

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
**MINISTRERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

جامعة سعد دحلب البليدة  
**UNIVERSITE SAAD DAHLAB  
BLIDA**

**FACULTE DES SCINCES DE L'INGENIEUR**

**DEPARTEMENT DE MECANIQUE**

**MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

**Pour l'obtention du diplôme  
d'ingénieur d'état en mécanique**

**Option : construction**

**Thème**

Modélisation d'une plaque composite  
**Modélisation d'une plaque composite  
en compression par la M.E.F**

**Proposé par**  
Mr TIBERKAK RACHID

**Présenté par**  
REZALA AICHA

**PROMOTION 2004 / 2005**

# Remerciements

*Au terme de ce travail, je tiens à remercier en premier lieu, le bon Dieu (Allah) qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour terminer ce projet de fin d'étude.*

*Je tiens à exprimer mes profondes gratitudes à mon promoteur monsieur TIBERKAK Rachid pour ses aides précieuses qu'il m'a offertes et sa disponibilité à tout moment pour l'élaboration de ce travail.*

*Je remercie également les enseignants de l'institut de Génie Mécanique et à toutes les personnes qui m'ont assistées, soutenues de près ou de loin. Sans oublier mes amis qui restent dans l'ombre que je n'oublierai guère.*

*Je tiens aussi moi « Aicha » à remercier ma sœur Hakima pour son aide, son assistance à plein temps et ses précieux conseils objectifs et sans oublier la présence de ma mère dans mon cœur.*

*Enfin, je présente tous mes vifs et sincères remerciements à monsieur le président et les membres du Jury qui ont accepté d'honorer par leur présence mon projet d'étude.*

# *Dédicaces*

*C'est avec une grande joie que je dédie ce modeste travail  
à la mémoire de mon père et ma mère qui reposent en paix.*

*A ceux qui m'ont fait grandir, soutenus et aimés.*

*A ceux qui sans leur acharnement, je n'aurais pas été ce  
que je suis.*

*A toi seule ma mère qui s'est sacrifiée, j'espère que ton  
âme est au paradis.*

*A mes sœurs, qui n'ont cessé de m'aimer et de  
m'encourager dans mes études.*

*A chaque membre de ma très chère famille.*

*A mes petits neveux à qui je leurs souhaite de bien  
réussir dans leur vies.*

*A toutes mes amies que j'aime beaucoup et ainsi qu'à  
tous mes amis.*

*A celui que j'estime beaucoup pour son esprit sportif et  
dynamique.*

# ملخص

يتعلق عملنا بالمواد المركبة المحتوية على ألياف أحادية الاتجاه ، و يحتوي على قسمين أساسيين :

- الأول يتعلق بدراسة نظرية للمواد المركبة تحت تأثير حمولة ميكانيكية.
- الثاني يتعلق بتطوير برنامج معلوماتي بلغة « DELPHI » لحساب المصفوفات الصلبة للعناصر المستقلة المعالجة بطريقة العناصر المنتهية ، إضافة إلى ذلك تركيب هذه المصفوفات للحصول على مصفوفة صلابة كاملة للقطعة المركبة .

# ***ABSTRACT***

The present work concerns composite materials with unidirectional fiber , it is divided into two parts , the first part includes a theoretical study of the behavior of composite material under mechanical load , the second part concerns the development of a computer program in Delphi language permitting the calculation of the matrix of rigidity of elements independent treated by the finite elements methods as well as the assembly of the matrix for obtaining the global of matrix for a composite plate .

# ***RESUME***

Le travail effectué concerne les matériaux composites à base de fibres unidirectionnelles, il peut être divisé en deux parties essentielles, la première partie comporte une étude théorique du comportement du matériau composite sous chargement mécanique, la deuxième partie consiste en l'élaboration d'un programme informatique en Delphi permettant le calcul des matrices de rigidité [k] des éléments indépendants traité par la méthode des éléments finis ainsi que l'assemblage des matrices de rigidité des éléments pour l'obtention de la matrice de rigidité globale d'une plaque composite.

# Liste des figures

FIGURE 1.1	stratifié multicouche.	5
FIGURE 3.1	Maillage d'une structure par la M.E.F.	22
FIGURE 3.2	élément n de la structure.	22
FIGURE 3.3	élément quadrangle à 4 nœuds.	25
FIGURE 4.1	Organigramme de fabrication des matériaux	30
FIGURE 4.2	composites.	31
FIGURE 4.3	Principe du moulage au contact.	31
FIGURE4.4	Utilisation de moule mâle ou moule femelle	32
	Structure interne du composite	
FIGURE 5.1	Organigramme de calcul	35
FIGURE 5.2	Interface de l'application	37
FIGURE 5.3	Interface des paramètres de maillage et dimension	38
FIGURE 5.4	Interface du choix des conditions aux limites	39

# ***LISTE DES SYMBOLES***

<b><math>E_l</math></b> :	module d'élasticité du composite suivant le sens longitudinal
<b><math>E_t</math></b> :	module d'élasticité du composite suivant le sens transversal.
<b><math>G_{lt}</math></b> :	module de cisaillement du composite.
<b><math>\nu_{lt}</math></b> :	coefficient de poisson major.
<b><math>\nu_{tl}</math></b> :	coefficient de poisson minor.
<b><math>\theta</math></b> :	angle de rotation de l'axe x par rapport à l'axe l.
<b>s</b> :	sinus de l'angle $\theta$ .
<b>c</b> :	cosinus de l'angle $\theta$ .
<b><math>V_f</math></b> :	fraction volumique des fibres.
<b><math>V_m</math></b> :	fraction volumique de la matrice.
<b><math>M_f</math></b> :	fraction massique des fibres.
<b><math>M_m</math></b> :	fraction massique de la matrice.
<b><math>\rho</math></b> :	masse volumique du composite.
<b><math>\rho_f</math></b> :	masse volumique des fibres.
<b><math>\rho_m</math></b> :	masse volumique de la matrice.
<b><math>E_m, E_f</math></b> :	modules de Young, respectivement de la matrice et des fibres.
<b><math>G_m, G_f</math></b> :	modules de cisaillement, respectivement de la matrice et des fibres.
<b><math>\nu_m, \nu_f</math></b> :	coefficients de poisson, respectivement de la matrice et des fibres.
<b>M</b> :	point matériel appartenant au plan moyen.
<b><math>U_0</math></b> :	déplacement du point M suivant l'axe x.
<b><math>V_0</math></b> :	déplacement du point M suivant l'axe y.
<b><math>W_0</math></b> :	déplacement du point M suivant l'axe z.
<b><math>\varepsilon(\mathbf{M})</math></b> :	tenseur des déformations.
<b><math>\sigma(\mathbf{M})</math></b> :	tenseur des contraintes.
<b>[C]</b> :	matrice de rigidité donnée par la loi de HOOK généralisée.
<b>[S]</b> :	matrice de souplesse.
<b>h</b> :	épaisseur du stratifié.
<b>n</b> :	nombre de plis.
<b>k</b> :	numéro du pli.



$e_k$ :	épaisseur du pli.
$(x, y)$ :	repère global.
$(l, t)$ :	repère local.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ :	contraintes normales respectivement suivant les axes Ox, Oy et Oz.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ :	contraintes de cisaillement respectivement suivant les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
$\sigma_l ; \sigma_t$ :	contraintes normales respectivement suivant les axes : l et t.
$\tau_{lt}, \tau_{tz}, \tau_{zl}$ :	contraintes de cisaillement respectivement suivant les plans (Olt), (Otz) et (Olz).
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ :	déformations linéaires du composite respectivement suivant les axes Ox, Oy et Oz.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ :	déformations de rotation du composite respectivement suivant les plans (Oxy), (Oxz) et (Oyz).
$\epsilon_l, \epsilon_t$ :	déformations linéaires du composite respectivement suivant les axes l et t.
$\gamma_{lt}$ :	déformation de rotation du composite dans le plan (Olt).
$[\varphi]$ :	matrice de rigidité en contraintes planes par rapport aux axes locaux du pli.
$[\overline{\varphi}]$ :	matrice de rigidité en contraintes planes par rapport aux axes du stratifié.
$[T_\sigma]$ :	matrice de transition qui relie les contraintes dans le repère local avec celles du repère global.
$[T_\epsilon]$ :	matrice de transition qui relie les déformations dans le repère local avec celles du repère global.
$\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}$ :	déformations en membrane.
$K_x, k_y, k_{xy}$ :	déformations de courbure.
$N_x$ :	effort résultant par unité de largeur suivant la direction x.
$N_y$ :	effort résultant par unité de largeur suivant la direction y.
$T_{xy} (T_{yx})$ :	effort de cisaillement par unité de largeur suivant la direction y (la direction x).
$M_x$ :	moment fléchissant suivant la direction y.
$M_y$ :	moment fléchissant suivant la direction x.
$M_{xy} (M_{yx})$ :	moment de torsion suivant la direction y ( la direction x).
$[A]$ :	matrice de rigidité en membrane sous chargement mécanique .
$[B]$ :	matrice de couplage membrane - flexion sous chargement mécanique.
$[D]$ :	matrice de rigidité en flexion sous chargement mécanique.
$x$ :	contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction l.

$y$ :	contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction $t$ .
$S_{lt}$ :	contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan $(l, t)$ .
$L$ :	longueur totale du stratifié.
$\{f\}$ :	vecteur élémentaire des sollicitations.
$\{F\}$ :	vecteur global des sollicitations.
$\{F^e\}$ :	vecteur élémentaire étendu.
$[k^e]$ :	matrice élémentaire (ou rigidité) d'un élément.
$[K]$ :	matrice globale.
$[K^e]$ :	matrice élémentaire étendue.
$\langle \sigma \rangle$ :	vecteur contrainte.
$\langle \varepsilon \rangle$ :	vecteur déformation.
$E$ :	module d'Young.
$ C $ :	La matrice des coefficients caractéristiques du matériau.
$ D $ :	Opérateur différentiel matriciel
$ N $ :	Fonction d'interpolation
$\xi, \eta$ :	Variables réduites
$[J]$ :	La matrice jacobienne
$[J]^{-1}$ :	La matrice inverse de la matrice jacobienne
$\text{Det}(J)$ :	Déterminant de la matrice jacobienne
$W$ :	Forme intégrale globale
$\xi_r, W_r$ :	Coordonnées et poids des points d'intégration numérique.
$W^e$ :	Forme intégrale élémentaire.
$e$ :	Indice d'un élément.
$[D]$ :	Matrice des propriétés physiques
$[B]$ :	Matrice reliant les gradients en $x$ aux variables nodales.
$[B_\delta]$ :	Matrice reliant les variations des gradients aux variations des variables nodales.
$[B_\xi]$ :	Matrice reliant les gradients en $\xi$ aux variables nodales.
$[B_\delta]^t$ :	Matrice transposée de $[B_\delta]$

# *Sommaire*

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I Généralités sur les matériaux composites</b>	<b>3</b>
I.1 Introduction	3
I.2 Définition d'un matériau composite	3
I.3 Les éléments constitutants	4
I.4 Les différents types des matériaux composites	4
I.5 Les caractéristiques mécaniques des matériaux composites	5
<b>Chapitre II Théorie des plaques Composites</b>	<b>8</b>
II.1 Introduction	8
II.2 Théorie classique des stratifiés	8
II.3 Expression des déplacements	8
II.4 Expressions des déformations	9
II.5 Expressions des contraintes	10
II.6 Relation contraintes – déformations	10
II.7 Comportement élastique d'un pli	11
II.8 Loi de comportement du stratifié (cas d'un changement mécanique)	14
II.9 Détermination des déformations et des contraintes	18
II.10 Cas particuliers	19
II.11 Matrice de rigidité	19
II.12 Critère de rupture	20
<b>Chapitre III Analyse par la méthode des éléments finis</b>	<b>21</b>
III.1 Introduction	21
III.2 Principe de la méthode des éléments finis	22
III.3 Eléments finis pour l'élasticité plane	23

III.4 La formulation isoparamétrique	25
<b>Chapitre IV Fabrication des matériaux composites</b>	<b>29</b>
IV.1 Introduction	29
IV.2 Principe d'élaboration d'une pièce en matériaux composites	29
IV.3 Construction	33
<b>Chapitre V Applications et discussions</b>	<b>34</b>
V.1. Programmation	34
V.2. Résultats et discussion	39
<b>Conclusion Générale</b>	<b>48</b>
<b>Annexe 1</b>	
<b>Annexe 2</b>	
<b>Références Bibliographique</b>	

## *Introduction générale*

L'utilisation des matériaux composites s'est étendue à plusieurs domaines notamment, le domaine aéronautique, génie civil et mécanique, leur principal intérêt provient de leurs excellentes caractéristiques spécifiques, en effet, les matériaux composites ont la principale qualité d'être légers, cette propriété a impliqué que leurs premières applications aient été réalisées dans l'industrie spatiale.

Chaque matériau composite est le résultat de deux ou plusieurs matériaux différents de façon à améliorer les qualités du produit désiré, spécialement ses propriétés mécaniques, physiques et thermiques.

Les composites offrent certains avantages par rapport aux matériaux usuels, nous pouvons citer :

- Une grande résistance à la fatigue.
- Ils ne corrodent pas.
- Ils ne plastifient pas.

Cependant, les matériaux composites ne sont pas à l'abri de toute forme de dégradation, en effet, en absence de toute action mécanique, le composite peut se détériorer sous l'effet de contraintes répétées qui sont induites, par la variation de la température ou de l'absorption de l'humidité et mener à leur fatigue.

Vu la complexité du comportement mécanique des pièces composites, les outils informatiques jouent un rôle très important dans l'analyse de ce type de matériaux et de structures. Dans ce cadre, plusieurs programmes de calcul basés sur la théorie classique des stratifiés ont été développés.

Le présent travail traite le calcul des déplacements d'une plaque composite par rapport à ses dimensions ensuite par rapport aux conditions limites. Pour cela, un modèle simple unidirectionnel a été choisi afin de prédire des extrémités fixes (encastrées ou simplement appuyées) d'une plaque composite.

Ce mémoire est divisé en cinq chapitres. Tout d'abord, un premier chapitre représentant une introduction générale dans le domaine des matériaux composites, ensuite, nous passons dans le deuxième chapitre à l'étude élastique du stratifié qui a pour but de déterminer les équations fondamentales des stratifiés (champs de déplacements, de déformations et des contraintes), ainsi que la connaissance approfondie des lois de comportement élastique du composite.

Le troisième chapitre représente les différentes étapes pour la détermination de la matrice de rigidité d'une structure composite traitée par la méthode des éléments finis, le quatrième chapitre consiste à étudier le principe procédé de fabrication d'une pièce en matériaux composites.

