polynômes de Laguerre généralisés :

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{x^{-\alpha e^{x}}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}) \tag{1.3.6}$$

CHAPITRE

2

THÉORIE DE STURM-LIOUVILLE

La résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables se réduit à celle d'équations différentielles ordinaires. Dans bon nombre de problèmes intéressants de physique mathématique, les solutions de ces équations se laissent exprimer à l'aide des fonctions spéciales. Si l'on veut obtenir par cette méthode la solution d'une équation aux dérivées partielles dans le contexte d'un problème concret, on doit imposer aux solutions de l'équation considérée certaines restrictions visant à assurer l'unicité de la solution du problème. Ces restrictions en amènent d'autres, imposées aux solutions des équations différentielles ordinaires correspondantes, si bien qu'on se trouve finalement devant un problème dit aux limites. En étudiant les propriétés des solutions de problèmes aux limites arbitraires faisant intervenir les équations différentielles pour les fonctions spéciales, on arrive à dégager certaines propriétés intéressantes des fonctions spéciales. Considérons plus en détail la résolution des problèmes aux limites par séparation des variables.

2.1 Résolution des problèmes aux limites par séparation des variables.

La méthode de séparation des variables s'applique largement à la résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles qui se rencontrent en physique mathématique et sont de la forme

$$\rho(x,y,z)[A(t)\frac{d^2u}{d^2t}+B(t)\frac{du}{dt}]=Lu \tag{2.1.1}$$

où

$$Lu=div[k(x,y,z)grad\ u]-q(x,y,z)u$$

Où div veut dire la dérivé de fonction $k(x,y,z)$ par rapport aux variables x,y,z. Si A(t) = 1, B(t) = 0, l'équation (2.1.1) définit la propagation d'oscillations, telles que les ondes électromagnétiques ou sonores , pour A(t) = 0, B(t) = 1 l'équation (2.1.1) décrit des processus de transfert, tels que la propagation de la chaleur ou la diffusion de particules dans un milieu, pour A(t) = 0, B(t) = 0 l'équation (2.1.1) est celle des processus stationnaires. Pour l'équation (2.1.1), donner les conditions initiales c'est donner les fonctions $u(x,y,z,t)$ et $\frac{d}{dt}u(x,y,z,t)$ pour t = 0. Si A(t) = 0, il suffit de donner la fonction $u(x,y,z,t)|_{t=0}$. Les conditions aux limites les plus simples s'écrivent

$$[\alpha(x,y,z)u+\beta(x,y,z)\frac{du}{dn}]|_S=0 \tag{2.1.2}$$

Ici $\alpha(x,y,z)$ et $\beta(x,y,z)$ sont des fonctions, S est la surface limitant le domaine dans lequel on cherche la solution de (2.1.1), $\frac{du}{dn}$ est la dérivée suivant la normale extérieure à S. Le problème de recherche de la solution de (2.1.1) vérifiant les conditions initiales et les conditions aux limites imposées est appelé problème aux limites. Considérons le schéma de résolution du problème aux limites par séparation des variables. La solution particulière de (2.1.1) répondant à la condition aux limites (2.1.2) peut être obtenue par séparation des variables, à condition de mettre la solution générale sous la forme

$$u(x,y,z,t)=T(t)v(x,y,z).$$

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$A(t)T''+B(t)T'+\lambda T=0. \tag{2.1.3}$$

$$Lv + \lambda \rho v = 0. \tag{2.1.4}$$

Où λ est une constante. L'équation (2.1.3) est une équation différentielle ordinaire , dans les problèmes caractéristiques de physique mathématique, elle se prête facilement à la résolution analytique. En ce qui concerne l'équation (2.1.4), on aura recours à une condition aux limites consécutive à la condition (2.1.2) :

$$[\alpha(x,y,z)v + \beta(x,y,z)\frac{dv}{dn}]|_S = 0. \tag{2.1.5}$$

Il s'agit donc finalement de chercher une solution non triviale de l'équation (2.1.4) pour la condition pour laquelle le problème posé admet une solution non triviale est appelée valeur propre, et la fonction correspondante $v(x,yz)$, fonction propre.

Dans les problèmes caractéristiques de physique mathématique, les fonctions propres et les valeurs propres peuvent être indicées. Soit $v(x,y,z)$ la fonction propre correspondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$, (n = 0, 1, ...). Etant données l'équation (2.1.1), la condition aux limites (2.1.2) et les conditions initiales correspondantes, nous chercherons la solution sous la forme

$$u(x,y,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)v_n(x,y,z).$$

où la fonction $T_n(t)$, est solution de (2.1.3) pour $\lambda = \lambda_n$,. Pour que les conditions initiales soient satisfaites, il convient de choisir les valeurs des fonctions $T_n(t)$, et $T_n'(t)$,pour t =0 de façon à vérifier les égalités

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)v_n(x,y,z).$$

$$\frac{d}{dt}u(x,y,z,t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)v_n(x,y,z).$$

Le problème devient tout à fait simple si l'on réussit à réduire le problème aux limites (2.1.4)-(2.1.5) par séparation des variables à des problèmes aux limites à une dimension, i.e. aux équations du type

$$Ly + \lambda \rho y = 0. \tag{2.1.6}$$

où

$$Ly = \frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y \qquad\qquad (k(x) > 0, \rho(x) > 0).$$

L'équation (2.1.6) est examinée sur l'intervalle $]a, b[$ pour des conditions aux limites du type

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

(α_i, β_i : étant des constantes données).

