

République Algérienne Démocratique et populaire
Ministère de l'enseignement supérieur
Et de la recherche scientifique

Université de Blida
Institut d'Aéronautique
Département d'Installation
Pour l'obtention du diplôme
D'ingénieur d'état



MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

**LA COMMANDE ROBUSTE
LQG/LTR**
**Appliquer sur le vol longitudinal de
l'avion BOEING777**

Présenté par :

Mr LAFI ACHOUR

Promoteur:

Mr Kouider Elouahed B.
Mr Benachenhou Kamel



Promotion 2002

REMERCIEMENTS

je remercie l'ensemble des enseignants qui m'ont donné la passion de l'Automatique, et toutes les personnes qui directement ou indirectement m'ont conduit à ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement Mr Kouider Elouahed B. Mr Benachenhou kamel, pour avoir accepté de diriger, de corrigé et de critiquer ce travail, je le remercie pour ses conseils, pour la rigueur et la persévérance qu'il a sans cesse exigées de nous durant la confection de ce mémoire et aux résultats utilisant la commande LQG et la commande LTR.

Mes très vifs remerciements s'adressent au personnel administratif pour son aide effectuée avec gentillesse et bonne humeur.

Que soient remerciées toutes les personnes qui m'ont accompagné tout au long de ce chemin et écouté parler de ce travail, particulièrement Mr Djellal du centre de calcul.

DEDICACES

A l'être le plus cher, ma mère qui s'est tant sacrifiée pour moi et à qui je dois ma réussite.

A mon père qui m'a aidé et soutenu dans les moments difficiles.

A ma tante oum-Mohamed pour sa compréhension et son aide.

A mes Sœurs et complices « SNAA & SAFAA ».

A mon frère ASIRAF que j'estime beaucoup.

A mon frère et fils « ZIDAN » du quel je me suis occupés durant toute son enfance.

A mon adorable frère MUAMEL.

Aux enfants de ma sœur Safaa « Adel & Mhamed »

A mes grands parent paternels ainsi que tous mes oncles et tantes

A mes grands parent maternels ainsi que tous mes oncles et tantes

A mon amis et frère « KAMEL » a qui je doit beaucoup de respect.

A mes amis et frères « ABDELAH-Shang & ADEL TINE » qui m'ont soutenu et encouragé durant toutes mon cursus.

A la famille « ABOU-KHADRA » qui m'est très chère .

A une amis à qui je souhaite beaucoup de santé et de succès dans la vie.

A tous mes amis surtout :

A la famille Laft notamment Ilges,

Mourade, Ahmed (Fradjalah), Naddem, aboumoussa, Abdelkader,

Mahmoude, Mhamed Tiba, Hilal, Hssane, Ghassane, Sammer,

Khzaï, Salah, Azam et Karim, Sadika, B. Khlassa, Shima et sa mère

Ahmed, Hossine, Rami, Toufik, Aman, Hinda, Nora, Dalila, Rana,

Hadile, Sunaa, Radia, Ouafa, Lamia, Belkirdim, Khaled, Benkhada,

Djilali, Djedi, Nassiba, Khalissa, Nedjma, Katia, Tarik, Abousuleh,

Abuhachim, Moustafa, Annas, Ali, Amdjad,

Samch, Leade, Anane, Alaa, Iad, Chikaoui, Annes, Hidjoui

Bassil, Ouahbi, Hlichem, Walid, Hamdi, Fahed, Sofiane, Isam.

A tous mes amis, surtout ceux de la promotion 2001/2002
Ingénieur en navigations aériennes et en construction.



RESUME

Cette thèse est consacrée au développement et à la mise au point d'une méthodologie de synthèse de lois de pilotage longitudinal robustes et performantes pour l'avion de transport Boeing777, caractérisés par la grande flexibilité de leur structure, l'étude est visualisée à travers une interface graphique implémentée sous le logiciel MATLAB.

This thesis deals with the development of new methodology to synthesize robust and effective control laws for Boeing777 transport aircraft. with significant coupling between flight mechanics and structural modes, we visualized our work in graphic interface with MATLAB.

الهدف من هذه الدراسة هو وضع نموذج للتحكم الصلب للطيران الشاقولي لطائرة النقل من نوع بوينغ 777 يتميز بالليوننة من حيث عمله وتكوينه، ثم قمنا بمحاكاة النتائج المحصل عليها عبر واجهة مصورة باستخدام البرنامج MATLAB .

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I : MODELE MATHEMATIQUE

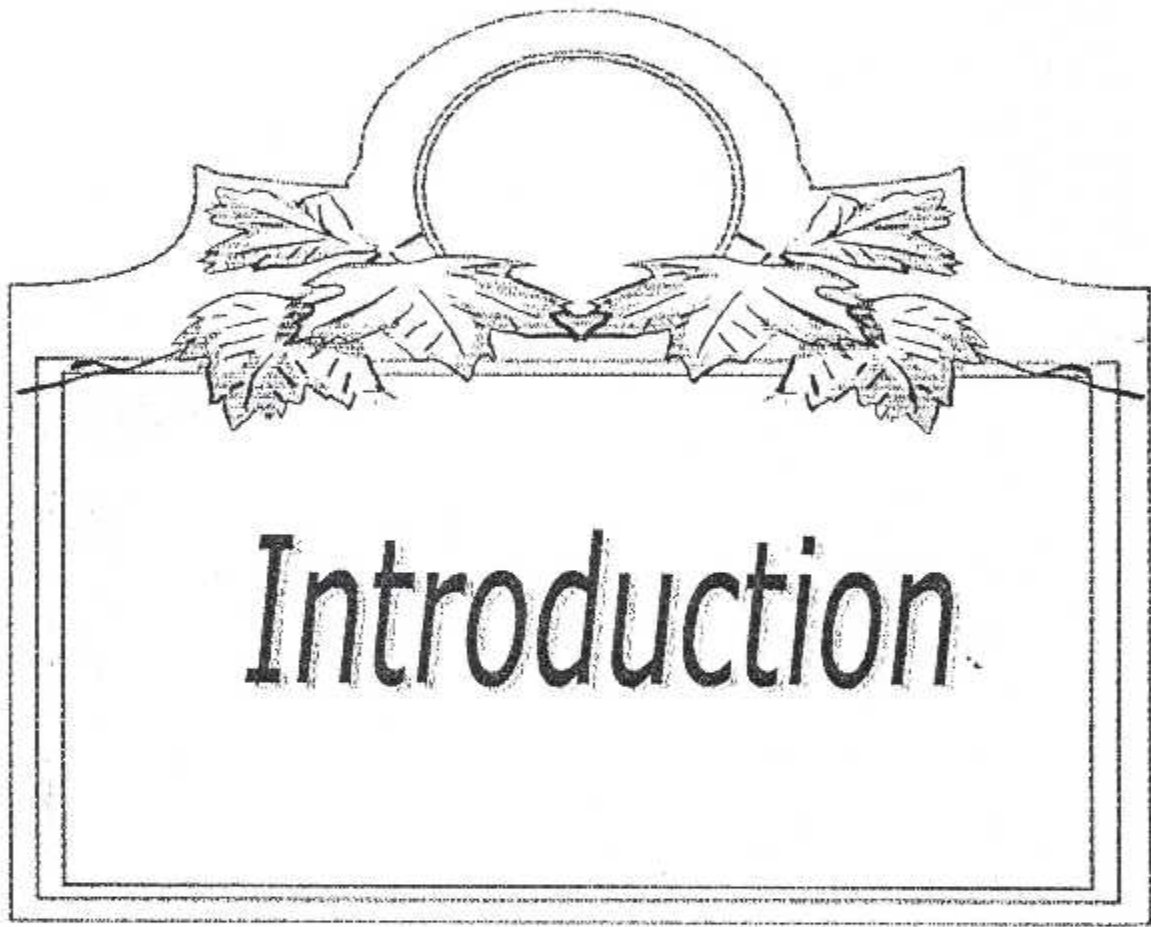
I-I\ INTRODUCTION	05
I-II\ HYPOTHESE DE TRAVAIL	05
I-III\ SYSTEME D'AXES	06
I-IV\ L'ORIENTATION DE L'AVION	09
I-V\ COMPOSANTES DES FORCES INTERVENANTES DANS LES EQUATIONS DE MOUVEMENT	12
V-I\ NOTION DE VOL STATIONNAIRE	12
V-II\ COMPOSANTES DES FORCES DE GRAVITE	12
V-III\ COMPOSANTES DES FORCES AERODYNAMIQUES	13
V-IV\ DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS DE MOUVEMENT SUIVANT UN SYSTEME D'AXES FIXE	17
V-V\ LINEARISATION DES EQUATION DE MOUVEMENT	20
V-VI\ EQUATION LONGITUDINALES	23
V-VII\ REPRESENTATION DES EQUATIONS SOUS FORME D'ETAT	24
VI\ ETUDE EN BOUCLE OUVERTE	26
VI-1\ Le mode Short-period	26
VI-2\ Le mode Phugoïde:	27
VII\ SIMULATION EN BOUCLES OUVERTE	29
VIII\ BUT ET DESCRIPTION DU CONTROLE LONGITUDINAL	32

CHAPITRE II : ANALYSE DE ROBUSTESSE

II-I\INTRODUCTION	35
II-II\ROBUSTESSE DES SYSTEMES MONO-VARIABLES	36
II-III\MARGE DE MODULE	38
II-IV\FONCTION DE SENSIBILITE COMPLEMENTAIRE	40

II-V\ANALYSE DE LA ROBUSTESSE	40
II-VI\SYSTEME MULTIVARIABLES	42
II-VII\ FONCTION DE SENSIBLE EN SORTIE ET EN ENTREE	43
VII-1\ EN SORTIE	43
VII-2\EN ENTREE	44
II-VIII\ APPLICATION SUR LA COMMANDE OPTIMALE	45
VIII-1\ CRITERE QUADRATIQUE SUR L'ETA'	45
VIII-2\REGIME PERMANENT	47
VIII-3\SCHEMA DE LA COMMANDE	48
II-IX\SIMULATION	49
CHAPITRE III : LA COMMANDE LQG	
III-I\INTRODUCTION	57
III-II\FILTRE DE KALMAN	58
II-1\PRINCIPE	58
II-2\DETERMINATION DU FILTRE	60
II-3\REGIME PERMANENT DU FILTRE DE KALMAN	62
III-III\LA COMMANDE LQG	62
III-1\PRINCIPE	62
III-2\SCHEMA DE PRINCIPE	65
III-3\LES TRANSFERTS DE LA COMMANDE	67
III-IV\SIMULATION	68
CHAPITRE IV : LA COMMANDE LQG/LTR	
IV-I/ INTRODUCTION	75
IV-II/ PRINCIPE	75
IV-III/ RECOUVREMENT ASYMPTOTIQUE	75
III-1/Le TRANSFERT DE BOUCLE 0L4ENTREE DU SYSTEME	75
III-2/PROPRIETES DU FILTRE DE KALMAN	76
III-3/ RECOUVERMENT ASYMPTOTIQUE	76
IV-IV/ PROPRIETES DE ROBUSTESSE	77
IV-1/ RECOUVERMENT A L'ENTREE	77

IV-2/ RECOUVREMENT EN SORTIE	78
VI-V\ SCHEMA SYNOPTIQUE	79
IV-VI\ SIMULATION	80
CHAPITRE V : VISUALISATION DU MOUVEMENT	
V-I\ INTRODUCTION	90
V-II\ ETUDE EN BOUCLE OUVERTE	90
V-III\ ETUDE EN BOUCLE FERMEE	92
V-IV\ PROGRAMMES	95
CONCLUSION GENERALE	114
ANNEXES	116
BIBLIOGRAPHIE	132



Introduction

INTRODUCTION GENERALE :

Dans notre travail , nous nous intéressons aux problèmes de régulation liés au vol longitudinal d'un avion Boeing 777. Il y a naturellement de nombreuses variantes et plusieurs façons de les modéliser ,

C'est à dire de les traduire en un problème mathématique et par voie de conséquence algorithmique .

La conception des lois de pilotage dépend en premier lieu de la mise en œuvre d'une modélisation du vol longitudinal sous espace d'état dans notre cas , en suite l'étape du développement et à la mise au point d'une méthodologie de commande qui nous assure des bonnes performances de vol et un confort pour les passagers.

Dans ce contexte on a étudié trois types de commandes optimale qui sont : la commande optimale avec critère quadratique , la commande LQG et la commande LTR, cette dernière caractérise les lois de pilotage robustes, Basée sur la concept de marge de gain-phase aussi appelé de module et sur la notion de fonction de sensibilité. Enfin , l'application de ces techniques est visualisée sous interface implémenter à travers le logiciel MATLAB afin de montrer l'applicabilité et la pertinence de notre méthodologie de synthèse.

ORGANISATION DE LA THESE :

Ce mémoire de thèse est articulé autour des trois grandes parties :

- La première partie, est consacré à la modélisation du mouvement longitudinal de l'avion, et par la suite l'étude en boucle ouverte du système résultant afin de décrire les différents modes qui régissent notre système.
- La deuxième partie, commence par une étude générale de la notion de robustesse, puis elle présente les différentes structures de commandes élaborées : LQ, LQG et LTR ; cette partie montre les avantages et les inconvénients des commande LQ et LQG et propose une amélioration à travers la commande LTR.
- La troisième partie, propose la réalisation d'une interface graphique à travers le logiciel MATLAB afin de visualiser le mouvement longitudinal de l'appareil en boucle ouverte et aussi en appliquant les différents types de commandes étudiés, sans oublier la représentation des résultats trouver.



Chapitre I

Modèle Mathématique

I-I\ INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous commencerons à établir les équations qui régissent le mouvement d'un avion de type rigide en vol, par application de la deuxième loi de NEWTON.

Le résultat obtenu sera représenté par un système d'équations non linéaires couplées. A ce niveau nous ferons appel à la théorie des petites perturbations pour linéariser et découpler ces équations. En fin de compte, nous obtiendrons le système d'équations qui régit le mouvement longitudinal de notre avion.

I-II\ HYPOTHESE DE TRAVAIL :

Les hypothèses énoncées ci-dessous sont nécessaires pour simplifier les développements mathématiques qui suivront :

- 1- L'avion est assimilé à un corps rigide, et la distance entre deux points quelconque de ce corps est invariants.
- 2- La terre est supposée plate et fixe dans l'espace
- 3- On suppose que la masse de l'avion reste constante durant notre étude.
- 4- Le plan (XZ) est un plan de symétrie pour l'avion, par conséquent :

$$I_{xy} = I_{yz} = 0$$

- 5- Les perturbations des conditions de vol sont assez petites que les carrés des changements de vitesse sont négligeables vis-à-vis de leurs changements.
- 6- Durant la phase de vol en palier, l'avion est supposé en vol stationnaire avec assiette fixe.
- 7- L'écoulement est considéré quasi-stationnaire.

I-III\ SYSTEME D'AXES :

Afin de d'écrire le mouvement d'un avion, du fait que les forces agissantes sur l'avion sont de natures différentes ne s'exprime aisément que dans les repères cartésiens différents, on utilise donc deux systèmes d'axes, dont :

Le premier est liée à la terre et qui est supposé fixe, c'est-à-dire que sa rotation est négligée, son utilité est de déterminer la position du centre de gravité de l'avion.

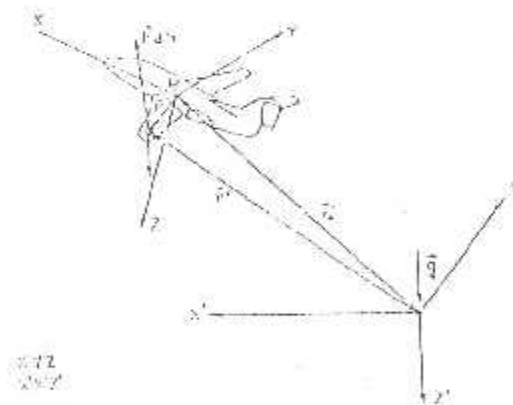
Le second, est fixe à l'avion est à pour origine son centre de gravité, ce système d'axes nous permet de déterminer le mouvement de rotation de l'avion.

Pour faciliter le passage entre ces deux systèmes de repères on utilise des repères intermédiaires, tel que :

$R' (O, X', Y', Z')$: repère lié à la terre (qui est fixe)

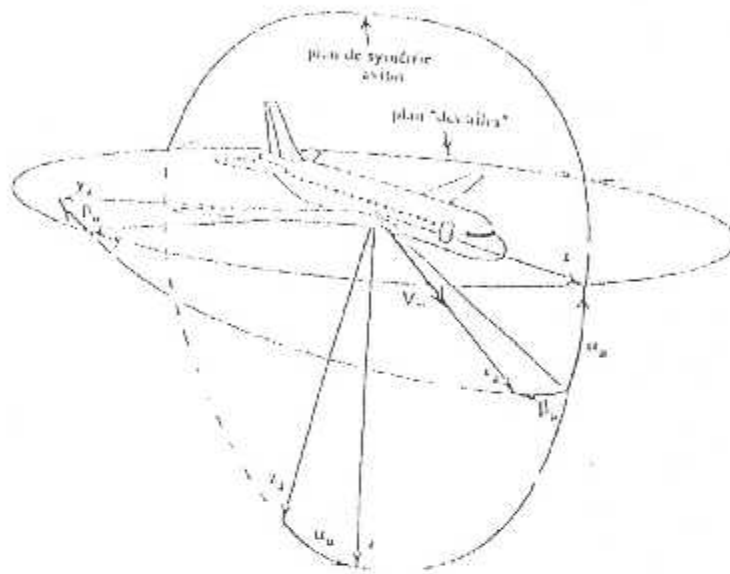
$R (G, X, Y, Z)$: repère lié à l'avion (d'origine centre de gravité de l'avion)

$R_a (G, X_a, Y_a, Z_a)$: repère aérodynamique.



Repère liée à l'avion $R (X, Y, Z)$ par rapport au repère fixe $R' (X', Y', Z')$

Figure(I-1) : système d'axes



Figure(I- 2) : repère aérodynamique

Le tableau (I-1) définit la notation choisie conformément à l'application de la seconde loi de NEWTON :

Axes	X	Y	Z
Vitesse linéaire le long de l'axe	U	V	W
Vitesse angulaire autour de l'axe	P	Q	R
Somme des moments autour de l'axe	ΣL	ΣM	ΣN
Somme des forces suivant l'axe	ΣF_X	ΣF_Y	ΣF_Z
Déplacement autour de l'axe	ϕ	θ	ψ
Moment cinétique suivant l'axe	h_X	h_Y	h_Z
Moment d'inertie	I_{XX}	I_{YY}	I_{ZZ}

Tableau (I-1): nomenclature utilisée pour l'application de la loi de NEWTON

I-IV \ L'ORIENTATION DE L'AVION :

Pour décrire l'orientation de l'avion, par rapport à la terre il suffit de décrire l'orientation du système d'axes (X, Y, Z) liés à l'avion par rapport au système d'axes (X', Y', Z') fixes à la terre.

Pour cela, on considère que le système d'axes X', Y', Z' est translaté parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de gravité de l'avion. L'orientation de l'avion est donnée par les trois possibilités de rotation, dont l'ordre est important parce que ces angles ne sont pas orthogonaux. Ces angles sont appelés les angles d'EULER. on plus, l'avion est mutuellement supposé orienté de telle façon que ses axes (X, Y, Z) soient parallèle à (X', Y', Z') , puis il est soumis aux trois rotations suivantes :

1- une rotation d'angle positif ψ autour de GZ' amenant les axes à G, X, Y, Z ce mouvement est appelé lacet, représenté par la fig. (I-3)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad \dots(I-1)$$

2- Une rotation d'angle positif θ autour de GY_1 amenant les axes à G, X_2, Y_1, Z_2 , ce mouvement est tangage, représenté par la fig. (I-4).

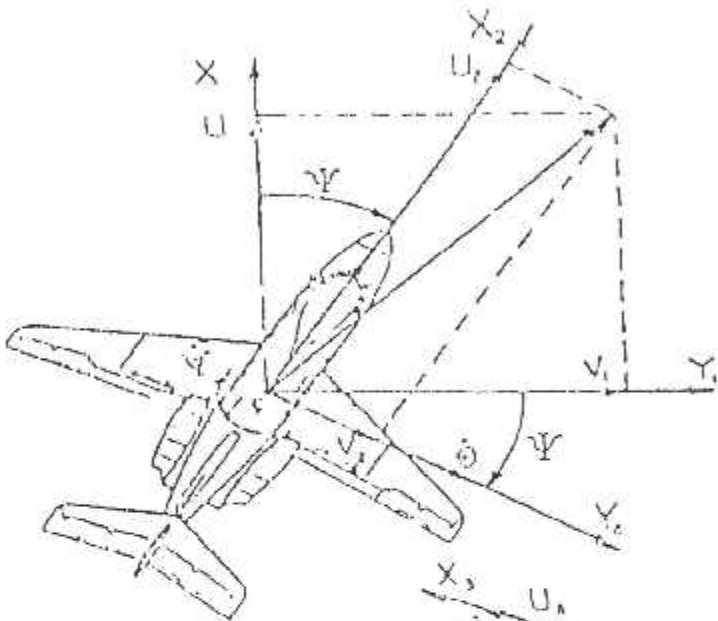
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad \dots(I-2)$$

3- Une rotation d'angle positif ϕ autour de GX_2 amenant les axes à G, X_2, Y, Z , ce mouvement est roulis, représenté par la fig. (I-5)

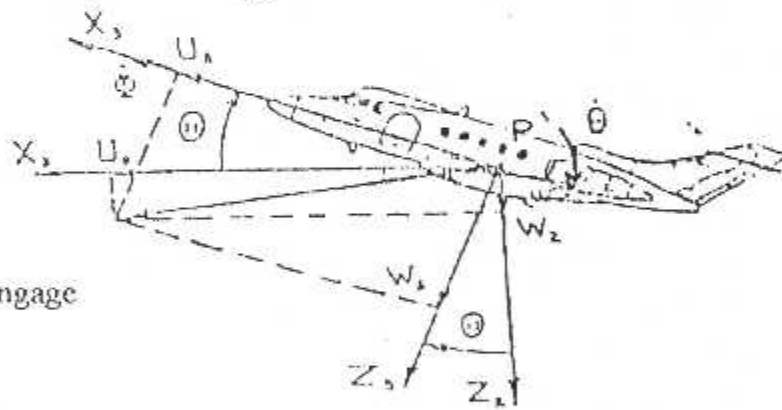
$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \dots(I-3)$$

En remplaçant l'équation (I-3) dans (I-2) dans (I-1) il en résulte la transformation qui permette de passer du repère initial (GX'Y'Z') au repère final (GXYZ) lié à l'avion, définie :

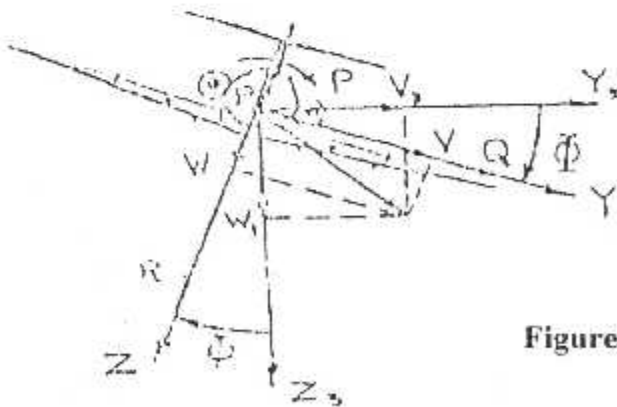
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \dots(I-4)$$



Figure(I-3) : angle de lacet



Figure(I-4) : angle de tangage



Figure(I-5) : angle de roulis

Figures : Roulis Tongage Lacet

I-V\ COMPOSANTES DES FORCES INTERVENANTES DANS LES EQUATIONS DE MOUVEMENT :

V-I\ NOTION DE VOL STATIONNAIRE :

Un vol stationnaire est un vol durant lequel toutes les variables définissant le mouvement sont indépendantes du temps relativement à un système d'axes liés à l'avion, mathématiquement un vol stationnaire est décrit par :

$$\vec{V}_G = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{\Omega} = \vec{0} \quad \dots(1-5)$$

Et notre travail consiste à étudier le mouvement de vol d'un avion en présence de petites perturbations à partir des conditions initiales.

V-II\ COMPOSANTES DES FORCES DE GRAVITE :

Durant tout la durée de vol stationnaire l'avion est soumis à la force de gravité, Ces composantes peuvent être déterminées d'après la figure (1-5), et par la projection directe sur les axes (XYZ) liés à l'avion, on trouve les composantes du vecteur P définies par :

$$\begin{aligned} P_X &= -mg \sin \theta_0 \\ P_Y &= -mg \sin \varphi_0 \cos \theta_0 \\ P_Z &= mg \cos \varphi_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad \dots(1-6)$$

L'indice '0' dans l'équation Précédente indique les valeurs des angles d'EULER en vol stationnaire.

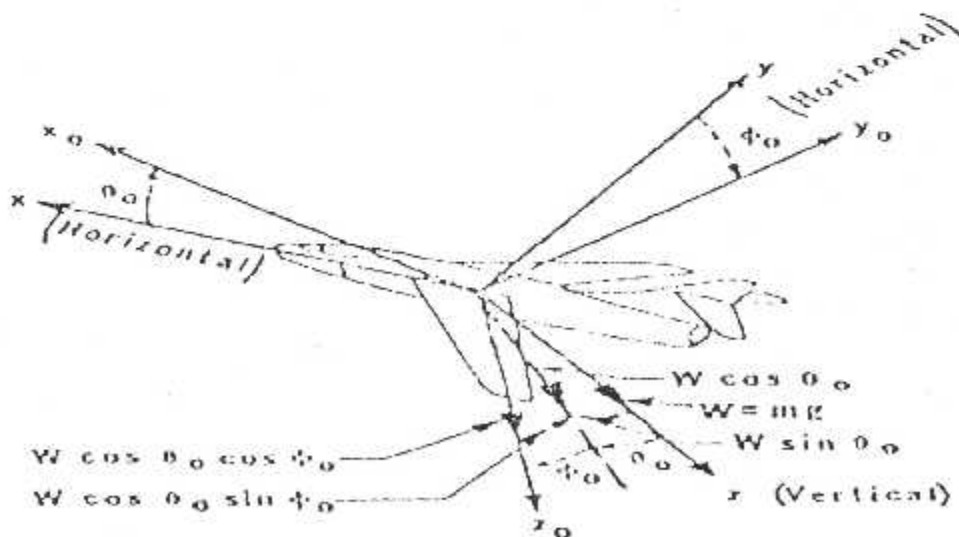


Figure (I-6) : Force de gravité

V-III\COMPOSANTES DES FORCES AERODYNAMIQUES :

Comme il est difficile d'exprimer les forces aérodynamiques et de poussée en terme de vitesse linéaire et angulaire, On représente d'habitude ces forces par un développement en série de TAYLOR en prenant un nombre de termes suffisant pour assurer une précision adéquate pour les calculs.

A cause de ces conditions spéciales il est plus simple de séparer les forces aérodynamiques et de poussée, de la force de gravité, ainsi on aura :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \sum F_{APX} + P_x \\ \sum F_y &= \sum F_{APY} + P_y \\ \sum F_z &= \sum F_{APZ} + P_z\end{aligned}\quad \dots(1-7)$$

$\Sigma F_x, \Sigma F_y$ et ΣF_z : représente respectivement la somme des forces aérodynamiques, de poussée et de gravité selon X, Y, Z.

$\Sigma F_{APX}, \Sigma F_{APY}$ et ΣF_{APZ} : représente respectivement la somme des forces aérodynamiques et de poussée selon X Y Z.

P_x, P_y et P_z : Sont les composantes des forces de gravites.

L'établissement du modèle mathématique du mouvement de vol d'un avion repose sur des relations fondamentales de la mécanique et celle de la cinétique.

Ces relations se résument par la seconde loi de NEWTON, dont l'énoncé est :

"La variation de la quantité de mouvement d'un corps est proportionnelle à la résultante des forces auxquelles il est soumis, et la variation du moment cinétique, est proportionnelle au moment résultant appliqué "

Mathématiquement cette loi s'écrit :

$$\sum \vec{F}_{ext} = d(m \cdot \vec{V}) / dt \quad \text{et} : \quad \sum \vec{M}_{ext} = d(\vec{H}) / dt \quad \dots(1-8)$$

En projetant ces deux relations sur les axes (XYZ) liés à l'avion on obtient :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= d(m \cdot U) / dt \\ \sum F_y &= d(m \cdot V) / dt \\ \sum F_z &= d(m \cdot W) / dt\end{aligned}\quad \dots(1-9)$$

Et :

$$\begin{aligned}\sum L_x &= dh_x / dt \\ \sum M &= dh_y / dt \\ \sum N &= dh_z / dt\end{aligned}\quad \dots(I-10)$$

Relation dans les quelles U, V, W sont les composantes de vitesse avion dans le repère lié à l'avion (G, X, Y, Z), et h_x, h_y, h_z sont respectivement les composantes de moment cinétique de l'avion dans le repère lié à l'avion (G, X, Y, Z).