Le dernier chapitre consacré au développement d'un programme de calcul traité par le Delphi version 7 dans le but de calculer la matrice de rigidité globale de la plaque stratifiée étudiée ainsi que les résultats et les discussions.

Finalement, ce travail est achevé par une conclusion générale représente essentiellement un résumé sur les étapes qui permettent d'expliquer et de résoudre le problème.

# ***CHAPITRE I***

## ***Généralités sur les matériaux composites***

### **I.1 Introduction**

Les matériaux occupent une place très importante dans la vie humaine et jouent un grand rôle dans l'évolution industrielle technique et économique.

Actuellement, les développements de la science ont contribué à la mise au point de véritables modernes matériaux obtenus à partir des produits naturels ou synthétiques qui répondent aux besoins de l'industrie. Donc l'utilisation des matériaux composites a répondu à des objectifs bien précis et avec haute performance qui ne pouvait être atteints en état actuel avec des traditionnels disponible. Maintenant, les composites sont présentés presque dans tous les secteurs de l'économie comme le transport (routier, ferroviaire, maritime, aérien, spatial), bâtiment et travaux publics, mécanique générale et divers.

### **I.2 Définition d'un matériau composite**

Dans un sens large, un matériau composite est un matériau différent des matériaux macroscopiquement homogènes habituels. On dit « Composite », l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément. Donc les arrangements de fibres continues ou non d'un matériau résistant (renfort) qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible.

Les constituants du composite (renfort et matrice) sont destinés à remplir des rôles précis dans l'utilisation du produit obtenu.

Les matériaux composites obtenus par l'assemblage des constituants sont très nombreux, mais le choix de la fabrication est guidé par la définition des meilleurs compromis légèreté-rigidité et de sa résistance à la traction, à la compression, à la torsion et à la corrosion ainsi qu'au vieillissement et leur tenue en fatigue sans oublier par ailleurs le facteur économique [1]

## I.3 Les éléments constitutants

Les constituants du composite remplissent des rôles bien précis dans l'utilisation future d'un produit obtenu. La matrice conserve leur disposition géométrique aux fibres et leur transmet les sollicitations auxquelles est soumise la pièce.[2]

### I.3.1 La matrice

La matrice joue un rôle important vis-à-vis de la structure composite, elle a pour but essentiel d'assurer :

- ✓ Liaison des fibres renforts.
- ✓ Répartition des sollicitations.
- ✓ Protection chimique.

La matrice est elle-même constituées d'une résine et de charges dont le but est d'améliorer les caractéristiques de la résine tout en diminuant le coût de production. Il y a trois grandes catégories qui sont :

- Les résines thermodurcissables (époxy, polyester, phénolique).
- Les résines thermoplastiques qui sont également utilisées mais d'une façon restreinte.
- Les résines métalliques.

### I.3.2 Les éléments de renfort (les fibres)

Le renfort a pour rôle d'assurer la fonction mécanique, renforcer la structure pour la rendre résistante et rigide. Il se présente généralement sous forme de fibres. Dans le domaine industriel, on rencontre plusieurs natures de fibres telles que :

- Les fibres de verre.
- Les fibres de carbone.
- Les fibres de bore.
- Les fibres d'Aluminium.

### I.3.3 Les additifs

Différents produits peuvent être incorporés à la résine pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le coût.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini, soit d'en faciliter la mise en œuvre.

## I.4 Les différents types des matériaux composites :

La structure de base des pièces composites est représentée d'un mélange renfort-matrice dont il est nécessaire de prévoir et de connaître précisément leurs caractéristiques géométriques et mécaniques.

Le pli (mono-couche) représente l'élément de base de la structure composite. Il est composé de fibres parallèles liées par une résine orientée suivant une seule direction, il s'agit donc d'un pli unidirectionnel.

Dans les autres cas, ce sera soit un tissu (chaîne-trame) noyé dans une matrice.[2]



### I.4.1 Les stratifiés (multicouche)

Le terme « stratifié » désigne la superposition de plusieurs couches (Figure 1). La couche élémentaire est le produit de l'association d'une matrice et des fibres qui se présentent sous différentes formes.

- Fibres unidirectionnelles.
- Fibres longues tissées.

L'étude élastique du stratifié revient en premier lieu à faire l'étude élastique de la couche élémentaire qui joue un rôle important sur les propriétés mécaniques du stratifié. [2]

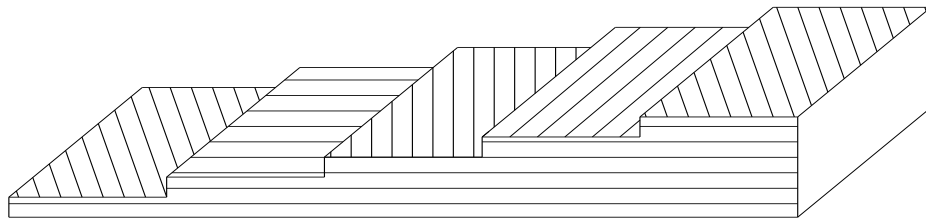


Figure 1.1 : stratifié multicouche.

Il existe divers types de stratifiés.

- **Stratifié symétrique (miroir) :**  
Le stratifié symétrique comporte des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen ( $\theta(Z) = \theta(-Z)$ ).
- **Équilibré :**  
Un stratifié équilibré comprend autant de couches orientées suivant la direction  $(+\theta)$  que de couches orientées suivant la direction  $(-\theta)$  dans la partie symétrique.
- **Non équilibré :**  
Quand les orientations des fibres de ses plaques sont complètement différentes.
- **Stratifié orthogonal :**  
Le nombre de couches à  $0^\circ$  est égal au nombre de couches à  $90^\circ$ .

## I.5 Les caractéristiques mécaniques des matériaux composites:

### I.5.1 Fractions volumiques / massiques :

La concentration du renfort est habituellement mesurées par les fractions bien que la fraction massique soit rarement utilisé dans le calcul, il est important de savoir passer de la fraction volumique à la fraction massique et vice versa.

▪ **Fraction volumique :**

Considérons un volume  $V_C$  du matériau composite, composé d'un volume de fibre et d'un volume de matrice [1,2].

$$V_f = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total}} \quad (1.1)$$

$$V_m = \frac{\text{volume de matrice}}{\text{volume total}} \quad (1.2)$$

Où,

$$V_m = 1 - V_f \quad (1.3)$$

Avec;

$V_f$  : Fraction volumétrique des fibres.

$V_m$  : Fraction volumétrique de la matrice

▪ **Fraction massique :**

Les fractions massiques sont définies de la même manière à partir des masses  $M_c$ ,  $M_f$  et  $M_m$ , on aura :

$$M_f = \frac{\text{masse des fibres}}{\text{masse totale}} \quad (1.4)$$

$$M_m = \frac{\text{masse de matrice}}{\text{masse totale}} \quad (1.5)$$

Où,

$$M_m = 1 - M_f \quad (1.6)$$

Avec;

$M_f$  : Fraction massique des fibres.

$M_m$  : Fraction massique de la matrice

### I.5.2 Masse volumique du composite

D'après le principe du mélange des deux matériaux (fibres – matrice), la masse volumique  $\rho$  du composite est définie par :

$$\rho = \frac{\text{masse totale}}{\text{volume total}} \quad (1.7)$$

Soit;

$$\rho = \rho_f \times V_f + \rho_m \times V_m \quad (1.8)$$

### I.5.3 Constantes élastiques d'un composite unidirectionnel

Pour un pli unidirectionnel de matrice (m) et de fibre (f), on suppose que les déformations des fibres et de la matrice sont égales quand le pli est chargé dans la direction des fibres. Sous un chargement transversal ou en cisaillement, on suppose que les contraintes des fibres et de la matrice sont égales.

Ces considérations conduisent aux relations suivantes:

- **Module d'élasticité dans le sens des fibres  $E_l$  (longitudinal)**

$$E_l = E_f \cdot V_f + E_m \cdot V_m \quad (1.9)$$

Où,

$$E_l = E_f \cdot V_f + E_m (1 - V_f) \quad (1.10)$$

- **Module d'élasticité dans le sens transversal des fibres  $E_t$**

$$E_t = \frac{E_{ft} \cdot E_m}{V_m \cdot E_{ft} + V_f \cdot E_m} \quad (1.11)$$

- **Module de glissement  $G_{lt}$**

Un ordre de grandeur de ce module difficile à approcher par le calcul est donné par l'expression suivante dans laquelle  $G_{ft}$  représente le module de cisaillement de la fibre.

$$G_{lt} = \frac{G_{ft} \cdot G_m}{V_m \cdot G_{ft} + V_f \cdot G_m} \quad (1.12)$$

# *Chapitre II*

## *Théorie des plaques Composites*

### **II.1. INTRODUCTION**

L'objectif de ce chapitre est de schématiser le comportement mécanique des stratifiés. L'architecture des stratifiés résulte de la conception des pièces en matériaux composites suivant des plaques ou des coques ou par stratification des couches successives, ce qui permet d'utiliser les mêmes hypothèses que la théorie générale des plaques. Pour tout ce qui suit, on supposera un stratifié de couches  $n$ , numérotées de la face inférieure à la face supérieure.[3]

### **II.2. Théorie classique des stratifiés**

Les stratifiés sont souvent composés d'un grand nombre de plis, ces plis sont supposés être homogènes. Les modèles mécaniques basés sur cette hypothèse sont appelés modèles macro mécaniques [3].

Les hypothèses de base utilisées sont :

- 1- Le schéma de déplacement utilisé est un schéma du premier degré (schéma de Kirchoff).
- 2- La contrainte normale sur tout élément parallèle au plan moyen est négligeable.
- 3- La déformation suivant l'axe  $z$  est nulle ( $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).
- 4- L'effet de cisaillement transverse est négligeable ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ )

### **II.3. Expression des déplacements**

Pour tout point  $M$  d'une plaque, les déplacements peuvent être exprimés sous la forme d'un polynôme en fonction de  $z$ .

Pour un schéma de degré 1, on aura :

$$U = U_0 - z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$V = V_0 - z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$W = W_0 \quad (2.3)$$

Avec  $U_0$ ,  $V_0$  et  $W_0$  les déplacements d'un point  $M_0$  situé au plan moyen suivant les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . [3]

## II.4. Expressions des déformations

Le tenseur de déformation d'un point  $M$  peut être exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\varepsilon(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Avec,

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}, \text{ et } \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (2.5)$$

La notation matricielle, nous permet alors d'aborder la matrice colonne suivante :

$$\left( \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} \cdot \varepsilon_{zz} \cdot \gamma_{xy} \cdot \gamma_{xz} \cdot \gamma_{yz} \right)^T \quad (2.6)$$

En fonction des déplacements, on peut écrire les déformations comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (2.9)$$

Comme la déviation angulaire  $\gamma = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 2 \varepsilon_{ij}$ , on aura;

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (2.10)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (2.11)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \quad (2.12)$$

## II.5. Expressions des contraintes

En tout point M d'un milieu continu, l'état de contraintes peut être déterminé par la connaissance du tenseur de contraintes, ce tenseur peut être représenté par la matrice suivante :

$$\sigma(\mathbf{M}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Avec,

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{zy} \quad (2.14)$$

Comme pour les déformations, on peut avoir la notation matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yy} & \sigma_{zz} & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

## II.6. Relation contraintes – déformations

La relation d'élasticité peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Cette loi, appelée loi de Hook généralisée, permet d'introduire la matrice de rigidité [C] symétrique. Donc, le comportement linéaire d'un matériau composite peut être décrit à l'aide de 21 coefficients indépendants.

Sous forme compacte :

$$\{\sigma\} = [C] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2.17)$$

En inversant la matrice [C], on obtient la matrice [S], matrice de souplesse, soit :

$$[S] = [C]^{-1} \quad (2.18)$$

Avec ; [C] et [S] sont respectivement les matrices de rigidité et de souplesse.

## II.7. Comportement élastique d'un pli

### II.7.1. Notion d'orthotropie

Les stratifiés sont constitués de couches de matériaux composites ou de composites à base de tissus, le tissu est constitué de fils unidirectionnels croisés à 90° dans les deux sens chaîne et trame, ces couches possèdent trois plans de symétrie perpendiculaires deux à deux.

Ainsi la relation (2.16) s'écrira :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \sigma_z \\ \tau_{lz} \\ \tau_{tz} \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{lz} \\ \gamma_{tz} \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

### II.7.2. Définition d'un matériau unidirectionnel

Un composite unidirectionnel est composé de fibres parallèles disposées dans une matrice, un tel matériau peut être assimilé à une fibre entourée d'un cylindre de matrice. Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant un axe de révolution. Le matériau est appelé orthotrope de révolution.

On peut dire alors que le matériau unidirectionnel est un cas particulier du matériau orthotrope pour lequel :

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12} & C_{33} &= C_{22} \\ C_{44} &= \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & C_{55} &= C_{66} \end{aligned}$$

Les matériaux de rigidité et de souplesse s'écrivent comme suit:

$$[C] = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

$$[S] = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

En intervertissant la 3<sup>ème</sup> et la 6<sup>ème</sup> ligne ensuite la 3<sup>ème</sup> et la 6<sup>ème</sup> colonne, et en tenant compte de la relation (2.20), la relation (2.19) deviendra:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \\ \tau_{lz} \\ \tau_{tz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & C_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \\ \gamma_{lz} \\ \gamma_{tz} \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

### II.7.3 Etat de contraintes planes :

Un état de contraintes planes est un état à deux dimensions, pour lequel les composantes du tenseur des contraintes sont indépendantes de la coordonnée z, donc, le comportement du matériau sera décrit dans le plan (l,t). Dans le repère local du pli, la relation de comportement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Où,  $Q_{ij}$  sont donnée en fonction des modules dans l'annexe 1

En inversant la relation (2.21) on aura:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

En fonction des modules la relation (II.24) deviendra :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_l & -U_{lt}/E_l & 0 \\ -U_{lt}/E_l & 1/E_t & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{lt} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$



#### II.7.4. Coefficients de souplesse et de rigidité d'une couche (pli) par rapport aux axes du stratifié

Le repère global du stratifié composite est (x,y,z). Avant de faire un calcul sur une structure plaque composée de plusieurs plis d'orientations diverses, il faut ramener tous les plis dans le repère global de la structure. Pour cela, il faut effectuer un changement de repère de toutes les matrices de la relation de comportement du pli, c'est-à-dire passer du repère (l,t) au repère (x,y). La plaque étant de faible épaisseur, la direction 3 est abandonnée.

Les contraintes s'écrivent dans le repère principal au moyen de la matrice [T] comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

Avec,

$$C = \cos\theta$$

$$S = \sin\theta$$

Et tel que  $\theta = \theta(x,l)$ .