Les fonctions $k(x)$,$k'(x)$,q(x) et $\rho(x)$ seront supposées continues pour $x \in [a, b]$. ce type de problème est appelé problème de Sturm-Liouville.

2.2 Problème de Sturm-Liouville. Propriétés fondamentales des fonctions propres et des valeurs propres

Considérons les propriétés fondamentales des solutions du problème de Sturm-Liouville. Les propriétés les plus élémentaires se déduisent à l'aide de l'égalité

$$\int_{x_1}^{x_2} (fLg - gLf)dx = k(x)W(f, g)|_{x_1}^{x_2} \tag{2.2.1}$$

Soient $y_1(x), y_2(x)$ deux solutions du problème de Sturm-Liouville répondant aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0$$

$$\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0$$

ces égalités n'admettent des solutions non triviales que si le déterminant du système, i. e. le wronskien $W(y_1, y_2)$ pour x = a, est nul. On montre de même que $W(y_1, y_2)|_{x=b} = 0$. On déduit donc de l'identité (2.2.1) pour $x_1 = a$, $x_2 = b$, $f(x) = y_1(x), g(x) = y_2(x)$, que

$$\int_a^b (y_1 Ly_2 - y_2 Ly_1)dx = 0$$

En vertu de l'équation (2.1.6) et de la condition $\lambda_1 \neq \lambda_2$, cette égalité peut s'écrire aussi comme suit :

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)\rho(x)dx = 0 \qquad (\lambda_1 \neq \lambda_2) \tag{2.2.2}$$

Ainsi donc, les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville (2.1.6)- (2.1.7) correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonales sur l'intervalle]a, b[par rapport au poids $\rho(x)$.

On montre sans peine que les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville sont réelles, pour autant que les coefficients de l'équation (2.1.6) et les constantes α_i, β_i des conditions (2.1.7) soient réels. Supposons en effet qu'il existe une fonction propre $y(x)$ du problème de Sturm-Liouville qui correspond à une valeur propre λ complexe. Passant aux conjuguées complexes dans (2.1.6) et (2.1.7), on s'assure facilement que la fonction $y^*(x)$ est la fonction propre répondant à la valeur propre λ^*. Posant $\lambda \neq \lambda^*$, on aurait alors en vertu de l'égalité (2.2.2)

$$\int_a^b |y(x)|^2\rho(x)dx = 0$$

Si l'équation est exemple de singularités, les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville se déduisent à partir des conditions aux limites homogènes du type (2.1.7) tant pour x=a que pour x =b. Les fonctions propres sont orthogonales et les valeurs propres réelles pour la raison que l'opérateur L est auto-adjoint dans la classe des fonctions admettant une dérivée seconde continue sur l'intervalle $]a, b[$:

$$\int_a^b (fLg - gLf)dx = 0$$

On a en vertu de (2.2.1)

$$\int_a^b (fLg - gLf)dx = k(x)W(f,g)|_a^b$$

Si les fonctions f et g vérifient les conditions aux limites homogènes tant pour x = a que pour x = b, l'opérateur L est auto-adjoint, car

$$W(f,g) = (fg' - gf')|_{x=a.b} = 0$$

Soit $x = a$ un point singulier de l'équation. Les propriétés que possèdent les fonctions propres et les valeurs propres du problème de Sturm-Liouville en l'absence de points singuliers seront alors, de toute évidence, conservées pour une équation admettant un point singulier si, la solution étant bornée pour x = a, on a

$$k(x)(fg' - gf')|_{x=a} = 0.$$

Remarque 2.1. *Si y est une solution d'une équation alors c'est une solution de l'équation de Sturm-Liouville.*

2.3 Propriétés oscillatoires des solutions du problème de Sturm- Liouville

Soit l'équation

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y = -\lambda\rho(x)y$$

$$\frac{d}{dx}[k(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$$

$$[k(x)y']' + [\lambda\rho(x) - q(x)]y = 0 \qquad \rho(x) > 0$$

$$[k(x)y']' + g(x)y = 0 \tag{2.3.1}$$

Pour étudier les propriétés oscillatoires de ses solutions pour $k(x) > 0$ faisons le changement de variables

$$y = r(x)\sin\phi(x) \qquad ky' = r(x)\cos\phi(x) \tag{2.3.2}$$

Nous obtenons les équations pour les fonctions inconnues $r(x)$ et $\phi(x)$:

$$k(x)y' = k(x)(r'\sin\phi + r\phi'\cos\phi) = r\cos\phi$$

$$g(x)y = -[k(x)y'] = -r'\cos\phi + r\phi'\sin\phi = gr\sin\phi$$

d'où

$$r' \sin\phi + r\phi' \cos\phi = \frac{r}{k}\cos\phi$$

Explicitant ϕ'et r', on obtient à partir de ce système deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \phi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\phi + g(x)\sin^2\phi \\ r' = \frac{1}{2}r(\frac{1}{k} - g)\sin 2\phi \end{cases} \tag{2.3.3}$$

D'aprés la dernière équation on a :

$$r(x) = r(x_0)exp\{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[\frac{1}{k(t)} - g(t)]\sin 2\phi(t)dt\}$$

d'où il ressort que la fonction $r(x)$ reste de signe constant. On voit donc que c'est le signe de $\sin\phi(x),\ \cos\phi(x)$ qui détermine celui de $y(x), y'(x)$ par conséquent, pour connaître les propriétés oscillatoires des solutions de (2.3.1), il suffit d'examiner le comportement de la solution de l'équation (2.3.3).