Et d'après la troisième hypothèse (masse de l'avion fixe) :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m[dU / dt] \\ \sum F_y &= m[dV / dt] \\ \sum F_z &= m[dW / dt]\end{aligned}\quad \dots(I-11)$$

Les moments cinétiques peuvent être développer en utilisant un élément de masse (dm) qui tourne avec la vitesse angulaire Ω :

$$\vec{\Omega} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k} \quad \dots(I-12)$$

avec :

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires sur les axes X, Y, Z, et P, Q, R sont respectivement les composantes du vecteur vitesse angulaire dans le repère lié à l'avion fig(1-1), cet élément de masse est situé au point (X, Y, Z) par rapport au centre de gravité G :

$$d\vec{h} = \vec{r} \wedge dm \vec{V} \quad \dots(I-13)$$

D'après la relation fondamentale de la cinétique la vitesse de cet élément est donnée par :

$$\vec{V} = \vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{r} \quad \dots(I-14)$$

Où :

\vec{V}_G : vitesse de centre de gravité de l'avion.

\vec{r} : rayon vecteur issu de centre de gravité pour situer la position de l'élément de masse dm.

Et en remplaçant \vec{V} par sa valeur, on obtient l'équation :

$$d\vec{h} = \vec{r} \wedge dm (\vec{V}_G + \vec{\Omega} \wedge \vec{r})$$

Le moment cinétique résultant de tout l'avion est obtenu en intégrant l'équation précédente sur toute la masse de l'avion :

$$H = \int d\vec{h} = \int \vec{r} \wedge dm \vec{V}_G + \int \vec{r} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \quad \dots(I-15)$$

Et du fait que la vitesse du centre de gravité est indépendante du signe somme, on peut écrire que :

$$\int \vec{r} \wedge dm \vec{V}_G = \int (\vec{r} * dm) \wedge \vec{V}_G \quad \dots(I-16)$$

Sachant que G (centre de gravité de l'avion) coïncide avec l'origine du repère, on obtient :

$$\int \vec{r} \wedge dm * \vec{V}_G = 0 \quad \dots(I-17)$$

Ainsi le vecteur h est donné par l'équation :

$$\vec{h} = \int [\vec{r} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})] dm \quad \dots(I-18)$$

Et en utilisant la relation vectorielle :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} * (\vec{A} * \vec{C}) - \vec{C} * (\vec{A} * \vec{B})$$

On trouve que :

$$\vec{h} = \int [\vec{\Omega} r^2 - \vec{r} (\vec{\Omega} * \vec{r})] dm \quad \dots(I-19)$$

Donc la composante suivant l'axe X est donné par :

$$h_x = \int [P * (x^2 + y^2 + z^2) - x * (Px + Qy + Rz)] * dm \quad \dots(I-20)$$

d'où :

$$h_x = \int P * (y^2 + z^2) dm - \int Qxy dm - \int Rxz dm \quad \dots(I-21)$$

Et comme p, q, r sont indépendantes de la masse, on peut écrire :

$$h_x = P \int (y^2 + z^2) dm - Q \int xy dm - R \int xz dm \quad \dots(I-22)$$

De la même manière on obtient h_y et h_z :

$$h_y = Q \int (x^2 + z^2) dm - P \int xy dm - R \int yz dm \quad \dots(I-23)$$

$$h_z = R \int (x^2 + y^2) dm - P \int xz dm - Q \int yz dm \quad \dots(I-24)$$

Sachant que par définition on a :

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm ; I_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm \text{ et } I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int xy dm ; I_{xz} = \int xz dm \text{ et } I_{yz} = \int yz dm \quad \dots(1-25)$$

Comme étant les différents moments d'inertie par rapport aux trois axes, d'où on trouve que les composantes du vecteur h sont :

$$h_x = P * I_{xx} - Q * I_{xy} - R * I_{xz}$$

$$h_y = Q * I_{yy} - R * I_{yz} - P * I_{xy} \quad \dots(1-26)$$

$$h_z = R * I_{zz} - P * I_{xz} - Q * I_{yz}$$

La dérivée dh/dt est obtenue en dérivant ces équations par rapport au temps t, est en tenant compte du fait que le système d'axes qu'on a choisi est lié à l'avion et compte tenu des hypothèses énoncées précédemment, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\Sigma L = dh_x/dt = P'' * I_{xx} - Q' * I_{xy} - R'' * I_{xz}$$

$$\Sigma M = dh_y/dt = Q'' * I_{yy} - R' * I_{yz} - P'' * I_{xy} \quad \dots(1-27)$$

$$\Sigma N = dh_z/dt = R'' * I_{zz} - P' * I_{xz} - Q'' * I_{yz}$$

Du fait que le système d'axes, adopté pour déterminer les équations de mouvement, est lié à l'avion ne peut être décrite par ce système d'axes, ainsi on est amené à introduire un système d'axes fixe.

V-IV\DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS DE MOUVEMENT

SUIVANT UN SYSTEME D'AXES FIXE :

L'accélération mesurée dans le système d'axes fixe X' Y' Z' est donné par :

$$\vec{\gamma} = [d \vec{V}_G / dt]_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}$$

avec :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ U & V & W \end{bmatrix}$$

Si U, V, et W, sont les composantes de V_G dans (X Y Z), et P, Q, R celles de $\vec{\Omega}$,

On aura :

$$\begin{aligned} \gamma_x &= U' + Q*W - R*V \\ \gamma_y &= V' + R*U - P*W \\ \gamma_z &= W' + P*V - Q*U \end{aligned} \quad \dots(1-28)$$

De la même manière , le changement dans le moment cinétique en fonction du temps s'écrit :

$$[d \vec{h} / dt]_{x'y'z'} = [d \vec{h} / dt]_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{h} \quad \dots(1-29)$$

avec :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{h} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P & Q & R \\ h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}$$

Les composantes de h et dh/dt étant déjà calculées dans le repère lié à l'avion donc :

$$\begin{aligned} [dh_x / dt]_{x'y'z'} &= [dh_x / dt]_{xyz} + Qh_z - Rh_y \\ [dh_y / dt]_{x'y'z'} &= [dh_y / dt]_{xyz} + Rh_x - Ph_z \\ [dh_z / dt]_{x'y'z'} &= [dh_z / dt]_{xyz} + Ph_y - Qh_x \end{aligned} \quad \dots(1-30)$$

La somme des forces extérieures appliquées sur l'avion est égale à la somme des forces aérodynamiques, de poussée plus la force de gravité, C'est-à-dire :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \Sigma \vec{F}_{\text{ap}} + \vec{P} \quad \dots(1-31)$$

\vec{P} : poids de l'avion.

\vec{F}_{ap} : force aérodynamique et propulsive.

Et :

$$\Sigma \vec{M}_{\text{ext}} = \Sigma \vec{M}_{\text{ocm}} + \vec{M}_{\text{prq/g}} \quad \dots(1-32)$$

D'après (1-22) :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ap}} - \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} - \vec{P} \quad \dots(1-33)$$

Selon la quatrième hypothèse (le plan XZ est un plan de symétrie),

On avait :

$$I_{XY} = 0 \quad \text{et} : \quad I_{YZ} = 0$$

Ainsi les équations de mouvement d'un avion par rapport à un système d'axes s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma F_{APx} &= m(U' + Q*W - R*V) - P_x \\ \Sigma F_{APy} &= m(V' + R*U - P*W) - P_y \\ \Sigma F_{APz} &= m(W' + P*V - Q*U) - P_z \end{aligned} \quad \dots(1-34)$$

Pour simplifier la notation, on va noter , néanmoins, les composantes des forces aérodynamiques et propulsives comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} F_{APx} &= F_x \\ F_{APy} &= F_y \\ F_{APz} &= F_z \end{aligned}$$

Le poids de l'avion $\vec{P} = m g \vec{Z}$, dans le repère fixe .

Et puisqu'on à la matrice de passage du repère fixe (X',Y',Z') au repère mobile liée à l'avion , On aura :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi & \sin \psi \cos \phi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

relation ... (I-35) :

Donc :

$$\begin{aligned} P_x &= -mg \sin \theta_0 \\ P_y &= -mg \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ P_z &= mg \cos \phi_0 \cos \theta_0 \end{aligned} \quad \dots (I-36)$$

Par substituant des équation (I-36) dans les équations (I-34) on trouve :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m(U' + Q^*W - R^*V) + mg \sin \theta_0 \\ \sum F_y &= m(V' + R^*U - P^*W) + mg \sin \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sum F_z &= m(W' + P^*V - Q^*U) - mg \cos \phi_0 \cos \theta_0 \\ \sum L &= P^*I_{xx} - R^*I_{zz} + Q^*R^*(I_{zz} - I_{yy}) - P^*Q^*I_{xz} \\ \sum M &= Q^*I_{yy} + P^*R^*(I_{xx} - I_{zz}) - R^2 * I_{xz} + P^2 * I_{xz} \\ \sum N &= R^*I_{zz} - P^*I_{xx} + P^*Q^*(I_{yy} - I_{xx}) + Q^*R^*I_{xz} \end{aligned} \quad \dots (I-37)$$

Ces équations sont complètes, et il reste d'explicitier les forces aérodynamiques et de poussées aussi bien que les moments résultants des flexions des surfaces de contrôle.

Les composantes de la vitesse angulaire P, Q, R pouvant être exprimées en fonction des angles d'EULER ψ, θ, ϕ .

$$\begin{aligned} P &= \phi' - \psi' \sin \theta \\ Q &= \theta' \cos \phi + \psi' \cos \theta \sin \phi \\ R &= \psi' \cos \theta \cos \phi - \theta' \sin \phi \end{aligned} \quad \dots (I-38)$$

Alors, la forme matricielle des ces équations s'écrit comme ci-dessous :

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi' \\ \theta' \\ \psi' \end{bmatrix} \quad \dots (I-39)$$

Donc on conclut que les équations sont non linéaires et couplées.

V-V\LINEARISATION DES EQUATION DE MOUVEMENT :

Le mouvement de l'avion peut être écrite comme le résultat d'une perturbation à partir des conditions de vol stationnaire, de ceci chaque composante de la vitesse instantané de l'avion peut être écrite comme la somme de la composante de la vitesse durant le vol stationnaire et le changement causé par la perturbation donc on peut écrire que :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + \Delta u; & V &= V_1 + \Delta v; & W &= W_1 + \Delta w; \\ P &= P_1 + \Delta p; & Q &= Q_1 + \Delta q; & R &= R_1 + \Delta r; \\ \psi &= \psi_1 + \Delta \psi; & \theta &= \theta_1 + \Delta \theta; & \phi &= \phi_1 + \Delta \phi; \end{aligned} \quad \dots(1-40)$$

L'indice (1) dans les équations indique les valeurs des vitesses en vol stationnaire et les lettres minuscules représentent les vitesses dues aux perturbations.

En substituant les équation (1-40) dans les équations(1-37) et en tenant compte que la dérivée par rapport au temps des conditions de vol stationnaire est nulle , les équations (1-37)deviennent :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\{\Delta u' + Q_1 W_1 + w_1 \Delta q + Q_1 \Delta w + \Delta w \Delta q - R_1 V_1 - R_1 \Delta v - V_1 \Delta r - \Delta v \Delta r\} \\ &+ mg * \sin(\theta_1 + \Delta \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= m\{\Delta v' + U_1 R_1 + U_1 \Delta r + \Delta r \Delta u + \Delta u R_1 - P_1 W_1 - P_1 \Delta w - \Delta p W_1 - \Delta P \Delta w\} \\ &+ mg * \sin(\phi_1 + \phi) \cos(\theta_1 + \Delta \theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= m\{\Delta w' + P_1 \Delta v + P_1 V_1 + V_1 \Delta p + \Delta p \Delta v - Q_1 U_1 - Q_1 \Delta u - \Delta q U_1 - \Delta q \Delta u\} \\ &- mg * \cos(\phi_1 + \Delta \phi) \cos(\theta_1 + \Delta \theta). \end{aligned}$$

$$\sum L = \Delta p' I_{xx} - \Delta r' I_{xz} + (Q_1 R_1 + Q_1 \Delta r + R_1 \Delta q + \Delta q \Delta r)(I_{zz} - I_{yy}) - (P_1 * Q_1 + P_1 \Delta q + Q_1 \Delta p) I_{xy}$$

$$\begin{aligned} \sum M &= \Delta q' I_{yy} + (P_1 R_1 + P_1 \Delta r + R_1 \Delta p + \Delta r \Delta p)(I_{xx} - I_{zz}) - (R_1^2 + 2R_1 \Delta r + (\Delta r)^2) I_{xz} \\ &+ (P_1 + 2P_1 \Delta p + (\Delta p)^2) I_{xz}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum N &= \Delta r' I_{zz} - \Delta p' I_{xz} + (P_1 Q_1 + P_1 \Delta q - Q_1 \Delta p + \Delta p \Delta q)(I_{yy} - I_{xx}) \\ &+ (Q_1 R_1 + Q_1 \Delta r + R_1 \Delta q + \Delta r \Delta q) I_{xz}. \end{aligned}$$

...(1-41)

Sachant que :

1- d'après la cinquième hypothèse, on peut négliger les carrés et les produits des petites perturbations par rapport aux quantités du 1^{ère} ordre .

2- le vol est initialement incarcéré, sans vitesse angulaire :

$$Q_1 = 0 \quad \text{et} \quad M_1 = 0$$

3- l'axe 'OX' est dans la même direction que la vitesse du centre de gravité à l'équilibre $W_1=0$.

4- l'assiette longitudinale initiale étant θ_1 , les développements trigonométriques suivantes sont indispensables pour la suite :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Et comme θ est petite on peut supposer que :

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) \approx \theta$$

d'où :

$$\sin(\Delta\theta + \theta_1) = \sin(\theta_1) + \Delta\theta \cos(\theta_1)$$

$$\cos(\Delta\theta + \theta_1) = \cos(\theta_1) - \Delta\theta \sin(\theta_1)$$

et d'après la 6^{ème} hypothèse :

Durant la phase de vol stationnaire, l'avion est supposé en vol horizontale avec une assiette fixe, et avec des composantes de vitesse nulle à l'exception de U_1 , et W_1 tel que :

$$V_1 = \psi_1 = P_1 = Q_1 = R_1 = \Phi_1 = 0$$

$$\sum F_x' = m(\Delta u' + W_1 \Delta q + g \sin \theta_1 + g \Delta \theta \cos \theta_1)$$

$$\sum F_y' = m(\Delta v' + U_1 \Delta r - W_1 \Delta p - g \Delta \theta \sin \theta_1 - g \Delta \Phi \cos \theta_1)$$

$$\sum F_z' = m(\Delta w' - U_1 \Delta q + g \Delta \theta \sin \theta_1 - g \cos \theta_1)$$

$$\sum L = \Delta p' I_{xx} - \Delta r' I_{xz}$$

$$\sum M = \Delta q' I_{yy}$$

$$\sum N = \Delta r' I_{zz} - \Delta p' I_{xz}$$

Les forces aérodynamiques et de poussée sont exprimées sous forme de coefficients comme suit :

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad = \text{portance}$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad = \text{Traînée}$$

$$X = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_X \quad = \text{forces aérodynamique le long de l'axe .}$$

$$Y = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_Y \quad = \text{force aérodynamique le long de l'axe Y.}$$

$$Z = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_Z \quad = \text{force aérodynamique le long de l'axe Z.}$$

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_L \quad = \text{Moment de roulis.}$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 S c C_M \quad = \text{Moment de tangage.}$$

$$N = \frac{1}{2} \rho V^2 S b C_N \quad = \text{Moment de lacet}$$

Où :

S : Surface de l'aile .

\bar{c} : Corde aérodynamique moyenne = la corde de l'aile qui a les caractéristiques moyennes de toutes les cordes de l'aile .

b : envergure de l'aile .

Et comme on a noté antérieurement, chacune de force et de moment peut être exprimé par un développement en série de TAYLOR, cette dernière possède la forme :

$$F = F_1 + \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] \alpha + \left[\frac{\partial F}{\partial \beta} \right] \beta + \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] \sigma + \dots$$

Dont α , β , σ : sont des variables, et l'indice (1) indique que les quantités sont évoluées dans les conditions de vol stationnaire.

Avant de développer chaque force et moment sous la forme ci-dessous, il faut noter du fait que le plan XZ est un plan de symétrie, le rapport de changement Des forces F_x et F_z et du moment M en fonction des perturbations P, r et v est nul .ainsi de nombreux essaies et études aéronautiques en soufflerie ont montré , que certaines quantités peuvent être négligées ,ce qui ramène les forces et les moments agissant sur un avion sujet a une perturbation peuvent être exprimé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X &= X_1 + [\partial X / \partial U]U + [\partial X / \partial W]W + [\partial X / \partial q]q + [\partial X / \partial \delta_e] \delta_e + [\partial X / \partial \delta_s] \delta_s \\ Y &= Y_1 + [\partial Y / \partial V]V + [\partial Y / \partial P]P + [\partial Y / \partial r]r + [\partial Y / \partial \delta_r] \delta_r + [\partial Y / \partial \delta_a] \delta_a \\ Z &= Z_1 + [\partial Z / \partial U]U + [\partial Z / \partial W]W + [\partial Z / \partial q]q + [\partial X / \partial \delta_e] \delta_e + [\partial X / \partial \delta_s] \delta_s \\ L &= L_1 + \frac{\partial L}{\partial V}V + \frac{\partial L}{\partial P}P + \frac{\partial L}{\partial r}r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \end{aligned} \quad \dots(1-42)$$

$$M = M_1 + \frac{\partial M}{\partial U}U + \frac{\partial M}{\partial W}W + \frac{\partial M}{\partial q}q + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_s} \delta_s$$

$$N = N_1 + \frac{\partial N}{\partial V}V + \frac{\partial N}{\partial P}P + \frac{\partial N}{\partial r}r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a$$

Avec :

δ_e : angle de déflexion élévateur .

δ_s : angle de déflexion des spoilers .

δ_a : angle de déflexion des ailerons .

δ_r : angle de déflexion des gouvernes .

V-VI \ EQUATIONS LONGITUDINALES :

Pour le cas longitudinal on à la forme :

$$\begin{aligned} u' + g\Delta\theta \cos(\theta_1) &= X_u u + X_q q + X_w w + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_f} \delta_f \\ w' - U_1 q + g\Delta\theta \sin(\theta_1) &= Z_u u + Z_w w + Z_q q + Z_{\delta_e} \delta_e + Z_{\delta_f} \delta_f \\ q' &= M_u u + M_w w + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_f} \delta_f \end{aligned} \quad \dots(1-43)$$

On peut signaler aussi que le changement de l'angle d'attaque peut être approximer par :

$$W = U^1 * \alpha \quad \text{car } \alpha \text{ est petite .}$$

On aussi supposer que :

$$h' = U^1 * \gamma$$

Sachant que h est l'altitude, et γ est la pente aérodynamique.

V-VII\REPRESENTATION DES EQUATIONS SOUS FORME D'ETAT :

D'après l'équation (I-42) on à :

$$u' = (X_u u + X_\alpha \alpha + X_q q + X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_f} \delta_f$$

$$\alpha' = Z_u u + [Z_\alpha / (U_1)] \alpha + [(U_1 + Z_q) / (U_1)] q + \theta [g \sin(\theta_1) / (U_1)]$$

$$q' = (M_u + (Z_{jm} / I_{yy}) T_u) u + M_\alpha \alpha + M_q q + 0 * \theta + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_f} \delta_f + (Z_{jm} / I_{yy}) T_{\delta rpm} \delta rpm$$

$$\theta' = 0 * u + 0 * \alpha + I * q + 0 * \theta + 0 * \delta_e + 0 * \delta_f + 0 * \delta rpm$$

$$h' = 0 * u + U_1 * \alpha + 0 * q - U_1 * \theta + 0 * \delta_e + 0 * \delta_f + 0 * \delta rpm$$

Et d'après la relation : $T_{\delta rpm} * \delta rpm = T_{acch} * \delta acch$

Donc à partir des équations de mouvement longitudinal linéaire, la forme d'état sera donnée par :

$$\begin{bmatrix} u' \\ \alpha' \\ q' \\ \theta' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_U + \cos(\zeta) T_u & X_\alpha & X_q & -g \cos(\theta_1) & 0 \\ [Z_U - \sin(\zeta) T_u] / U_1 & Z_\alpha / U_1 & (U_1 + Z_q) / U_1 & g \sin(\theta_1) / U_1 & 0 \\ [M_u + (Z_{jm} / I_{yy}) T_u] & M_\alpha & M_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & U_1 & 0 & U_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_f} & \cos(\xi) X_{acch} \\ Z_{\delta_e} / (U_1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_{\delta_e} & 0 & (Z_{jm} / I_{yy}) T_{acch} \\ 0 & 0 & \sin(\xi) Z_{\delta acch} / U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_s \\ a_{cch} \\ \delta_e \end{bmatrix}$$

Et l'application numérique de ces résultats nous à donné le model de l'avion longitudinal sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.1320 & 0 & -1.0000 \\ 0 & -0.0538 & -0.1712 & 0 & 0.0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.0130 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.1200 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.4190 & 0 & -1.6650 \\ 1.5750 & 0 & -0.0732 \end{bmatrix}$$

VI\ETUDE EN BOUCLE OUVERTE :

L'étude en boucle ouverte nous permet de définir les modes qui caractérisent le vol longitudinal de l'avion, aussi d'analyser la stabilité « Statique et Dynamique » du modèle requis ; pour cela on a utilisé le logiciel Matlab afin de simuler le comportement de ce vol tel qu'il est c'est à dire sans l'utilisation des notions de contrôle.

Le calcul des valeurs propres du système ainsi des pulsations naturelles nous a permis de définir les modes qui existent en vol longitudinal, et les résultats sont résumés dans le tableau (I-2) suivant :

Modes	Amortissement	Pulsation rad/s	Description
$-0.0176 \pm 0.183i$	0.0959	0.183	Phugoïde
$-0.780 \pm 1.03i$	6.04e-001	1.29	Short-period

Tableau (I-2) : les modes de la matrice dynamique longitudinale en boucle ouverte

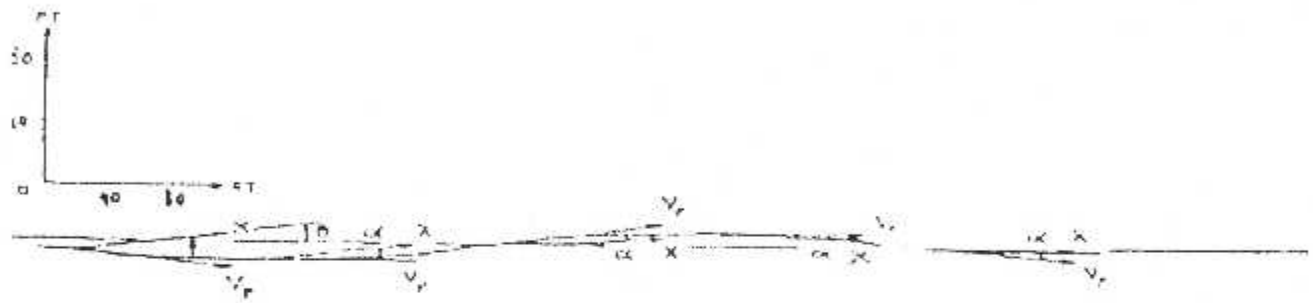
D'après les résultats du tableau on conclut que la réponse transitoire d'un avion consiste en deux formes d'oscillations, l'une fortement amortie, avec des oscillations hautes fréquences l'autre très faiblement amortie avec des oscillations basses fréquences ; le premier mode est appelé "Short-period mode" alors que le deuxième est appelé "Phugoïde mode".

VI-1\LE MODE SHORT-PERIOD : est un mouvement autour du centre de gravité, il prend place à une vitesse constante avec des petites perturbations sur l'angle d'incidence par rapport à la position d'équilibre donc il est obtenu par des excitations sur la gouverne de profondeur ; et comme la période d'oscillation de ce mode est très courte et il est presque toujours amorti, le pilote ne peut pas prévoir sa réponse.

VI-2\LE MODE PHUGOÏDE: L'oscillation dans ce mode est lente, dans laquelle la trajectoire du centre de gravité à une allure sinusoïdale, ce mouvement se traduit par des variations simultanées et alternées de la vitesse et l'altitude ;

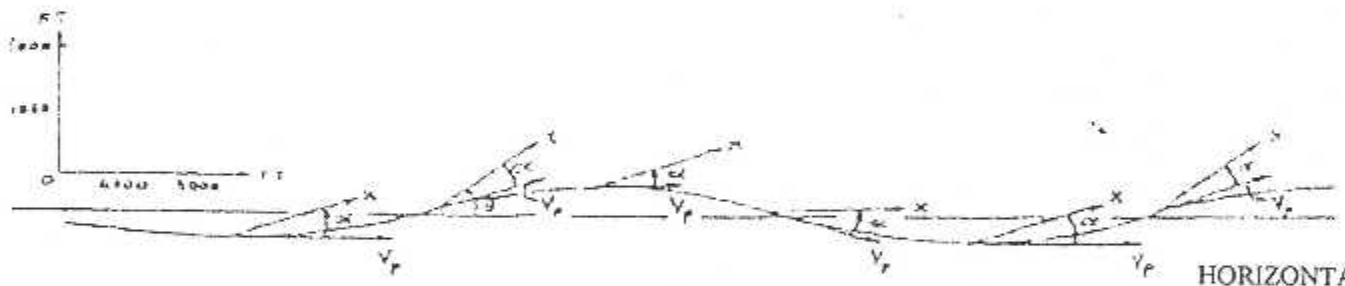
l'incidence varie très peu, et la période est grande donc ce mode est facilement perceptible par le pilote.

La figure (I-8) illustre la différence entre les deux modes vue par un observateur extérieur, tandis que la figure (I-9) représente la réponse du système lors de l'application d'une impulsion sur la gouverne de profondeur.



HORIZONTAL

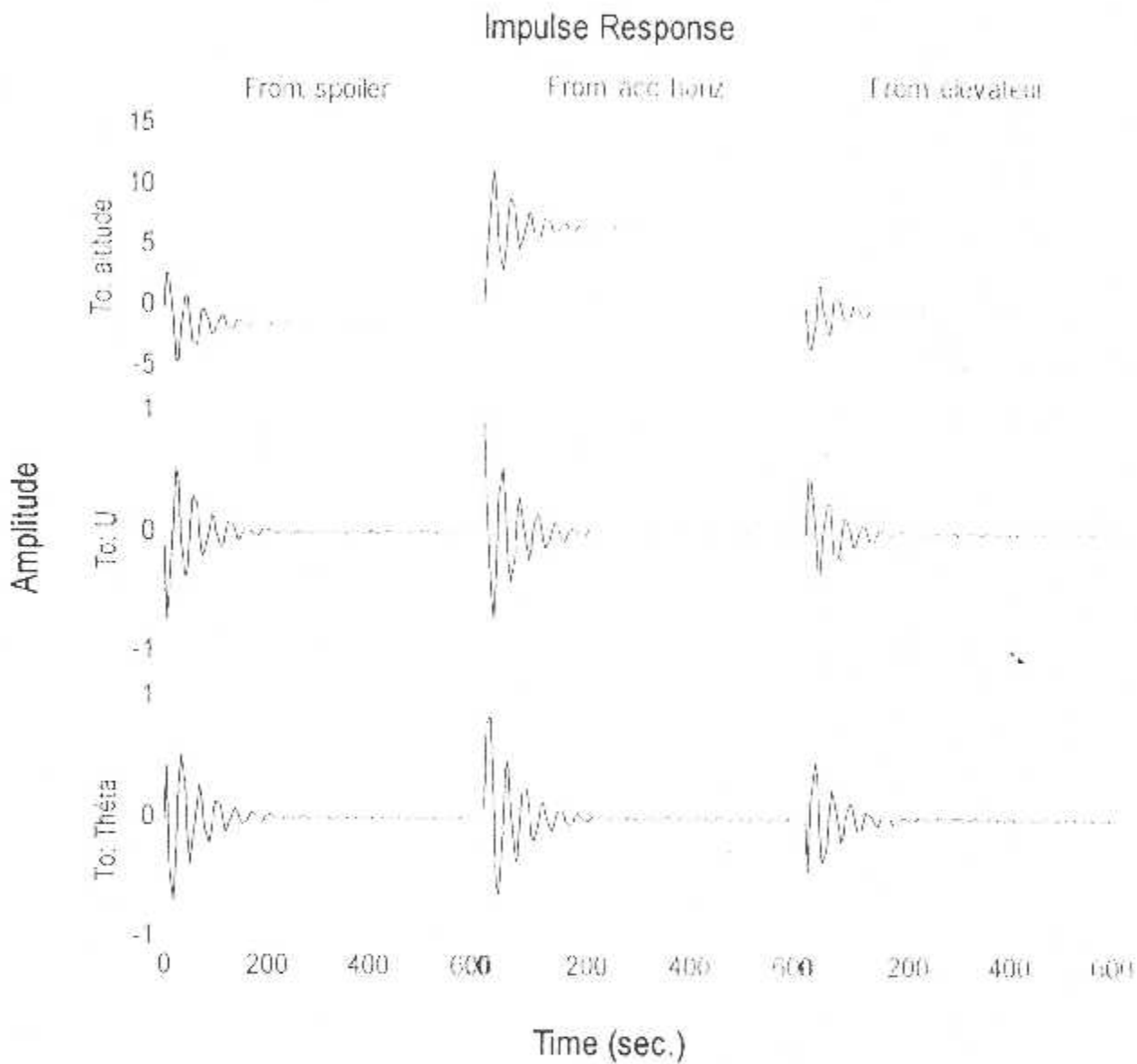
Le short périod vue par un observateur extérieur.