Sous forme compacte, on aura :

$$\{\sigma\}_{xy} = [T_\sigma] \cdot \{\sigma\}_{lt} \quad (2.27)$$

La relation inverse s'écrit comme suit:

$$\{\sigma\}_{lt} = [T_\sigma]^{-1} \cdot \{\sigma\}_{xy} \quad (2.28)$$

De la même manière les déformations s'écrivent dans le repère du stratifié sous la forme suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & S^2 & SC \\ S^2 & C^2 & -SC \\ -2SC & 2SC & C^2 - S^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Sous forme compacte, on aura :

$$\{\varepsilon\}_{xy} = [T_\varepsilon] \cdot \{\varepsilon\}_{lt} \quad (2.30)$$

La relation inverse s'écrit comme suit :

$$\{\varepsilon\}_{lt} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon\}_{xy} \quad (2.31)$$

En combinant les relations (II.22), (II.26) et (II.31) on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \cdot [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

Tout calcul effectué, on obtient la loi de comportement suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Les expressions des coefficients de raideur sont données en annexe 1.

On va opérer de la même façon que pour les coefficients de raideur mais cette fois, on va combiner les relations (II.24), (II.28) et (II.30), on aura:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \cdot \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{pmatrix} \cdot [T_\sigma]^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

En procédant de la même façon, on trouve la loi de comportement suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{S}_{11} & \overline{S}_{12} & \overline{S}_{16} \\ \overline{S}_{12} & \overline{S}_{22} & \overline{S}_{26} \\ \overline{S}_{16} & \overline{S}_{26} & \overline{S}_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Les expressions des coefficients de souplesse sont donnés en annexe 1.

## II.8 Loi de comportement du stratifié (cas d'un changement mécanique)

On considère un stratifié plan dont l'épaisseur totale est notée  $h$ . Il est constitué de  $n$  plis, le pli  $k$  a une épaisseur notée  $e_k$ .

### II.8.1. Comportement en membrane

D'après l'hypothèse de base de la théorie générale des plaques, pour tout point M d'une plaque, les déplacements de ce point peuvent être exprimés sous la forme de polynômes en fonction de z.

Comme il a déjà été mentionné, on a supposé un schéma de déformation du 1<sup>er</sup> degré, il sera alors écrit sous la forme :

En reprenant la relation entre les déformations:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= U(x, y, 0) + z \varphi_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= V(x, y, 0) + z \varphi_y(x, y) \\ W(x, y, z) &= W(x, y, 0) \end{aligned} \quad (2.36)$$

En reprenant la relation entre les déformations et les déplacements et en considérant le cisaillement transverse négligeable, on peut, après calcul, retrouver les expressions des déformations comme suit :

$$\varepsilon(\mathbf{M}) = \varepsilon_m(\mathbf{M}) \cdot \varepsilon_f(\mathbf{M})$$

Ou bien;

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

Avec,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U_0 / \partial x \\ \partial V_0 / \partial y \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Ce qui nous permet d'écrire la relation contrainte - déformation pour un pli sous la forme:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot [\bar{Q}]_k \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Le champ des résultantes en membrane, noté  $N(x,y)$  est défini par:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot dz \quad (2.40)$$

L'hypothèse utilisée pour intégrer sur l'épaisseur du stratifié et calculer un matériau homogène équivalent est l'homogénéité de la contrainte dans chaque pli. Ceci permet de discrétiser les intégrales et d'écrire des sommes finies, c'est-à-dire:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot dz \quad (2.41)$$

Après calcul, on trouve ce qui suit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

Avec;

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Z_k - Z_{k-1}) \cdot \bar{Q}_{ij}^k \quad (2.43)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \cdot \bar{Q}_{ij}^k \quad (2.44)$$

## II.8.2. Comportement en flexion

Le champ des moments, noté  $M(x,y)$  est défini par :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (2.45)$$

Comme pour les résultantes en membrane, on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{k-1}}^h \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (2.46)$$

Après calcul, on trouve ce qui suit:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

Avec;

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \cdot \bar{Q}_{ij}^k \quad (2.48)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \cdot \bar{Q}_{ij}^k \quad (2.49)$$

L'expression générale reliant les contraintes et déformations globales qui représente l'équation consécutive pour les stratifiés s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

En écriture condensée, on aura:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

La matrice A est la matrice de rigidité en membrane, D est la matrice de rigidité en flexion et B la matrice de couplage, ce couplage résulte de la structure en couches de

matériaux de caractéristiques mécaniques différentes. Le couplage est nul ( $B=0$ ), seulement dans le cas où le stratifié est symétrique.

## II.9. Détermination des déformations et des contraintes

On a vu que l'expression générale reliant les contraintes et les déformations s'écrit sous forme condensée:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Le calcul des déformations revient à inverser la relation (2.52) de ce fait, on aura:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Connaissant les déformations en membrane et en flexion et torsion, on peut déterminer les déformations dans le stratifié en utilisant la relation:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

Ensuite, pour les déformations dans chaque pli, il suffira de reporter ces déformations aux axes locaux en utilisant la relation:

$$\{\varepsilon\}_{lt} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon\}_{xy} \quad (2.55)$$

En remplaçant par la relation (2.54), on aura:

$$\{\varepsilon\}_{lt} = [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{\varepsilon^0\}_{xy} + z \cdot [T_\varepsilon]^{-1} \cdot \{k\}_{xy} \quad (2.56)$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes, leur calcul se fait pour chaque pli en utilisant la relation contrainte – déformation déjà mentionnée, alors on aura:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

En introduisant la relation (2.54), on obtient:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.58)$$

De la même façon que pour les déformations, on reportera ces contraintes aux axes locaux de chaque pli par la relation:

$$\{\sigma\}_{lt} = [T_\sigma]^{-1} \cdot \{\sigma\}_{xy} \quad (2.59)$$

En prenant en compte la relation (II.58) on aura:

$$\{\sigma\}_{lt} = [T_\sigma]^{-1} \cdot [\bar{Q}] \cdot (\varepsilon^0)_{xy} + [T_\sigma]^{-1} \cdot [\bar{Q}] \cdot \{k\}_{xy} \quad (2.60)$$

## II.10. Cas particuliers

La relation représente le cas général de l'équation constitutive, il existe cependant des cas particuliers qui sont intéressants à mentionner.

### 1. Stratifiés symétriques :

On a déjà défini un stratifié symétrique comme étant un stratifié dont le plan moyen est un plan de symétrie, dans ce cas, les  $B_{ij}$  de l'équation sont nuls.

### 2. Stratifié équilibré

Dans ce cas  $A_{16} = A_{26} = 0$

## II.11. Matrice de rigidité

La détermination de la matrice de rigidité nécessite le passage par les étapes suivantes :

Etape 1 : Calcul des constantes élastiques d'une composite unidirectionnelle (pli).

Etape 2 : Calcul de la matrice de rigidité  $[Q_{ij}]$  d'un pli.

Etape 3 : Calcul de la matrice de rigidité  $[\bar{Q}_{ij}]$  d'un pli.

Etape 4 : Calcul des cotes  $(Z_k)$  et  $(Z_{k-1})$  de chaque pli.

Etape 5 : Calcul de la matrice de rigidité  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$  du stratifié dans le repère  $(x,y,z)$ .

## II.12. Critère de rupture

La rupture finale d'un composite unidirectionnel est le résultat de divers mécanismes élémentaires:

- La rupture des fibres.
- La rupture transverse de la matrice.
- La rupture longitudinale de la matrice.
- La rupture de l'interface fibres – matrice.

Il existe plusieurs critères de rupture des matériaux orthotropes.

Le plus couramment utilisé dans les calculs de prédimensionnement est le critère de Hill-Tsai, ce critère s'écrit:

$$\left[ \frac{\sigma_l}{x} \right]^2 + \left[ \frac{\sigma_t}{y} \right]^2 - \frac{\sigma_l \cdot \sigma_t}{x^2} + \left[ \frac{\tau_{lt}}{s_{lt}} \right]^2 = 1 \quad (2.61)$$

Ou :

X : c'est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction l

Y : c'est la contrainte à la rupture en traction (ou compression) dans la direction t.

Slt : c'est la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan (l,t).



## *Chapitre III*

# *Analyse par la méthode des éléments finis*

### **III.1. Introduction**

L'évolution actuelle de la technologie amène l'ingénieur à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, et soumis à des contraintes de sécurité tel que les projets spatiaux, aéronautiques, nucléaires et le contrôle de la pollution thermique, acoustique ou chimique...

Pour dominer ces projets, l'ingénieur a besoin de modèles qui lui permettent de simuler le comportement de systèmes physiques complexes. Il peut ainsi prévoir l'influence de ses décisions au moment de la conception du système.

Les sciences de l'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimension.

De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes. [4]

### III.2. Principe de la méthode des éléments finis

La méthodes des éléments finis consiste à subdiviser une structure complexe en sous domaine appelé élément de géométrie plus simple que celle du domaine initial.

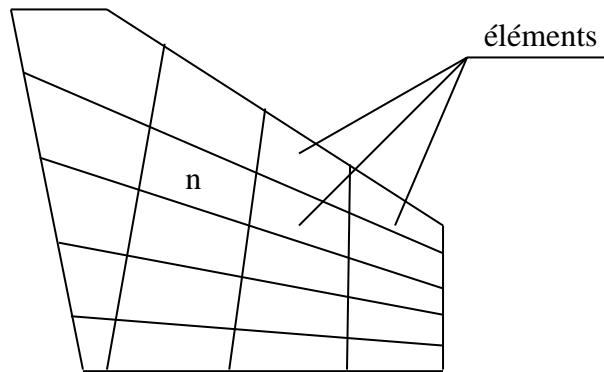


Figure 3.1. Maillage d'une structure par la M.E.F.

Ceci est équivalent à remplacer un domaine ayant un nombre infini de degrés de liberté par un système ayant un nombre fini de degrés de liberté.

Chaque sous domaine possède des nœuds qui se trouvent aux coins des éléments ou tout le long de leur frontière et contrôlent le comportement de l'élément et assurent la connectivité avec les autres éléments.

Les éléments sont analysés individuellement et le modèle complet sera analysé à son tour en tenant compte des conditions de connectivité et de compatibilité.

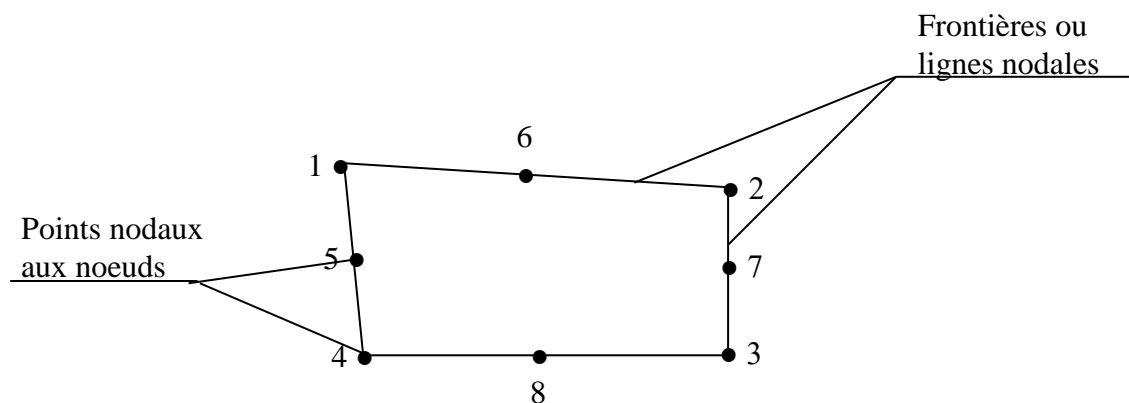


Figure 3.2 : élément n de la structure.

Les types d'éléments utilisés pour la division de la structure dépendent de la géométrie de cette dernière.

Ils peuvent être unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels.

La position des lignes nodales sur une structure, donc la forme de la subdivision en éléments dépend de deux facteurs principaux :

- 1- Les frontières des éléments doivent coïncider avec les discontinuités de la structure.
- 2- Les points nodaux doivent coïncider avec les points d'application des charges concentrées. les éléments doivent être arrangés de manière que les changements brusques dans les charges réparties se produisent à la frontière de l'élément.

L'une des caractéristiques de la méthode est que l'analyse n'est pas obligée d'utiliser un seul type d'élément pour l'analyse complète d'une structure.

Une structure formée de plusieurs sous structures de types différents (uni, bi ou tridimensionnels) peut être analysée par la méthode des éléments finis, chaque sous structure est divisée en types d'éléments appropriés.

Quand la structure considérée a été subdivisée en un nombre fini d'éléments, notre attention se concentrera sur un seul élément. Notre objectif sera d'obtenir pour l'élément, une expression de la forme :  $\{F\} = [K] \cdot \{U\}$  qui relie les forces  $\{F\}$  et les déplacements  $\{U\}$  aux nœuds par l'intermédiaire de la matrice de rigidité  $[K]$ .

D'où, la solution suit souvent les étapes suivantes :

- Description du domaine considéré en éléments finis.
- Choix du modèle d'interpolation qui représente le mieux la variation de la quantité physique.
- Détermination des vecteurs et matrices caractéristiques à partir d'une formulation intégrale et matricielle des équations du problème.
- Assemblage de divers éléments pour aboutir à un système d'équations algébriques.
- Résolution du système d'équations algébriques.

### III.3. Éléments finis pour l'élasticité plane

Les problèmes d'élasticité plane peuvent être divisés en deux groupes distincts, les problèmes de contraintes planes et les problèmes de déformations planes. Dans le premier cas, la structure a une petite épaisseur par rapport à ses autres dimensions et les contraintes normales au plan sont négligées ( $\sigma_{zz}$  (ou  $\sigma_{33}$ )=0) ; tandis que dans le deuxième cas la structure a une dimension très grande par rapport à ses autres dimension et la déformation normale au plan de la charge est nulle ( $\varepsilon_{zz}$  (ou  $\varepsilon_{33}$ )=0).

Dans le premier cas, pour un matériau homogène et isotrope caractérisé par un module d'Young E, un coefficient de poisson  $\nu$ , la matrice des relations contraintes – déformations s'écrit :

$$|C| = \frac{E}{a} \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

Avec :

$$a = 1-\nu^2, b=1, c=\nu, d=1/2(1-\nu).$$

Tandis que dans le deuxième cas :

$$a = (1+\nu)(1-2\nu), b=1-\nu, c=\nu, d=1/2(1-\nu).$$

Cette matrice relie le vecteur contrainte :

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\} \quad (3.2)$$

Au vecteur déformation:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}\} \quad (3.3)$$

Egal à:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \quad (3.4)$$

Les relations contraintes – déformations ont la forme :

$$\{\sigma\} = |C| \cdot \{\varepsilon\} \quad (3.5)$$

Où;

|C| est la matrice des coefficients caractéristiques du matériau symétrique dépendent de E et  $\nu$ .