Théorème 2.1. *(THÉORÈME DE COMPARAISON). Soient $\phi(x), \bar{\phi}(x)$ solutions des équations*

$$\phi' = \frac{1}{k(x)}\cos^2\phi + g(x)\sin^2\phi$$

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{\bar{k}(x)}\cos^2\bar{\phi} + \bar{g}(x)\sin^2\bar{\phi}$$

et soit $\bar{\phi}(x_0) = \phi(x_0)$, Si $\frac{1}{\bar{k}(x)} \geq \frac{1}{k(x)}$ et $\bar{g}(x) \geq g(x)$
On a

$$\bar{\phi}(x) \geq \phi(x) \textit{ pour } x \geq x_0$$

Démonstration. posons

$$\frac{1}{k_v(x)} = \frac{1}{k(x)} + v[\frac{1}{\bar{k}(x)} - \frac{1}{k(x)}]$$

et

$$g_v(x) = g(x) + v[\bar{g}(x) - g(x)]$$

Ou v entre $v = 0$ et $v = 1$ Considérons l'équation

$$\phi_v' = \frac{1}{k_v(x)}\cos^2\phi_v + g(x)\sin^2\phi_v \tag{2.3.4}$$

la condition initiale $\phi_v(x_o) = \phi(x_o)$. Puisque $k_0(x) = k(x), k_1(x) = \bar{k}(x), g_0(x) - g(x), g_1(x) = \bar{g}(x),$ *on a* $\phi_0(x) = \phi(x), \phi_1(x) = \bar{\phi}(x)$. Soit $\psi_v(x) = \frac{d\phi_v(x)}{dv}$
Alors

$$\psi_v' = a_v(x)\psi_v + b_v(x), \quad \psi_v(x_0) = 0$$

Ou

$$a_v = (g_v - \frac{1}{k_v} sin2\phi_v)$$

$$b_v = (\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{k}) cos^2\phi_v + (\bar{g} - g) sin^2\phi_v$$

on a

$$b_v \geq 0$$

La solution de l'équation linéaire non homogène pour $\psi_v(x)$ s'écrit sous la forme

$$\psi_v(x) = \int_{x_0}^{x} b_v(t) exp[\int_t^x a_v(s)ds]dt.$$

Îl ressort de cette expression qu'on a $\psi_v(x) \geq 0$ pour $x > x_0$ et que $\psi_v(x) \leq 0$ pour $x < x_0$. La proposition résulte de l'égalité évidente

$$\bar{\phi}(x) - \phi(x) = \phi_1(x) - \phi_0(x) = \int_0^1 \frac{d\phi_v(x)}{dv} = \int_0^1 \psi_v(xdv)$$

Donc

$$\bar{\phi}(x) \geq \phi(x) \quad , \quad pour\ x > x_0.$$

□

Théorème 2.2. *(THÉORÈME D'OSCILLATION). Le problème de Sturm- Liouville admet une infinité de valeurs propres $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n ...$ Avec $\lambda_n \to \infty$ comme $n \to \infty$. Les fonctions propres correspondant à une valeur propre $\lambda = \lambda_n$, admettent exactement n zéros sur l'intervalle $]a, b[$.*

Démonstration. Soit$\lambda = \lambda_n$, racine de l'équation

$$\phi(b, \lambda) = arccotg(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}) + \pi n \tag{2.3.5}$$

dans laquelle n est un entier non négatif. Puisque

$$0 \leq \phi(a) < \pi$$

$$\pi n < \phi(b, \lambda_n) \leq \pi(n+1)$$

l'intervalle $]a, b[$ comporte exactement n entiers entre les nombres $\frac{\phi(a)}{\pi}$ et $\frac{\phi(b,\lambda_n)}{\pi}$ Pour montrer que l'équation (2.3.4) n'admet qu'une seule racine pour chaque n = 0, 1, ..., il suffit de prouver que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \phi(b, \lambda_n) = 0, \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \phi(b, \lambda_n) = +\infty \tag{2.3.6}$$

D'aprés le théorème de comparaison Remplaçons, dans le problème de Sturm-Liouville, les fonctions $k(x)$ et $g(x, \lambda)$ par des constantes $\bar{k}$, $\bar{g}(\lambda)$ et $\tilde{k}$, $\tilde{g}(\lambda)$ respectivement, telles que

$$\begin{cases} \frac{1}{\bar{k}} \leq \frac{1}{k(x)} \leq \frac{1}{\tilde{k}} \\ \bar{g}(\lambda) \leq g(x, \lambda) \leq \tilde{g}(\lambda) \end{cases}$$

On obtient

$$\phi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \phi + g(x, \lambda) \sin^2 \phi$$

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{\bar{k}(x)} \cos^2 \bar{\phi} + \bar{g}(x, \lambda) \sin^2 \bar{\phi}$$

$$\tilde{\phi}' = \frac{1}{\tilde{k}(x)} \cos^2 \tilde{\phi} + \tilde{g}(x, \lambda) \sin^2 \tilde{\phi}$$

Remplacons, dans(2.1.7) telles que $\phi(a) = \bar{\phi}(a) = \tilde{\phi}(a)$ On aura alors pour x $>$a, en vertu du théorème de comparaison, les inégalités

$$\bar{\phi}(x, \lambda) \leq \phi(x, \lambda) \leq \tilde{\phi}(x, \lambda)$$

En particulier les équations suivantes par rapport à $\bar{y}(x, \lambda)$ et $\tilde{y}(x, \lambda)$:

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{k}} \bar{y} = 0 \tag{2.3.7}$$

$$\tilde{y}'' + \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\tilde{k}} \tilde{y} = 0 \tag{2.3.8}$$