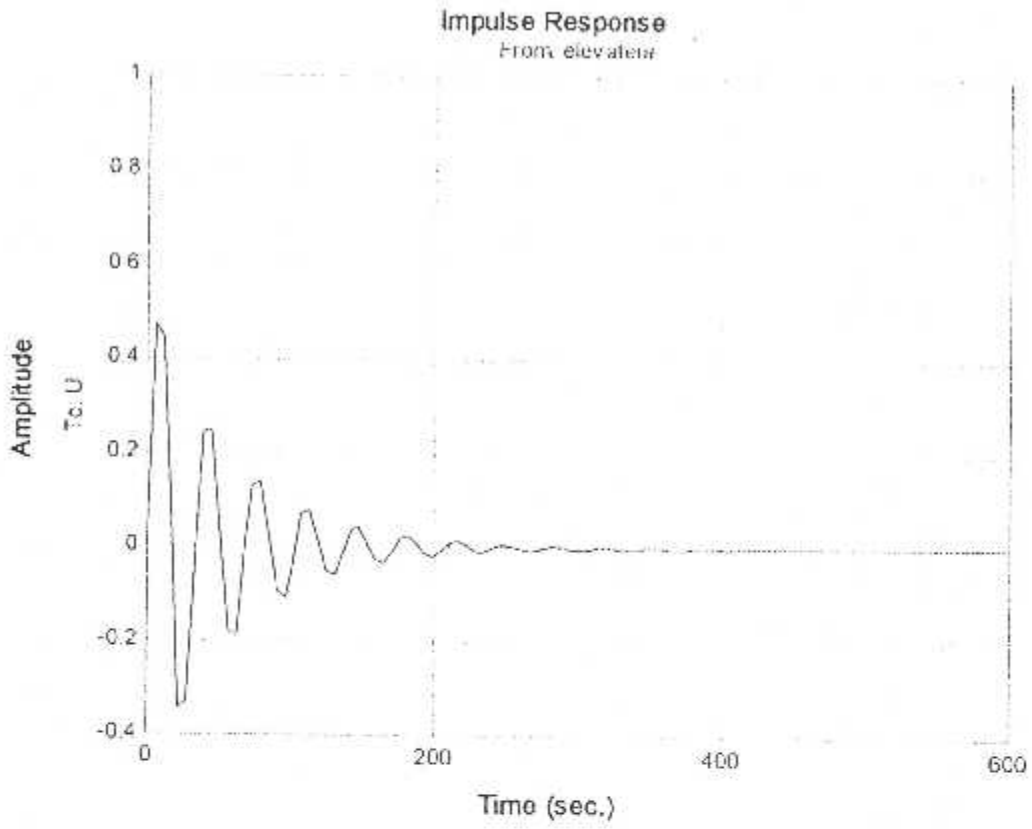
HORIZONTAL

Le phygoïd vue par un observateur extérieur.

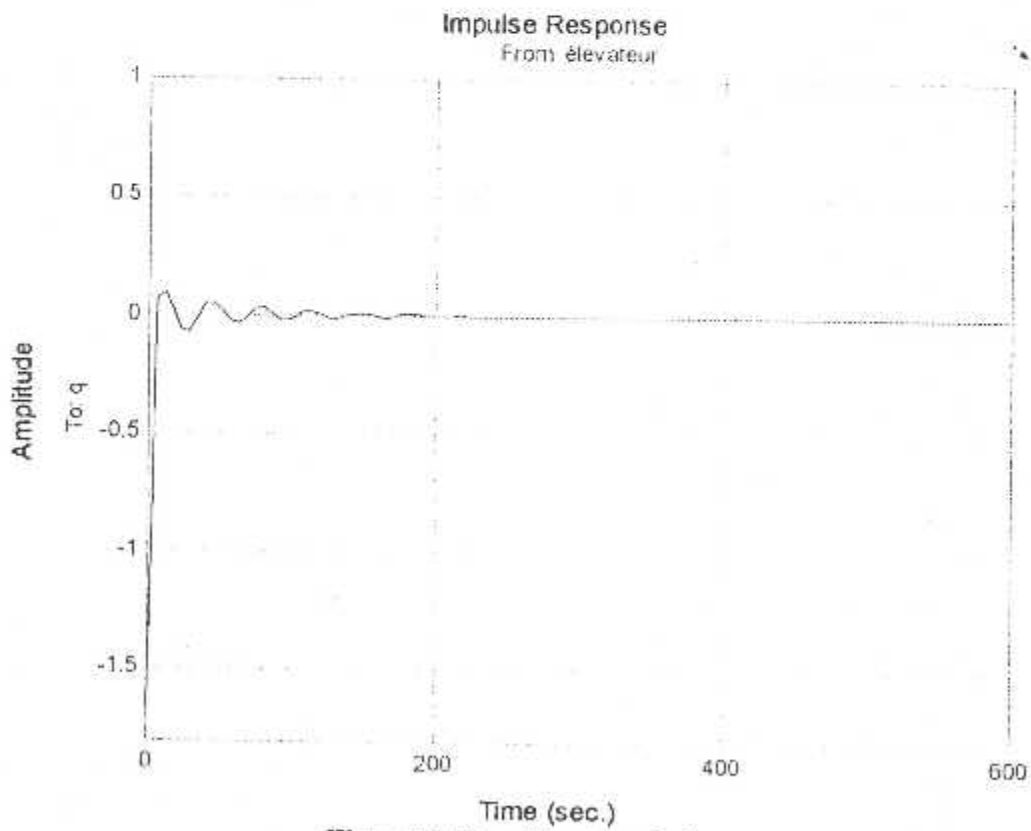
VII\ SIMULATION EN BOUCLES OUVERTE :



Figure(I-7) : la réponse impulsionnelle

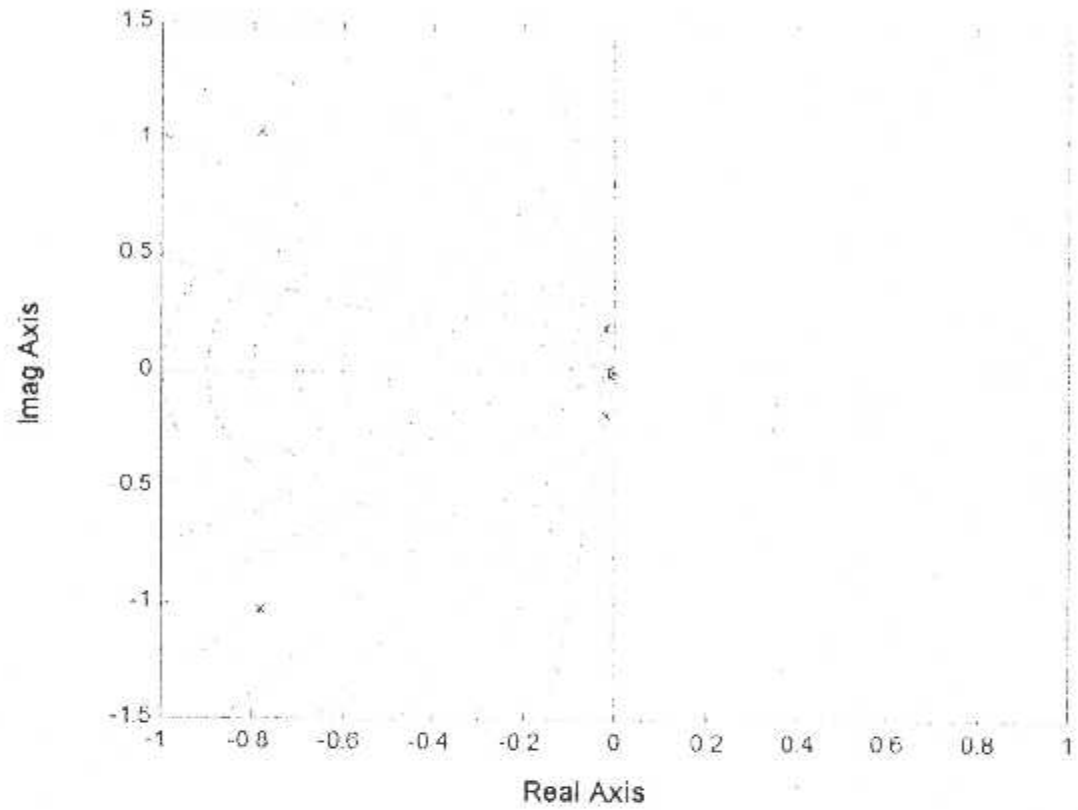


Figure(I-8) : le mode Phugoïde

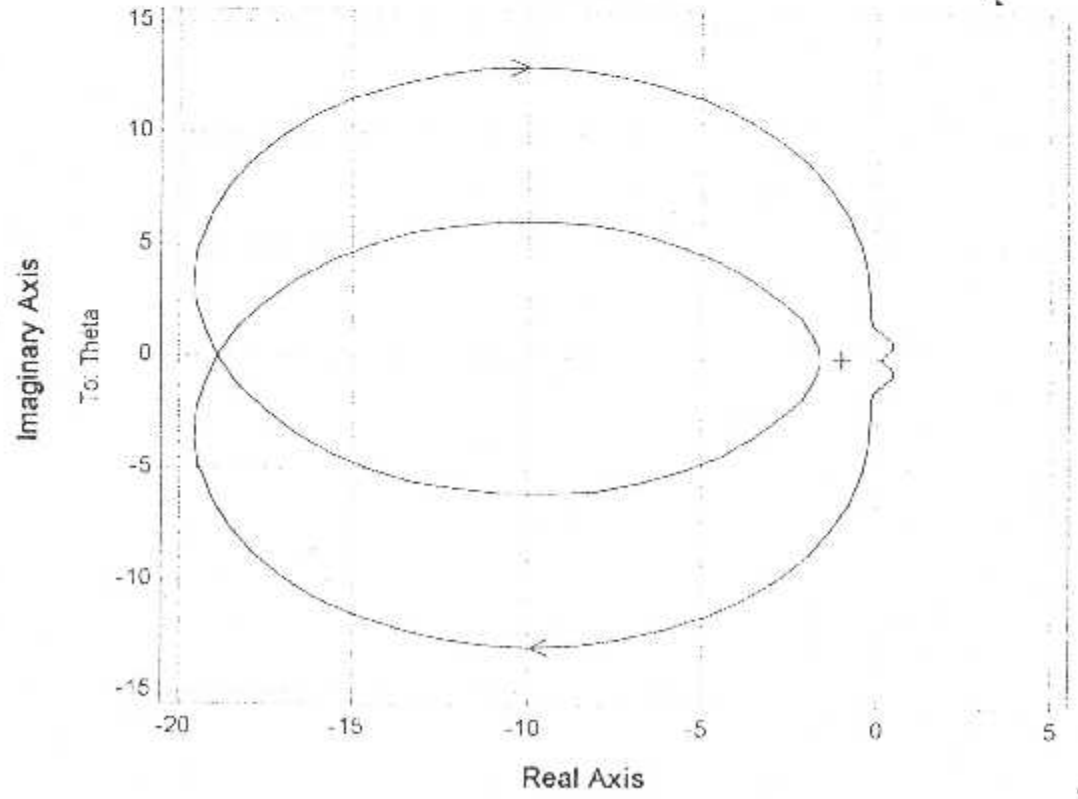


Figure(I-9) : Short-period

Pole-zero map



Nyquist Diagrams
Front éleveur



VIII\ BUT ET DESCRIPTION DU CONTROLE LONGITUDINAL :

Après avoir développé le système d'équations qui régit le mouvement longitudinal et simuler les réponses de système en boucle ouverte, on se trouve en face de notre problème qui réside dans l'évaluation d'un système de contrôle pour notre avion, car les résultats de la réponse impulsionnelle figure(1-6)et figure(1-7), et aussi la figure (1-8) nous montre que le temps de réponse atteint environ 250 secondes (4min) et que le modèle possède cinq pôles dont trois sont très proche de l'axe tandis que le diagramme de NYQUIST confirme qu'il y a des transferts instables tel que celui de la gouverne de profondeur vers l'angle de tangage Θ . Pour cela on va élaborer un système de commande selon des critères bien précis et qui possède les performances et aussi la robustesse nécessaire afin de garantir un vol confortable pour les passagers.

En premier temps, on va adopter comme architecture pour la commande à réaliser le schéma bloc (1-1) qui ressemble bien à un système de commande par retour d'état avec un gain de retour calculé selon un critère quadratique donc c'est la commande optimale quadratique qui sera étudié et développer dans les chapitres qui suit.

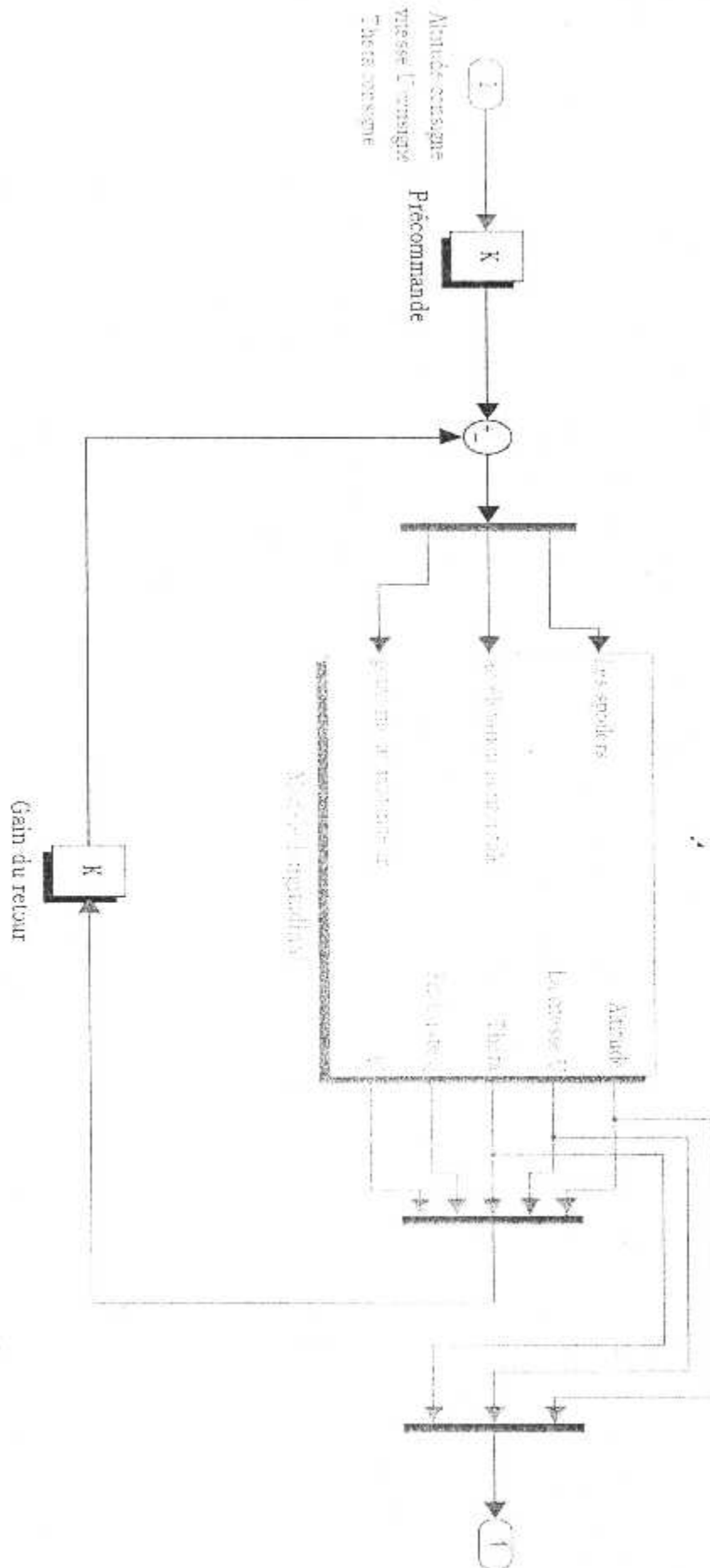


Figure (I-10) : Modèle longitudinal

A decorative frame with a semi-circular top and a rectangular bottom. The top part features a semi-circle containing the text 'Chapitre II'. Below the semi-circle, there are several stylized leaves or branches extending across the width of the frame. The entire frame is enclosed in a double-line border.

Chapitre II

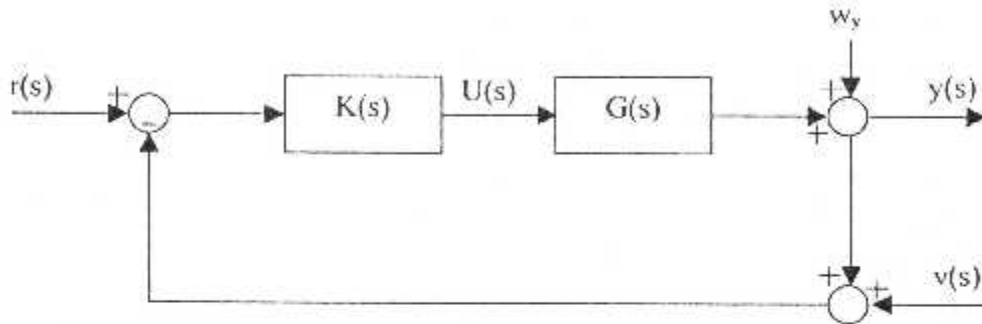
Etudes de Robustesse

II-1-INTRODUCTION :

La conception d'un asservissement consiste à ajuster le régulateur de manière à obtenir les propriétés et le comportement désirés en boucle fermée, aussi il faut assurer les meilleures performances possibles, mais sachant qu'il y a certains paramètres du système qui permet de varier sensiblement avec le temps ou les conditions de fonctionnement, et aussi l'existence de facteurs externes imprévisibles qui peuvent venir perturber le fonctionnement du système asservi tel que l'intensité du vent dans notre cas donc on peut dire qu'il est insuffisant d'optimiser l'asservissement par rapport au model formuler d'après le chapitre I seulement, mais il faut aussi lui protéger contre les incertitudes de modélisation et aussi les perturbations externes et internes bien que ces facteurs dispose d'une nature stochastique et la tâche correspondante et de robustifier l'asservissement donc assurer la stabilité du système bouclé et garantir la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations admissibles et dit stabilité robuste .

II-II\ROBUSTESSE DES SYSTEMES MONO-VARIABLES :

considérons le système asservi représenté par son diagramme général :



Figure(II-1) : système asservi

r : le signal de référence qui doit suivre la sortie y .

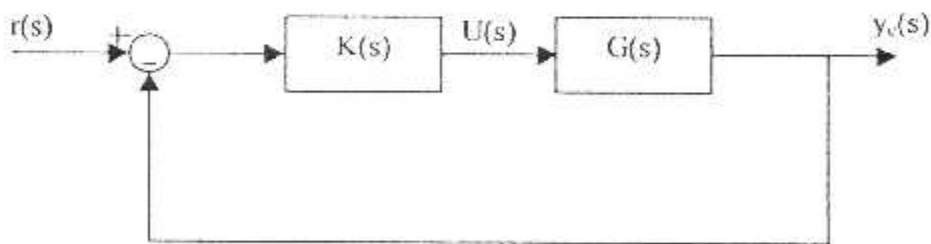
y : le vecteur de sortie.

u : la commande.

w : les perturbations affectant la sortie du système.

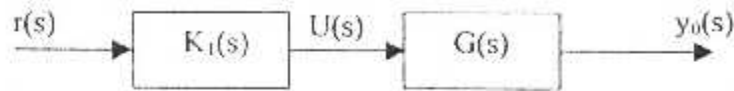
v : les bruits de mesure.

Sa commande en boucle fermée en absence du bruit peut être représenté par :



Figure(II-2) : système asservi

Qui est aussi équivalente à la représentation suivante :



Figure(II-3) : Boucle ouverte équivalente

Sachant que :

$$K_1(s) = \frac{K(s)}{1 + G(s)K(s)} \quad \dots(II-1)$$

D'où on peut remarquer que les deux systèmes sont équivalents en comparant leurs fonctions de transfert, donc Si le système $G(s)$ est stable et il n'est soumis à aucune perturbation, les réponses de boucle ouverte et de la boucle fermée à des signaux de référence sont identiques mais on peut remarquer que la commande en boucle ouverte contrairement à la boucle fermée, ne permet pas la stabilisation de système instable et n'apporte aucune amélioration dans la réponse du système.

Donc pour voir mieux la différence entre ces deux représentations, il est intéressant d'étudier l'apport de la commande en boucle fermée à la robustesse aux incertitudes, pour cela désignons pour $G'(s)$ la fonction de transfert du processus perturbé, tel que :

$$G'(s) = G(s) + \Delta G(s) \quad \dots(II-2)$$

Et comparons l'erreur relative correspondante $\Delta y_0(s)$ dans le fonctionnement en boucle ouverte à la variation correspondante $\Delta y_c(s)$ en boucle fermée, on a :

$$\Delta y_0 = \Delta G(s)K_1(s)r(s) \quad \dots(II-2)$$

d'où :

$$\Delta y_0 = \Delta G(s) \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)} r(s) \quad \dots(II-3)$$

$$\text{Et : } \Delta y_c = \Delta G(s) \frac{K(s)}{[1 + G(s)K(s)][1 + G'(s)K(s)]} r(s) \quad \dots(II-4)$$

D'après (II-3) et (II-4), on trouve que :

$$\Delta y_c = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \Delta y_0(s) \quad \dots(II-5)$$

Soit :

$$\Delta y_c(s) \approx S(s) * \Delta y_0(s) \quad \dots(II-6)$$

Sachant que $S(s)$ est appelée **Fonction de Sensibilité** définie sur la sortie, est donnée par :

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)K(s)} \quad \dots(II-7)$$

Cette dernière équation montre qu'une réduction de l'amplitude de la fonction de sensibilité permet une réduction des erreurs dues aux incertitudes et améliore donc la robustesse du système, donc une meilleure insensibilité de la boucle fermée sur la boucle ouverte équivalente dans le domaine fréquentiel exige un correcteur $K(s)$ tel que :

$$|1+G(jw)K(jw)|^{-1} \leq 1, \quad \forall w \quad \dots(II-8)$$

II-III \MARGE DE MODULE :

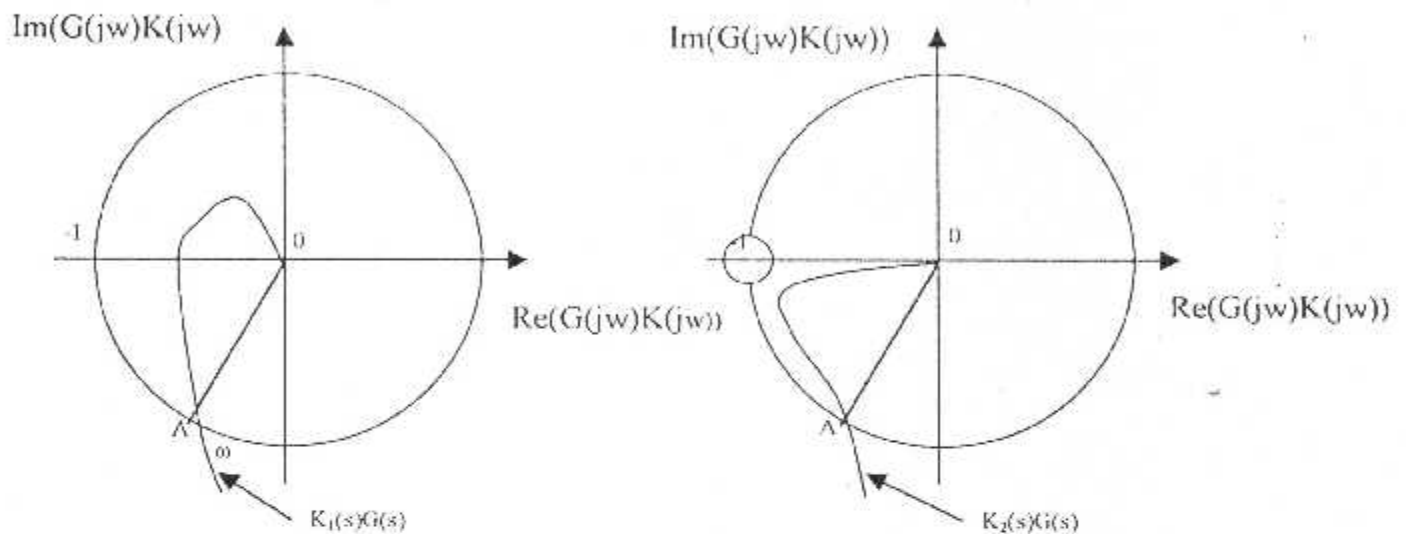
Par définition la marge de module ou marge de gain-phase est la distance minimale du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte au point critique $(-1, 0)$, cette marge a pour expression :

$$MGP = \min |1+G(jw)K(jw)| \quad \dots(II-9)$$

où G est la fonction de transfert du système et K est la fonction de transfert du régulateur.

Et on dit qu'un système est d'autant plus robuste si la distance au point (-1) est grande, sa tolérance vis à vis des perturbations est ainsi d'autant plus importante et constitue la qualité de la stabilité.

Pour mieux définir cette notion considérons le système bouclé de la figure(II-2), et représentons le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $K(s)G(s)$ pour deux régulateurs $K_1(s)$ et $K_2(s)$ soit :



Figure(II-4) : lieu de Nyquist de deux régulateurs

D'après la figure le lieu de Nyquist $K_2(s)G(s)$ montre une faible robustesse aux incertitude fréquentielle au tour de la pulsation ω_0 du fait de la proximité du lieu au point (-1) , malgré qu'il possède une excellente marge de phase et aussi de gain ; Dans ce cas une petite perturbation qui se traduit par une variation de gain ou de phase sur le plan de Nyquist peut déstabilisée la boucle, il est donc essentiel que la distance du lieu de Nyquist de $L(s)=K(s)G(s)$ au point (-1) soit suffisante, d'où en peut conclure que la marge de gain et de phase classique n'est pas suffisante pour étudier la robustesse d'un système et il faut donc ajouter la notion de la marge du module définit par l'équation (II-9), et qui peuvent être aussi formuler on utilisant la fonction de sensibilité sous la forme suivante :

$$MGP = \frac{1}{\|S\|_{\infty}} \quad \dots(II-10)$$

Et d'après cette équation on constate que la réduction du module de la fonction de sensibilité conduit à une augmentation de la marge de module ; donc la fonction de sensibilité apparaît comme une mesure de robustesse à la stabilité et aux performances.

II-IV \ FONCTION DE SENSIBILITE COMPLEMENTAIRE :

On associe à la fonction sensibilité $S(s)$ la fonction complémentaire de sensibilité $T(s)$ définie par :

$$T(s) + S(s) = 1 \quad \dots(\text{II-11})$$

C'est à dire :

$$T(s) = 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \quad \dots(\text{II-12})$$

d'où :

$$T(s) = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad \dots(\text{II-13})$$

qui représente la fonction de transfert classique entrée sortie du système .

II-V \ ANALYSE DE LA ROBUSTESSE :

Revenons maintenant au système asservi de la Figure(II-1) , dont la sortie y est donnée par :

$$y(s) = (1 + GK)^{-1} w(s) + (1 + GK)^{-1} GK[r(s) - v(s)] \quad \dots(\text{II-14})$$

Sachant que :

$(1 + GK)^{-1}$: désigne la fonction de sensibilité $S(s)$

Et :

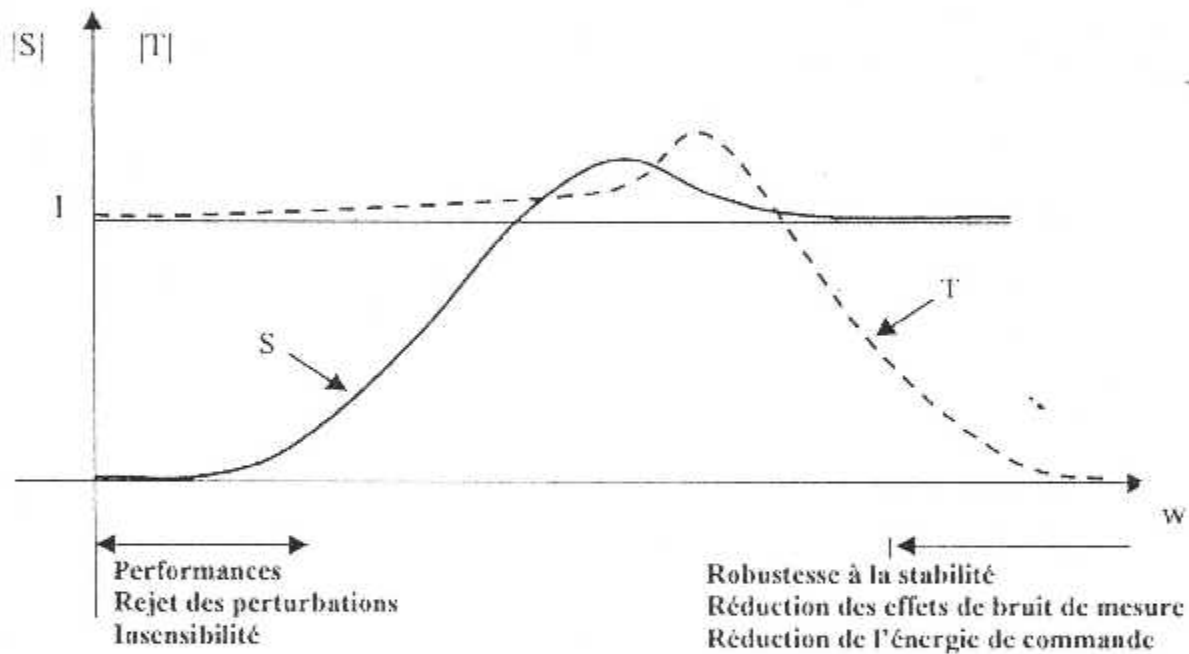
$(1 + GK)^{-1} GK$: désigne la fonction de sensibilité complémentaire

nous pouvons écrire aussi :

$$U(s) = K(1 + GK)^{-1}[r(s) - v(s) - w(s)] \quad \dots(\text{II-15})$$

A partir de ces deux dernières équations, nous allons préciser les contraintes sur les fonctions S et T .