Les relations déformations – déplacements sont écrites :

$$\{\varepsilon\} = |D| \cdot \{u\} \quad (3.6)$$

Avec;

|D| : opérateur différentiel matriciel pour un problème à deux dimensions:

$$|D| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

La forme la plus simple des éléments utilisés pour l'analyse des structures bidimensionnelles soumises à des charges dont les lignes d'action sont dans le plan de la structure est un triangle à 3, 6, 9 nœuds ou un rectangle à 4, 8, 12 nœuds – bords droits, paraboliques ou cubiques. Il est possible de trouver des éléments qui comportent des nœuds intérieurs supplémentaires pour ce qui concerne l'approximation nodale en déplacements (par exemple le quadrangle à 9 nœuds).

### III.4. La formulation isoparamétrique

#### III.4.1. Le concept d'isoparamétrie

Dans de nombreuses applications l'intérêt qu'il peut y avoir à utiliser des variables réduites est évident, en particulier pour éviter la répétition des calculs.

Par ailleurs, une modélisation correcte exige une bonne représentation des bords courbes ; avec des éléments à bords droits il faut des maillages fins donc de nombreux éléments.

Le concept d'isoparamétrie permet à la fois de systématiser l'utilisation des variables réduites et de générer des éléments finis à bords courbes, il est donc très avantageux pour certaines discrétisations.

#### *En quoi consiste ce concept ?*

Il tient dans la remarque que toute approximation nodale peut à la fois concerner la fonction à déterminer, par exemple les déplacements, mais également les coordonnées.

Dans ce cas, l'approximation est construite avec la même base polynomiale, ce qui se traduit pour un élément (cas de l'élasticité) par les relations:

$$\begin{aligned} \{u, v\} &= |N| \cdot \{\bar{u}\} \\ \text{et} \\ \{x, y\} &= |N| \cdot \{\bar{d}\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

La matrice  $|N|$  est la matrice ligne usuelle regroupant les fonctions de forme de l'élément ; ces fonctions  $N_j$  ne sont plus des fonctions de  $x, y$  mais de variables réduites  $\{\xi, \eta\}$  prenant leurs valeurs entre  $[-1, +1]$  (exceptionnellement entre  $[0, 1]$ ), l'approximation des déplacements et celle des coordonnées sont les mêmes (isoparamètres).

#### III.4.2. Élément quadrilatéral isoparamétrique à 4 nœuds

Dans l'espace vrai cet élément est le quadrilatère de sommets  $i, j, k, l$  de coordonnées  $x_i, x_j, x_k, x_l, y_i, y_j, y_k, y_l$ . Dans l'espace parent il devient le carré de sommets :  $(-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1)$ .

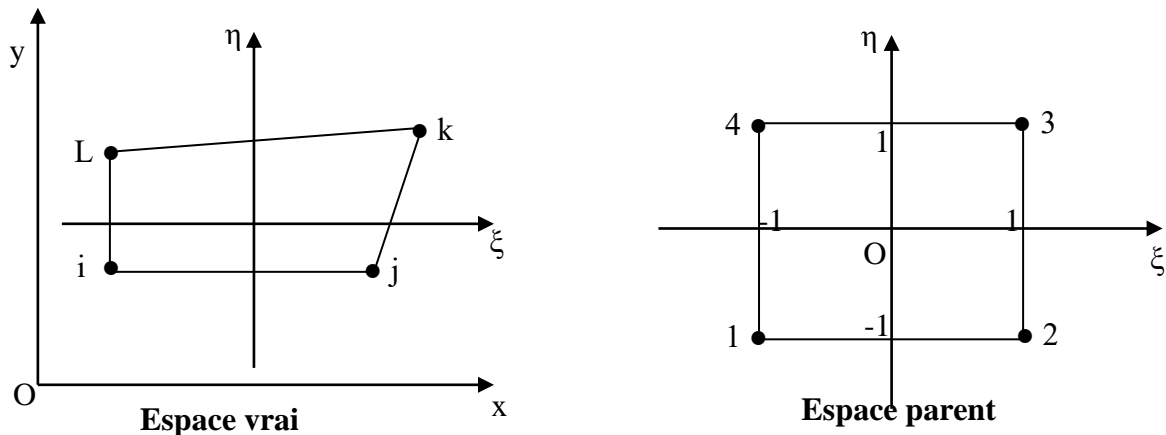


Figure 3.3 : élément quadrangle à 4 nœuds

L'approximation nodale de la fonction  $\Phi$  dans l'espace parent s'écrit:

$$\Phi = N_1(\xi)\bar{\Phi}_i + N_2(\xi)\bar{\Phi}_j + N_3(\xi)\bar{\Phi}_k + N_4(\xi)\bar{\Phi}_l \quad (3.9)$$

Les fonctions  $N_i$  valent 1 au nœud qui les concerne et 0 aux autres. Elles comprennent donc les équations des droites  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$  et s'écrivent :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 - \eta) / 4 \\ N_2(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 - \eta) / 4 \\ N_3(\xi, \eta) &= (1 + \xi)(1 + \eta) / 4 \\ N_4(\xi, \eta) &= (1 - \xi)(1 + \eta) / 4 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Evidemment, puisque l'élément est isoparamétrique

$$\begin{aligned} x &= N_1(\xi, \eta)x_i + N_2(\xi, \eta)x_j + N_3(\xi, \eta)x_k + N_4(\xi, \eta)x_l \\ y &= N_1(\xi, \eta)y_i + N_2(\xi, \eta)y_j + N_3(\xi, \eta)y_k + N_4(\xi, \eta)y_l \end{aligned} \quad (3.11)$$

### III.4.3. Dérivation et intégration :

Dans de nombreuses applications il est nécessaire soit de dériver, soit d'intégrer par rapport aux variables de l'espace vrai. En mécanique les deux opérations sont faites, l'une pour passer des déplacements aux déformations, l'autre pour calculer le travail virtuel. Dans le cas d'un élément isoparamétrique où les fonctions sont des fonctions des variables de l'espace parent, il faut effectuer une dérivation en chaîne ce qui n'est pas toujours simple au plan pratique.

- **Dérivation :**

La complication se retrouve en 2D et/ou 3D.

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ou;

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{pmatrix} = |J|^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Les éléments de cette matrice ne sont pas directement accessibles. En effet, pour un élément à  $n$  nœuds ( $i=1, n$ ) numérotés :  $n_1, n_2, \dots$ . Les relations entre  $x, y$  et  $\xi, \eta$  sont :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_{ni} \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_{ni} \quad (3.14)$$

D'où;

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_{ni} & \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} y_{ni} \\ \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_{ni} & \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} y_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Et comme pour une dimension, la matrice dont le calcul est simple et la matrice inverse de celle recherchée.

Il faut donc calculer :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Avec;

$$\det(J) = J_{11} \cdot J_{22} - J_{12} \cdot J_{21} \quad (3.17)$$

Ce qui est fait de manière uniquement numérique

Matrice jacobéenne d'un élément quadrilatéral à quatre nœuds :

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & (1-\xi) & (1-\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ +\eta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +\eta(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 \\ +\xi(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & +\xi(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
\det(J) &= A_0 + A_1\xi + A_2\eta \\
A_0 &= \frac{1}{8}[(y_4 - y_2).(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1).(x_4 - x_2)] \\
A_1 &= \frac{1}{8}[(y_3 - y_4).(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1).(x_3 - x_4)] \\
A_2 &= \frac{1}{8}[(y_4 - y_1).(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2).(x_4 - x_1)]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

- **Intégration :**

L'étude de l'intégration présente moins de problèmes que celle de la dérivation. Dans le calcul du comportement des structures, l'intégration intervient essentiellement pour déterminer les coefficients de la matrice raideur.

Dans la méthode des éléments finis, la matrice élémentaire  $[K]$  s'exprime sous forme d'intégration à une, deux ou trois dimensions, définie sur l'élément réel :

$$[K] = \int_{v^e} [B_\delta]^T \cdot [D] \cdot [B] dv \tag{3.21}$$

Sur l'élément de référence, cette intégrale devient:

$$[K] = \int_{v^e} [B_\delta(\xi)]^T \cdot [D(\xi)] \cdot [B(\xi)] \det(J(\xi)) dv^r \tag{3.22}$$

- *Intégration de  $[K]$  par la méthode de Gauss à deux dimensions :*

Utilisons la méthode « produit » de Gauss à  $r=2 \times 2$  points pour intégrer l'expression (3.21) de  $[K]$ :

$$\begin{aligned}
[K] &\approx [B_\delta(\xi_1, \eta_1)]^T \cdot [D] \cdot w_1 \cdot w_1 \cdot \det(J(\xi_1, \eta_1)) \cdot [B(\xi_1, \eta_1)] + \\
&[B_\delta(\xi_1, \eta_2)]^T \cdot [D] \cdot w_1 \cdot w_2 \cdot \det(J(\xi_1, \eta_2)) \cdot [B(\xi_1, \eta_2)] + \\
&[B_\delta(\xi_2, \eta_1)]^T \cdot [D] \cdot w_2 \cdot w_1 \cdot \det(J(\xi_2, \eta_1)) \cdot [B(\xi_2, \eta_1)] + \\
&[B_\delta(\xi_2, \eta_2)]^T \cdot [D] \cdot w_2 \cdot w_2 \cdot \det(J(\xi_2, \eta_2)) \cdot [B(\xi_2, \eta_2)]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

- **L'assemblage :**

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale  $[K]$  à partir des matrices élémentaires  $[K^{(e)}]$ , on a:

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K_i^{(e)}] \tag{3.24}$$



# ***CHAPITRE IV***

## ***Fabrication des matériaux composites***

### **IV.1 Introduction**

Le but de tous les constructeurs est de produire des éléments sûrs, fiables et compétitifs sur le plan économique.

C'est-à-dire l'importance des couplages qui lient dans l'entreprise le concepteur aux moyens de calcul, d'essais et de fabrication. Pour ce qui concerne les pièces en matériaux composites, ces couplages sont encore plus étroits qu'en construction traditionnelle.

Le mélange renfort/résine ne devient un véritable matériau composite résistant qu'au terme de la dernière des phases de la fabrication, c'est-à-dire le durcissement de la matrice.

Il sera alors impossible de le modifier ultérieurement, comme on peut modifier la structure d'un alliage métallique, par traitement thermique par exemple.

Dans le cas des composites à matrice résineuse, cette dernière doit être polymérisée.

### **IV.2. Principe d'élaboration d'une pièce en matériaux composites**

Il existe différents procédés mais le plus utilisé est le procédé par moulage dont les principales opérations de la mise en forme sont les suivantes :

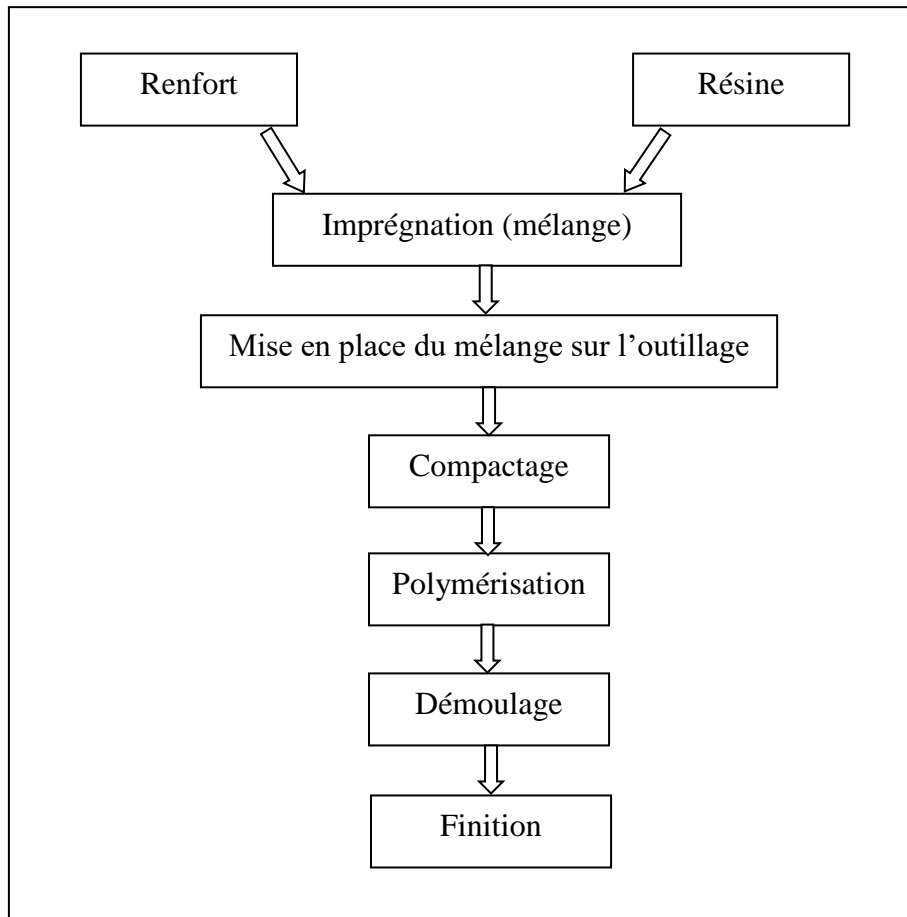


Figure 4.1 Organigramme de fabrication des matériaux composites.

Les procédés de formage par moulage varient en fonction de la nature des pièces, de l'importance des séries, du prix de revient. Les formes et moules sont en matériaux divers : métal, résine, bois, plâtre.

- **Moulage en contact :**

***Matériaux constitutifs :***

- Renfort : mat ou tissu de verre.  
Taux de renforcement = 30%, jusqu'à 40% maximum.
- Matrice : polyester (elle passe de l'état liquide à l'état solide par copolymérisation avec un monomère avec lequel elle est mélangée. Ce phénomène entraîne le durcissement. Il est activé soit par un autre produit chimique (accélérateur), soit par un apport d'énergie (chaleur).

***Principe :***

Sur un moule (lui-même souvent en composites), enduit d'un agent de démoulage (cire), on dépose d'abord une couche de surface (gel - coat), puis, alternativement après gélification, des couches de renforts (mats ou tissus), que l'on imprègne de résine (pinceau ou rouleau) jusqu'à obtenir l'épaisseur désirée. La résine, qui comporte un catalyseur

(peroxydes) et un accélérateur (sels métalliques), se polymérise à l'ambiance de l'atelier ou peut être activée par un apport calorifique modéré.