Comme : $\quad \lim_{\lambda \to -\infty} g(x, \lambda) = -\infty \quad$ et $\quad \lim_{\lambda \to +\infty} g(x, \lambda) = +\infty$

Montrons que

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \bar{\phi}(b, \lambda) = 0 \qquad et \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} \tilde{\phi}(b, \lambda) = 0$$

La solution de l'équation (2.3.6) vérifiant la condition $\bar{\alpha}_1\bar{y}(a)+\bar{\beta}_1\bar{y}'(a)=0$ se présente comme suit :

$$\bar{y}(x,\lambda)=\begin{cases}A[\frac{\bar{\alpha}_1}{\omega}sh\omega(x-a)-\bar{\beta}_1ch\omega(x-a)] & \bar{g}(\lambda)<0\\ A\sin[\omega(x-a)+\phi_0] & \bar{g}(\lambda)>0\end{cases}$$

où

$$\omega=\sqrt{|\frac{\bar{g}}{\bar{k}}|}$$

La fonction $\bar{y}(x,\lambda)$ n'admet pas de zéros pour x $>$ a si $\bar{g}(\lambda)\to-\infty$

$$\bar{y}(x,\lambda)=\begin{cases}-A\bar{\beta}_1ch\omega(x-a) & pour\bar{\beta}_1\neq0\\ A\frac{\bar{\alpha}_1}{\omega}ch\omega(x-a) & pour\bar{\beta}_1=0\end{cases}$$

Cela signifie qu'on a $0<\bar{\phi}(x,\lambda)<\pi$ pour x $>$ a si A est un nombre négatif suffisamment grand en module. On a en outre, de toute évidence,

$$cotg\bar{\phi}(x,\lambda)=\bar{k}\frac{\bar{y}'(x,\lambda)}{\bar{y}(x,\lambda)}\xrightarrow{\lambda\to-\infty}+\infty$$

Cela revient à dire que $\lim_{\lambda\to-\infty}\bar{\phi}(x,\lambda)=0$.
à condition que λ prenne une valeur positive suffisamment élevée. On a donc $\lim_{\lambda\to+\infty}\bar{\phi}(x,\lambda)=+\infty$

Nous avons démontré les relations limites pour la fonction $\bar{\phi}(x,\lambda)$. Pour $\tilde{\phi}(x,\lambda)$, elles se démontrent d'une façon analogue. Puisque

$$\bar{\phi}(x,\lambda)\leq\phi(x,\lambda)\leq\tilde{\phi}(x,\lambda)$$

On a

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\phi(x,\lambda)=0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}\phi(x,\lambda)=+\infty$$

Le théorème est démontré. □

نظرية 1.2.1

(نظرية التذبذب). تعرف مشكلة شتورم ليوفيل لانهائية من القيم الذاتية $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<...<\lambda_n...$ الدوال الذاتية المقابلة بقيمة ذاتية $\lambda=\lambda_n$ ،يقبل بالضبط n أصفار على الفترة $]a,b[$.

برهان

ليكن $\lambda = \lambda_n$ ، جذر المعادلة

$$\phi(b,\lambda) = arccotg(-\frac{\alpha_2 k(b)}{\beta_2}) + \pi n \tag{2.3.9}$$

حيث n عدد صحيح غير سالب. منذ

$$0 \leq \phi(a) < \pi \qquad , \qquad \pi n < \phi(b,\lambda_n) \leq \pi(n+1)$$

الفاصل $]a,b[$ يحتوي بالضبط على n أعداد صحيحة بين الأرقام $\frac{\phi(a)}{\pi}$ و $\frac{\phi(b,\lambda_n)}{\pi}$ لبيان أن المعادلة (2.3.4) يقبل فقط بجذر واحد لكل $n = 0, 1, ...,$ يكفي إثبات ذلك

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \phi(b,\lambda_n) = 0 \qquad , \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} \phi(b,\lambda_n) = +\infty \tag{2.3.10}$$

من خلال نظرية المقارنة نستبدل في مشكلة شتورم – ليوفيل، الدوال $k(x)$ و $g(x,\lambda)$ بالثوابت $\bar{k}$ ، $\bar{g}(\lambda)$ و $\tilde{k}$ ، $\tilde{g}(\lambda)$ على التوالي ، حيث

$$\begin{cases} \frac{1}{\bar{k}} \leq \frac{1}{k(x)} \leq \frac{1}{\tilde{k}} \\ \bar{g}(\lambda) \leq g(x,\lambda) \leq \tilde{g}(\lambda) \end{cases}$$

نحصل :

$$\phi' = \frac{1}{k(x)} \cos^2 \phi + g(x,\lambda) \sin^2 \phi$$
$$\bar{\phi}' = \frac{1}{\bar{k}(x)} \cos^2 \bar{\phi} + \bar{g}(\lambda) \sin^2 \bar{\phi}$$
$$\tilde{\phi}' = \frac{1}{\tilde{k}} \cos^2 \tilde{\phi} + \tilde{g}(\lambda) \sin^2 \tilde{\phi}$$

$\phi(a) = \bar{\phi}(a) = \tilde{\phi}(a)$ سيكون لدينا بعد ذلك لـ $x > a$ ، بحكم نظرية المقارنة ، عدم المساواة

$$\bar{\phi}(x,\lambda) \leq \phi(x,\lambda) \leq \tilde{\phi}(x,\lambda)$$

بالخصوص المعادلات التالية فيما يتعلق $\bar{y}(x,\lambda)$ و $\tilde{y}(x,\lambda)$:

$$\bar{y}'' + \frac{\bar{g}(\lambda)}{\bar{k}}\bar{y} = 0 \quad (2.3.11)$$

$$\tilde{y}'' + \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\tilde{k}}\tilde{y} = 0 \quad (2.3.12)$$