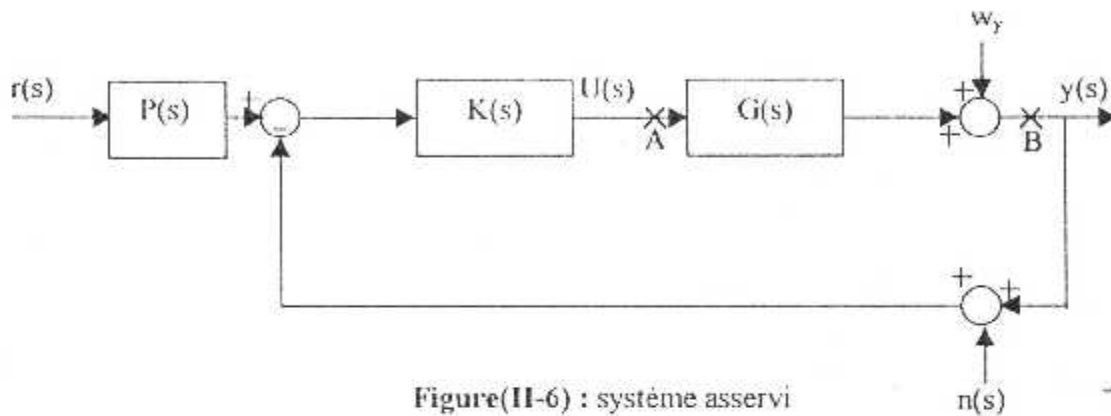
Le rejet des perturbations w_v et l'atténuation des bruits de mesure v sur la sortie exigent que les normes des fonctions de transfert $|S(j\omega)|$ et $|T(j\omega)|$ soient les plus faible possible et ceci dans les bandes fréquentielle où apparaissent ces signaux perturbateurs; mais la relation (II-11) nous montre que cette idée représente une contradiction. La solution adopté est de rendre $|S(j\omega)|$ la plus faible possible aux basse fréquences et $|T(j\omega)|$ faible aux hautes fréquences; et on peut résumé cette idée à travers la figure (II-5):



Figure(II-5) : caractéristiques des fonctions S et T

II-VI \ SYSTEME MULTIVARIABLES :

Considérons une autre fois le système représenté par la figure(II-1); mais seulement cette fois il est sous forme multivariables:



Figure(II-6) : système asservi

Sachant que:

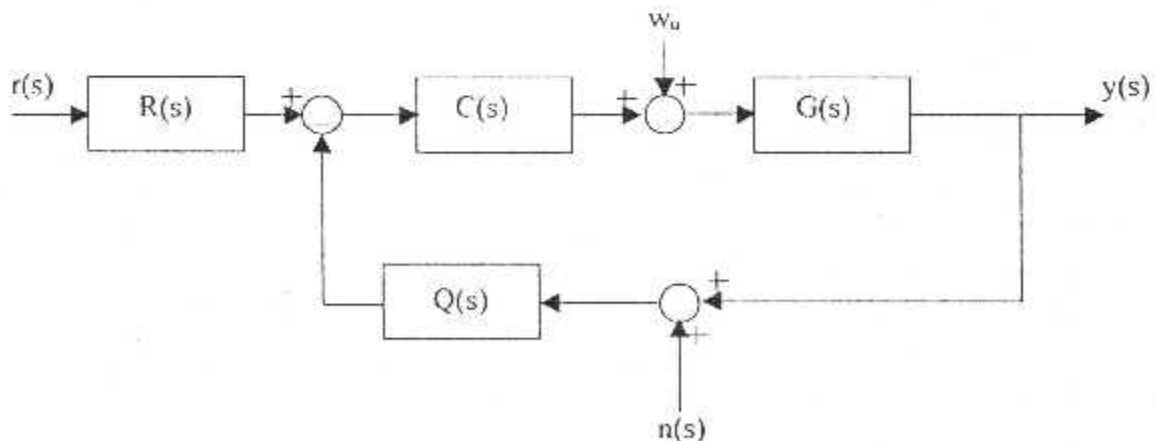
$r \in R^p$: le signal de référence de dimension P,

$y \in R^p$: la sortie du système de dimension P,

$w \in R^m$: le vecteur perturbation affectant la sortie du système,

$n \in R^p$: le vecteur bruit de mesure .

on peut considéré une configuration où la bruit perturbateur apparaît à l'entrée du système et la dynamique des capteurs est introduite sous une forme d'une matrice Q(s), tel que:



Figure(II-7) : système asservi

L'équivalence entre les deux configurations peut être obtenue par les conditions suivantes:

$$P(s) = Q^{-1}(s)R(s) \quad \dots(\text{II-16})$$

$$K(s) = C(s)Q(s) \quad \dots(\text{II-17})$$

et :

$$w_y = G(s)w_u(s) \quad \dots(\text{II-18})$$

II-VII \ FONCTION DE SENSIBLE EN SORTIE ET EN ENTREE :

VII-1 \ EN SORTIE :

La sortie y est donnée par:

$$y(s) = w_y(s) + GK(r(s) - y(s) - n(s)) \quad \dots(\text{II-19})$$

on obtient:

$$y(s) = (I_p + GK)^{-1}w_y(s) + (I_p + GK)^{-1}GK(r(s) - n(s)) \quad \dots(\text{II-20})$$

dont on peut remarquer l'apparition des deux matrices de transfert suivantes:

$$S_y = (I_p + GK)^{-1} \quad \dots(\text{II-21})$$

appelée **Matrice de Sensibilité en Sortie**, et:

$$T_y = (I_p + GK)^{-1}GK \quad \dots(\text{II-22})$$

appelée **Matrice de Sensibilité en Sortie Complémentaire**, car ces deux matrices sont reliées par:

$$S_y + T_y = I \quad \dots(\text{II-23})$$

La matrice de sensibilité S_y et la matrice de sensibilité complémentaire T_y représentent le comportement en boucle fermée, et on constate que:

- ◆ S_y caractérise l'influence du bruit w_y sur la sortie elle-même.
- ◆ T_y précise l'influence des bruits de mesure sur la sortie et représente la matrice de transfert liant la consigne de référence à la sortie.

VII-2\EN ENTREE :

Si on se place à l'entrée du système, on a:

$$u(s) = K(I_p + GK)^{-1}(r(s) - u(s) - w_p(s)) \quad \dots (II-24)$$

En utilisant l'égalité:

$$K(I_p + GK)^{-1} = (I_m + KG)^{-1}K \quad \dots(II-25)$$

L'équation (II-24) devient:

$$u(s) = (I_m + KG)^{-1}K[r(s) - u(s) - w_p(s)] \quad \dots(II-26)$$

d'où on constate l'apparition d'une nouvelle matrice de sensibilité, dite **Matrice de Sensibilité en Entrée**, tel que:

$$S_u(s) = (I_m + KG)^{-1} \quad \dots(II-27)$$

et comme:

$$S_u + T_u = I \quad \dots(II-28)$$

On peut donc calculer T_u :

$$T_u(s) = I_m - S_u(s)$$

$$T_u(s) = (I_m + KG)^{-1}KG \quad \dots(II-29)$$

dans cette dernière équation le produit KG apparaît dans S_u et T_u il désigne la matrice de transfert de la boucle lorsqu'elle est ouverte à l'entrée du système c'est à dire au point (1) de la figure (II-7).

II-VIII \ APPLICATION SUR LA COMMANDE OPTIMALE :

VIII-1 \ CRITERE QUADRATIQUE SUR L'ETAT :

Soit un processus continu linéaire peut être d'écrit, en l'absence de bruit, par une relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases} \quad \dots(II-30)$$

On veut applique une commande optimale qui minimise une critère quadratique est de la forme :

$$J = 1/2 \left[\int_{t_0}^{t_f} (X^T(t)QX(t) + U^T(t)RU(t)) dt \right] \quad \dots(II-31)$$

Avec :

$Q \in R^{n \times n}$: Matrice symétrique au moins semis-définie positive.

$R \in R^{m \times m}$: Matrice symétrique définie positive.

Le terme $X^T(t)QX(t)$ est liée à la nature du régime transitoire.

Et $U^T(t)RU(t)$ correspond à la recherche d'une commande d'amplitude minimale sur l'intervalle $[t_0, t_f]$.

L'importance relative de ces deux problèmes est fixées par un choix approprié des matrices $Q(t)$ et $R(t)$.

La résolution de ce problème se fait en utilisant les conditions de HAMILTON et le principe du maximum, pour cela considérons une fonction scalaire $H(x(\lambda), (t), t)$ définie par :

$$\begin{aligned} H(X, \lambda, t) &= 1/2 X^T(t)QX(t) + 1/2 U^T(t)RU(t) + \lambda^T (AX + BU) \\ &= 1/2 X^T(t)QX(t) + 1/2 U^T(t)RU(t) + \lambda^T AX + \lambda^T BU \end{aligned} \quad \dots(II-32)$$

En dérivant l'expression (II-32) par rapport à U et à X , on obtient les équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{cases} dH / dU = 0 \\ dH / dX = -\lambda'(t) \end{cases}$$

Donne respectivement :

$$dH / dU = RU(t) + B^T \lambda = 0 \quad \dots(\text{II-33})$$

$$dH / dX = QX(t) + A^T \lambda = -\lambda' \quad \dots(\text{II-34})$$

D'après (II-33) la commande optimale est donnée par

$$U(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad \dots(\text{II-35})$$

On démontre qu'il existe une relation linéaire entre $\lambda(t)$ et $x(t)$ tel que :

$$\lambda(t) = S(t)X(t) \quad \dots(\text{II-36})$$

On dérive l'équation (II-36) par rapport au temps :

$$\lambda'(t) = SX'(t) + S'(t)X(t) \quad \dots(\text{II-37})$$

On substitue (II-35) dans l'équation d'état (II-30), ce qui donne :

$$\begin{cases} X' = AX + BU \\ X' = AX - BR^{-1} B^T SX \end{cases} \quad \dots(\text{II-38})$$

D'après l'équation (II-37) et l'équation (II-34) on trouve :

$$-SX' - S'X = QX + A^T \lambda \quad \dots(\text{II-39})$$

En substituant les deux équations (II-36) et (II-38) dans (II-39).

$$-S(AX - BR^{-1} B^T SX) - S'X = QX + A^T SX \quad \dots(\text{II-40})$$

D'où :

$$S' + SA + A^T S - SBR^{-1} B^T S + Q = 0 \quad \dots(\text{II-41})$$

Cette équation est vérifiée pour tous $X(t)$ conduit à :

$$S'(t) + S(t)A + A^T S(t) - S(t)BR^{-1} B^T S(t) + Q = 0 \quad \dots(\text{II-42})$$

Cette équation en « S » est appelée équation matricielle de RICATTI.

La commande optimale de vient comme suit :

$$U(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)S(t)X(t) \quad \dots(\text{II-43})$$

Soit :

$$K(t) = R^{-1}B^T S(t) \quad \dots(\text{II-44})$$

Donc :

$$U(t) = -K(t)X(t) \quad \dots(\text{II-45})$$

Ce qui confirme bien que c'est une commande par retour d'état :

VIII-2\REGIME PERMANENT :

Dans le cas en régime permanent ou les matrices A , B , C , Q et R sont constante et après l'équation canonique de HAMILTON, Il vient :

$$dh/dt = H_t = 0 \quad \dots(\text{II-46})$$

Alors la solution de l'équation de RICCATI est constante et par suite $S'(t) = 0$

D'où l'équation différentielle de RICCATI devient :

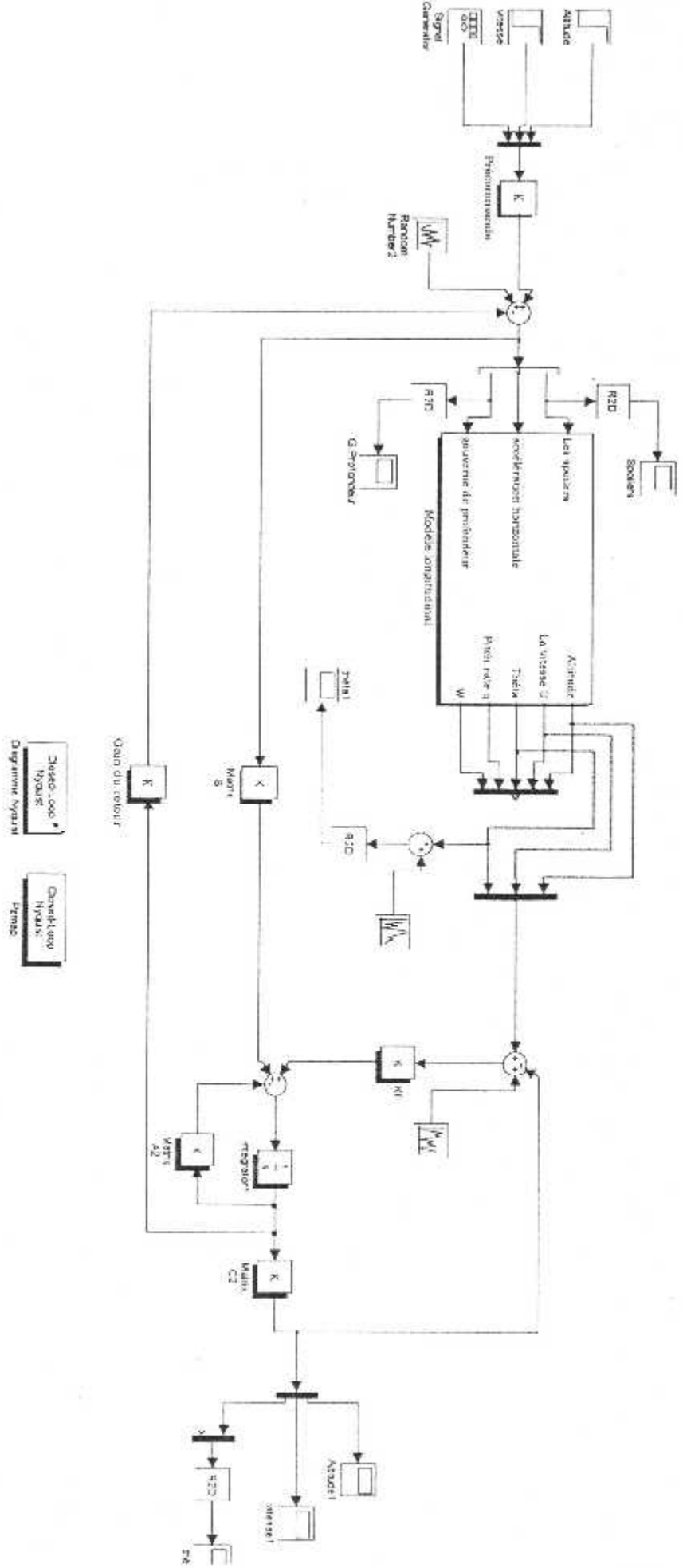
$$SA + A^T S - SB R^{-1} B^T S + Q = 0 \quad \dots(\text{II-47})$$

Pour résoudre de cette équation nous donnée la valeur de la matrice S d'où en déduit la commande optimale :

$$U(t) = -K X(t) \quad \dots(\text{II-48})$$

Tel que :

$$K = R^{-1} B^T S \quad \dots(\text{II-49})$$



Classe: 000
 Niveau: 1998
 Discipline: Systèmes
 Date: 1998

II-IX\SIMULATION :

La simulation se fait après un choix délicat des matrices de pondération Q et R, on calcul le gain K de la commande optimale en utilisant la fonction lqr du Matlab et le gain de pré-bouclage L qui assure la poursuite du signal de référence est calculer à travers la relation suivante :

$$L = \text{inv}\{-C' * (A - B * K)^{-1} * B\}$$

ensuite on calcul les deux fonctions S et T et on les représente par leurs modules afin d'étudier la robustesse de la commande.

l'application numérique nous donne les valeurs :

$$K = \begin{bmatrix} -0.0557 & -0.0762 & 1.5888 & 0.6215 & 0.1738 \\ 0.1154 & 1.4032 & 0.3526 & 0.1074 & -0.2428 \\ -0.3789 & -0.1610 & -1.9671 & -0.5535 & 0.8754 \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } L = \begin{bmatrix} -0.3483 & 0.7211 & -2.3683 \\ -0.0397 & 0.6214 & 0.1951 \\ 0.4266 & -0.0192 & -0.0686 \end{bmatrix}$$

Et les résultats sont représentés par la série de figure (a).

→ La figure (a-1) :

Représente les pôles du système en boucle fermée, elle confirme que notre système est stable.

→ La figure (a-2) :

Cette figure représente les résultats de simulation de la commande optimale lorsqu'on applique comme signal de référence un échelon d'amplitude 5deg, on remarque que le signal de sortie qui représente l'angle θ suit le signal de référence ; on observe aussi que les deux gouvernes prennent des valeurs acceptables.

→ La figure (a-3) :

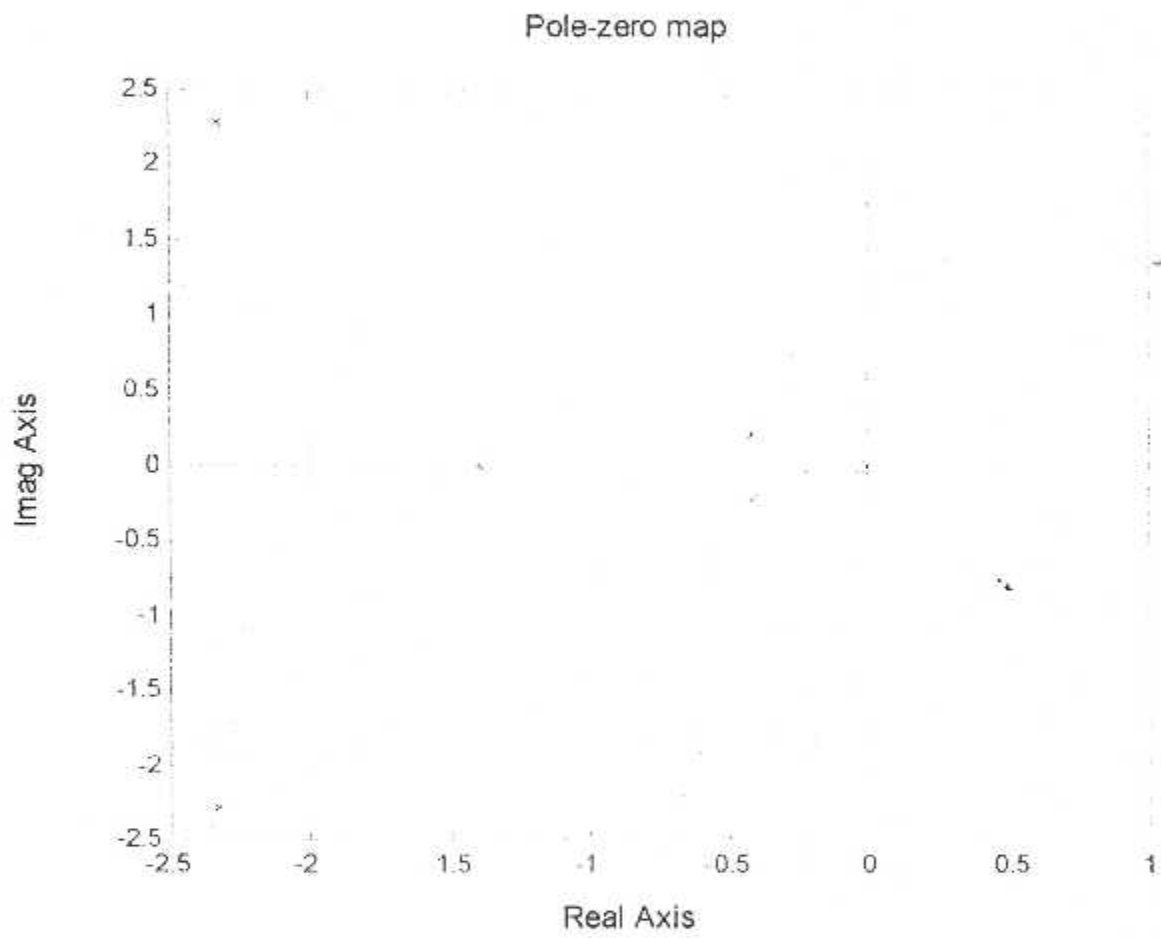
Pour mieux voir la capacité de ce type de commande on utilise cette fois comme signal de référence un signal carré aussi d'amplitude 5deg, la figure nous montre que l'angle θ suit bien la référence et les gouvernes prennent des valeurs limites égales à 4.8deg pour la gouverne de profondeur et de 20deg pour le spoiler qui sont à leur tour des valeurs acceptables pour notre appareil.

→ La figure (a-4) :

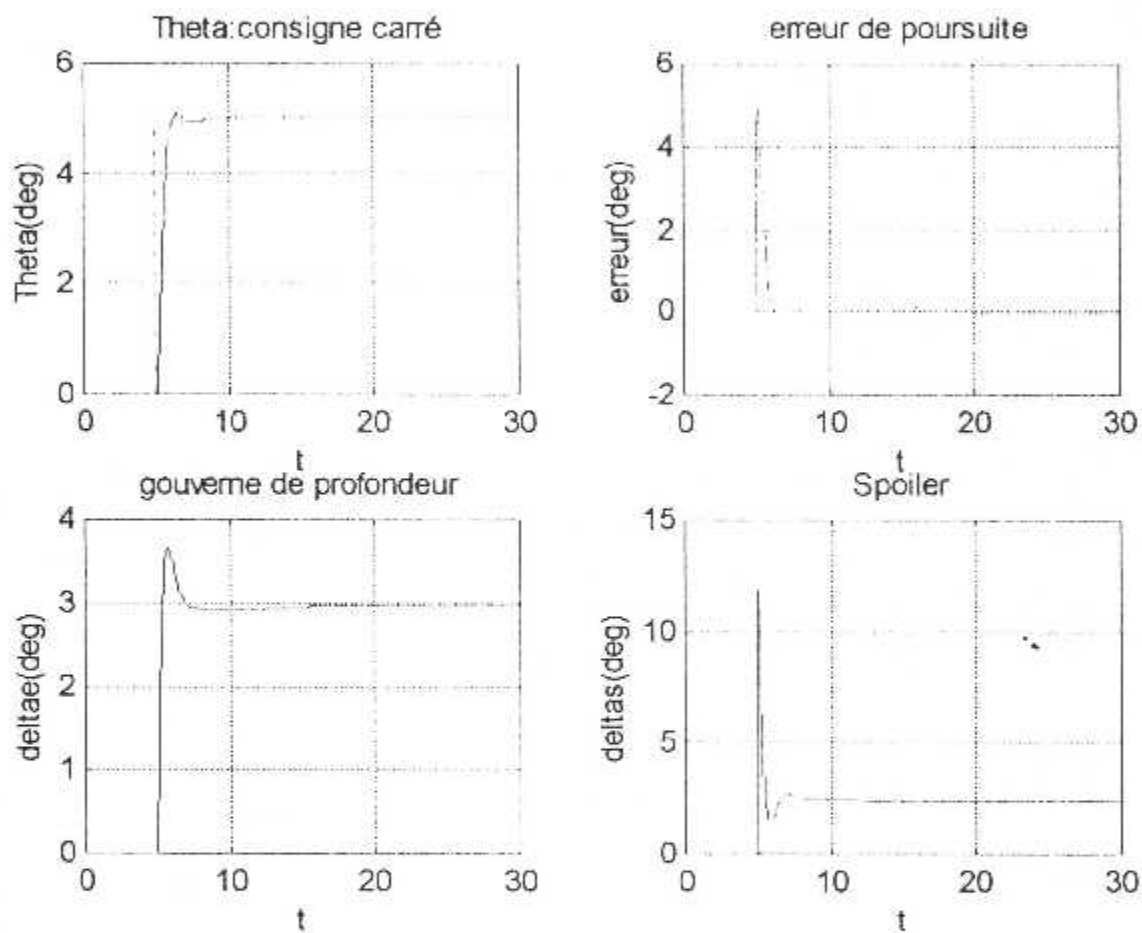
Cette fois on a ajouté au système deux types de perturbations : perturbation sur l'état et bruit de mesure ; la figure nous montre que la commande optimale ne peut éliminer les effets de ces perturbations qui se caractérisent par des dépassements aléatoires de la référence et un braquage perturbé des gouvernes.

→ La figure (a-5) :

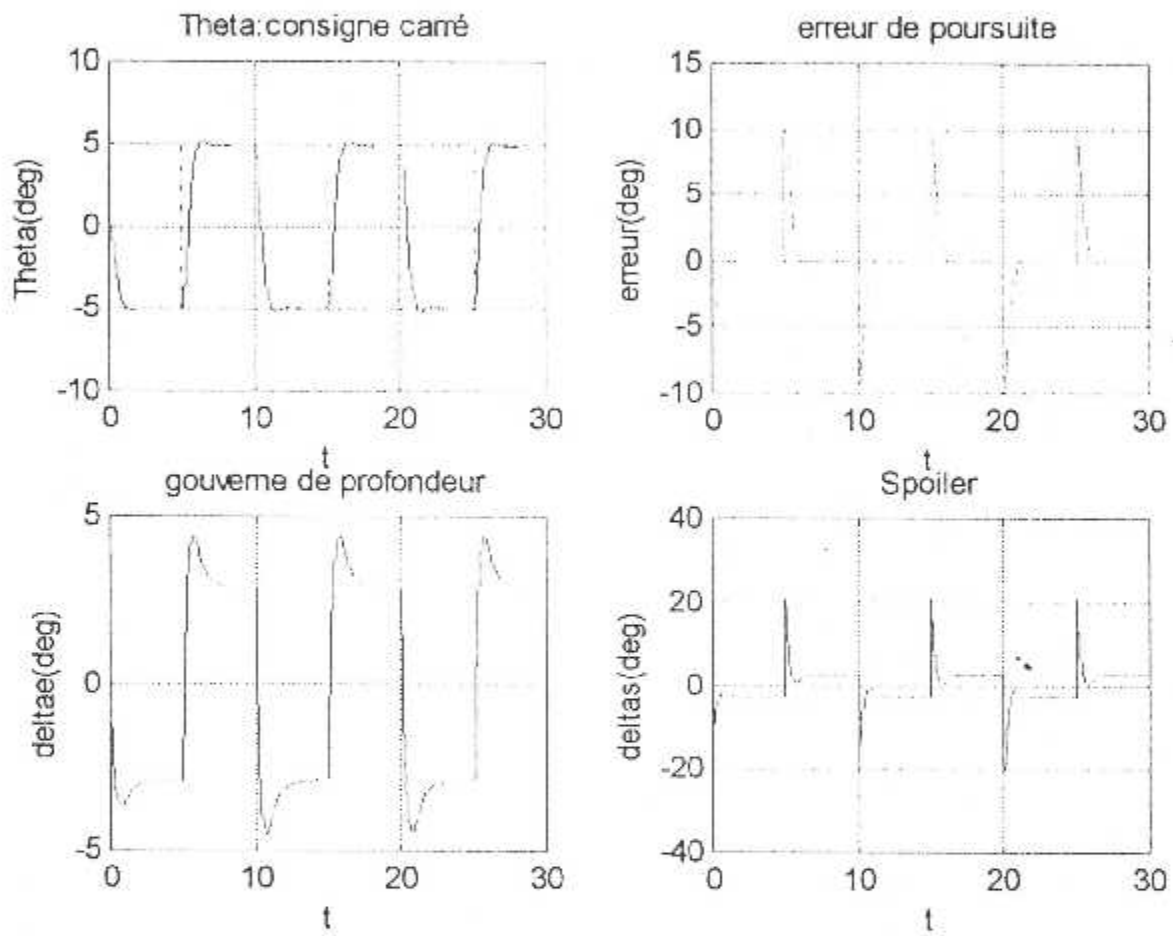
Elle représente les deux fonctions S et T liées à la commande optimale, Et d'après cette figure on peut conclure que cette commande est une commande robuste car elle correspond bien aux résultats démontrés aux cours du chapitre II.