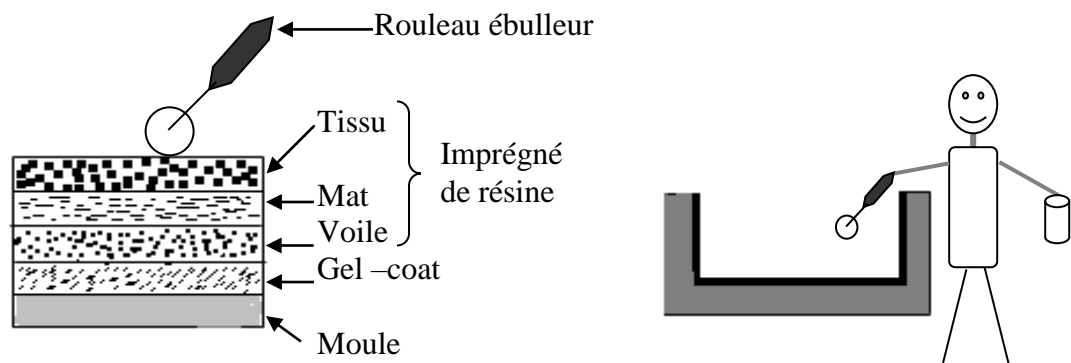


Figure 4.2 Principe du moulage au contact.

### *Mise en œuvre :*

Le principe fondamental de l'imprégnation est de bien faire pénétrer la résine dans le renfort de façon à chasser les bulles d'air occluses. En effet, celles-ci, par suite d'une dilatation, peuvent faire éclater la structure, d'où une altération mécanique qui entraîne souvent une dégradation chimique (humidité, agression atmosphérique).

Il faut donc bien noter la prépondérance du facteur humain, c'est le savoir-faire et la conscience professionnelle qui font la qualité du produit fini.

Dans la pratique, on opère de la manière suivante :

- Le moule est préalablement enduit d'un démoulant (cire synthétique) et lustré de façon à obtenir « un polimiroir ». La structure réalisée aura donc une face lisse coté moule et une face brute coté opérateur, d'où le choix d'un moule mâle ou femelle en tenant compte de la face fonctionnelle désirée.

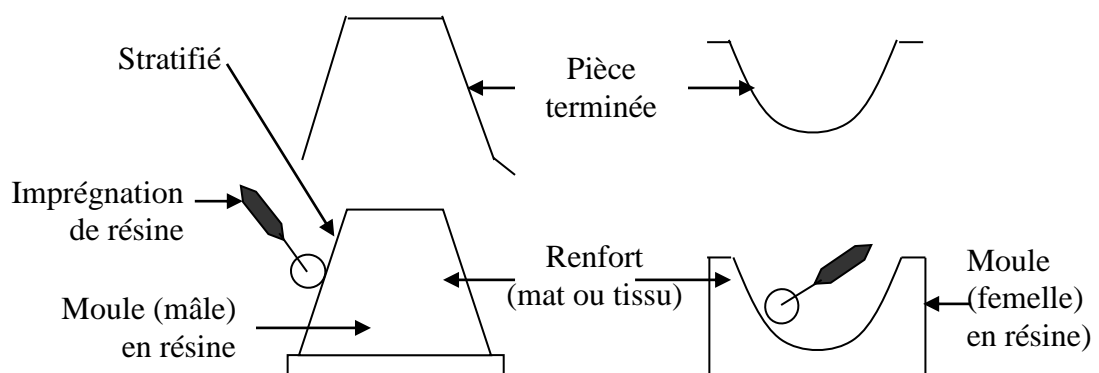


Figure 4.3 Utilisation de moule mâle ou moule femelle

- Sur ce moule on dépose d'abord une résine pure, le gel – coat, qui assure deux fonctions :
  - L'isolation, vis-à-vis de l'ambiance, en particulier pour éviter une remontée d'humidité le long de l'interface verre-résine ou pour assurer une bonne résistance chimique, ou encore pour réduire les dépôts parasites (algues, bactéries).
  - La coloration ; en effet c'est le gel – coat de surface qui porte la pigmentation colorée que la résine de structure translucide rend visible sur le produit réalisé. En outre le gel – coat joue également un rôle anti-UV.

Le gel – coat a généralement une épaisseur de 0,3 à 0,4 mm (250 à 350 g/m<sup>2</sup>), on le dépose au pistolet vaporisateur, et sa gélification s'effectue en 15 à 30 min.

Pour des structures soumises à une forte agressivité chimique, on peut aller jusqu'à 1 ou 2 mm, la gélification demande alors 1 ou 2h.

- Vient ensuite l'opération d'imprégnation manuelle. L'opérateur dispose les patrons découpés (mats ou tissus) sur le moule et les imprègne de résine translucide (permettant de détecter les bulles d'air éventuelles), à l' (aide de pinceaux ou de rouleaux (type à rendelles « éventail » facilitant l'ébullage). On se rend compte qu'au renfort de verre est correctement imprégné lorsque, perdant son aspect blanc brillant, il devient translucide.

On peut déposer ainsi plusieurs couches après gélifications successives ; très souvent on utilise d'abord un voile de surface, puis des mats ou des tissus en fonction des caractéristiques recherchées. Il n'est pas possible de réaliser en une seule fois une forte épaisseur, en raison du dégagement de chaleur et du retrait volumique provoqué par la polymérisation de la résine, car on risquerait des craquelures. En règle générale, il ne faut pas déposer deux couches de même texture l'une sur l'autre pour éviter un effet de délaminage. Si la décomposition des renforts est fixée à priori, leur mise en place à l'initiative de l'opérateur qui assure donc une responsabilité importante dans l'élaboration de la structure (chevauchements des renforts)

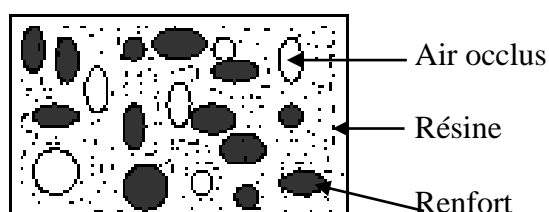


Figure 4 .4 : structure interne du composite

- Un autre principe de ce procédé est de bien observer les délais de polymérisation nécessaires et une constante de l'ambiance dans les ateliers (trop rarement réalisée), en principe :
    - température = 18 à 20 °c
    - degré hygrométrique = 60 à 65 %
- Dans ces conditions, et pour les épaisseurs de structure courantes, on peut compter sur les temps moyens de polymérisation suivants :
- Gélification (1<sup>ère</sup> couche) = 30 min à 1h

- Première polymérisation = 3 à 4h
- Polymérisation de démoulage = 6 à 8h.

Toutefois la polymérisation « à cœur » n'est pas pour autant achevée. Elle peut demander de 100 à 200h pour une polymérisation à 90% et de 500 à 1000h (près de 1 mois) pour être totale à 100% d'où l'importance du facteur de polymérisation sur l'utilisation des produits ainsi réalisés.

On peut, dans certaine mesure, réduire les temps de polymérisation -aux dépens du coût- par chauffage (ou chaud, IR) mais il ne faut pas dépasser 60°C ; au-delà l'échauffement peut devenir dangereux pour les produits fabriqués (craquelures possibles).

### **IV.3. Construction**

Pour des raisons de moyens matériels, on se propose de construire une plaque en composite de dimensions : 270mm x 217mm

#### ***Outillages utilisés :***

Dans l'atelier structure, l'outillage nécessaire pour la réalisation de cette plaque est :

- Le pinceau ou rouleau.
- Le réglet.
- Les limes pour la finition.
- Le ciseau pour découper le tissu de verre ...etc.

#### ***Matériaux utilisés :***

Les matériaux fournis sont :

- Le renfort = tissu de verre.
- Matrice = polyester (résine catalysée et accélérée) essentiellement, mais aussi vinylester et phénolique.

#### ***La méthode de travail :***

Le moule est « ouvert » (il n'y a qu'une pièce, mâle ou femelle). On y dispose les couches de renfort enduites de résine (avec accélérateur) jusqu'à obtenir l'épaisseur de 6mm. Le compactage éliminant l'air restant se fait manuellement au rouleau. La durée nécessaire au durcissement varie, en fonction du dosage d'accélérateur ; de quelques minutes à quelques heures. Enfin, on obtient la pièce désirée.

# *Chapitre V*

## *Applications et discussions*

### **V.1. Programmation**

#### **V.1.1. Introduction**

Lors de la conception d'une structure en matériaux composites, il est important, voire même, nécessaire de connaître les caractéristiques de chacun des composants. Des logiciels ont été mis au point (par exemple : progiciel Pact ou bien le logiciel Euclid Analyst) pour faciliter l'étude de ces matériaux, ces logiciels sont nécessaires dans le cas où le calcul devient complexe (la complexité dépend du but auquel nous voulons arriver), c'est pour cela que nous avons pensé à élaborer un programme qui permet, pour un nombre important de plis, d'étudier le comportement du composite à partir des caractéristiques de ses composants.

Donc, notre objectif est de calculer les déplacements d'une plaque composite par rapport à ses dimensions ensuite par rapport aux conditions aux limites.

#### **V.1.2. Présentation des étapes de calcul**

Pour pouvoir analyser le comportement d'un stratifié, il faut suivre les étapes suivantes :

- Calcul des caractéristiques du composite.
- Calcul de la matrice de rigidité de chaque pli par rapport à ses axes.
- Calcul de la matrice de rigidité de chaque pli par rapport aux axes du stratifié.
- Calcul des matrices [A], [B] et [D].
- Calcul des matrices de rigidité [k] des éléments indépendants.
- Assemblage des matrices de rigidité des éléments pour l'obtention de la matrice de rigidité globale de la plaque.
- Introduction des conditions aux limites et résolution de  $[F] = [K].\{U\}$  pour l'obtention des déplacements.

### V.1.3. Organigramme de calcul

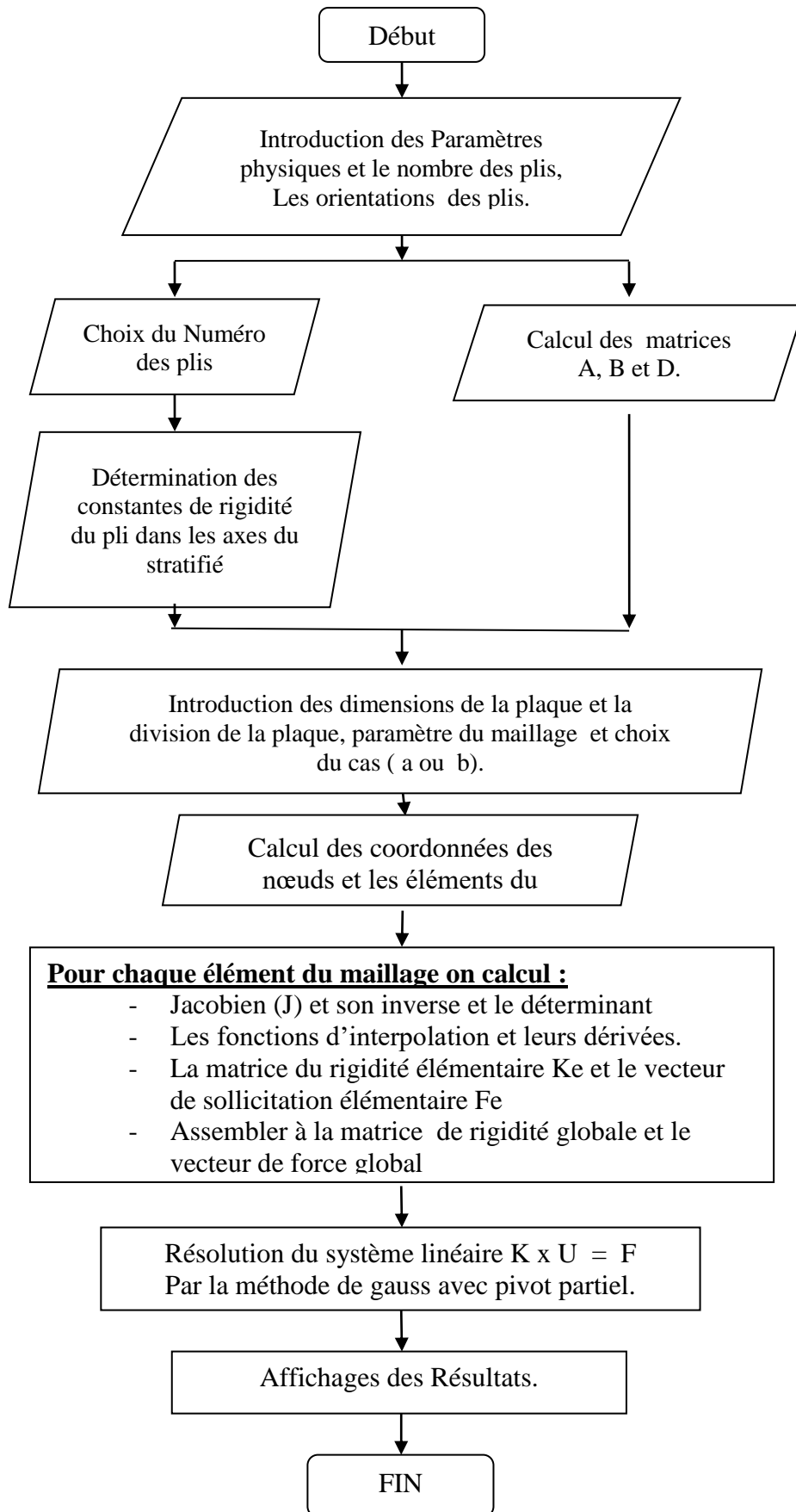


Figure 5.1. Organigramme de calcul

#### V.1.4. Langage de programmation

Le langage de programmation utilisé est le DELPHI (version 7.00).

**Le Delphi** est un environnement de développement intégré propriétaire pour le langage Pascal sous Windows. Delphi implémente une version orientée objet du langage Pascal. L'environnement de développement s'appuie sur un éditeur d'interface graphique associé à un éditeur de code source. Il doit son succès à sa facilité d'utilisation pour développer des applications graphiques et/ou liées aux bases de données.

Tout programme écrit est traduit intégralement dans le langage du compilateur, ce n'est qu'à partir du moment qu'il est exempt de toute erreur de syntaxe qu'il devient fonctionnel.

Ce langage présente plusieurs avantages, dont on peut citer :

- Un compilateur extrêmement rapide pour convertir la source en un programme exécutable.

- Une structuration claire des programmes en blocs, ces blocs peuvent être séparément et reliés entre eux pour constituer de grandes applications.

- Un débogueur intégré qui est d'un grand secours pour traquer les erreurs du programme et qui permet aussi de dérouler le programme pas à pas pour mieux le surveiller.

Vu que le programme présente un volume important de calcul, il est constitué de plusieurs procédures qui sont reliées entre elles par le programme principal.