مثل $\lim_{\lambda\to-\infty} g(x,\lambda) = -\infty$ و $\lim_{\lambda\to+\infty} g(x,\lambda) = +\infty$ نبين ان $\lim_{\lambda\to-\infty} \bar{\phi}(b,\lambda) = 0$ و $\lim_{\lambda\to-\infty} \tilde{\phi}(b,\lambda) = 0$ حل المعادلة (2.3.6) لفحص الحالة : $\bar{\alpha}_1\bar{y}(a) + \beta_1 y'(a) = 0$ يشبه هذا

$$\bar{y}(x,\lambda) = \begin{cases} A[\frac{\bar{\alpha}_1}{\omega} sh\omega(x-a) - \bar{\beta}_1 ch\omega(x-a)] & \bar{g}(\lambda) < 0 \\ A\sin[\omega(x-a) + \phi_0] & \bar{g}(\lambda) > 0 \end{cases}$$

أو

$$\omega = \sqrt{|\frac{\bar{g}}{\bar{k}}|}$$

الدالة $\bar{y}(x,\lambda)$ لا يسمح للأصفار $x > a$ سواء $\bar{g}(\lambda) \to -\infty$

$$\bar{y}(x,\lambda) = \begin{cases} -A\bar{\beta}_1 ch\omega(x-a) & pour \bar{\beta}_1 \neq 0 \\ A\frac{\bar{\alpha}_1}{\omega} ch\omega(x-a) & pour \bar{\beta}_1 = 0 \end{cases}$$

هذا يعني أننا $0 < \bar{\phi}(x,\lambda) < \pi$ من اجل $x > a$ سواء إلى رقم سالب كبير بما يكفي في المعامل. بالإضافة إلى ذلك ، من الواضح أن لدينا،

$$cotg\bar{\phi}(x,\lambda) = \bar{k}\frac{\bar{y}'(x,\lambda)}{\bar{y}(x,\lambda)} \xrightarrow{\lambda\to-\infty} +\infty$$

هذا يرقى إلى قول ذلك $\lim_{\lambda\to-\infty} \bar{\phi}(x,\lambda) = 0$

بشرط ان λ يأخذ قيمة إيجابية عالية بما فيه الكفاية. اذا لدينا $\lim_{\lambda\to+\infty} \bar{\phi}(x,\lambda) = +\infty$

لقد أثبتنا العلاقات المحدودة للدالة $\bar{\phi}(x,\lambda)$. من اجل $\tilde{\phi}(x,\lambda)$ ، يتم عرضها بطريقة مماثلة. منذ

$$\bar{\phi}(x,\lambda) \leq \phi(x,\lambda) \leq \tilde{\phi}(x,\lambda)$$

لدينا $\lim_{\lambda\to-\infty} \phi(x,\lambda) = 0$ ، $\lim_{\lambda\to+\infty} \phi(x,\lambda) = +\infty$ تم إثبات النظرية.

2.4 Développement des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville

Dans les problèmes aux limites de physique mathématique, on a souvent recours aux développements des fonctions suivant les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y_n(x) \tag{2.4.1}$$

Ici $y_n(x)$ est la fonction propre répondant à la valeur propre $\lambda = \lambda_n$. Les coefficients a_n, se cherchent en faisant intervenir la propriété d'orthogonalité des fonctions propres :

$$a_n = \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx / \int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx \tag{2.4.2}$$

Dans le cas particulier du problème de Sturm-Liouville où $k(x) = 1$, $\rho(x) = 1, q(x) = 0$ et $\beta_1 = \beta_2 = 0$, les fonctions propres $y_n(x)$ s'écrivent

$$y_n(x) = A_n \sin \frac{\pi n}{l}(x-a) \quad , \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi n}{l}}$$

et pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ elles deviennent

$$y_n(x) = B_n \cos \frac{\pi n}{l}(x-a) \qquad , \qquad \lambda_n = \sqrt{\frac{\pi n}{l}} \quad (l = b-a)$$

Dans ces cas le développement (2.4.1) représente un développement bien connu en série de Fourier suivant les sinus ou les cosinus respectivement. Dans le cas général, les conditions de légitimité du développement (2.4.1) se laissent réduire aux conditions de développabilité de la fonction en série de Fourier .

2.5 Transformation d'une équation homogène en une forme de Strum-Liouville

Tout opérateur linéaire du deuxième ordre peut être mis sous la forme de l'opérateur de Strum-liouville L, qui est égale à :

$$L = \frac{d}{dx}(k(x)\frac{d}{dx}) - q(x) \tag{2.5.1}$$

prenons l'équation :

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x) \tag{2.5.2}$$

Si : $a_1(x) = a'_2(x)$, on peut écrire l'équation sous la forme :

$$f(x) = a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

ce qui donne :

$$f(x) = (a_2(x)y')' + a_0(x)y = 0 \tag{2.5.3}$$

On doit juste identifier $k(x) = a_2$ et $q(x) = a_0(x)$

Remarque 2.2. *La fonction nulle $y \equiv 0$ est clairement une solution de tout problème de Sturm-Liouville homogène.*