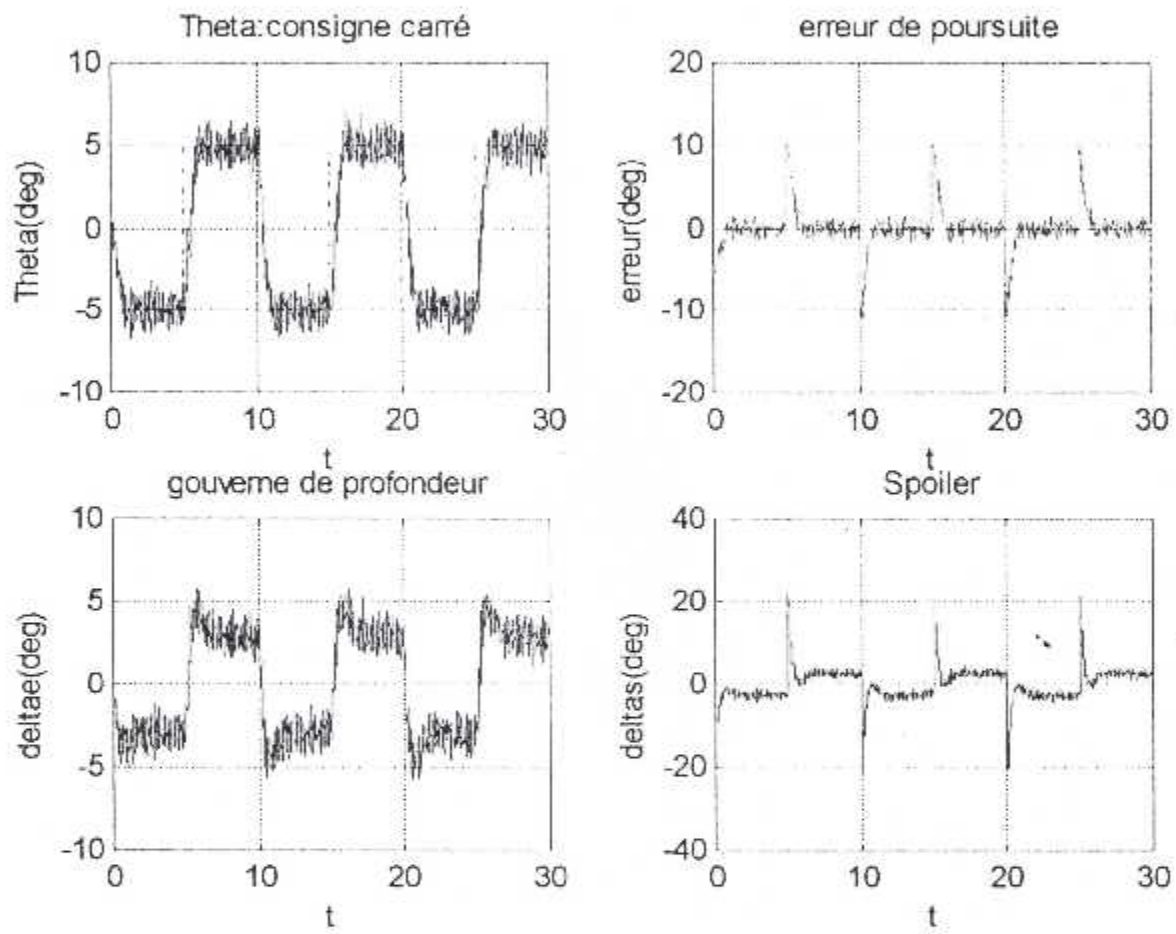
Figure(a-1) : Les pôles en boucle fermée



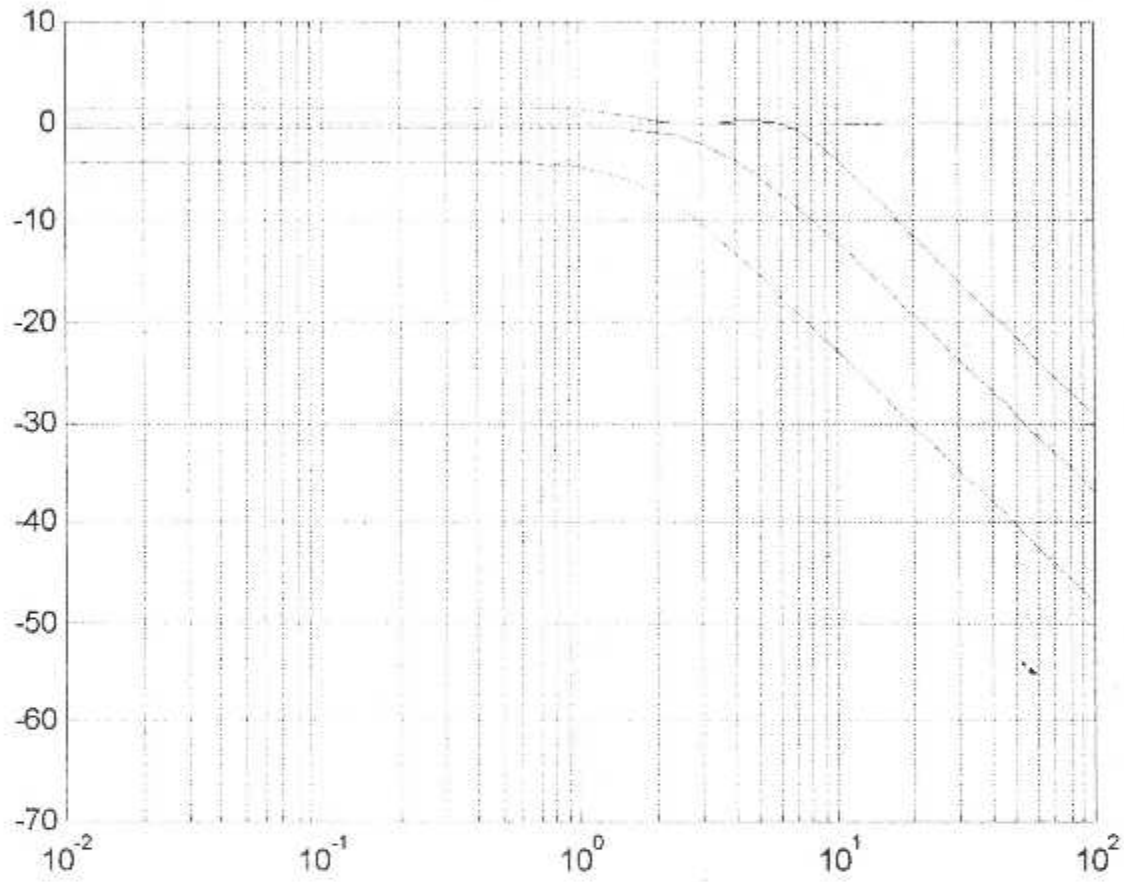
Figure(a-2) : réponse à l'échelon



Figure(a-3) : réponse à un signal carré



Figure(a-4) : Commande perturbée



Figure(a-5) : les fonctions S et T



Chapitre III

La Commande LQG

III-1 \INTRODUCTION :

En présence de variation importante des paramètres du modèle longitudinale, le maintien d'un haut niveau de performances peut être impossible à atteindre avec un régulateur fixe tel que celui de la commande optimale même si cette commande assure une bonne robustesse. Dans notre cas la variation des paramètres est dues principalement aux bruits de mesures, le vent et aussi le changement des conditions de vol , et pour lutter contre ces perturbations l'approche proposé repose sur la mise en œuvre d'une structure qui améliore la commande optimale en ajoutant un filtre appelé "Filtre de KALMAN"

La combinaison entre la commande optimale et ce filtre nous conduit à une nouvelle structure de commande stochastique, appelé commande Linéaire Quadratique Gaussienne, connue sous l'abréviation LQG ; et après le développement de ce type de commande on étudiera les propriétés de robustesse à travers les fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire.

III-II\FILTRE DE KALMAN:

Le but de ce paragraphe est de démontrer les résultats du filtre de KALMAN en régime permanent afin de l'utiliser dans le cadre de la commande stationnaire des systèmes linéaires et de montrer la dualité parfaite entre commande et estimation, et on va utiliser les paramètres du réglages du filtre tel que les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure comme des paramètres de réglages de la commande stochastique du type LQG au même titre que les matrices de pondérations du critère LQ.

II-1\PRINCIPE :

Considérons le système linéaire continu suivant :

$$\begin{cases} X' = A * X + B * U + W \\ y = C * X + V \end{cases}$$

où $W(t)$ et $V(t)$ représente respectivement :

- Le bruit sur l'équation d'état sensé représenter les perturbations Extérieures telles que le vent agissant sur le système ou même les erreurs de modélisation.

- Le bruit de mesure lié aux capteurs utilisés.

Un filtre de KALMAN est un système dynamique avec deux entrées : la commande U et la sortie y , c'est à dire tous les signaux connus du système, l'état \hat{X} ou la sortie du système dynamique est un estimé de l'état X du système, et l'équation du filtre peut se mettre sous la forme :

$$\hat{X}' = (A * \hat{X} + B * U) + K_f * (y - C * \hat{X})$$

dont le terme $A * \hat{X} + B * U$ est exploité pour prédire l'état du système, mais cette prédiction est fautive car elle est recalé en fonction de l'erreur entre la mesure y et la mesure prédite \hat{y} et aussi du gain du filtre K_f , donc notre but dans la détermination du filtre est de minimiser l'erreur :

$$e = y - \hat{y}$$

II-2\DETERMINATION DU FILTRE :

Soit le système linéaire décrit par l'équation d'état (III-1) :

$$\begin{cases} X' = A * X + B * U + W \\ y = C * X + V \end{cases} \quad \dots \text{(III-1)}$$

W : un bruit gaussien de dimension (n) et de moyenne nulle : $E [w (t)] = 0$.

V : un bruit gaussien de dimension (n) et de moyenne nulle : $E [v (t)] = 0$.

Q : matrice définie non négative.

R : matrice définie non positive.

On a aussi :

$$\begin{aligned} E[W(t)] &= 0, E[W(t)W^T(\tau)] = Q(t)\delta(t-\tau) \\ E[V(t)] &= 0, E[V(t)V^T(\tau)] = R(t)\delta(t-\tau) \\ E[W(t)V^T(t)] &= E[W(t)X^T(t_0)] = E[V(t)X^T(t_0)] = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-2)}$$

l'équation du filtre est de la forme :

$$\hat{X}'(t) = A_m * \hat{X}(t) + B_m * U(t) + K_f(t) * Y(t) \quad \dots \text{(III-3)}$$

De plus l'estimée est non biaisée, c'est -à- dire :

$$E[\hat{X}'(t)] = E[X'(t)] ; E[\hat{X}(t)] = E[X(t)]$$

Soient en prenant la moyenne des expressions (III-1) et (III-3) :

$$A_m * E[X(t)] + B_m * U(t) + K_f * C(t) * E[X(t)] = A * E[X(t)] + B * U(t) \quad \dots \text{(III-4)}$$

Donc :

$$A_m * E[X(t)] + B_m * U(t) = (A - K_f * C) * E[X(t)] + B * U(t) \quad \dots \text{(III-5)}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{cases} A_m = A - K_f * C \\ B_m = B \end{cases} \quad \dots \text{(III-6)}$$

l'expression du filtre est :

$$\hat{X}'(t) = A * \hat{X}(t) + B * U(t) + K_f * [Y(t) - C * \hat{X}(t)] \quad \dots \text{(III-7)}$$

Dans laquelle la matrice de gain K_f doit minimiser la variance P d'erreur $\tilde{X} = X - \hat{X}$, donnée par :

$$\tilde{X}' = (A - K_f \cdot C) \cdot \tilde{X} + W(t) - K_f \cdot V(t) \quad \dots \text{(III-8)}$$

On note :

$$F = A - K \cdot C \quad \text{et} \quad L = W - K \cdot V$$

L'équation (III-8) sera :

$$\tilde{X}' = F \cdot \tilde{X} + L \quad \dots \text{(III-8)}$$

$\tilde{X}(t)$ Est donc la sortie d'un système linéaire ayant pour entrée le bruit blanc :

$W(t) - K(t) \cdot V(t)$ égale à $K \cdot R \cdot K^T + Q$, la variance P de l'erreur \tilde{X} est solution de l'équation différentielle.

$$P'(t) = (A - K \cdot C)P + P(A - K \cdot C)^T + Q + K R K^T = 0 \quad \dots \text{(III-9)}$$

L'expression (III-9) peut aussi s'écrire en regroupant tous les termes en K :

$$\begin{aligned} P'(t) &= (A - KC)P + P(A - KC)^T + K R K^T + Q \\ AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q + K R K^T - K R R^{-1T} C P - PC^T R^{-1} R K^T + PC^T R^{-1} R R^{-1T} C P \\ &= AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q + [KR - PC^T R^{-1} R][K^T - R^{-1T} C P] \end{aligned} \quad \dots \text{(III-10)}$$

D'où :

$$P'(t) = AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q + (K - P \cdot C^T R^{-1}) R (K - P \cdot C^T R^{-1})^T \quad \dots \text{(III-11)}$$

Sachant que :

$$P^T = P \quad \text{et} \quad (R^{-1})^T = R^{-1}$$

On peut montrer que pour minimiser la variance de l'erreur. Il suffit de minimiser P , c'est à dire choisir :

$$K(t) = P(t) C^T (t) R^{-1}(t) \quad \dots \text{(III-12)}$$

D'où les équations du filtre :

$$\begin{aligned} \hat{X}'(t) &= A \hat{X}(t) + B U(t) + K [Y - C \hat{X}(t)] \\ P'(t) &= AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q \\ K(t) &= PC^T R^{-1} \end{aligned} \quad \dots \text{(III-13)}$$

II-3\REGIME PERMANENT DU FILTRE DE KALMAN:

Dans le cas stationnaire :

$$\begin{cases} X'(t) = A * X(t) + B * U(t) + W(t) \\ Y(t) = C * X(t) + V(t) \end{cases} \quad \dots \text{(III-14)}$$

Avec les matrices A, C et les matrices Q et R constantes, le filtre de kalman possède un régime permanent unique.

Les matrices de gain et de variance sont alors constantes et données par les équations :

$$\begin{aligned} K &= PC^T R^{-1} \\ P'(t) &= AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q = 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-15)}$$

D'après les équations (III-15) et (II-47) on constate une dualité parfaite entre la commande optimale et le filtre de Kalman, donc les propriétés de robustesse et de performances sont conservées.

III-III\LA COMMANDE LQG :

III-1\PRINCIPE :

Considérons le système linéaire d'ordre n et qui est représenté par ces équations d'état :

$$\begin{cases} X' = A * X + B * U + M * w \\ y = C * X + v \end{cases} \quad \dots \text{(III-16)}$$

où w et v représente des bruits blancs de moyenne nulle, indépendants avec respectivement pour matrices de covariance W et V :

$$\begin{aligned} E[w(t)w(t+\tau)^T] &= W\delta(\tau) \\ E[v(t)v(t+\tau)^T] &= V\delta(\tau) \quad \text{avec } W \geq 0 \text{ et } V > 0 \end{aligned}$$

on note aussi $Q = MWM^T$ la matrice de covariance du bruit d'état.

A partir du vecteur y de mesures bruitées, nous cherchons une loi de commande qui minimise le critère :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (X^T * Q * X + U^T * R * U) dt \quad \dots \text{(III-17)}$$

dont :

$Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$ des matrices de pondération .

La solution de ce problème est basé sur le principe de séparation qui confirme que la commande optimale recherché est obtenue :

- En recherchant l'estimé optimal \hat{X} au sens de la variance d'erreur minimale de l'état X a travers l'équation (III-15) du filtre de KALMAN :

$$\hat{X}' = A * \hat{X} + B * U + K_f * (y - C * \hat{X}) \quad \dots \text{(III-18)}$$

avec :

$$K_f = P_f * C^T * V^{-1} \quad \dots \text{(III-19)}$$

où P obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_f * A^T + A * P_f - P_f * C^T * V^{-1} * C * P_f + Q = 0 \quad \dots \text{(III-20)}$$

avec $P = P^T > 0$.

- En employant cet estimé comme s'il était mesure exacte du vecteur d'état, afin de résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe, soit :

$$U = -K * X \quad \dots \text{(III-21)}$$

avec :

$$K_c = R^{-1} * B^T * P_{op} \quad \dots \text{(III-22)}$$

où P_{OP} obéit à l'équation de RICCATI suivante :

$$P_{OP} * A + A^T * P_{OP} - P_{OP} * B * R^{-1} * B^T * P_{OP} + Q_{OP} = 0 \quad \dots \text{(III-23)}$$

*L'équation classique de filtre de KALMAN de la forme :

$$\hat{X}' = A * \hat{X} + B * U + K_f * (y - C * \hat{X}) \quad \dots \text{(III-24)}$$

en remplace l'équation (III-16) dans l'équation (III-24) :

avec :

$$U = -k_c * \hat{X} \quad \dots \text{(III-25)}$$

On obtient :

$$\hat{X}' = A * \hat{X} - B * K_c * \hat{X} + K_f * C * X + K_f * y - K_f * C * \hat{X} \quad \dots \text{(III-26)}$$

Donc :

$$\hat{X}' = (A - BK_c - K_f C) \hat{X} + K_f C X + K_f v \quad \dots \text{(III-27)}$$

donc on peut définir ce type de commande a travers son équation d'état augmentée liant le vecteur X et son estimé \hat{X} :

$$\begin{bmatrix} x' \\ \hat{x}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK_c \\ K_f C & A - BK_c - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$y = [C \ 0] * \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + v \quad \dots \text{(III-28)}$$

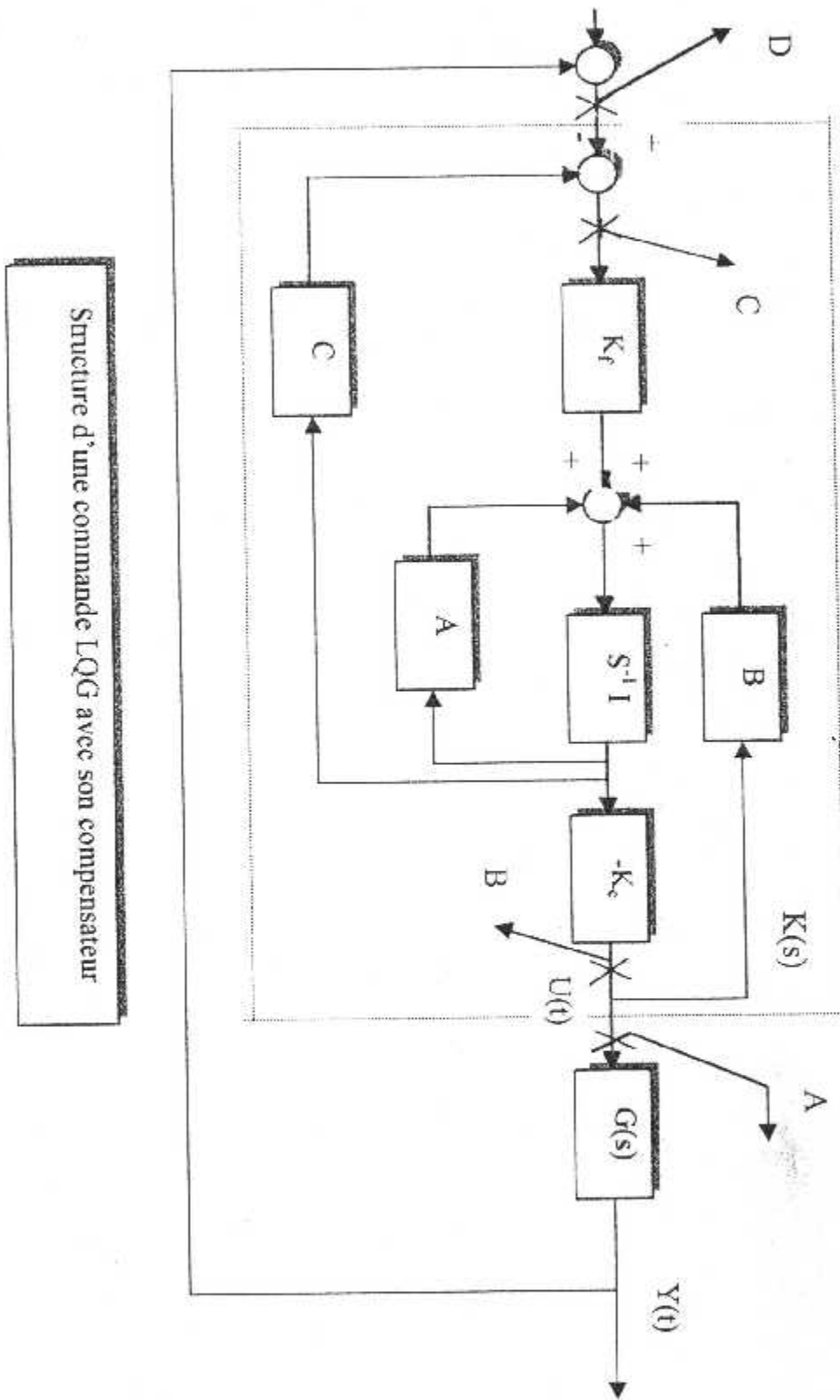
l'équation (III-28) peut être représenter aussi sous une forme équivalente en utilisant un contrôleur K_c défini par :

$$K_c(s) = -K_c * (SI - A + BK_c + K_f C)^{-1} * K_f \quad \dots \text{(III-29)}$$

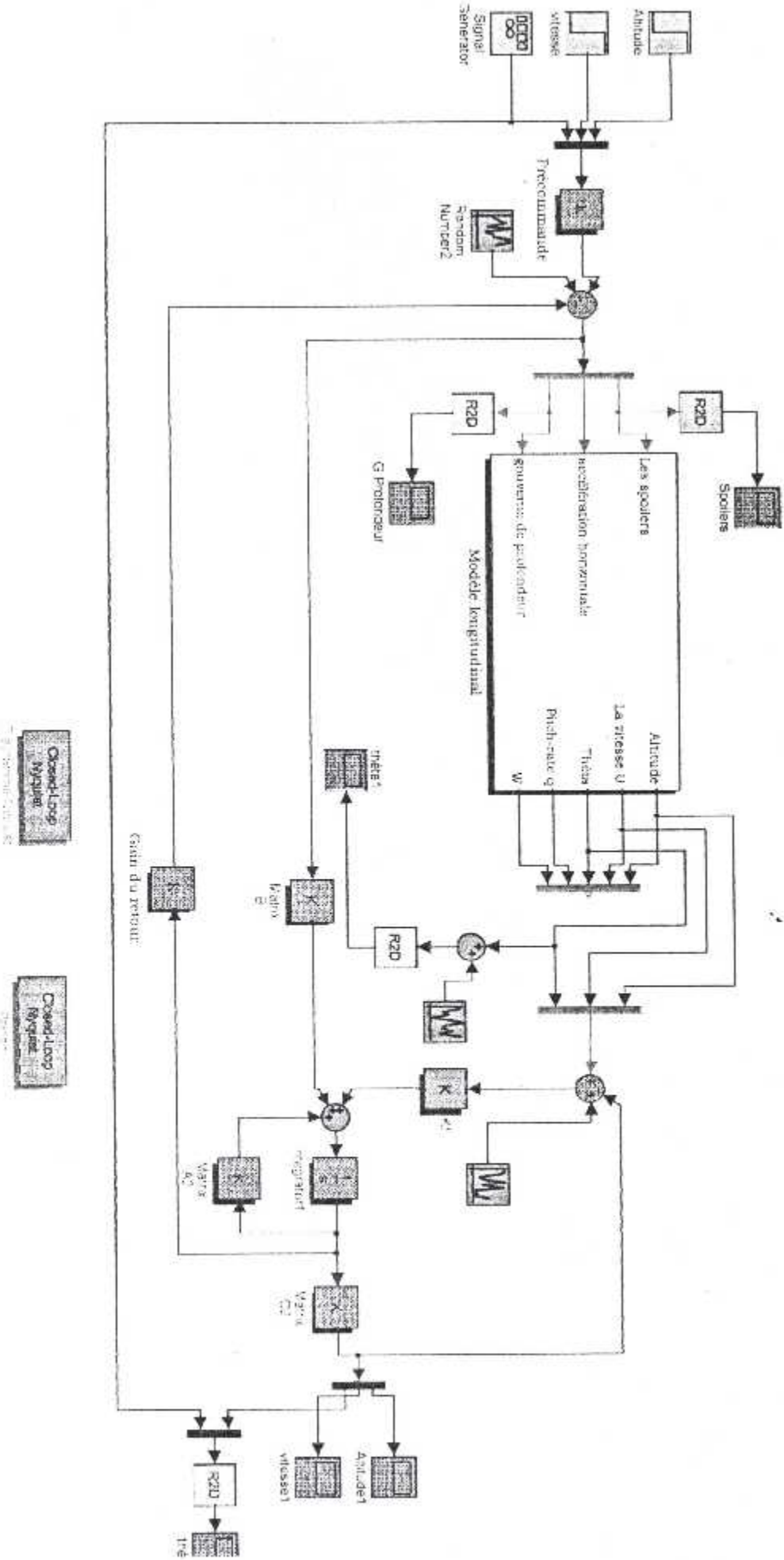
c'est à dire il englobe l'estimateur de Kalman et le gain du retour optimal.

Alors, d'après les équations (III-28) et (III-29), on peut représenter la commande LQG sous les deux formes définies par le schéma de la figure (III-2).

III-2 \ SCHEMA DE PRINCIPE :



La commande optimale JQG:



III-3\LES TRANSFERTS DE LA COMMANDE :

Maintenant, on va étudier les propriétés de transfert de la commande LQG dues de la combinaison entre la commande optimale et le filtre de Kalman afin d'analyser sa robustesse, pour cela on considère les points A, B, C et D représentés sur le schéma (III-2) de la commande et en utilisant la même méthode appliquée sur la commande optimale, on trouve :

- Si on ouvre la boucle au point A : le transfert reliant l'entrée e_A à la sortie s_A est égale à $Kcr * G$ et désigne le transfert de la boucle à l'entrée du système.
- Si on ouvre la boucle au point B : le transfert reliant l'entrée e_B à la sortie s_B est égale à $-Kc * (SI - A)^{-1} * B$ et représente le transfert de la chaîne LQ.
- Si on ouvre la boucle au point C, à la sortie du système, nous obtenons le transfert $G * Kcr$.
- Si on ouvre la boucle au point D, à l'intérieur du filtre de Kalman, le transfert sera : $-C * (SI - A)^{-1} * K_f$ qui représente le transfert du filtre.

Ces résultats nous montrent que les transferts aux points (A) et (B) sont très différents, donc la robustesse de la boucle LQ liée aux propriétés de transfert de boucle en B ne correspond pas à celle de la boucle LQ mesurée à l'entrée du système par le transfert au point A ; et comme le filtre de Kalman est le dual de la commande optimale on constate que la robustesse en sortie mesurée au point C ne correspond pas à celle de la boucle du filtre de Kalman.

III-IV\SIMULATION :

La simulation se fait après un choix délicat des matrices de pondération Q et R, on calcul le gain K de la commande optimale en utilisant la fonction lqr du Matlab et le gain de pré-bouclage I, qui assure la poursuite du signal de référence est calculer à travers la relation suivante :

$$I = inv\{-C * (A - B * K)^{-1} * B\}$$

tandis que le gain du filtre de Kalman est calculer en utilisant la fonction lqe où bien la fonction lqr de la commande optimale en se servant des propriétés de dualité.

ensuite on calcul les deux fonctions S et T et on les représente par leurs modules afin d'étudier la robustesse de la commande.

l'application numérique nous donne les valeurs :

$$K = \begin{bmatrix} -0.0557 & -0.0762 & 1.5888 & 0.6215 & 0.1738 \\ 0.1154 & 1.4032 & 0.3526 & 0.1074 & -0.2428 \\ -0.3789 & -0.1610 & -1.9671 & -0.5535 & 0.8754 \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } I = \begin{bmatrix} -0.3483 & 0.7211 & -2.3683 \\ -0.0397 & 0.6214 & 0.1951 \\ 0.4266 & -0.0192 & -0.0686 \end{bmatrix}$$

$$\text{et : } K_f = \begin{bmatrix} 1.4907 & -0.0087 & 0.4757 \\ -0.0087 & 0.9474 & -0.0488 \\ 0.4757 & -0.0488 & 1.0769 \\ 0.1515 & 0.0683 & 0.1942 \\ -0.1857 & -0.1048 & 0.1488 \end{bmatrix}$$

Et les résultats sont représentés par la série de figure (b).

→ La figure (b-1) :

Représente les pôles du système en boucle fermée, elle confirme que notre système est stable.