#### V.1.5. Aperçu sur l'application

L'application est ouverte sur la interface suivante :



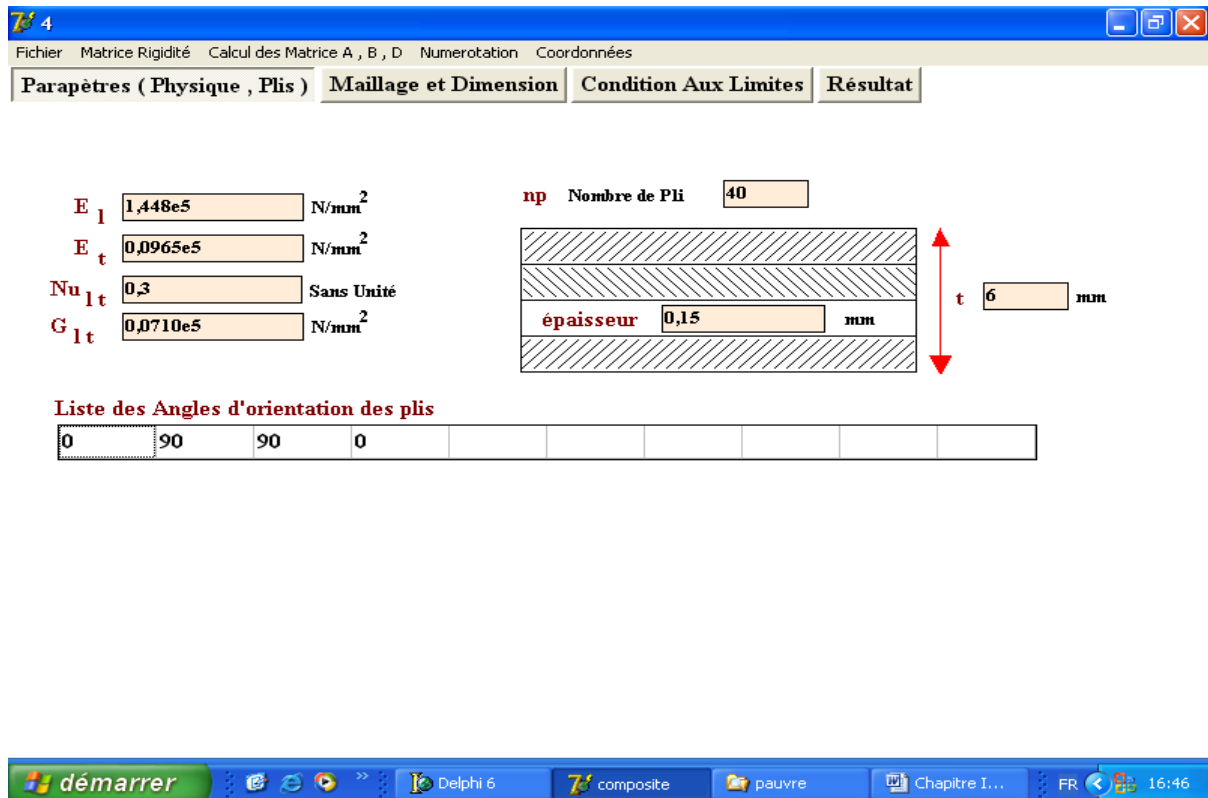


Figure 5.2 Interface de l'application

Cette interface comporte les champs de données suivants :

- Caractéristiques physiques des plis
- Nombre de pli.
- Orientation et épaisseur de chaque pli.

Tout en haut de la interface on trouve un menu composé de :

- **Fichier** : il comporte
  - Nouveau** : qui désigne une nouvelle interface vide.
  - Quitter** : Pour quitter l'application
- **Matrice de rigidité** : en cliquant dessus, le calcul de la matrice de rigidité se fait et les résultats dans l'onglet Résultats.
- **Calcul des matrice [A], [B] et [D]** : En cliquant dessus, les résultats des trois matrices seront affichés dans l'onglet Résultats.
- **Numérotation** : Calcul le nombre de nœuds pour un pli donné.
- **Coordonnées** : Affiche les coordonnées des nœuds.

Juste après le menu principal, quatre icônes sont affichés afin de remplir les paramètres du composite et afficher les résultats :

- **Parapètres (Physique, Plis)** : En cliquant sur l'icône, des champs s'affiche pour remplir les caractéristiques mécaniques, le nombre de plis, l'épaisseur totale et la séquence d'empilement.

- **Maillage et dimension** : Pour introduire les paramètres du maillage et dimension de la plaque, ainsi la division selon les axes X et Y, on clique sur cet icône comme l'illustre la figure ci-dessous :

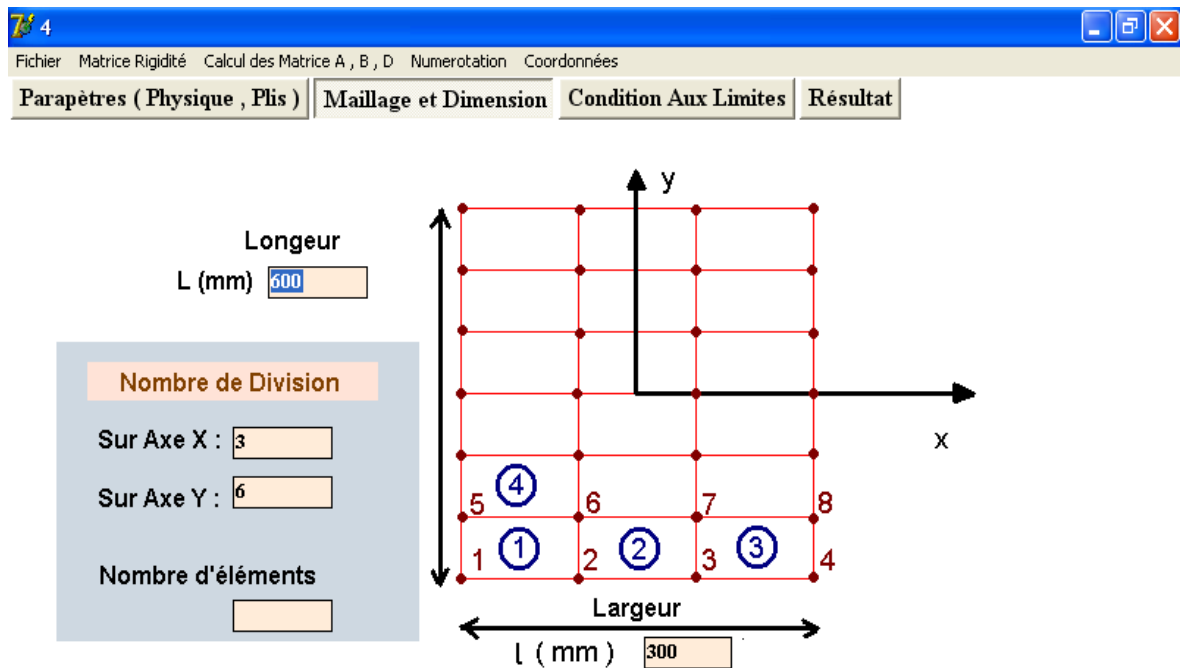


Figure 5.3. Interface des paramètres de maillage et dimension

- **Condition Aux Limites** : Afin de choisir les conditions aux limites, on doit d'abord cliquer sur l'icône pour afficher le choix, comme dans la figure ci-après :

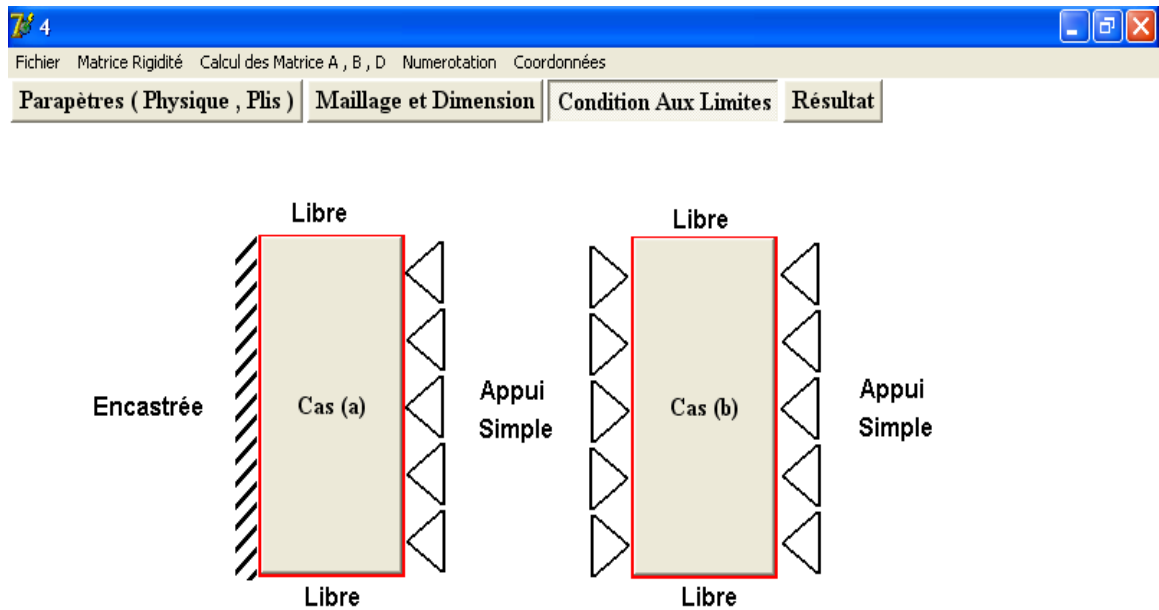


Figure 5.4. Interface du choix des conditions aux limites

- **Résultat** : On cliquant sur ce bouton, les résultats cherchés sont affichés.

## V.2. Résultats et discussion

La conception des structures stratifiées repose sur plusieurs paramètres, qui sont dépendants des sollicitations auxquelles la structure est soumise. C'est pour cela qu'on a tendance à dire que tout matériau stratifié est unique, il est unique par le choix des matériaux (fibres et matrice) et leur taux, par l'orientation de fibres...etc.

Pour cela, on va essayer, dans cette étude paramétrique, de prendre en compte le plus de paramètres possibles et essayer de les faire varier et voir ainsi leurs conséquences sur la conception des stratifiés.

### V.2.1 Applications et interprétations des résultats

#### V.2.1.1 Applications

**1<sup>er</sup> cas : Influence des caractéristiques géométriques sur le déplacement**

Dans le but d'étudier l'influence des dimensions de la plaque composite sur son déplacement, nous avons distingué deux composites définis par les caractéristiques suivants :

<b>Caractéristiques</b>	<b>Plaque A</b>	<b>Plaque B</b>
Longueur (mm)	600	400
Largeur (mm)	300	200
Séquence d'empilement	[0°,90°,90°,0°]	[0°,90°,90°,0°]
E <sub>l</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	1.448.10 <sup>5</sup>	1.448.10 <sup>5</sup>
E <sub>t</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	0.0965.10 <sup>5</sup>	0.0965.10 <sup>5</sup>
G <sub>lt</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	0.0710.10 <sup>5</sup>	0.0710.10 <sup>5</sup>
ν <sub>lt</sub>	0.30	0.30
t (mm)	6	6
n (plis)	40	40

Tel que l'épaisseur de chaque pli pour chaque plaque composite est :

1.5mm      θ = 0°  
 1.5mm      θ = 90°  
 1.5mm      θ = 90°  
 1.5mm      θ = 0°

- **Les résultats**

**Pour la plaque A**

- Le Premier plis

La Matrice de Rigidité Réduite dans le Repère Local ( Q ) Pli N° : 1

1,4567E+005 , 2,9125E+003 , 0,0000E+000  
 2,9125E+003 , 9,7082E+003 , 0,0000E+000  
 0,0000E+000 , 0,0000E+000 , 7,1000E+003

La Matrice de Rigidité Réduite dans le Repère du Stratifié ( Q<sub>b</sub> ) Pli N° : 1

1,4567E+005 , 2,9125E+003 , 0,0000E+000  
 2,9125E+003 , 9,7082E+003 , 0,0000E+000  
 0,0000E+000 , 0,0000E+000 , 7,1000E+003

La Matrice de Rigidité en Membrane ( A )

4,6615E+005	1,7475E+004	1,3601E-012
1,7475E+004	4,6615E+005	2,3616E-011
1,3601E-012	2,3616E-011	4,2600E+004

## La Matrice de couplage ( B )

7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028
6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026
-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012

## La Matrice de Rigidité en flexion ( D )

1,4076E+006	5,2424E+004	4,0497E-012
5,2424E+004	1,3893E+006	7,0315E-011
4,0497E-012	7,0315E-011	1,2780E+005

## La matrice ABD

4,6615E+005	1,7475E+004	1,3601E-012	7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028
1,7475E+004	4,6615E+005	2,3616E-011	6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026
1,3601E-012	2,3616E-011	4,2600E+004	-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012
7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028	1,4076E+006	5,2424E+004	4,0497E-012
6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026	5,2424E+004	1,3893E+006	7,0315E-011
-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012	4,0497E-012	7,0315E-011	1,2780E+005

## Liste des éléments avec les nœuds

## N° Element

1	1	2	5	6
2	2	3	6	7
3	3	4	7	8
4	5	6	9	10
5	6	7	10	11
6	7	8	11	12
7	9	10	13	14
8	10	11	14	15
9	11	12	15	16
10	13	14	17	18
11	14	15	18	19
12	15	16	19	20
13	17	18	21	22
14	18	19	22	23
15	19	20	23	24
16	21	22	25	26
17	22	23	26	27
18	23	24	27	28

## Liste des Nœuds

N° Noeud	X	Y
1	-150,000	-300,000
2	-50,000	-300,000
3	50,000	-300,000
4	150,000	-300,000
5	-150,000	-200,000
6	-50,000	-200,000
7	50,000	-200,000
8	50,000	-200,000

9	-150,000	-100,000
10	-50,000	-100,000
11	50,000	-100,000
12	150,000	-100,000
13	-150,000	0,000
14	-50,000	0,000
15	50,000	0,000
16	150,000	0,000
17	-150,000	100,000
18	-50,000	100,000
19	50,000	100,000
20	150,000	100,000
21	-150,000	200,000
22	-50,000	200,000
23	50,000	200,000
24	150,000	200,000
25	-150,000	300,000
26	-50,000	300,000
27	50,000	300,000
28	150,000	300,000

Les déplacements :

Noeud	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
2	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
3	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
4	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
5	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
6	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
7	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
8	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
9	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
10	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
11	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
12	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
13	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
14	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
15	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
16	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
17	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
18	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
19	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
20	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
21	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
22	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
23	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
24	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
25	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
26	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005

27	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
28	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003

Pour La plaque B :

- Le Premier plis

La Matrice de Rigidité Réduite dans le Repère Local ( Q ) Pli N° : 1

1,4567E+005 , 2,9125E+003 , 0,0000E+000  
 2,9125E+003 , 9,7082E+003 , 0,0000E+000  
 0,0000E+000 , 0,0000E+000 , 7,1000E+003