Exemples

1) Considérons l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + 2y = 0$$

Dans ce exemple, nous avons : $a_2(x) = x^2, a'_2(x) = 2x \neq a_1(x)$ l'oppérateur différentiel linéaire dans cette équation n'est pas de type de Strum-Liouville, mais on peut le transformer en un opérateur de Strum-Liouville. Dans l'opérateur de Strum-Liouville les termes de Strum-Liouville sont réunis en une dérivée parfaite, nous aurons à intégrer le facteur. Tout d'abord, nous cherchons une fonction multiplicative $\mu(x)$ que l'on peut multiplier par (3.1.2), de sorte qu'il peut être écrit sous la forme de Strum-Liouville, nous divisons le par $a_2(x)$, on obtient :

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{f(x)}{a_2(x)}$$

Multiplions l'équation différentielle par $\mu(x)$:

$$\mu(x)y'' + \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \mu(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \mu(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}$$

Alors

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu(x)\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

Ceci est formellement résolue ce qui donne :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}}$$

Ainsi, l'équation d'origine peut être multiplier par le facteur

$$\frac{\mu(x)}{a_2(x)} = \frac{1}{a_2(x)}e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}}$$

En résumé, l'équation

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

peut être mis sous la forme de Strum-Liouville

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dy}{dx}) - q(x)y = F(x) \tag{2.5.4}$$

Avec :$F(x) = -\lambda p(x)y$

Lorsque :

$$k(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}}$$

$$q(x) = k(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

$$F(x) = k(x)\frac{f(x)}{a_2(x)}$$

Pour l'exemple

$$x^2y'' + xy' + 2y = 0$$

pour mettre l'équation sous la forme de Strum-liouville :

$$xy'' + y' + \frac{2}{x}y = 0$$

$$(xy')' + \frac{2}{x}y = 0 \tag{2.5.5}$$

2)**L'équation d'Hermite :**

L'équation d'Hermite est donnée par :

$$y'' - xy' + \lambda y = 0 \qquad ; \qquad -\infty < x < +\infty$$

$$\mu(x) = e^{\int -x dx} = e^{-x^2/2}$$

Multipliant cette équation par $e^{-x^2/2}$ on obtient une equation sous la forme de Strum-Liouville :

$$L[y](x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2/2}y'(x) = -\lambda e^{-x^2/2}y(x)$$

Nous avons $k(x) = \mu(x) = e^{-x^2/2},\ q(x) = 0,\ r(x) = e^{-x^2/2}$, c'est un problème de Strum-Liouville singulier, puisque l'intervalle est non borné.

3)**L'équation de Legendre :**

L'équation de Legendre est donnée par :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda + 1)y = 0 \qquad , \qquad -1 < x < 1$$

Cette équation peut être mise sous la forme :

$$L[y](x) = \frac{d}{dx}(1 - x^2)y'(x) = -\lambda(\lambda + 1)y(x)$$

Nous avons $k(x) = \mu(x) = 1 - x^2,\ q(x) = 0,\ r(x) = 0$, et on a : $k(1) = k(-1) =$, donc c'est un problème de Strum-Liouville singulier.

4)**L'équation de Laguerre :**

L'équation de Laguerre est donnée par :

$$xy'' + (1 - x^2)y' + \lambda y = 0 \qquad , \qquad 0 < x < \infty$$

On transforment cette équation sous la forme d'une équation de Strum-Liouville, on obtient :

$$L[y](x) = \frac{d}{dx}(xe^{-x})y'(x) = -\lambda e^{-x}y(x)$$

C'est un problème de Sturm-Liouville singulier car l'intervalle est non borné.

5)**example**

Soit l'équation telle que

$$x^3y'' - xy' + ay = 0$$

Avec a constante réelle qui correspond à $a_2(x) = x^3,\ a_1(x) = -x,\ a_0(x) = 2$ et par multiplication par le facteur intégrant :

$$k(x) = exp(\int -\frac{1}{x^2}(x)dx) = e^{(\frac{1}{x})}$$

Forme de Sturm-Liouville s'écrit

$$(e^{\frac{1}{x}}y')' + \frac{ae^{\frac{1}{x}}}{x^3}y = 0$$

il est possible de poser $q(x) = 0$ et $\lambda = -a,\ p(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$.

Exemple 2.5.1. *Résoudre le problème de Sturm-Liouville suivant :*

$$\begin{cases} y''(t) + \lambda y(t) = 0 & t \in [0, \pi] \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

- *pour $\lambda \leq 0$ Il n'y a pas de solution non triviale.*
- *pour $\lambda > 0$ la solution générale de l'équation $y''(t) + \lambda y(t) = 0$ est de la forme*

$$y(t) = c_1 sin(\sqrt{\lambda}t) + c_2 cos(\sqrt{\lambda}t)$$

Compte tenu les conditions aux limites $y'(0) = 0$ et $y'(\pi) = 0$ on obtient

$$c_1\sqrt{\lambda} = 0$$

$$c_1\sqrt{\lambda}cos(\sqrt{\lambda}t) - c_2 sin(\sqrt{\lambda}t)) = 0$$

Par conséquant $c_1 = 0$ et $c_2 sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Si $c_2 = 0$ alors $y(t) = 0$. Pour $c_2 \geq 0$ donc $sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$. Il vient $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi,\ k = 1, 2, \cdots$ D'où, $\lambda_k = k^2$ sont les valeurs propres et $y_k(t) = cos(kt)$ sont les fonctions propres.

CHAPITRE

3

APPLICATIONS DE PROBLÈME DE STURM- LIOUVILLE

3.1 L'équation de la chaleur

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(x,t) = k\frac{d^2u}{dx^2}(x,t), \quad 0 < x < l \qquad t > 0 \qquad (\mathbf{1}) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad\qquad\qquad t > 0 \qquad (\mathbf{2}) \\ u(x,0) = f(x) \qquad\quad 0 < x < l \qquad\qquad (\mathbf{3}) \end{cases}$$

Tel que $u(x,t)$ est la température au point x et le temps t, et k est une constante physique positive.