→ La figure (b-2) :

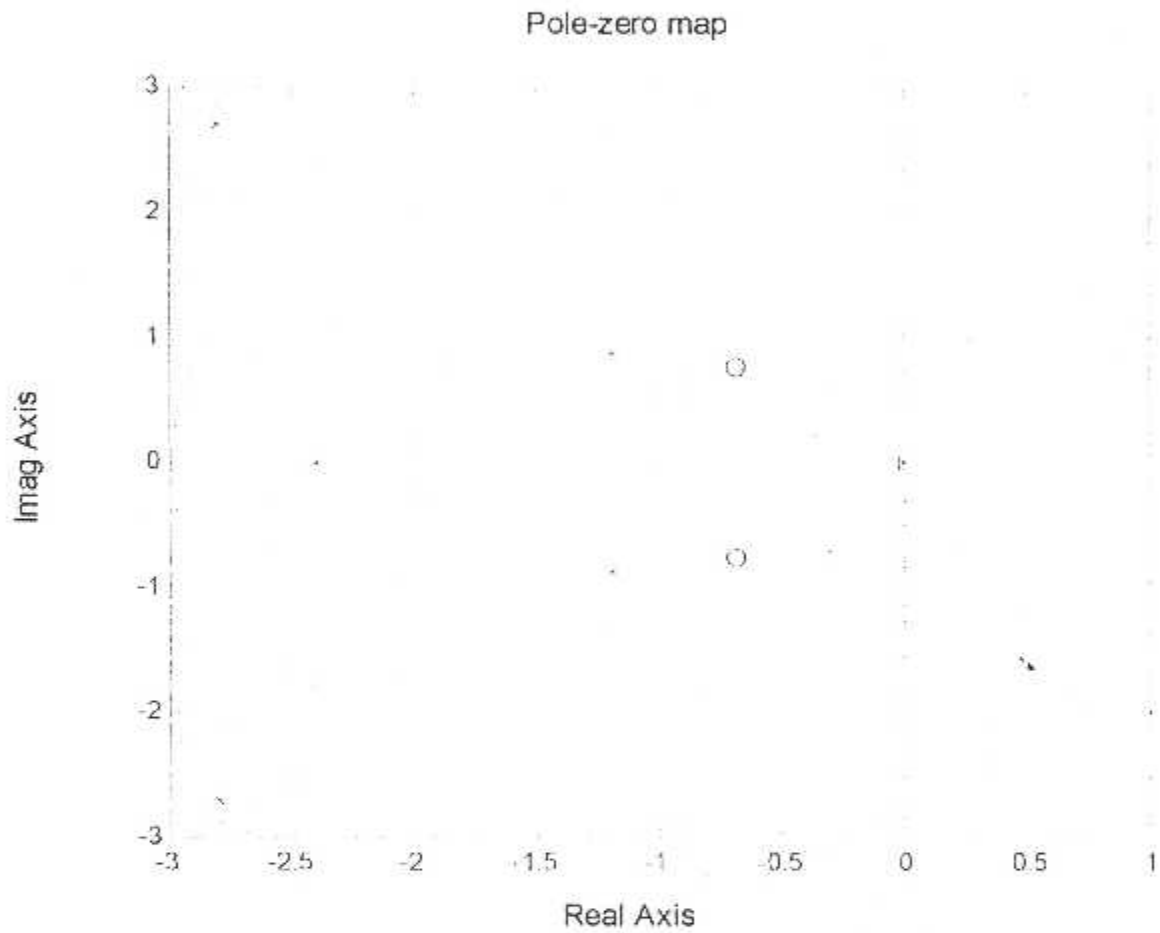
Cette figure représente les résultats de simulation de la commande LQG lorsqu'on applique comme signal de référence un échelon d'amplitude 5deg, on remarque que le signal de sortie qui représente l'angle θ suit le signal de référence car ce type de commande a pu filtrer les différents parasites agissant sur le système ; on observe aussi que les deux gouvernes prennent des valeurs très acceptables 3.8deg pour la gouverne de profondeur et 12deg pour le spoiler, donc on constate une réduction des déviations des gouvernes par rapport aux déviations de la commande optimale.

→ La figure (b-3) :

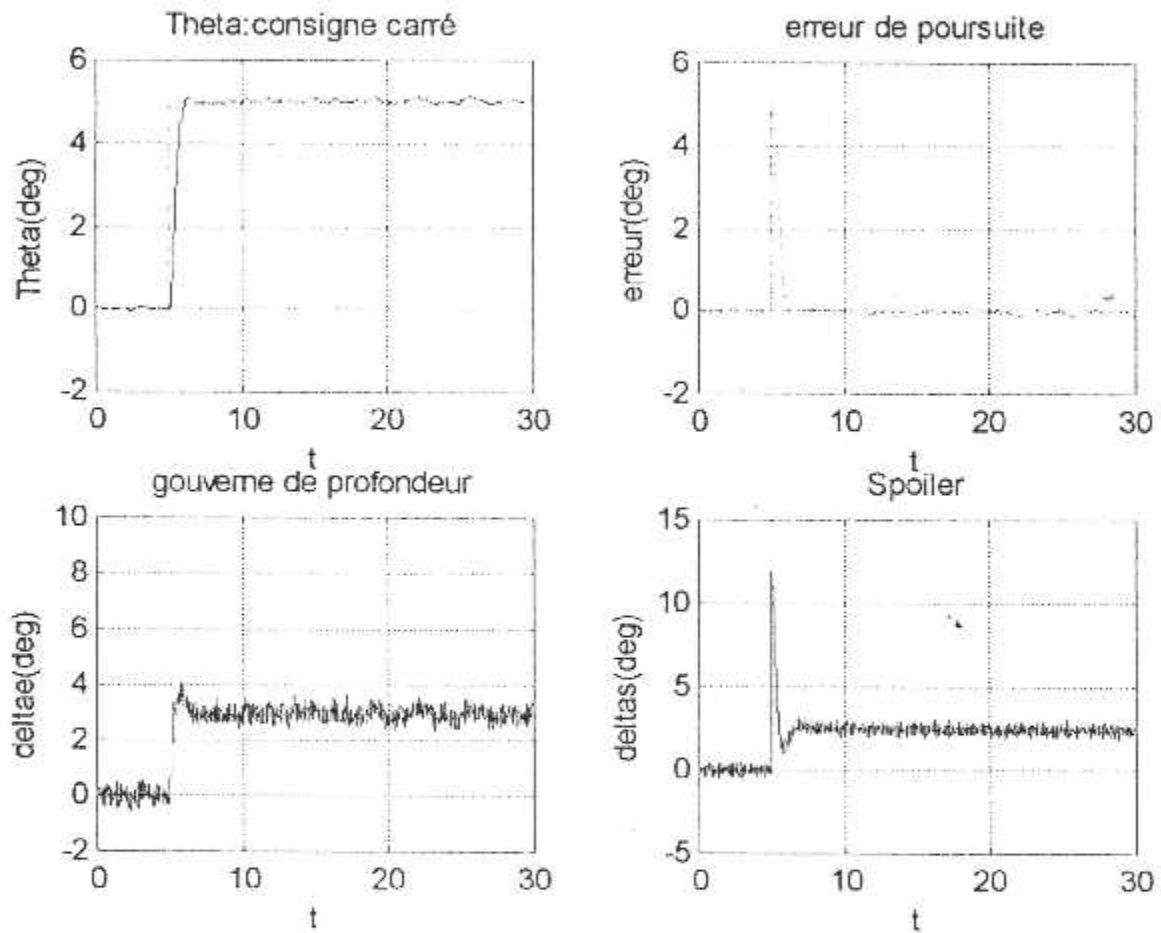
Pour mieux voir la capacité de ce type de commande on utilise cette fois comme signal de référence un signal carré aussi d'amplitude 5deg, la figure nous montre que l'angle θ suit bien la référence et les gouvernes prennent des valeurs limites égales à 4.8deg pour la gouverne de profondeur et de 19deg pour le spoiler qui sont à leur tour des valeurs très acceptables pour notre appareil.

→ La figure (b-4) :

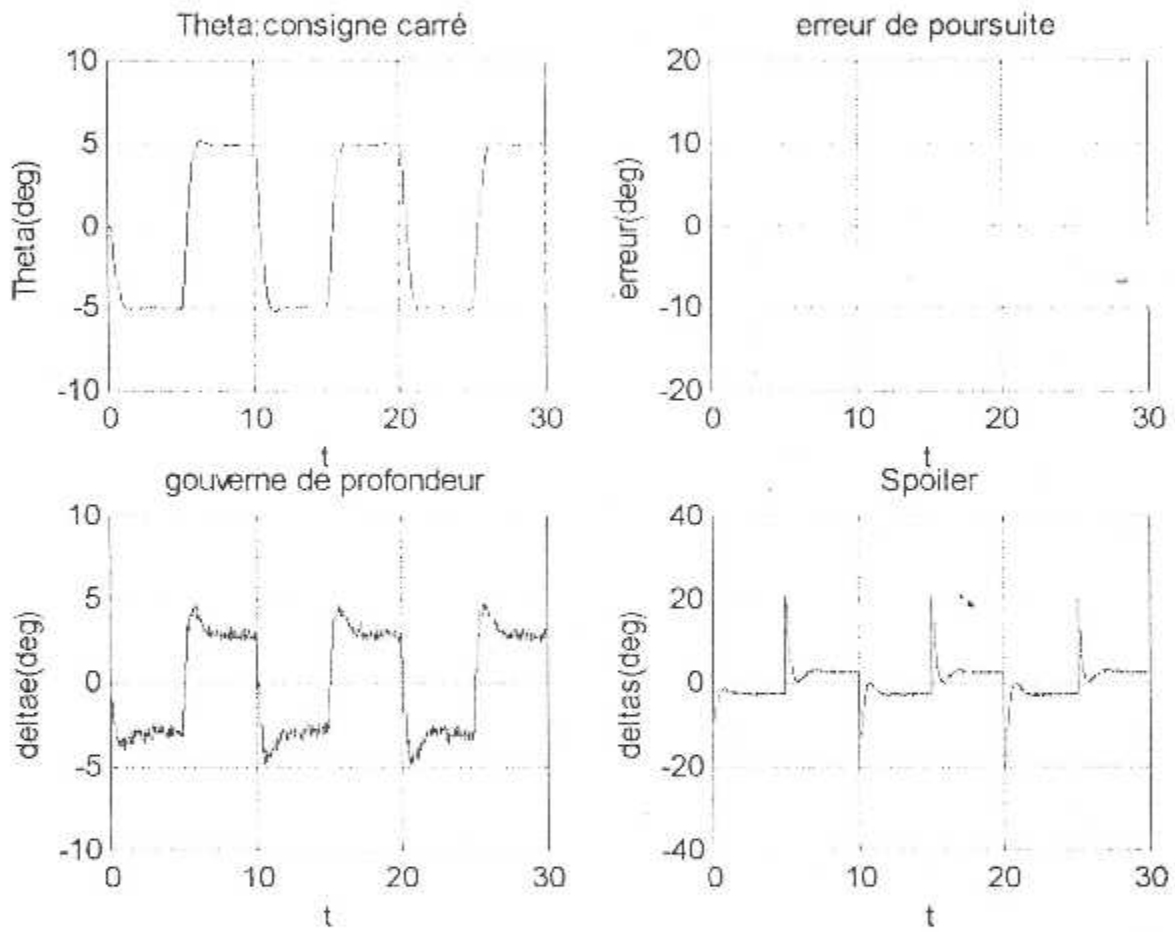
Elle représente les deux fonctions S et T liées à la commande LQG, Et d'après cette figure on peut conclure que cette commande n'est pas une commande robuste car elle possède une fonction de sensibilité de module supérieur à 1 aux basses fréquences.



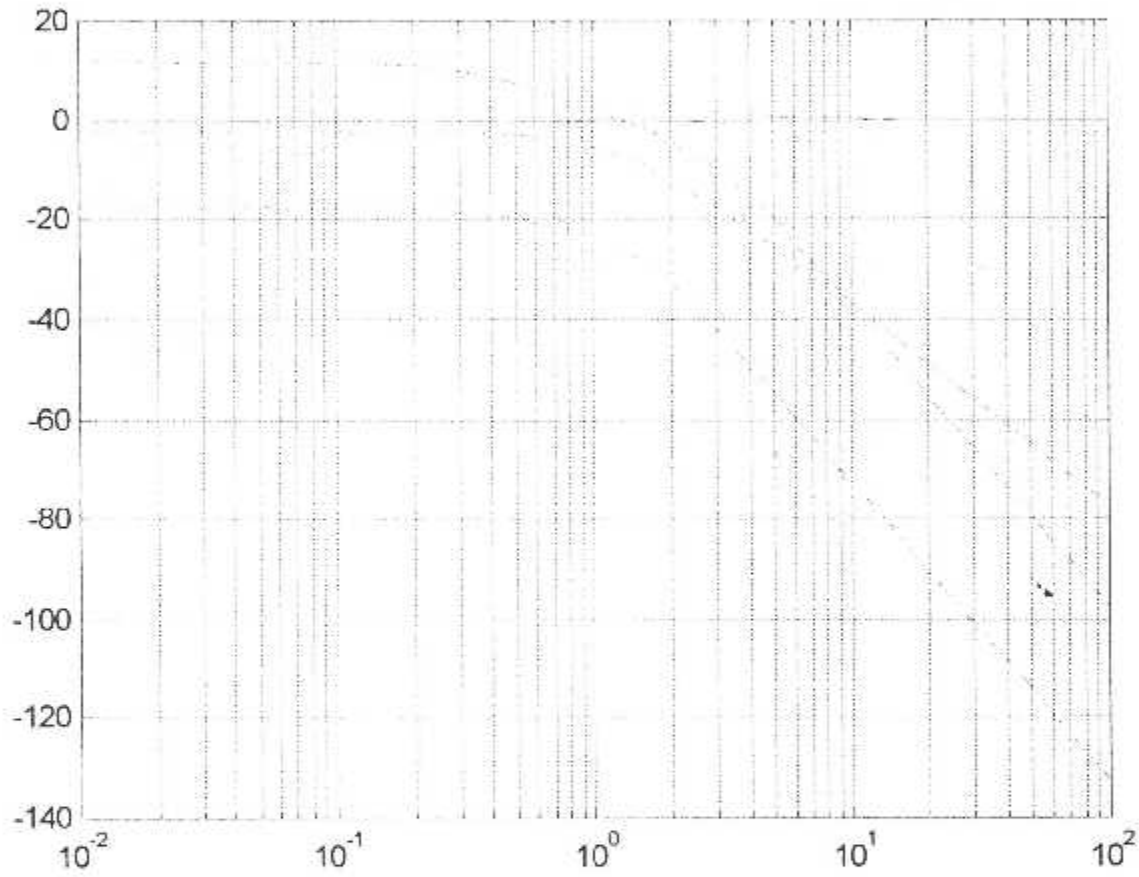
Figure(b-1) : Les pôles du système



Figure(b-2) : Réponse à l'échelon



Figure(b-3) : réponse à un signal carré



Figure(b-4) : les fonctions de sensibilités S et T



Chapitre IV

La Commande LTR

IV-I\INTRODUCTION :

L'étude et les résultats de simulation nous à montrer les limitations de la commande LQG en terme de robustesse et par conséquent des faibles marge de gain phase, on propose dans ce chapitre de développer une nouvelle technique de commande basée sur les concepts de la commande LQG mais qui recouvre asymptotiquement les propriétés de robustesse de la commande optimale LQ ou bien celles du filtre de Kalman.

IV-II\PRINCIPE :

En utilisant la figure (III-2) du chapitre précédent, on peut dire que le but de la commande LTR est de faire tendre asymptotiquement le transfert au point (A) vers le transfert de boucle au point (B) par un choix approprié des grandeurs W et V, donc la modélisation de nature stochastique de l'environnement du système disparaît en face de la nécessité d'une bonne robustesse et des performances nominales imposées.

Les bruits d'état et de mesure devenus fictifs permet de calculer le gain du filtre de Kalman, par conséquent un contrôleur dynamique de sortie qui assure d'excellentes propriétés de robustesse.

IV-III\RECOUVREMENT ASYMPTOTIQUE :

Le recouvrement asymptotique peut se faire à travers trois étapes :

III-1\Le TRANSFERT DE BOUCLE 0L4ENTREE DU SYSTEME :

le transfert de boucle au point (A) peut s'écrire :

$$K(s)G(s) = -Kc(sI - A + BKc + K_f C)^{-1} * K_f C(sI - A)^{-1} B \quad \dots (IV-1)$$

en désignant par :

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad \dots (IV-2)$$

et :

$$\Psi(s) = (sI - A + BKc)^{-1} \quad \dots (IV-3)$$

l'équation (IV-1) prend la forme :

$$K(s)G(s) = -Kc(\Psi^{-1} + K_f C)^{-1} K_f C \Phi B \quad \dots (IV-4)$$

d'une manière équivalente :

$$K(s)G(s) = -Kc\Psi(I + K_f C\Psi)^{-1} K_f C \Phi B \quad \dots (IV-5)$$

ce qui conduit à :

$$K(s)G(s) = -Kc\Psi K_f (I + C\Psi K_f)^{-1} C \Phi B \quad \dots (IV-6)$$

III-2\PROPRIETES DU FILTRE DE KALMAN :

L'équation de Riccati qui régit le fonctionnement du filtre de Kalman est donnée par :

$$AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP + Q = 0 \quad \dots (IV-7)$$

Dans la commande optimale, lorsque la pondération sur la commande tend vers zéro, P_c tend aussi vers zéro quand le transfert $N(sI - A)^{-1} B$ n'a aucun zéro dans le demi-plan droit (Annexe IV), et en utilisant la dualité du filtre de Kalman, on choisissant aussi $W = I$ et $v = \rho^* v_0$ on trouve d'après l'équation (IV-7) que :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-1/2} P_f C^T V_0^{-1/2} = M \quad \dots (IV-8)$$

d'où :

$$K_f = \frac{P_f C^T V_0^{-1}}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \rho^{-1/2} M V_0^{-1/2} \quad \dots (IV-10)$$

Cette valeur de K_f valable asymptotiquement va être utilisée dans l'expression (IV-6) pour obtenir les conditions de recouvrement.

III-3\RECOUVERMENT ASYMPTOTIQUE :

Maintenant on a les hypothèses suivantes :

$$W = I \text{ et } M = B$$

en remplaçant l'équation (IV-10) dans l'équation (IV-6), on trouve :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} KG = -K_c \psi B (C \psi B)^{-1} C \phi B \quad \dots (IV-11)$$

et comme :

$$\psi(s) = \phi (I + BK_c \phi)^{-1} \quad \dots (IV-12)$$

nous obtenons :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} KG = -K_c \Phi (I + BK_c \Phi)^{-1} B \left[C \Phi (I + BK_c \Phi)^{-1} B \right]^{-1} C \Phi B \quad \dots(\text{IV-13})$$

et l'utilisation de la propriété matricielle $(I + XY)^{-1} X = X(I + YX)^{-1}$ nous conduit à :

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} KG &= -K_c \Phi * B (I + K_c \Phi B)^{-1} \left[C \Phi B (I + K_c \Phi * B)^{-1} \right]^{-1} C * \Phi * B \\ &= -K_c * \Phi * B \end{aligned} \quad \dots(\text{IV-14})$$

D'où nous obtenons le résultat :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} KG = -K_c * \Phi * B$$

Cette dernière équation nous montre que la commande LTR recouvre les propriétés de robustesse de la commande LQ car les transferts de boucle à l'entrée du système sont égaux.

IV-IV\PROPRIETES DE ROBUSTESSE :

Le recouvrement étudié peut prendre les deux formes suivantes :

IV-1\RECOUVERMENT A L'ENTREE:

cette procédure de recouvrement consiste à :

- 1- formuler dans une première étape le régulateur de la commande optimale par un choix convenable des matrices de pondérations Q et R.
- 2- La deuxième étape consiste après un réglage initial W_0 et v_0 du filtre de Kalman d'augmenter le paramètre q du nouveau réglage, tel que :

$$W = W_0 + qBB^T \quad \dots(\text{IV-15})$$

et :

$$V = V_0 \quad \dots(\text{IV-16})$$

et ceci jusqu'à que le transfert de boucle $K(s)G(s)$ de la commande LQG recouvre le transfert de boucle de retour LQ sur une bande de fréquence suffisante.

IV-2\RECOUVREMENT EN SORTIE :

Le recouvrement en sortie et la procédure duale du recouvrement en entrée, il se fait par :

1- Formuler le filtre de Kalman en variant les covariances W et V afin que le transfert $-C(sI - A)^{-1}K_f$ soit convenable à la sortie du système.

2- A partir d'un réglage initial Q_0 et R_0 du retour LQ, on augmente le paramètre q du nouveau réglage, tel que :

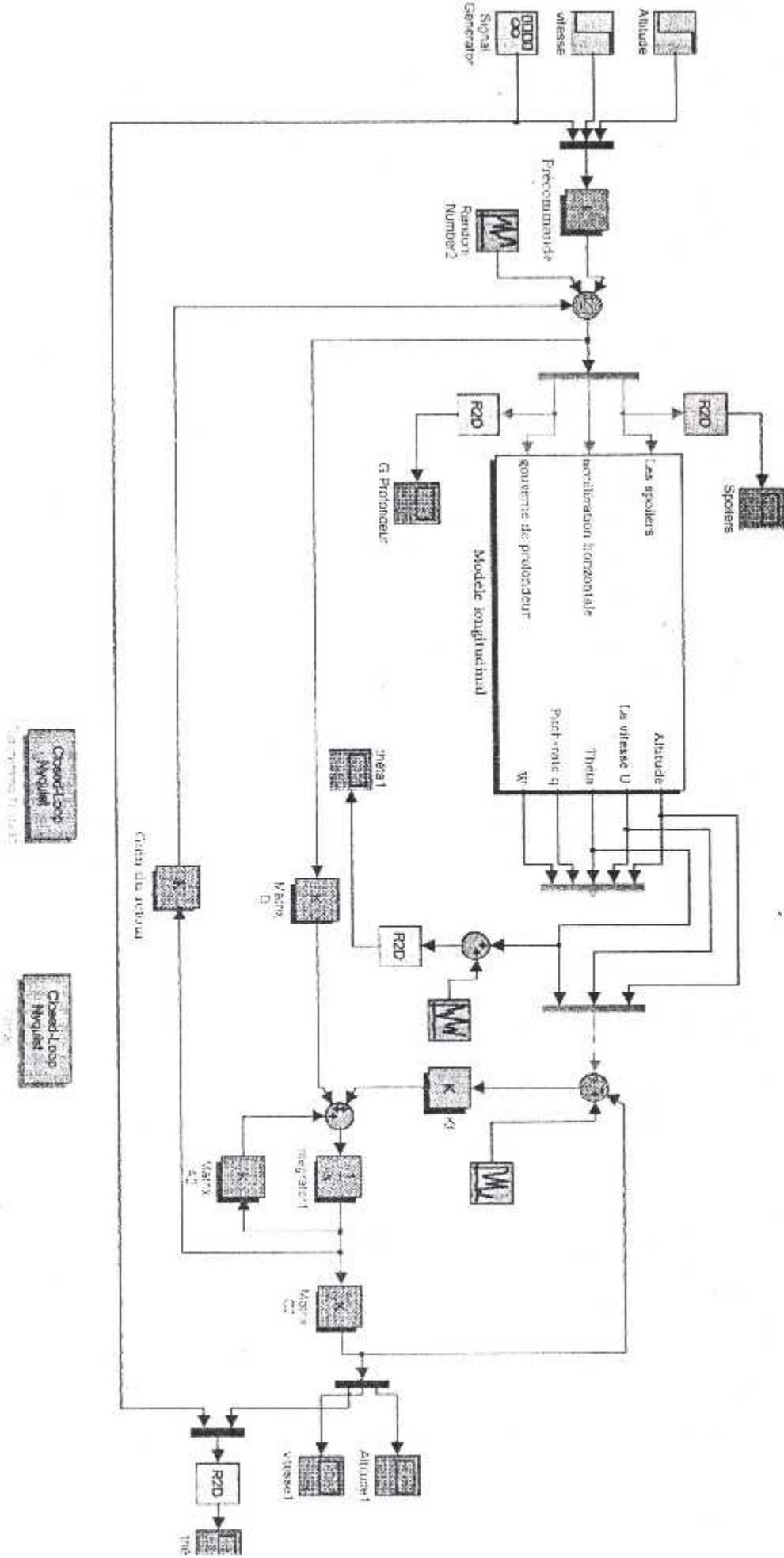
$$Q = Q_0 + qC^T C \quad \dots(\text{IV-17})$$

et :

$$R = R_0 \quad \dots(\text{IV-18})$$

jusqu'à ce que le transfert de boucle $K(s)G(s)$ du correcteur LQG recouvre le transfert de boucle du filtre de Kalman $-C(sI - A)^{-1}K_f$ sur une bande de fréquence suffisante.

La commande LTR:



IV-VI\ SIMULATION :

La simulation de la commande LTR se fait en cherchant un gain k qui recouvre la bande de fréquence désirée soit 10 rad/s, ensuite on calcul les paramètres du correcteur puis on trace les fonctions de sensibilité.

Les résultats sont représentés par la série de figure (C).

→ La figure (c-1) :

Représente les pôles du système en boucle fermée, elle confirme que notre système est stable.

→ Les figures (c-2-3-4) :

ces figures représentent les valeurs singulières pour les différents gain K_1 , K_2 et K_3 , on constate qu'il n'y a pas de recouvrement de la bande 10 rad/s.

→ La figure (c-5) :

Cette fois et après l'utilisation d'un gain K_4 on trouve qu'il recouvre notre bande de travail, donc il sera utiliser afin de modéliser le contrôleur LTR.

La figure (c-6) :

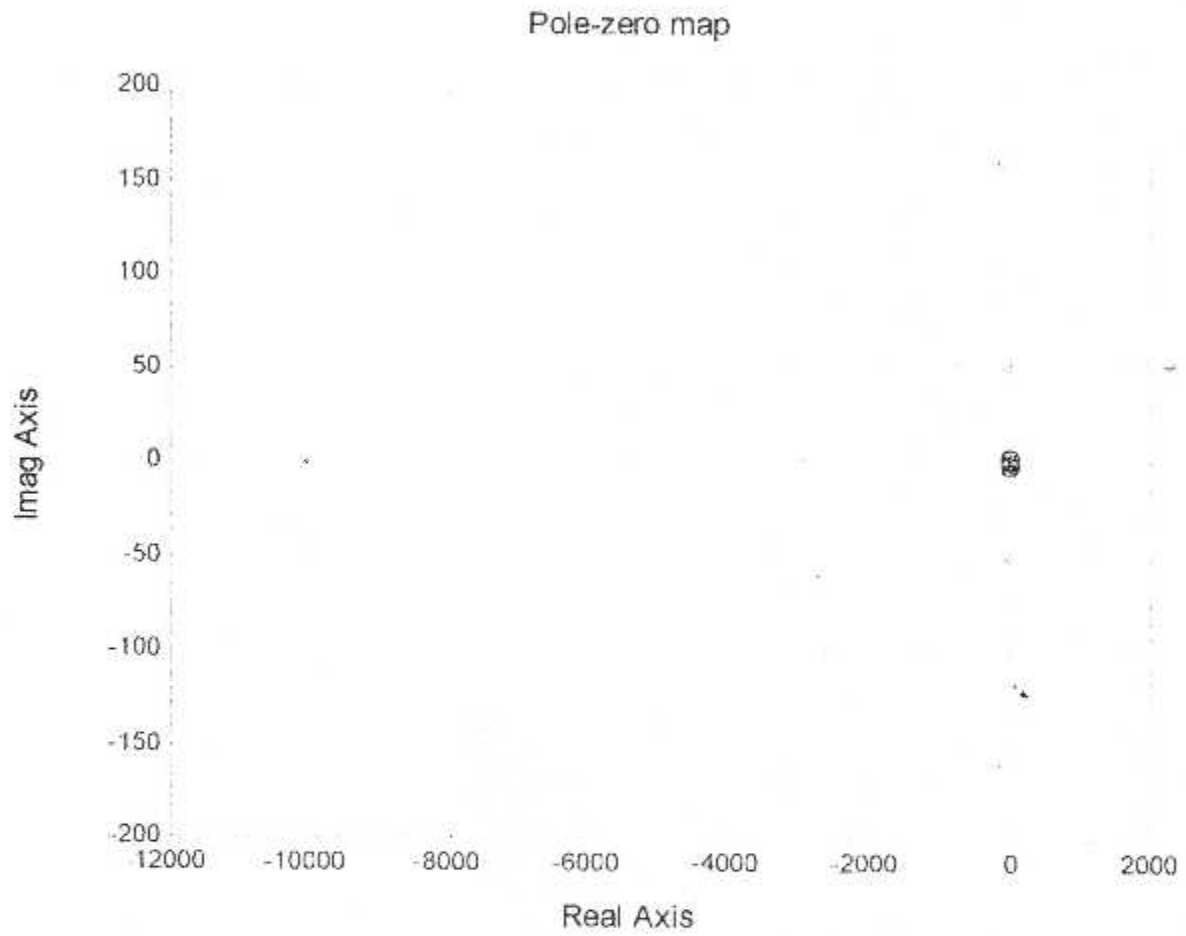
Après le calcul des paramètres de la commande LTR, on a simulé la réponse θ pour un signal de référence échelon dont on remarque qu'il y a une très bonne poursuite.