La Matrice de Rigidité Réduite dans le Repère du Stratifié ( Qb ) Pli N° : 1

1,4567E+005 , 2,9125E+003 , 0,0000E+000  
 2,9125E+003 , 9,7082E+003 , 0,0000E+000  
 0,0000E+000 , 0,0000E+000 , 7,1000E+003

La Matrice de Rigidité en Membrane ( A )

4,6615E+005	1,7475E+004	1,3601E-012
1,7475E+004	4,6615E+005	2,3616E-011
1,3601E-012	2,3616E-011	4,2600E+004

La Matrice de couplage ( B )

7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028
6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026
-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012

La Matrice de Rigidité en flexion ( D )

1,4076E+006	5,2424E+004	4,0497E-012
5,2424E+004	1,3893E+006	7,0315E-011
4,0497E-012	7,0315E-011	1,2780E+005

La matrice ABD

4,6615E+005	1,7475E+004	1,3601E-012	7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028
1,7475E+004	4,6615E+005	2,3616E-011	6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026
1,3601E-012	2,3616E-011	4,2600E+004	-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012
7,4930E-011	6,4881E-013	-4,5098E-028	1,4076E+006	5,2424E+004	4,0497E-012
6,4881E-013	-2,1081E-010	-1,1461E-026	5,2424E+004	1,3893E+006	7,0315E-011
-4,5098E-028	-1,1461E-026	3,6613E-012	4,0497E-012	7,0315E-011	1,2780E+005

Liste des éléments avec les noeuds

**N° Elément**

1	1	2	5	6
2	2	3	6	7
3	3	4	7	8
4	5	6	9	10
5	6	7	10	11
6	7	8	11	12
7	9	10	13	14
8	10	11	14	15

9	11	12	15	16
10	13	14	17	18
11	14	15	18	19
12	15	16	19	20
13	17	18	21	22
14	18	19	22	23
15	19	20	23	24
16	21	22	25	26
17	22	23	26	27
18	23	24	27	28

## Liste des Nœuds

N° Noeud	X	Y
1	-100,000	-200,000
2	-33,333	-200,000
3	33,333	-200,000
4	100,000	-200,000
5	-100,000	-133,333
6	-33,333	-133,333
7	33,333	-133,333
8	100,000	-133,333
9	-100,000	-66,667
10	-33,333	-66,667
11	33,333	-66,667
12	100,000	-66,667
13	-100,000	0,000
14	-33,333	0,000
15	33,333	0,000
16	100,000	0,000
17	-100,000	66,667
18	-33,333	66,667
19	33,333	66,667
20	100,000	66,667
21	-100,000	133,333
22	-33,333	133,333
23	33,333	133,333
24	100,000	133,333
25	-100,000	200,000
26	-33,333	200,000
27	33,333	200,000
28	100,000	200,000

## Les déplacements :

Noeud	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
2	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
3	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005



4	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
5	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
6	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
7	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
8	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
9	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
10	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
11	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
12	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
13	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
14	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
15	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
16	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
17	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
18	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
19	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
20	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
21	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
22	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
23	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
24	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
25	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
26	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
27	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
28	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003

*Interprétation :*

D'après les résultats obtenus, nous sommes en droit de dire que la répartition des déplacements est similaire tout au long de la plaque, ces résultats nous permettent alors, de confirmer la relation directe entre la force et le déplacement.

*2<sup>ème</sup> cas : influence des conditions aux limites sur le déplacement*

Dans le but d'étudier l'influence des conditions aux limites sur le déplacement de la plaque composite, nous avons distingué deux composites définis par les caractéristiques suivants :

<i>Caractéristiques</i>	<i>Plaque A</i>	<i>Plaque B</i>
Longueur (mm)	600	600
Largeur (mm)	300	300
Séquence d'empilement	[0°,90°,90°,0°]	[0°,90°,90°,0°]
E <sub>l</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	1.448.10 <sup>5</sup>	1.448.10 <sup>5</sup>
E <sub>t</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	0.0965.10 <sup>5</sup>	0.0965.10 <sup>5</sup>
G <sub>lt</sub> (N/mm <sup>2</sup> )	0.0710.10 <sup>5</sup>	0.0710.10 <sup>5</sup>
ν <sub>lt</sub>	0.30	0.30
t (mm)	6	6
n (plis)	40	40

Tel que l'épaisseur de chaque pli pour chaque plaque composite est :

1.5mm       $\theta = 0^\circ$   
 1.5mm       $\theta = 90^\circ$   
 1.5mm       $\theta = 90^\circ$   
 1.5mm       $\theta = 0^\circ$

Mais avec deux conditions aux limites différents : encastrement – appui simple, appui simple – appui simple respectivement.

- *Les résultats*

*Pour la plaque A : Encastrement - appui simple*

Les déplacements :

Nœud	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
3	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
4	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
7	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
8	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003
9	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
11	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
12	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003
13	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
15	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
16	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003
17	0,000	0,000	0,000	0,010	0,003
18	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
19	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
20	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003
21	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
22	0,003	0,000	0,002	0,020	0,005
23	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
24	0,001	0,000	0,000	0,010	0,003
25	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
26	0,001	0,000	0,002	0,020	0,005
27	0,002	0,000	0,003	0,020	0,005
28	0,003	0,000	0,000	0,010	0,003

***Pour la Plaque B : Appui simple – appui simple***

Les déplacements :

Noeud	U	V	W	$\theta_x$	$\theta_y$
1	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
2	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
3	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
4	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
5	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
6	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
7	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
8	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
9	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
10	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
11	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
12	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
13	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
14	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
15	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
16	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
17	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
18	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
19	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
20	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
21	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
22	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
23	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
24	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
25	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003
26	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
27	0,003	0,000	0,004	0,020	0,005
28	0,002	0,000	0,000	0,010	0,003

***Interprétation***

L'influence des conditions aux limites est assez claire dans cet exemple, ce que nous pouvons constater c'est les valeurs des déplacements des appuis simples et plus que les valeurs de l'encastrement. Donc il est alors conseillé d'opter pour des extrémités encastrees au lieu des extrémités simplement appuyées.

## *Conclusion générale*

Le matériau composite est engendré par de multiples paramètres influents chacun, à sa façon, sur son comportement, pour cela nous avons essayé d'étudier l'influence de quelques uns de ces paramètres (dimensions et conditions aux limites) sur le composite.

Dans ce travail, l'étude est basée essentiellement sur une synthèse de l'analyse du comportement mécanique dans un simple modèle unidirectionnel des plaques composites.

Vu la complexité de la compression, nous avons utilisé :

- 1- La formulation isoparamétrique qui est actuellement utilisée pour construire les matrices raideurs de la plupart des éléments. Elle offre de nombreux avantages, spécialement au plan numérique, puisque toutes les opérations s'effectuent dans le domaine parent. Il est rare aujourd'hui de rencontrer des éléments qui ne fassent pas appel à ce concept. Sauf pour des application très particulières : éléments axisymétriques, éléments pour simuler des comportements en fond de fissures, éléments frontières ou de contact.
- 2- Des hypothèses de base, ainsi que les conditions aux limites.

Et cela afin de simplifier les applications et faciliter la résolution du problème.

Le programme que nous avons élaboré permet d'étudier le comportement d'une plaque composite comportant un grand nombre de plis et d'en calculer le déplacement, calcul qui est difficile à faire manuellement, et ceci quelque soit la nature des fibres ou des matrices intervenants dans la composition du matériau composite.

L'étude de ce projet a permis de déterminer, de savoir les différentes étapes et de nous familiariser avec les techniques de calcul utilisées dans la programmation malgré la complexité de le faire. Bien que, les ouvrages, la documentation et les moyens aient été limités, nous avons pu réaliser ce travail avec sérieux et passion pour le choix de notre cycle.

Cette tentative a été pour nous une possibilité de toucher le domaine très vaste des composites, c'est un domaine qui reste inconnu chez nous bien qu'il ait acquis beaucoup de partisans dans les autres pays, notre espoir est qu'il y ait plus d'approches dans ce domaine qui permettront de faire découvrir encore plus ces matériaux.

Nous espérons que ce modeste mémoire servira comme base et sera bénéfique pour d'autres étudiants qui voudraient continuer dans ce vaste domaine.

### **Recommandation**

Notre travail étant inachevé, nous recommandons à ceux qui veulent le terminer de calculer :

- Les champs de déformations.
- Les champs de contraintes.
- Vérification du critère de rupture.

# ANNEXE 1

## MATRICE DE RIGIDITE

La matrice de rigidité réduite dans les axes principaux (repère local) est donnée par :

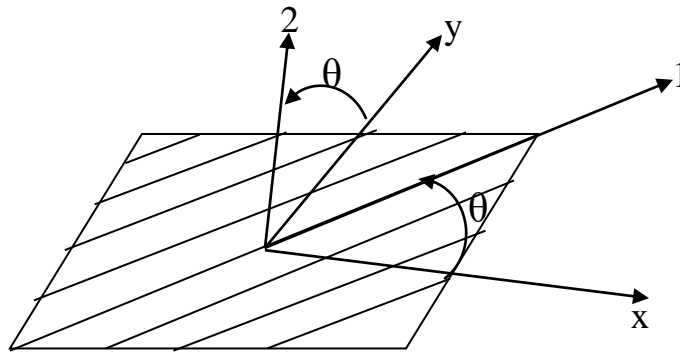


Figure 1.1 Représentation des systèmes d'axes.

$\theta$ : angle que font le repère local et le repère principal.

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & 0 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{66} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} \\ \varphi_{12} &= \frac{\nu_{LT} \cdot E_L}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \nu_{LT} \cdot \varphi_{22} \\ \varphi_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}^2 \frac{E_T}{E_L}} = \frac{E_T}{E_L} \cdot \varphi_{11} \\ \varphi_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (1.2)$$

La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans le repère du stratifié (x , y)est donnée par:

$$[\overline{\varphi}] = \begin{bmatrix} \overline{\varphi}_{11} & \overline{\varphi}_{12} & \overline{\varphi}_{16} \\ \overline{\varphi}_{12} & \overline{\varphi}_{22} & \overline{\varphi}_{26} \\ \overline{\varphi}_{16} & \overline{\varphi}_{26} & \overline{\varphi}_{66} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Avec;

$$\overline{\varphi}_{11} = \varphi_{11} \cdot \cos^4 \theta + \varphi_{22} \cdot \sin^4 \theta + 2(\varphi_{12} + 2\varphi_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\overline{\varphi}_{12} = (\varphi_{11} + \varphi_{12} - 4\varphi_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varphi_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)$$

$$\overline{\varphi}_{16} = (\varphi_{11} - \varphi_{12} - 2\varphi_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (\varphi_{12} - \varphi_{22} + 2\varphi_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta$$

$$\overline{\varphi}_{22} = \varphi_{11} \sin^4 \theta + 2(\varphi_{12} + 2\varphi_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varphi_{22} \cos^4 \theta$$

$$\overline{\varphi}_{26} = (\varphi_{11} - \varphi_{12} - 2\varphi_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (\varphi_{12} - \varphi_{22} + 2\varphi_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta$$

$$\overline{\varphi}_{66} = [\varphi_{11} + \varphi_{22} - 2(\varphi_{12} + \varphi_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varphi_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

## *Annexe 2*

### *Procédures et fonctions utilisées pour le calcul et l'affichage de K et U*

#### **Procedure Calcul\_Zi;**

```
Var I : Integer;  
    X : Real;  
    Pas : Real;  
Begin  
    Pas := t / np;  
    For I := 0 To np Do  
    Begin  
        Z[i] := - t/2 + (I * Pas);  
    End;  
end;
```

#### **Function CalculTeta( k : integer): Real;**

```
Var Ik : Integer;  
Begin  
    If nbTeta = 0  
    Then Result := 0  
    Else Begin  
        ik := k;  
        While ik > nbTeta do  
            ik := ik - nbTeta;  
        Result := LTeta[Ik];  
    end;  
end;
```

#### **Procedure Calcul\_Q\_Qb( k : Integer );**

```
Var  
    S1 , S2 , S3 , S4 : Double ; (* Puissance du sinus *)  
    C1 , C2 , C3 , C4 : Double ; (* Puissance du cosinus *)  
    Th : Double ; (* angle d'orientation du pli ( 0° ou 90 ° ) *)
```



Begin

```
El1 := El / (1 - (Et/El)*(Nult * Nult));  
Et1 := Et / (1 - (Et/El)*(Nult * Nult));  
Q[1,1] := El / (1 - (Et/El)*(Nult*Nult));  
Q[2,2] := (Et / El) * Q[1,1];  
Q[3,3] := Glt;
```

```
Q[1,2] := Nult * Q[2,2];  
Q[2,1] := Q[1,2];
```

```
Q[1,3] := 0; Q[2,3] := 0;  
Q[3,1] := 0; Q[3,2] := 0;
```

```
th := CalculTeta(k) * Pi / 180; (* Then radian *)
```

```
S1 := Sin( Th ); S2 := S1 * S1 ; S3 := S1 * S2 ; S4 := S2 * S2;  
C1 := Cos( th ); C2 := C1 * C1 ; C3 := C1 * C2 ; C4 := C2 * C2;
```

```
Qb[1,1] := Q[1,1] * C4 + Q[2,2] * S4 + 2*( Q[1,2] + 2*Q[3,3] ) * S2 * C2;
```

```
Qb[1,2] := ( Q[1,1] + Q[2,2] - 4 * Q[3,3] ) * S2 * C2 + Q[1,2]*( C4 + S4 );
```

```
Qb[1,3] := ( Q[1,1] - Q[1,2] - 2 * Q[3,3] ) * S1 * C3 +  
          ( Q[1,2] - Q[2,2] + 2 * Q[3,3] ) * S3 * C1 ;
```

```
Qb[2,2] := Q[1,1] * S4 + 2* ( Q[1,2] + 2 * Q[3,3] ) * S2 * C2 + Q[2,2] * C4;
```

```
Qb[2,3] := ( Q[1,1] - Q[1,2] - 2 * Q[3,3] ) * S3 * C1 +  
          ( Q[1,2] - Q[2,2] + 2 * Q[3,3] ) * S1 * C3 ;
```

```
Qb[3,3] := ( Q[1,1] + Q[2,2] - 2 * ( Q[3,3] + Q[1,2] ) ) * S2 * C2 +  
          Q[3,3] * (S4 + C4) ;
```

```
Qb[2,1] := Qb[1,2];  
Qb[3,1] := Qb[1,3];  
Qb[3,2] := Qb[2,3]; (* Symétrie *)
```

End;

### **Procedure Calcul\_A\_B\_D;**

```
Var I , J : Integer;
```

```
    K : Integer;
```

```
    Wa , Wb , Wd : Double;
```