Utilisons la méthode de séparation des variables, on cherche toute les solutions non triviales sous la forme :

$$u(x,t) = v(x)T(t)$$

l'équation (1) revient

$$v(x)T'(t) = kv''(x)T(t)$$

divisons par $T(t)v(x)$ on a :

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = \lambda$$

Tel que $\lambda \in \mathbb{R}$. Cette écriture est équivalent à :

$$\begin{cases} T'(t) - k\lambda T(t) = 0 & \textbf{(4)} \\ v''(x) - \lambda v(t) = 0 & \textbf{(5)} \end{cases}$$

Utilisons les condition aux limits :

$$\begin{cases} v(0)T(t) = 0 \\ v(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

$T(t) \neq 0$ Alors

$$v(0) = v(l) = 0$$

D'après (4) et (5) on a :

$$\begin{cases} v''(x) - \lambda v(x) = 0 \\ v(0) = v(l) = 0 \end{cases}$$

C'est un cas particulier de problème de Sturm-Liouville, on trouve trois cas selon le signe de λ.

Le premier cas : $\lambda > 0$:

Dans ce cas, T(t) en croissance de façon exponentielle au voisinage de l'infini ce qui rend $u(x,t)$ en croissance de façon exponentielle, ce n'est pas acceptable en physique.

Le Deuxième cas : $\lambda = 0$:

On a :

$$v''(x) = 0$$

Alors

$$v(x) = c_1 + c_2 x$$

Pour déterminer c_1, c_2 utilisons les conditions aux limits

$$\begin{cases} v(0) = c_1 \to v(x) = c_2 x \\ v(l) = c_2 l = 0 \to c_2 = 0 \end{cases}$$

Il n'y a pas de solutions sauf la solution triviale pour $\lambda = 0$.

Le troisième cas : $\lambda < 0$ **:**

On pose $\lambda = -\gamma^2$ donc on a l'équation suivante :

$$v''(x) + \gamma^2 v(x) = 0$$

La solution de cette equation est :

$$v(x) = Acos(\gamma x) + sin(\gamma x)$$

Appliquons les condition aux limits

$$\begin{cases} A = 0 \\ Acos(\gamma l) + Bsin(\gamma l) = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} B\sin(\gamma l) &= 0 \\ \sin(\gamma l) &= 0 \\ \gamma l &= n\pi \\ \gamma &= \frac{n\pi}{l} \qquad \textit{tel que} \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc la forme de $v(x)$ est :

$$v_n(x) = B_n \sin(\frac{n\pi}{l} x)$$

De ce qui précède, nous avons

$$T'(t) + \gamma^2 T(t) = 0$$

Sa solution est :

$$T(t) = Ce^{-k\gamma^2 t}.$$

Alors

$$T_n(t) = C_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= B_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) C_n e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t} \\ &= k_n \sin(\frac{n\pi}{l}x) e^{-k(\frac{n\pi}{l})^2 t}. \end{aligned}$$

k_n représente toutes les constantes.

3.2 L'équation des ondes

Si une corde fine, souple et sans poids, qui est tendue entre deux cordes fixes points, disons $x = 0$ et $x = l$, reçoit un petit déplacement vertical, puis libéré du repos, vibrera sur sa longueur de telle manière que le déplacement au point x et au temps t, noté $u(x,t)$, satisfait l'équation d'onde

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{3.2.1}$$

c étant une constante positive déterminée par le matériau de la corde. Cete équation décrit les vibrations transversales d'une corde idéale, et elle diffère de l'équation de la chaleur uniquement dans le fait que la dérivée du temps est seconde, les solutions sont très différentes. Les conditions aux limites sur u sont naturellement

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad , t > 0 \tag{3.2.2}$$

le problème devient avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad ,t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < l \\ u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l \end{cases}$$

$f(x)$ étant la forme initiale 0 la vitesse initiale. Ici les deux conditions initiales sont nécessaires parce que la dérivée temporelle dans l'équation d'onde est de second ordre.

en utilisant la séparation des variables, avec :

$$u(x,t) = \upsilon(x)T(t)$$

Conduit à

$$c^2\upsilon''(x)T(t) = \upsilon(x)T''(t)$$

Divisons par $\upsilon(x)T(t)$ on a :

$$\frac{\upsilon''(x)}{\upsilon} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = \mu$$

On pose $\mu = -\lambda^2$

Tel que $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

Ainsi

$$\upsilon''(x) + \lambda^2\upsilon(x) = 0, \qquad 0 < x < l$$

$$T''(t) + c^2\lambda^2T(t) = 0, \qquad t > 0$$

Utilisons les condition aux limites :

$$\begin{cases} \upsilon(0)T(t) = 0 \\ \upsilon(l)T(t) = 0 \end{cases}$$

$T(t) > 0$ alors :

$$\upsilon(0) = \upsilon(l)$$

Dont les solutions sont :

$$\upsilon(x) = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$$

$$T(t) = a'\cos c\lambda t + b'\sin c\lambda t$$

D'aprés les condition aux limites

$$\begin{cases} a = 0 \\ a\cos\lambda l + b\sin\lambda l = 0 \end{cases}$$

Donc

$$b\sin\lambda l = 0$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{l} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