La figure (c-7) :

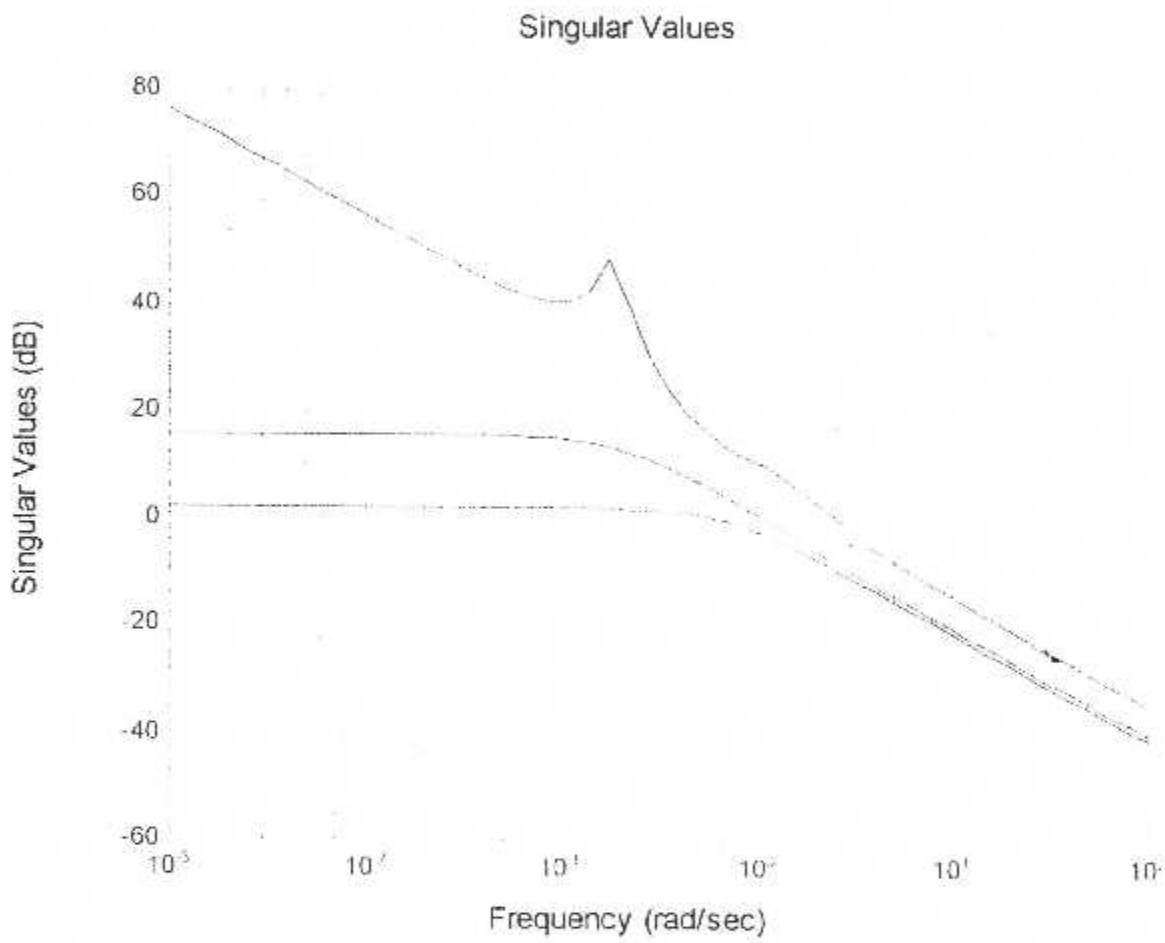
Cette figure représente les résultats de simulation de la commande LTR lorsqu'on applique comme signal de référence un signal carré d'amplitude 5deg, on remarque que le signal de sortie qui représente l'angle θ suit le signal de référence car ce type de commande a pu filtré les différents parasites agissants sur le système ; aussi les deux gouvernes prennent des valeurs très acceptables .

La figure (c-8) :

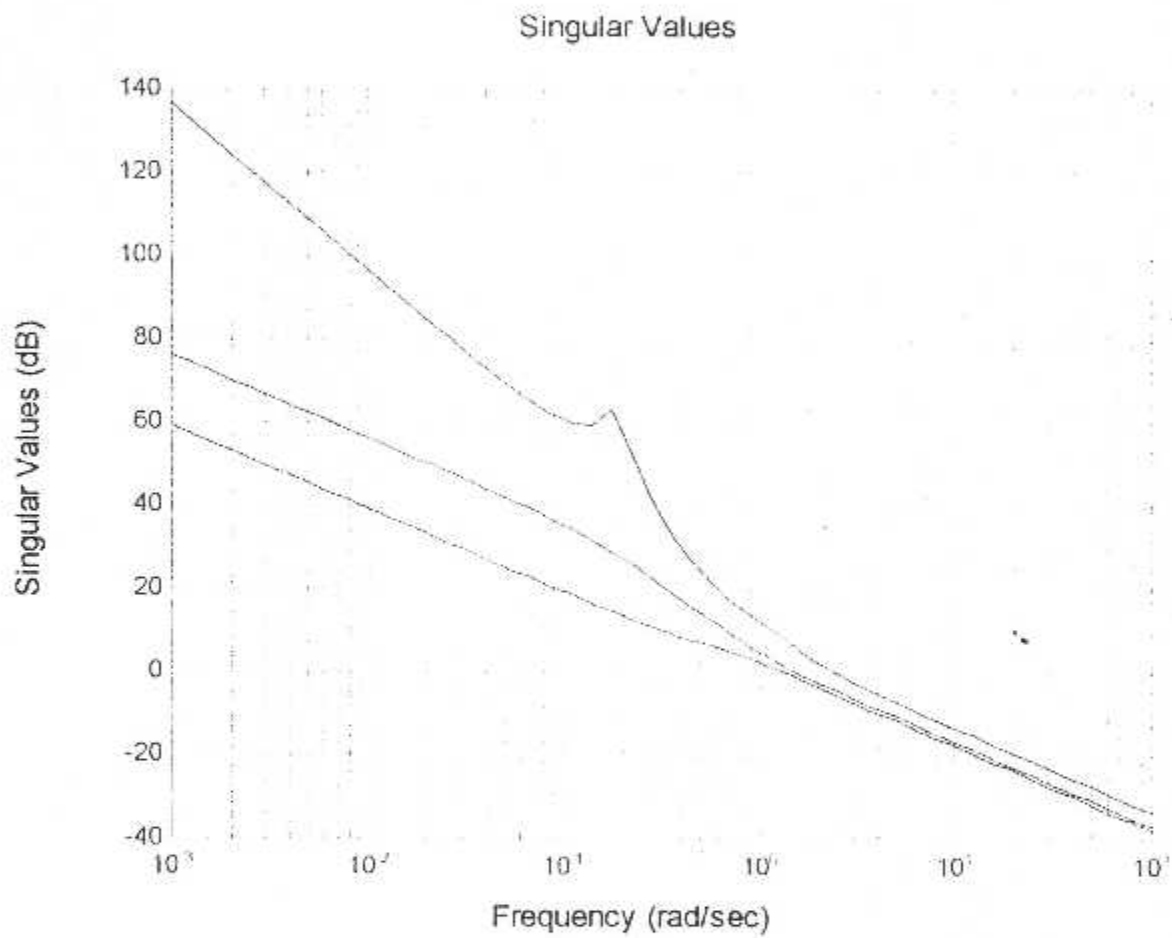
C'est le tracer des fonction de sensibilité et de sensibilité complémentaire, la figure nous démontre que cette commande est robuste contrairement à la commande LQG, ce qui confirme les résultats théoriques déjà étudié.



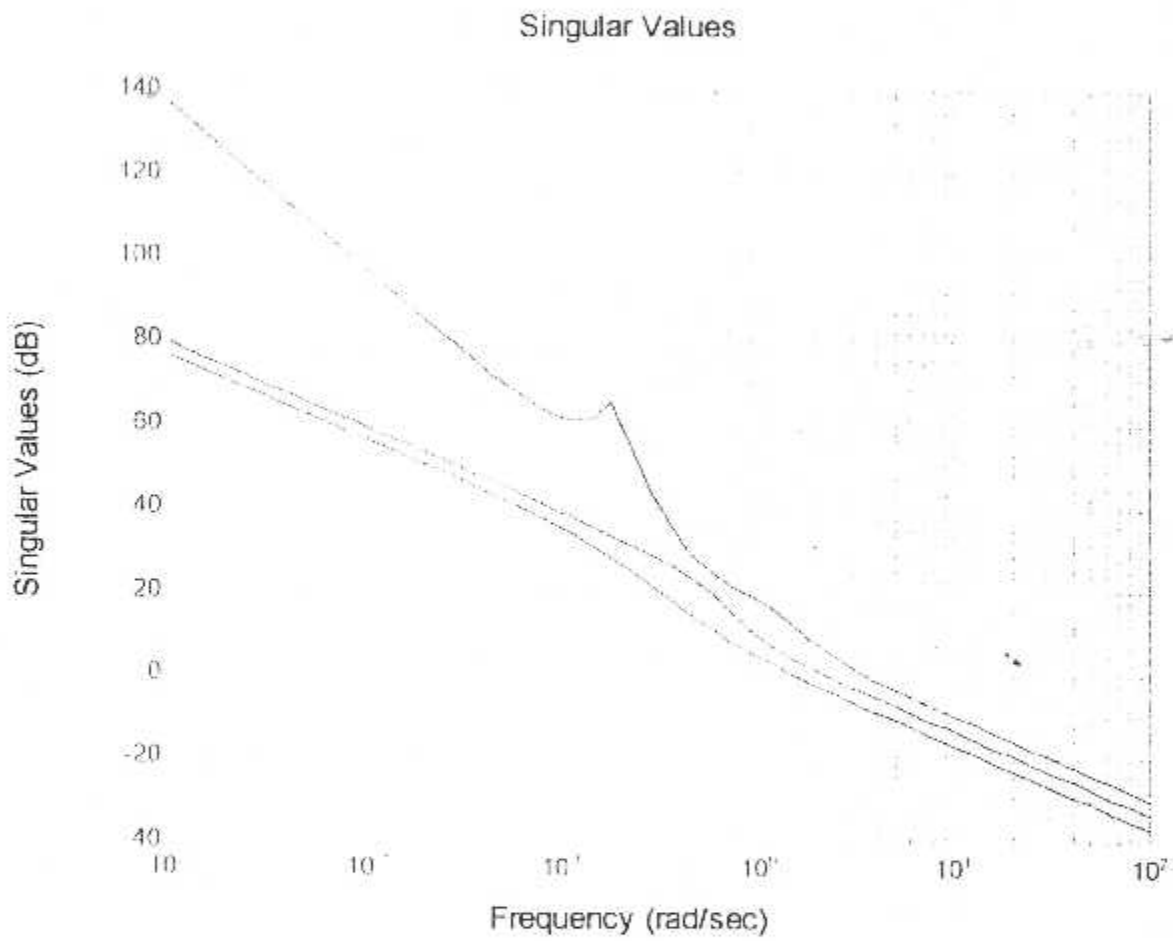
Figure(c-1) : Les pôles du système



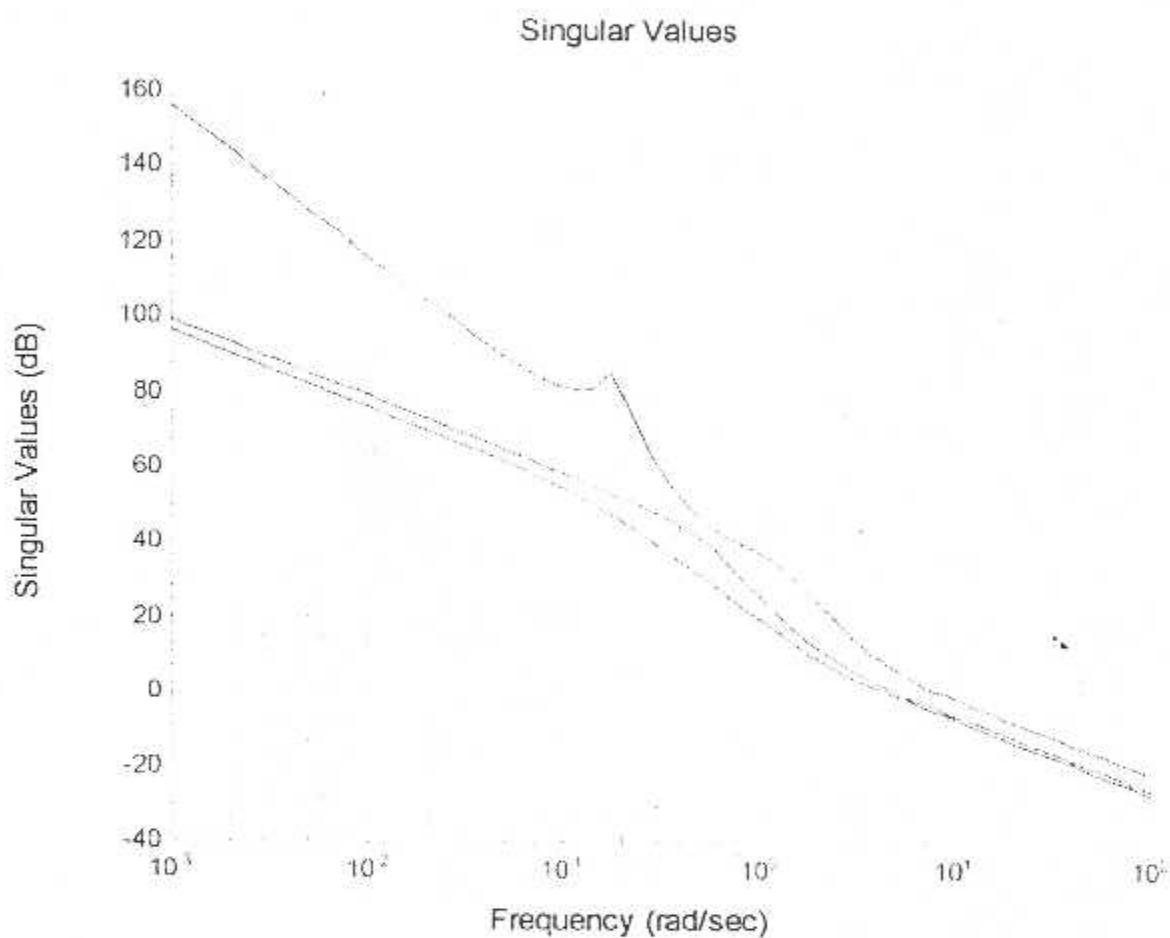
Figure(c-2) : valeurs singulières pour un gain K1



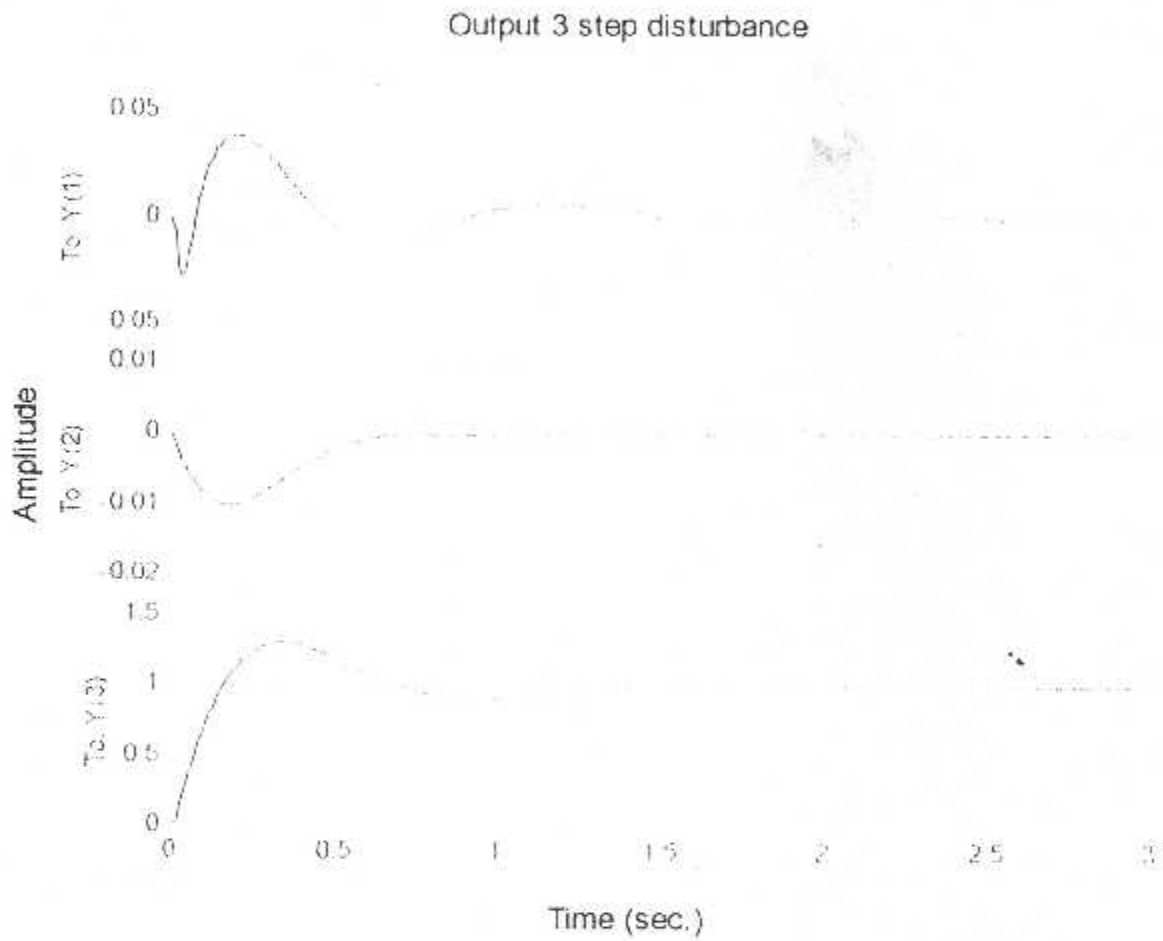
Figure(c-3) : valeurs singulières pour un gain K2



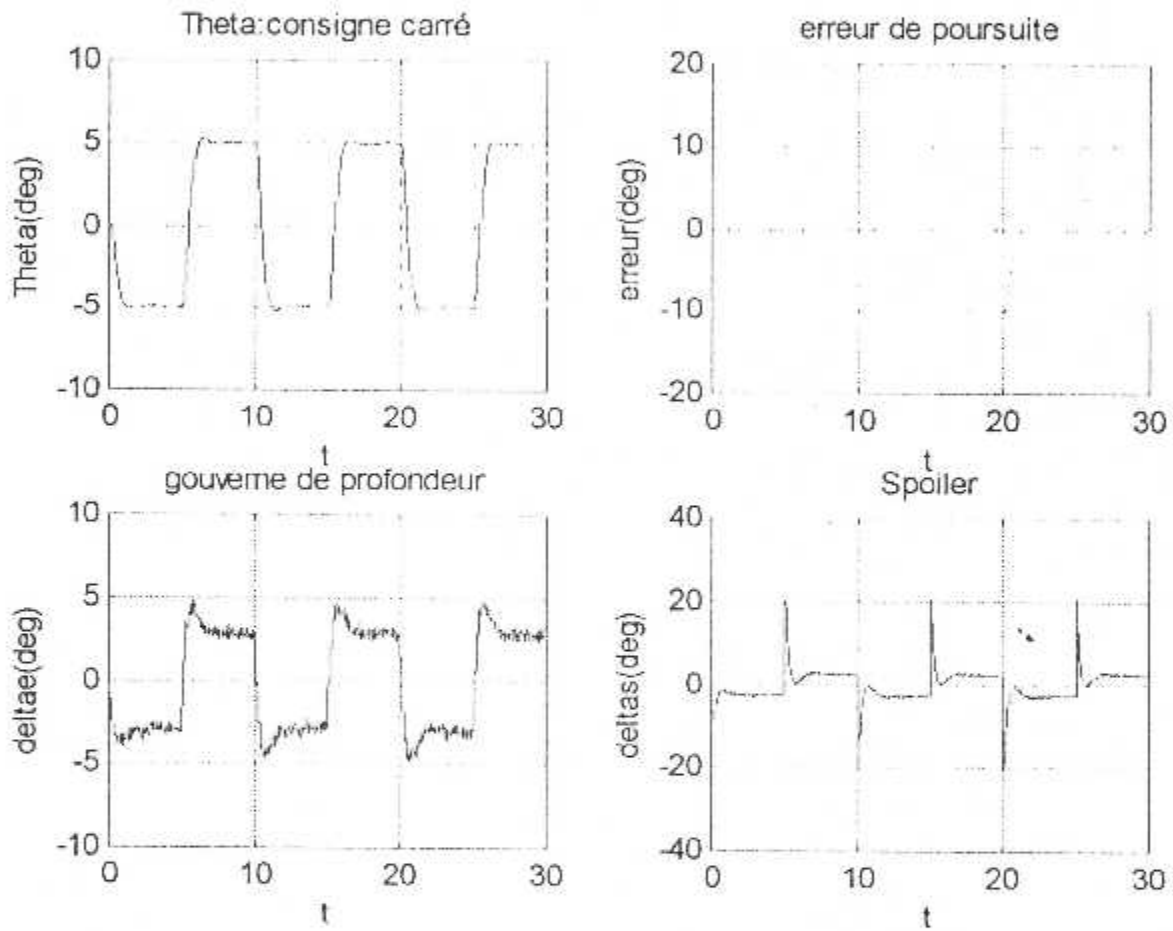
Figure(c-4): Digramme des valeurs singulières avec un gain K3



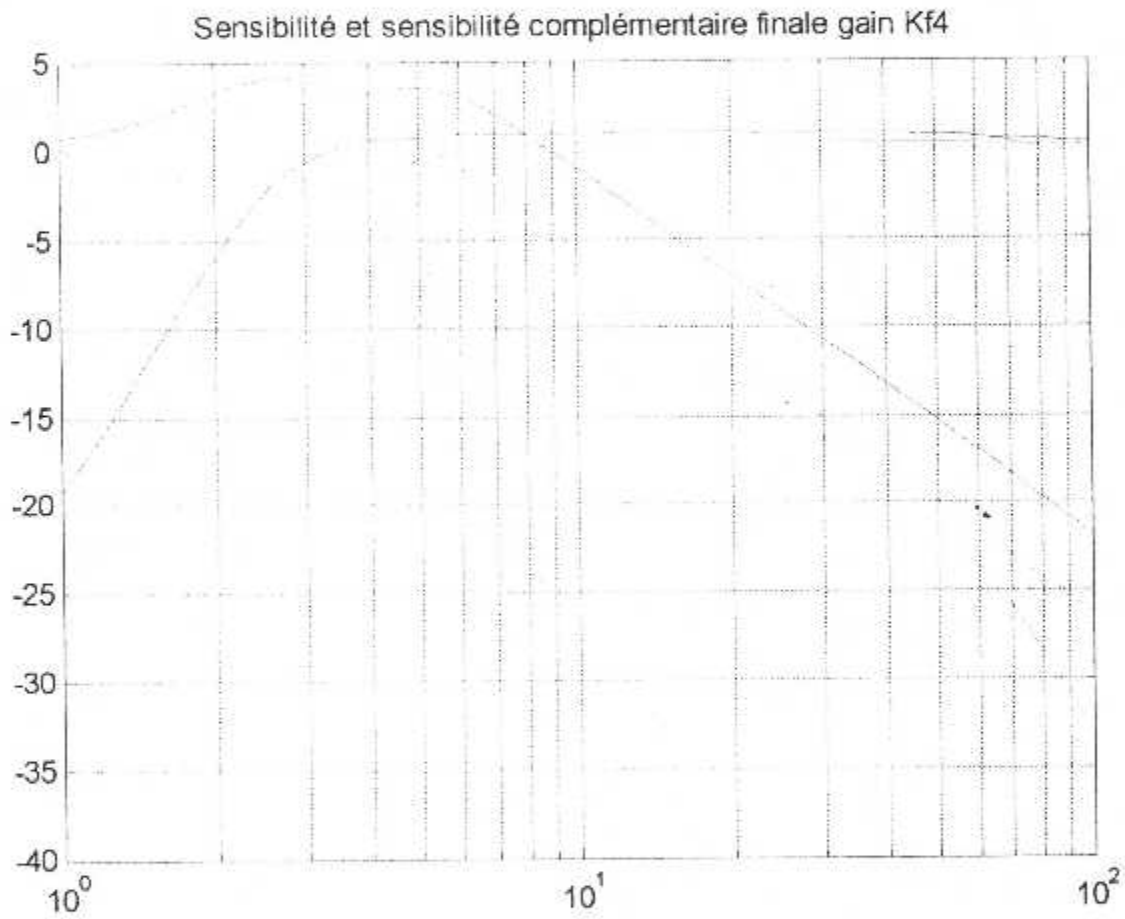
Figure(c-5) : valeurs singulières pour un gain K4



Figure(c-6) : Réponse pour un échelon



Figure(c-7) : réponse à un signal carré



Figure(c-8) : Fonction de sensibilités S et T



Chapitre V

Visualisation du Mouvement

V-I/ INTRODUCTION :

Dans ce chapitre, nous allons essayer de développer une interface graphique à travers le logiciel Matlab afin de simuler graphiquement le mouvement longitudinal de l'avion régit par les différents types de commandes étudiés ; l'idée est de concevoir un avion dans le plan vertical équipé par les deux gouvernes, de profondeurs et les spoilers.

En premier temps on va simuler l'étude en boucle ouverte afin de mieux comprendre le mode Short-period, en suite on passe à la simulation en boucle fermée en utilisant la commande optimale, la commande LQG et à la fin la commande LTR, et ceci se fait non seulement en visualisant le mouvement de l'avion mais aussi en représentant les résultats de robustesse de chaque commande.

V-II/ETUDE EN BOUCLE OUVERTE:

L'interface correspondante représentée par la figure(V-1), contient plusieurs boutons, l'utilité de chacun est résumé en ce qui suit :

① Un clic sur ce bouton nous permet de visualiser le mouvement phygoïde de l'avion, le temps de simulation est 200s et constate que le mouvement de l'avion n'est pas acceptable durant ce mode.

② C'est l'affichage des pôles du mode phygoïde.

③ Représente l'amplitude de la déviation de la gouverne de profondeur donnée en radian.

④ C'est le cas de l'exécution manuel de la visualisation.

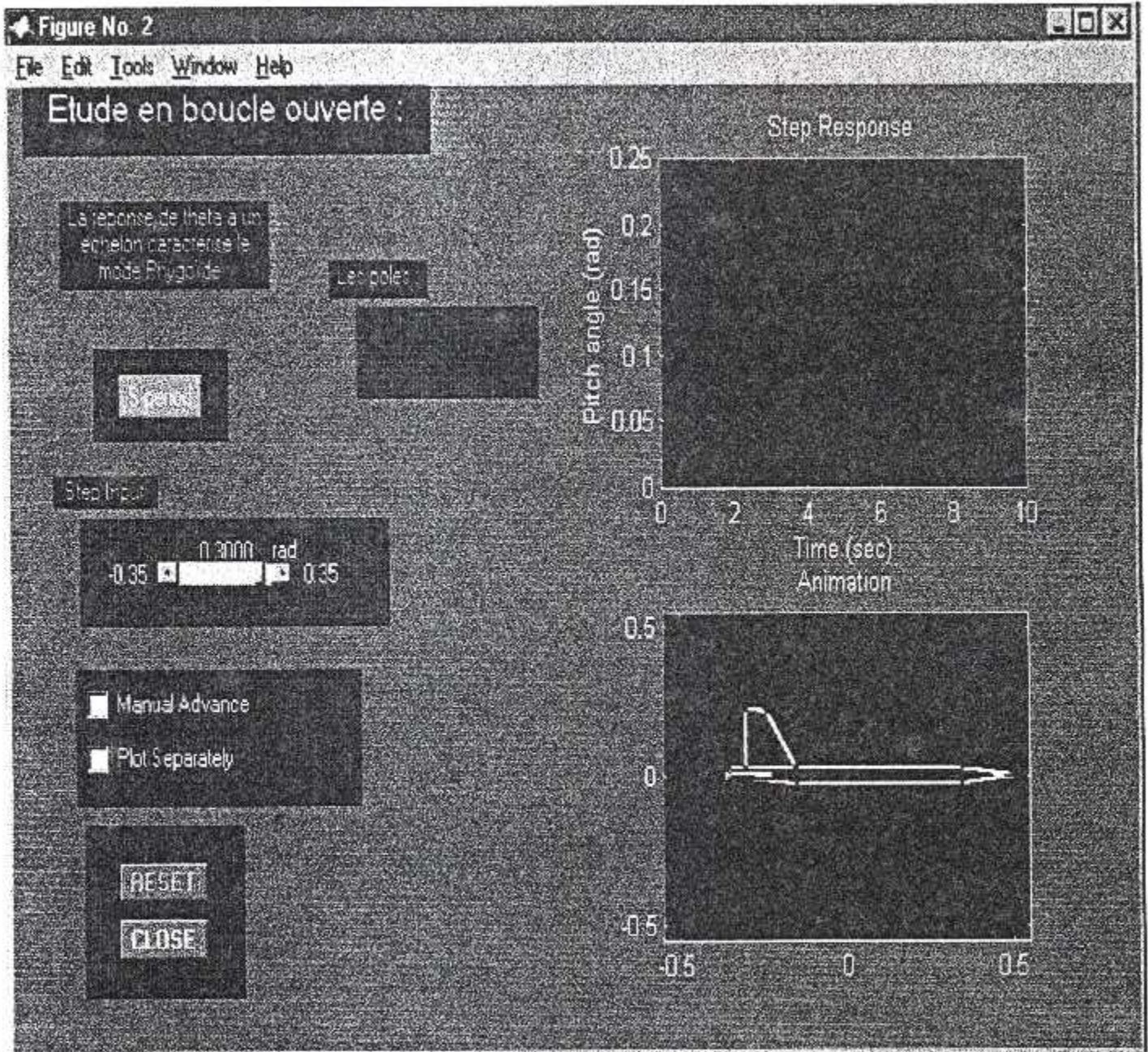
⑤ Cette case nous permet de tracer la réponse Théta sans visualiser le mouvement de l'avion.