Begin

```
FillChar(A, SizeOf(A), #0);
```

```
FillChar(B, SizeOf(B), #0);
```

```
FillChar(D, SizeOf(D), #0); (* Inirtialiser A, B, D à Zéro *)
```

```
FillChar(DD, SizeOf(DD), #0);
```

Calcul\_Zi;

For k := 1 To Np do

Begin

Calcul\_Q(K);

For i:= 1 to 3 do

For j:= 1 to 3 do

Begin

Wa := ( Z[k] - Z[k-1] );

Wb := 1/2 \* ( Z[k]\*Z[k] - Z[k-1]\*Z[k-1] );

Wd := 1/3 \* ( Z[k]\*Z[k]\* Z[k] - Z[k-1]\*Z[k-1]\*Z[k-1] );

A[i,j] := A[i,j] + Wa \* Qb[i,j];

B[i,j] := B[i,j] + Wb \* Qb[i,j];

D[i,j] := D[i,j] + Wd \* Qb[i,j];

End;

End;

DD[1,1] := A[1,1]; DD[1,2] := A[1,2]; DD[1,3] := A[1,3];

DD[2,1] := A[2,1]; DD[2,2] := A[2,2]; DD[2,3] := A[2,3];

DD[3,1] := A[3,1]; DD[3,2] := A[3,2]; DD[3,3] := A[3,3];

DD[1,4] := B[1,1]; DD[1,5] := B[1,2]; DD[1,6] := B[1,3];

DD[2,4] := B[2,1]; DD[2,5] := B[2,2]; DD[2,6] := B[2,3];

DD[3,4] := B[3,1]; DD[3,5] := B[3,2]; DD[3,6] := B[3,3];

DD[4,1] := B[1,1]; DD[4,2] := B[1,2]; DD[4,3] := B[1,3];

DD[5,1] := B[2,1]; DD[5,2] := B[2,2]; DD[5,3] := B[2,3];

DD[6,1] := B[3,1]; DD[6,2] := B[3,2]; DD[6,3] := B[3,3];

DD[4,4] := D[1,1]; DD[4,5] := D[1,2]; DD[4,6] := D[1,3];

DD[5,4] := D[2,1]; DD[5,5] := D[2,2]; DD[5,6] := D[2,3];

DD[6,4] := D[3,1]; DD[6,5] := D[3,2]; DD[6,6] := D[3,3];

End;

## *Numérotation des Elements*

### **Procedure Numerotation\_Element;**

Var I , J , N : Integer;

Begin

NElement := NBx \* NBy;

N := 0;

I := 0;

J := 0;

while (N < NElement ) do

Begin

N := N + 1;

If I < Nbx

```

    Then i := i+1
  else begin
    J := J + 1;
    I := 1;
  end;
  LElement[N].a := (Nbx + 1) * J + I;
  LElement[N].b := LElement[N].a + 1;
  LElement[N].c := LElement[N].a + Nbx + 1;
  LElement[N].d := LElement[N].c + 1;
End;
End;

```

### **Procedure Calcul\_Coordonne\_Element;**

```

var dx , dy : real;
    ox , oy : real;
    N , i , j : integer;
Begin
  dx := Largeur / NBx;
  dy := Longueur / NBy;
  Ox := Largeur / 2;
  Oy := Longueur / 2;
  N := 0;
  For J:= 0 To NBy do
  For i:= 0 To NBx do
  Begin
    N := N + 1;
    LPoint[N] . Numero := N;
    LPoint[N] . X := i*dx - Ox;
    LPoint[N] . Y := J*dy - Oy;
    LPoint[N] . bloque := 0;
    LPoint[N] . si := 0;

    If I = 0 Then LPoint[N] . si := +1;
    If I = NBx Then LPoint[N] . si := -1;

  End;
  NPoint := N;
end;

```

### **Procedure Calcul\_Jacobien ;**

```

Begin
  FillChar(Jac, sizeof(Jac), #0);
  Jac[1,1]:= da; Jac[2,2] := db;
  DetJac := da * db;
end;

```

### **Procedure Calcul\_FunctionInterpolation( xi , eta : double);**

```

var i : Integer;

```

Begin

```
FillChar(NN, Sizeof(NN), #0);  
FillChar(dNNXi, Sizeof(dNNXi), #0);  
FillChar(dNNEta, Sizeof(dNNEta), #0);  
FillChar(dNNdx, Sizeof(dNNdx), #0);  
FillChar(dNNdy, Sizeof(dNNdy), #0);
```

```
NN[1] := 1/4 * (1 - xi) * (1 - eta);  
NN[2] := 1/4 * (1 + xi) * (1 - eta);  
NN[3] := 1/4 * (1 + xi) * (1 + eta);  
NN[4] := 1/4 * (1 - xi) * (1 + eta);
```

```
dNNXi [1] := 1/4 * (-1 + eta);  
dNNXi [2] := 1/4 * (1 - eta);  
dNNXi [3] := 1/4 * (1 + eta);  
dNNXi [4] := 1/4 * (-1 - eta);
```

```
dNNEta[1] := 1/4 * (-1 + xi);  
dNNEta[2] := 1/4 * (-1 - xi);  
dNNEta[3] := 1/4 * (1 + xi);  
dNNEta[4] := 1/4 * (1 - xi);
```

For i:=1 to 4 do

Begin

```
    dNNdx [i] := da * dNNXi [i];  
    dNNdy [i] := db * dNNEta[i];
```

end;

end;

## **Procedure Calcul\_BB;**

var I, J, h : Integer;

Begin

```
FillChar(BB, sizeof(BB), #0);
```

```
I := 1 ; J :=1;
```

```
Calcul_FunctionInterpolation(PGS [i], PGS[j] );
```

```
H := 0;
```

```
Calcul_FunctionInterpolation(PGS [i], PGS[j] );
```

```
BB[1,H + 1] := dNNdx[1]; BB[2,H + 2] := dNNdy[1]; BB[3,H + 1] := dNNdy[1];
```

```
BB[3,H + 2] := dNNdx[1]; BB[4,H + 4] := dNNdx[1]; BB[5,H + 5] := dNNdy[1];
```

```
BB[6,H + 5] := dNNdy[1]; BB[6,H + 6] := dNNdx[1];
```

```
I := 2 ; J :=1;
```

```
H := 5;
```

```
Calcul_FunctionInterpolation(PGS [i], PGS[j] );
```

```
BB[1,H + 1] := dNNdx[1]; BB[2,H + 2] := dNNdy[1]; BB[3,H + 1] := dNNdy[1];
```

```
BB[3,H + 2] := dNNdx[1]; BB[4,H + 4] := dNNdx[1]; BB[5,H + 5] := dNNdy[1];
```

```
BB[6,H + 5] := dNNdy[1]; BB[6,H + 6] := dNNdx[1];
```

```

I := 2 ; J :=2; H := 10;
Calcul_FunctionInterpolation(PGS [i], PGS[j] );
BB[1,H + 1] := dNNdx[1]; BB[2,H + 2] := dNNdy[1]; BB[3,H + 1] := dNNdy[1];
BB[3,H + 2] := dNNdx[1]; BB[4,H + 4] := dNNdx[1]; BB[5,H + 5] := dNNdy[1];
BB[6,H + 5] := dNNdy[1]; BB[6,H + 6] := dNNdx[1];

```

```

I := 1 ; J :=2; H := 15;
Calcul_FunctionInterpolation(PGS [i], PGS[j] );
BB[1,H + 1] := dNNdx[1]; BB[2,H + 2] := dNNdy[1]; BB[3,H + 1] := dNNdy[1];
BB[3,H + 2] := dNNdx[1]; BB[4,H + 4] := dNNdx[1]; BB[5,H + 5] := dNNdy[1];
BB[6,H + 5] := dNNdy[1]; BB[6,H + 6] := dNNdx[1];

```

end;

### **Procedure Construire\_Ke\_Fe ( E : TElement );**

```

var I, J, l, h : Integer;
    K1, K2 : Array [1..20,1..20] of Double;
    V : Double;
Begin

    FillChar(Ke, sizeof(Ke), #0);
    FillChar(Fe, sizeof(Fe), #0);

    Calcul_BB;
    FillChar(K1, sizeof(K1), #0);
    For i:= 1 to 20 do
    For j:= 1 to 6 do
    For l:= 1 to 6 do
        K1[i,j] := K1[i,j] + BB[l,i] * DD [l,j];

    FillChar(K2, sizeof(K2), #0);
    For i := 1 to 20 do
    For j := 1 to 20 do
    For l := 1 to 6 do
        K2[i,j] := K2[i,j] + K1[i,l] * BB [l,j]*DetJac;

    For i := 1 to 20 do
    For j := 1 to 20 do
    Ke[i,j] := 4 * K2[i,j];

    Fe[1 ] := Vfe * LPoint[ E.a ].si;
    Fe[6 ] := Vfe * LPoint[ E.b ].si;
    Fe[11] := Vfe * LPoint[ E.d ].si;
    Fe[16] := Vfe * LPoint[ E.c ].si;

End;

```

### **Procedure Construire\_KG\_FG ;**

```

var N : Integer;
    E : TElement;

```

```

id : Array [1..4] of Integer;

i,j,l,p , ie1 , ie2 : integer;
Begin
FillChar(KG, sizeof(KG), #0);
FillChar(FG, sizeof(FG), #0);

For N:=1 to NElement do
Begin
E := LElement[N];
Construire_Ke_Fe( E );
id[1] := E.a ;      id[2] := E.b ;
id[3] := E.d ;      id[4] := E.c ;

For i := 1 to 4 do
For J := 1 to 4 do
begin
For l:= 1 to 5 do
For p:= 1 to 5 do
Begin
ie1 := (id[i] - 1) * 5 + 1 ;
ie2 := (id[j] - 1) * 5 + p ;
KG [ ie1 , ie2] := KG [ ie1 , ie2] + Ke [(i-1)*5 +1 , (J-1)*5 +p ];
end;
end;

For i := 1 to 4 do
begin
For l:= 1 to 5 do
Begin
ie1 := (id[i] - 1) * 5 + 1 ;
FG [ ie1 ] := FG [ ie1 ] + Fe [(i-1)*5 +1];
end;
end;
end;
End;

```

### **Procedure Remplissage;**

```

var i , j : integer;
begin
randomize;
FillChar(KG , Sizeof(KG), #0);
FillChar(FG , Sizeof(FG), #0);
FillChar(XU , Sizeof(XU), #0);
for I := 1 to N do
Begin
For j := 1 to N do
KG[i,j] := 1000 * (1-2*random);
FG[i] := 1000 * (1-2*random);
End;

```

end;

### **Procedure Verifier\_solution;**

var i , j : integer;

  V : Real;

Begin

  Max\_Erreur := 0;

  For i:=1 to N do

    Begin

      V := 0;

      For J := 1 To N do

        V := V + KG[i,j] \* XU[j];

      V := FG[I] - V;

      V := abs(V);

      If V > Max\_Erreur Then Max\_Erreur := V;

    end;

End;

### **Procedure Methode\_Gauss;**

var i , j , k , ii : integer;

  Pivot : Real;

  V : Real;

Begin

  for I :=1 to N do

    Begin

*// determiner le pivot max de la colonne*

      ii := i;

      For K := i + 1 to N do

        If ABS(KG [K , i]) > ABS(KG [K , ii] )

        Then ii := K;

*// permutation des lignes*

      If ( ii <> i )

        Then Begin

          for J := 1 to N do

            Begin

              V := KG[i , j ] ;

              KG[i,j] := KG[ii,j];

              KG[ii,j] := V ;

            End;

              V := FG[i ] ;

              FG[i ] := FG[ii];

              FG[ii] := V ;

        end;

    Pivot := KG[i,i] ;

    if Pivot=0

    then Begin

      CodeErreur := 1 ; *// Det( KG) = 0*

      exit ;

```

    end;
  For J := 1 to N do
    KG[i,j] :=KG[i,j] / Pivot;
  FG[i] := FG[i] / Pivot;

  For K := I+1 to N do
  Begin
    Pivot := KG[K ,i] ;

    For j := 1 to N do
      KG[K,j] := KG[k,j] - KG[i,j]*Pivot;

      FG[k] := FG[k] - FG[i]*Pivot;
    end;
  end;

for I :=N downto 1 do
Begin
  V := 0;
  For J := I + 1 to N do
    V := V + KG [I,J] * XU[J] ;
  XU[i] := FG[I] - V;
end;
End;

```

### **Procedure affiche;**

```

Var i , J : Integer;
Begin
  writeln;
  For i := 1 to N do
  Begin
    for j :=1 to N do
      Write(KG[i,j]:10:5 , ' ');
      writeln(' : ', FG[i]:10:5);
    end;
    writeln('-----');
    Verifier_solution;
    Writeln(' Max erreur : ', Max_Erreur : 20:10);
  end;

```

### **Procedure Affiche\_ABD;**

```

Var i , J : Integer;
Begin
  writeln;
  For i := 1 to 6 do
  Begin
    for j :=1 to 6 do
      Write(DD[i,j]:10:5 , ' ');
      writeln;
    end;
  end;

```



end;

### **Procedure Affecation;**

Var I: Integer;

begin

El := Random\*1000;

Et := Random\*1000;

Nult := Random\*1000;

Glt := Random\*1000;

t := 6;

np := 28;

e := t / np ;

nbTeta :=4;

LTeta[1 ]:= 0; LTeta[2 ]:= 90; LTeta[3 ]:= 90; LTeta[4 ]:= 0;

end;

# ***REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES***

- [1] Negrier .A et Rigar .J.C –Présentation des matériaux composites- Techniques de l'ingénieur, A7790, 8-1991.
- [2] Gay .D –Matériaux composites – ed. Hermes, 1989.
- [3] Berthelot .J.M – Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures- ed . Masson, 1992.
- [4] RAHMANI .O et KEBDANI .S – Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs.
- [5] Dessarthe .A. – Introduction aux plastiques et composites en mécanique – Techniques de l'ingénieur, B5170, 8-1996.
- [6] Saarela .O – Computer programs for mechanical analyses and design of polymer matrix composites panels- Prog. Polym. Sci, vol.19, 171-201,1994.
- [7] Bathias .C – Fatigue des matériaux composites à matrice polymères et fibres longues- Technique de l'ingénieur, A7760 , 11 – 1991.
- [8] Chang .K.C et Payn .U.J –Analytical and numerical approaches for heat conduction in composite materials, computer modelling- Vol.14, pp899-904, 1990.
- [9] Maurice .R –Technologie des composites. ed Hemes, 1990.
- [10] Messaoud .B et Zouaoui .D – Elaboration d'un programme de résolution de l'équation constitutive d'un stratifié soumis à des sollicitations thermo-hygro-mécaniques – Institut de Mécanique, université de Blida, 1997.