Donc la forme de

$$\upsilon_n(x) = c_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)$$

Nous avons aussi la solution

$$T(t) = a'\cos c\lambda t + b'\sin c\lambda t$$

On a donc :

$$T_n(t) = a'_n\cos(\frac{n\pi}{l}t) + b'_n\sin(\frac{n\pi}{l}t)$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \upsilon_n(x)T_n(t) \\ &= c_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)[a'_n\cos(\frac{n\pi}{l}t) + b'_n\sin(\frac{n\pi}{l}t)] \\ &= \sin(\frac{n\pi}{l}x)[a_n\cos(\frac{n\pi}{l}t) + b_n\sin(\frac{n\pi}{l}x)] \end{aligned}$$

On sait que la somme des solutions est aussi une solution donc la solution de l'équation

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(\frac{cn\pi}{l}t) + b_n \sin(\frac{cn\pi}{l}t)] \sin \frac{n\pi}{l}x. \tag{3.2.3}$$

La première condition initiale implique

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l}x = f(x) \qquad 0 < x < l \tag{3.2.4}$$

Cette dernière série de fonctions n'est autre que la série de Fourier de la donnée initiale f(x) sur l'intervalle $[0, l]$. Les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{n\pi}{l}xdx \tag{3.2.5}$$

La dernière condition implique

$$\sum_{n=0}^{=\infty} \frac{cn\pi}{l}b_n cos\frac{cn\pi}{l} \qquad , \qquad 0 < x < l$$

Donc en déduire que :

$$b_n = 0$$

La solution de l'équation d'onde

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n cos\frac{cn\pi}{l}t \sin \frac{n\pi}{l}x$$

Avait le corde a été relâchée avec une vitesse initiale décrite, par exemple, par le fonction

$$u_t(x,0) = g(x)$$

les coefficients b_n seraient alors déterminés par la condition initiale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{cn\pi}{l}b_n \sin \frac{cn\pi}{l}x = g(x).$$

comme

$$b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{cn\pi}{l}xdx. \tag{3.2.6}$$

Exemple 3.2.1. *Nous trouverons la solution de $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec condition $u(l,t) = 0$ avec c=2, $l = \pi$, $f(x) = x(\pi - x)$, g(x)=0. D'aprés (3.2.6) il est clair que $b_n = 0$, $n \geq 0$. maintenant,d'aprés (3.2.5) on a :*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nxdx \\
&= \frac{2}{\pi}[\pi\int_0^\pi x\sin nxdx - \int_0^\pi x^2\sin nxdx] \\
&= \frac{2}{\pi}[\pi\{\frac{-x\cos nx}{n}|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nxdx\} - \{-\frac{x^2\cos nx}{n}|_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos nxdx\}] \\
&= \frac{2}{\pi}[\pi\frac{-\pi\cos n\pi}{n} + \frac{\pi^2\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n}\{x\frac{\sin nx}{n}|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\}] \\
&= \frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2(-1)^{n+1}}{n} - \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}\times -\frac{\cos nx}{n}|_0^\pi] \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{2}{n^2}[\frac{1-(-1)^n}{n}] \\
&= \frac{4}{\pi n^3}[1 - (-1)^n]
\end{aligned}$$

Ainsi, la solution de (3.2.1)–(3.2.2) dans ce cas particulier est

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi n^3}[1-(-1)^n]\cos 2nt\sin nx$$

Posant $n = 2n + 1$, alors

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2n+1)^3}\cos 2(2n+1)t\sin(2n+1)x.$$

Maintenant, pour simplifier, nous supposons que $g(x) \equiv 0$, nous définissons en outre f(x) pour tout x par sa série de Fourier, alors f(x) est une fonction impaire de période 2l, i.e f(-x)=f(x) et f(x+2l)=f(x). Alors $b_n = 0$.

La solution est donc :

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} = \frac{1}{2}(\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)+\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct))$$

Et aussi

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1} +\infty a_n(\sin\frac{n\pi}{l}(x+ct)+\sin\frac{n\pi}{l}(x-ct))$$

D'aprés (3.2.4) on a :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)].$$

Conclusion générale

Nous avons étudié définitions principales et quelques propriétés fondamentales et oscillatoires du problème de Sturm-Liouville.
La résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables consiste à chercher des solutions sous forme de combinaisons particulières de fonctions sous forme d'une série de Fourier.Parmi les propriétés utilisés dans la résolution on peut citer que les valeurs propres des problèmes de Sturm-Liouville doivent être réelles et les solutions qui représentent les fonctions propres doivent être orthogonales.
Nous avons montré que toutes les équations différentielles ordinaires homogènes du second ordre peuvent être mises sous la forme d'un problème de Sturm-Liouville.
Nous avons clôturé ce mémoire avec quelques équations tirées de la physique qui expriment certains phénomènes naturels (les ondes et la chaleur).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.NIKIFOROV,V.OUVAROV, *fonctions spéciales de la physique mathématique*, *Edition mir* Moscou , 1978.*

[2] B.A.AYOUB, *mémoire sur problème de sturm-liouville et ses applications dans la physique mathématique*, *2020.*

[3] E.BURKARD, *Introduction to Ordinary Differential Equations and Some Applications,Riverside, 2010.*

[4] M.A.AL-GWAIZ, *Sturm-Liouville Theory and its Applications,pringer, 2007.*

[5] R. P. AGARWAL, D. O'REGAN, *Ordinary and Partial Differential Equations, With Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems,pringer, 2009.*

[6] S.LAHLOU KOUTBI, *mémoire sur La résolution de certaines EDP et la théorie de Sturm-Liouville*, *2016.*

[7] W.W.BELL, *Spécial functions for scientists and engineers,Van Nostrand, 1968.*