⑥ Le bouton RESET nous permet de faire une initialisation.

⑦ Tracer de la réponse Théta en fonction du temps.

⑧ Simulation du mouvement de l'avion.

⑨ Ce bouton nous permet de fermer l'interface.



V-III/ ETUDE EN BOUCLE FERMEE :

L'interface réservée à l'étude en boucle fermée englobe tous les types de commandes étudiées le long de ce projet, ainsi la visualisation du mouvement correspond, en plus elle peut nous montrer les résultats de robustesse à travers les tracer des fonctions sensibilités S et de sensibilités complémentaires T .

L'activité des différents boutons est résumée par :

① Bouton 'optimale' :

Ce bouton nous permet de visualiser le mouvement de l'avion en utilisant la commande optimale avec critère quadratique sur l'état.

② Bouton 'perturbation' :

Cette fonctionnalité nous permet de visualiser le mouvement de l'avion en utilisant une autre fois la commande optimale mais en ajoutant des perturbations sur l'état et un bruit de mesure.

③ Bouton 'résultats' :

Il nous permet de tracer les fonctions sensibilités S et de sensibilités complémentaires T .

④ Bouton 'vol perturbé' :

Ce bouton utilise les résultats de simulation de la commande LQG précisément le vecteur d'état non reconstruit ce qui nous donne un mouvement perturbé de l'avion.

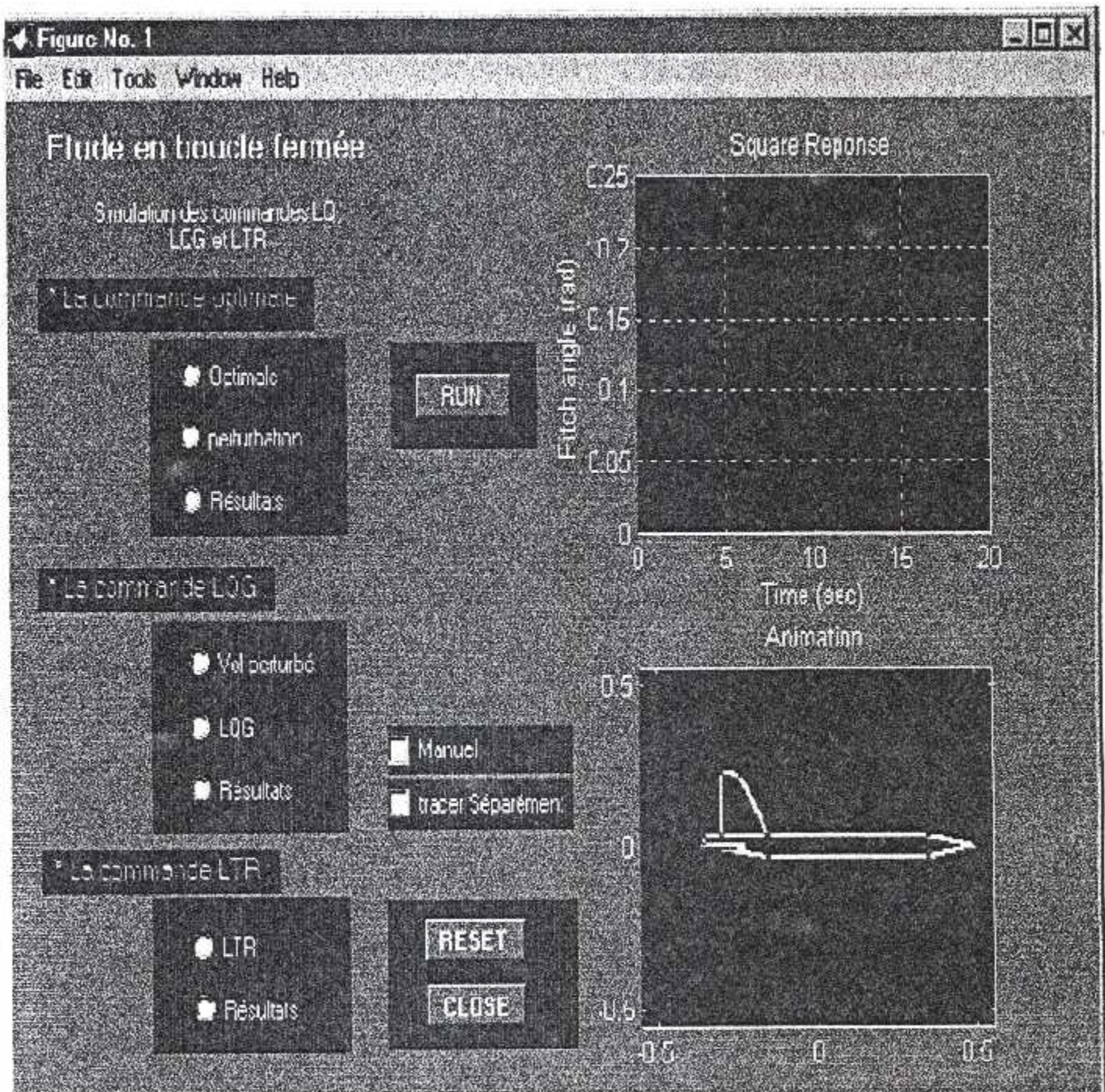
⑤ Bouton 'LQG' :

La simulation cette fois est aussi sur la commande LQG, mais en utilisant les résultats de filtrage du filtre de Kalman.

⑥ Bouton 'LTR' :

Il nous permet de visualiser les résultats trouver à partir de la commande LTR.

- ⑦ C'est le cas de l'exécution manuel de la visualisation.
- ⑧ Cette case nous permet de tracer la réponse Thêta sans visualiser le Mouvement de l'avion
- ⑨ Le bouton RESET nous permet de faire une initialisation.
- ⑩ Tracer de la réponse Thêta en fonction du temps.
- ⑪ Simulation du mouvement de l'avion.
- ⑫ Ce bouton nous permet de fermer l'interface.



La visualisation nous confirme l'intégralité des résultats trouvés à partir de l'application des différents types de commandes étudiées.

V-4/PROGRAMMES :

```

function opt(action)
global r1
global r2
global r3
global t
global theta
global de

r1=findobj(gcf,'tag','Radiobutton3');
r2=findobj(gcf,'tag','Radiobutton6');
r3=findobj(gcf,'tag','Radiobutton8');

rb1=findobj(gcf,'tag','Radiobutton1');
vb1=get(rb1,'value');
rb2=findobj(gcf,'tag','Radiobutton2');
vb2=get(rb2,'value');
rb4=findobj(gcf,'tag','Radiobutton4');
vb4=get(rb4,'value');
rb5=findobj(gcf,'tag','Radiobutton5');
vb5=get(rb5,'value');
rb7=findobj(gcf,'tag','Radiobutton7');
vb7=get(rb7,'value');
# résultats de la commande optimale:
if vb1==1
load lqrdelta.mat
load lqrtheta.mat
t=delta(1,:);
de=delta(2,:);
theta=th(2,:);

```

```
set(rb2, 'value', 0);
set(rb4, 'value', 0);
set(rb5, 'value', 0);
set(rb7, 'value', 0);
end

if vb2==1
load lqrdeltaebr.mat
load lqrthetabr.mat
l=deltabr(1,:);
de=deltabr(2,:);
theta=thbr(2,:);
set(rb1, 'value', 0);
set(rb4, 'value', 0);
set(rb5, 'value', 0);
set(rb7, 'value', 0);
end
if vb4==1
load lqrdeltaebr.mat
load lqrthetabr.mat
t=deltabr(1,:);
de=deltabr(2,:);
theta=thbr(2,:);
set(rb1, 'value', 0);
set(rb2, 'value', 0);
set(rb5, 'value', 0);
set(rb7, 'value', 0);
end
if vb5==1
load lqgdella.mat
load lqgtheta.mat
t=delqg(1,:);
de=delqg(2,:);
theta=thlqg(2,:);
```

```
set(rb1,'value',0);
set(rb2,'value',0);
set(rb4,'value',0);
set(rb7,'value',0);
end
if vb7==1
load lqrdeltaebr.mat
load lqrthetabr.mat
t=deltabr(1,:);
de=deltabr(2,:);
theta=thabr(2,:);
set(rb1,'value',0);
set(rb2,'value',0);
set(rb4,'value',0);
set(rb5,'value',0);
end
if action==1
    stepval=0.2;
    de=de;
    theta=theta;
    changel=theta;
        lt=length(theta);
        for n1=1:lt-1
            changel(1)=0;
            changel(n1+1)=theta(n1);
        end
        theta=changel;
        deltae=de;
        ld=length(deltae);
        change2=deltae;
        for n2=1:ld-1
            change2(1)=0;
            change2(n2+1)=deltae(n2);
        end
end
```

```
deltae=change2;

phandle = findobj('tag','plotbox');
plotval=get(phandle,'Value');
if plotval == 1
    subplot(2,2,2)
    plot(t,theta)
else
    subplot(2,2,2)
    plot(t(1),theta(1), 'EraseMode', 'none')
end

if stepval > 0
    axis([0 20 -stepval*1.5 stepval*1.5])
elseif stepval < 0
    axis([0 20 stepval*1.5 -stepval*1.5])
else
    axis([0 20 -0.4 0.4])
end

title ('Square Reponse')
ylabel ('Pitch angle (rad)')
xlabel ('Time (sec)')
grid
hold on

l=0.7;
l2=0.15;
l3=0.3;
l4=0.6;
l5=0.3;
l6=0.05;
h=0.03;
h2=0.2;
```



```
c=2*sqrt(h^2+(1/2)^2);
c2=2*sqrt(h^2+(13/2)^2);
c3=2*sqrt(h^2+(14/2)^2);
c4=2*sqrt(h^2+(15/2)^2);
c5=sqrt(h2^2+(16)^2);
phi=atan(2*h/1);
phi2=atan(2*h/13);
phi3=atan(2*h/14);
phi4=atan(2*h/15);
phi5=atan(2*h2/16);

xtopnose=c/2*cos(phi+theta);
ytopnose=c/2*sin(phi+theta);
xtoptail=-(c/2)*cos(phi-theta);
ytoptail=(c/2)*sin(phi-theta);

xbotnose=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybotnose=-c/2*sin(pi-phi+theta);
xbottail=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ybottail=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xtcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ytcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xtcapend=c/2*cos(phi+theta);
ytcapend=c/2*sin(phi+theta);

xbcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ybcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xbcapend=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybcapend=-c/2*sin(pi-phi+theta);

xendtop=-(c/2)*cos(phi-theta);
yendtop=(c/2)*sin(phi-theta);
xendbot=-(1/2)*cos(theta);
```

```
c=2*sqrt(h^2+(1/2)^2);
c2=2*sqrt(h^2+(13/2)^2);
c3=2*sqrt(h^2+(14/2)^2);
c4=2*sqrt(h^2+(15/2)^2);
c5=sqrt(h2^2+(16)^2);
phi=atan(2*h/1);
phi2=atan(2*h/13);
phi3=atan(2*h/14);
phi4=atan(2*h/15);
phi5=atan(2*h2/16);

xtopnose=c/2*cos(phi+theta);
ytopnose=c/2*sin(phi+theta);
xtoptail=-(c/2)*cos(phi-theta);
ytoptail=(c/2)*sin(phi-theta);

xbotnose=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybotnose=-c/2*sin(pi-phi+theta);
xbottail=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ybottail=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xtcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ytcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xtcapend=c/2*cos(phi+theta);
ytcapend=c/2*sin(phi+theta);

xbcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ybcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xbcapend=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybcapend=-c/2*sin(pi-phi+theta);

xendtop=-(c/2)*cos(phi-theta);
yendtop=(c/2)*sin(phi-theta);
xendbot=-(1/2)*cos(theta);
```

```

yendbot=- (1/2) *sin(theta);

xdiatop=- (1/2) *cos(theta);
ydiatop=- (1/2) *sin(theta);
xdiabot=(c2/2) *cos(pi-phi2-theta);
ydiabot=- (c2/2) *sin(pi-phi2-theta);

xwlbtop=- (c3/2) *cos(phi3-theta);
ywlbot=(c3/2) *sin(phi3-theta);
xwltop=- (c3/2) *cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywltop=(c3/2) *sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

xwrbtop=- (c4/2) *cos(phi4-theta);
ywrbot=(c4/2) *sin(phi4-theta);
xwrtop=- (c4/2) *cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-
phi5+theta);
ywrtop=(c4/2) *sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);

xwtopr=- (c4/2) *cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-
phi5+theta);
ywtopr=(c4/2) *sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);
xwtopl=- (c3/2) *cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywtopl=(c3/2) *sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

elevxl = -(1/3) *cos(theta)-0.12*cos(deltae);
elevxr = -(1/3) *cos(theta);
elevyl = -(1/3) *sin(theta)+0.12*sin(deltae);
elevyr = -(1/3) *sin(theta);

rad=0.005;
arcstep = 18;
j = 0:arcstep:(360-arcstep);
arcx = rad * cos((j+arcstep) * pi/180);    x coordinates
arcy = rad * sin((j+arcstep) * pi/180);    y coordinates

```

```

subplot(2,2,4)
cla
K = plot([xtopnose(1) xtoptail(1)], [ytopnose(1)
ytoptail(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');
hold on
L = plot([xbotnose(1) xbottail(1)], [ybotnose(1)
ybottail(1)],...
    'k', 'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

M = plot([xtcaptip(1) xtcapend(1)], [ytcaptip(1)
ytcapend(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

N = plot([xbcaptip(1) xbcapend(1)], [ybcaptip(1)
ybcapend(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O = plot([xendtop(1) xendbot(1)], [yendtop(1)
yendbot(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O2 = plot([elevxl(1) elevxr(1)], [elevyl(1)
elevyr(1)], 'r',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [3], 'color', 'r');

P = plot([xdiatop(1) xdiabot(1)], [ydiatop(1)
ydiabot(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

Q = plot([xwrtop(1) xwrbot(1)], [ywrtop(1) ywrbot(1)], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

R = plot([xwltop(1) xwlbot(1)], [ywltop(1) ywlbot(1)], 'k',...

```

```
'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

S = plot([xwtopr(1) xwtopl(1)],[ywtopr(1) ywtopl(1)],'k',...
'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

H = patch(arcx, arcy, 'r', 'EraseMode','xor');

axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55])

mhandle = findobj('Tag','manbox');
man=get(mhandle,'Value');
if man == 1
    'Press any key to advance the animation'
    pause
end

ltime=length(t);
axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55])
title ('Animation')

mhandle = findobj('Tag','manbox');
man=get(mhandle,'Value');
if man == 1
    'Press any key to advance the animation'
    pause
end

for i = 2:ltime-1,

    if man == 1
        pause
    end

    set(K,'XData',[xtopnose(i) xtoptail(i)]);
```

```

set(K, 'YData', [ytopnose(i) ytoptail(i)]);
set(L, 'Xdata', [xbotnose(i) xbottail(i)]);
set(L, 'Ydata', [ybotnose(i) ybottail(i)]);
set(M, 'XData', [xtcaptip(i) xtcapend(i)]);
set(M, 'YData', [ytcaptip(i) ytcapend(i)]);
set(N, 'XData', [xbcaptip(i) xbcapend(i)]);
set(N, 'YData', [ybcaptip(i) ybcapend(i)]);
set(O, 'XData', [xendtop(i) xendbot(i)]);
set(O, 'YData', [yendtop(i) yendbot(i)]);
set(P, 'XData', [xdiatop(i) xdiabot(i)]);
set(P, 'YData', [ydiatop(i) ydiabot(i)]);
set(Q, 'XData', [xwrtop(i) xwrbot(i)]);
set(Q, 'YData', [ywrtop(i) ywrbot(i)]);
set(R, 'XData', [xwltop(i) xwlbot(i)]);
set(R, 'YData', [ywltop(i) ywlbot(i)]);
set(S, 'XData', [xwtopr(i) xwtopl(i)]);
set(S, 'YData', [ywtopr(i) ywtopl(i)]);

set(O2, 'XData', [elevxl(i), elevxr(i)]);
set(O2, 'YData', [elevyl(i), elevyr(i)]);
drawnow;

if plotval == 0
    subplot(2,2,2)
    plot([t(i), t(i+1)], [theta(i), theta(i+1)]);
'EraseMode', 'none')
end

end

elseif action == 2

    set(rb1, 'value', 0);
    set(rb2, 'value', 0);

```

```
set(rb4,'value',0);
set(rb5,'value',0);
set(rb7,'value',0);

l=0.7;
l2=0.15;
l3=0.3;
l4=0.6;
l5=0.3;
l6=0.05;
h=0.03;
h2=0.2;
c=2*sqrt(h^2+(l/2)^2);
c2=2*sqrt(h^2+(l3/2)^2);
c3=2*sqrt(h^2+(l4/2)^2);
c4=2*sqrt(h^2+(l5/2)^2);
c5=sqrt(h2^2+(l6)^2);
phi=atan(2*h/l);
phi2=atan(2*h/l3);
phi3=atan(2*h/l4);
phi4=atan(2*h/l5);
phi5=atan(2*h2/l6);
theta=0;
deltae=0;
%Lines
xtopnose=c/2*cos(phi+theta);
ytopnose=c/2*sin(phi+theta);
xtoptail=-(c/2)*cos(phi-theta);
ytoptail=(c/2)*sin(phi-theta);

xbotnose=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybotnose=-c/2*sin(pi-phi+theta);
xbottail=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ybottail=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);
```

```

xtcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ytcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xtcapend=c/2*cos(phi+theta);
ytcapend=c/2*sin(phi+theta);

xbcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ybcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xbcapend=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybcapend=-c/2*sin(pi-phi+theta);

xendtop=-(c/2)*cos(phi-theta);
yendtop=(c/2)*sin(phi-theta);
xendbot=-(1/2)*cos(theta);
yendbot=-(1/2)*sin(theta);

xdiatop=-(1/2)*cos(theta);
ydiatop=-(1/2)*sin(theta);
xdiabot=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ydiabot=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xwlbtop=-(c3/2)*cos(phi3-theta);
ywlbtop=(c3/2)*sin(phi3-theta);
xwltop=-(c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywltop=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

xwrbot=-(c4/2)*cos(phi4-theta);
ywrbot=(c4/2)*sin(phi4-theta);
xwrtop=-(c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-
phi5+theta);
ywrtop=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);

xwtopr=-(c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-
phi5+theta);

```



```

ywtopr=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);
xwtopl=-(c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywtopl=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

elevxl = -(1/3)*cos(theta)-0.12*cos(deltae);
elevxr = -(1/3)*cos(theta);
elevyl = -(1/3)*sin(theta)-0.12*sin(deltae);
elevyr = -(1/3)*sin(theta);

rad=0.005;
arcstep = 18;
j = 0:arcstep:(360-arcstep);
arcx = rad * cos((j+arcstep) * pi/180);
arcy = rad * sin((j+arcstep) * pi/180);
subplot(2,2,4)
cla
K = plot([xtopnose xtoptail], [ytopnose ytoptail], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');
hold on

L = plot([xbotnose xbottail], [ybotnose ybottail],...
    'k', 'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

M = plot([xtcaptip xtcapend], [ytcaptip ytcapend], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

N = plot([xbcaptip xbcapend], [ybcaptip ybcapend], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O = plot([xendtop xendbot], [yendtop yendbot], 'k',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O2 = plot([elevxl elevxr], [elevyl elevyr], 'r',...
    'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [3], 'color', 'y');

```

```

P = plot([xdiatop xdiabot],[ydiatop ydiabot],'E',...
    'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

Q = plot([xwrtop xwrbot],[ywrtop ywrbot],'E',...
    'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

R = plot([xwltop xwlbot],[ywltop ywlbot],'E',...
    'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

S = plot([xwtopr xwtopl],[ywtopr ywtopl],'E',...
    'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

H = patch(arcx, arcy,'r','EraseMode','xor');

hold off
axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55])
title ('Animation')

subplot (2,2,2)
cla
axis ([0 20 0 0.25])
ylabel ('Pitch angle (rad)')
xlabel ('Time (sec)')
title ('Square Response')

elseif action == 3
    stephandle = findobj('Tag','stepslider');
    stepval=get(stephandle,'Value');
    curhandle = findobj('Tag','curtext');
    set(curhandle,'String',sprintf(' %.4f',stepval));

elseif action==4
    opgui2

```

```
set(r1,'value',1)
set(r2,'value',0)
set(r3,'value',0)
elseif action==5
    av(1)
elseif action==6
    av(2)
elseif action==7
    opgui3
    set(r1,'value',0)
    set(r2,'value',1)
    set(r3,'value',0)
elseif action==8
    av(3)
elseif action==9
    av(4)
elseif action==10
    opgui4
    set(r1,'value',0)
    set(r2,'value',0)
    set(r3,'value',1)
elseif action==11
    av(5)
elseif action==12
    av(6)
elseif action==13
    h=findobj('Tag','Radiobutton3');
    set(h,'value',0);
    close
elseif action==14
    h=findobj('Tag','Radiobutton6');
    set(h,'value',0);
    close
elseif action==15
```

```

h=findobj('Tag','Radiobutton3');
set(h,'value',0);
close

end

function av(j)

A=[0      0      1.1320      0      -1.0000;
   0     -0.0538     -0.1712      0      0.0705;
   0      0      0      1.0000      0;
   0     0.0485      0     -0.8556     -1.0130;
   0     -0.2909      0      1.0532     -0.6059];

B=[      0      0      0;
   -0.1200     1.0000      0;
      0      0      0;
   4.4190      0     -1.6650;
   1.5750      0     -0.0732];

C=[1      0      0      0      0;
   0      1      0      0      0;
   0      0      1      0      0];

D=zeros(3);

Q=[8 0 0 0 0;0 100 0 0 0;0 0 195 0 0;0 0 10 0 0;0 0 0 0 30];
R=[50 0 0;0 50 0;0 0 50];
Kc=lqr(A,B,Q,R);
Nbar=-C*inv(A-B*Kc)*B;
var1=0.0001;
var2=0.0001;
QQ=var2*eye(5);
RR=var1*eye(3);
C=[1 0 0 0 0;0 1 0 0 0;0 0 1 0 0];
P=care(A',C',QQ,RR,zeros(5,3),eye(5));

```

```

Kf=P*C'*inv(RR);
KB=Kf;
KD=zeros(3);
KA=A-B*Kc-Kf*C;
KC=-Kc;
[GKA,GKB,GKC,GKD]=series(KA,KB,KC,KD,A,B,C,D);

w=logspace(-3,2);
wlog2=logspace(-2,2);
Sso=zeros(3,max(size(wlog2)));
Tso=zeros(3,max(size(wlog2)));
if j==1
for k=1:max(size(wlog2))
    Sso(:,k)=svd(inv(eye(3)+Kc*inv(eye(5)*w(k)*i-A)*B));
end
colordef('black')
grid
semilogx(wlog2,20*log10(Sso),'r',wlog2,zeros(1,length(wlog2)))

elseif j==2
for k=1:max(size(wlog2))
    Tso(:,k)=svd(Kc*inv(eye(5)*w(k)*i-
A)*B*inv(eye(3)+Kc*inv(eye(5)*w(k)*i-A)*B));
end
colordef('black')
grid
semilogx(wlog2,20*log10(Tso),'y',wlog2,zeros(1,length(wlog2)))
elseif j==3
    wlog2=logspace(-2,2);
for k=1:max(size(wlog2))
    Ss(:,k)=svd(inv(eye(3)-GKC*inv(wlog2(k)*i*eye(10)-
GKA)*GKB));
end
colordef('black')

```

```

grid
semilogx(wlog2, 20*log10(Ss), 'r', wlog2, zeros(1, length(wlog2)))
elseif j==4
wlog2=logspace(-2, 2);
for k=1:max(size(wlog2))
    Ts(:, k)=svd(eye(3)-inv(eye(3)-GKC*inv(wlog2(k)*i*eye(10)-
GKA)*GKB));
end
colordef('black')
grid
semilogx(wlog2, 20*log10(Ts), '-
.y', wlog2, zeros(1, length(wlog2)))
end

Gamma=B;
W=eye(3);
V=eye(3);

Aw=-0.0001*eye(3);
Bw=eye(3);
Cw=eye(3);
Dw=zeros(3);

Aa= A ;
Ba=B;
Ca=C;

Da=zeros(3);
Kf4=lqe(Aa, Gammaa, Ca, 100*W3, V);
KB=Kf4;
KD=zeros(3);
Q=Ca'*Ca;
rho=logspace(-8, -2, 4);
for k=4:-1:1

```

```

clear KA KC Kc R
R=rho(k)*eye(3);
Kc=lqr(Aa, Ba, Q, R);
KA=Aa-Ba*Kc-Kf4*Ca;
KC=-Kc;
[GKA1, GKB1, GKC1, GKD1]=series(KA, KB, KC, KD, Aa, Ba, Ca, Da);

end
if j==5
wlog2=logspace(0,2);
for k=1:max(size(wlog2))
    Ssvf(:,k)=svd(inv(eye(3)-GKC1*inv(wlog2(k))*i*eye(16)-
GKA1)*GKB1));
end
    colordef('black');
semilogx(wlog2, 20*log10(Ssvf), 'r', wlog2, zeros(1, length(wlog2))
, 'w:');
elseif j==6
wlog2=logspace(0,2);
for k=1:max(size(wlog2))
    Tsvf(:,k)=svd(eye(3)-inv(eye(3)-GKC1*inv(wlog2(k))*i*eye(16)-
GKA1)*GKB1));
end
    colordef('black');
semilogx(wlog2, 20*log10(Tsvf), 'y', wlog2, zeros(1, length(wlog2))
, 'w:');
end
end
end

```

```
function fig = opp_fig()

load opguifin
h0 = figure('Units','points', ...
    'Color',[0 0 0], ...
    'Colormap',mat0, ...
    'FileName','C:\MATLABR11\work\interface2\opp.fig', ...
    'Paper-Position',[18 180 576 432], ...
    'PaperUnits','points', ...
    'Position',[101.25 36 487.5 371.25], ...
    'Tag','Fig1', ...
    'ToolBar','none', ...
    'DefaultTextColor',[1 1 1], ...
    'DefaultAxesXColor',[1 1 1], ...
    'DefaultAxesYColor',[1 1 1], ...
    'DefaultAxesZColor',[1 1 1], ...
    'DefaultPatchFaceColor',[1 1 1], ...
    'DefaultPatchEdgeColor',[0 0 0], ...
    'DefaultSurfaceEdgeColor',[0 0 0], ...
    'DefaultLineColor',[1 1 1], ...
    'DefaultAxesColor',[0 0 0], ...
    'DefaultAxesColorOrder',mat1);
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','normalized', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',mat2, ...
    'String','Mannel', ...
    'Style','checkbox', ...
    'Tag','manbox');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','normalized', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',mat3, ...
    'String','tracer Séparément', ...
    'Style','checkbox', ...
    'Tag','plotbox');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','normalized', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',mat4, ...
```



```
'XLim',[0 20], ...
'XLimMode','manual', ...
'YColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'YGrid','on', ...
'YLim',[0 0.25], ...
'YLimMode','manual', ...
'ZGrid','on');
h2 = text('Parent',h1, ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[9.952606635071085 0.2603550295857988
9.160254037844386], ...
'String','Square Reponse', ...
'Tag','Axes2Text4', ...
'VerticalAlignment','bottom');
set(get(h2,'Parent'),'Title',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'Color',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[-3.412322274881516 0.1227810650887574
9.160254037844386], ...
'Rotation',90, ...
'String','Pitch angle (rad)', ...
'Tag','Axes2Text3', ...
'VerticalAlignment','baseline');
set(get(h2,'Parent'),'YLabel',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'Color',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[9.952606635071085 -0.03550295857988167
9.160254037844386], ...
'String','Time (sec)', ...
'Tag','Axes2Text2', ...
'VerticalAlignment','cap');
set(get(h2,'Parent'),'XLabel',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','right', ...
'Position',[-35.7345971563981 0.3032544378698225
9.160254037844386], ...
'Tag','Axes2Text1', ...
'Visible','off');
```

```
set(get(h2,'Parent'),'ZLabel',h2);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','none', ...
    'Tag','Axes2Line1', ...
    'XData',[2.26 2.27], ...
    'YData',[-0.223117094799372 -0.2009521312529196]);
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0 0 0], ...
    'FontSize',12, ...
    'FontWeight','bold', ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[9.75 338.25 167.25 24], ...
    'String','Etude en boucle fermée :', ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText2');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0 0 0], ...
    'FontSize',10, ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[14.25 208.75 123.75 18.75], ...
    'String','# La commande optimale :', ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText3');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[63 216 88.5 70.5], ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText4');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[76.5 265.5 45 15], ...
    'String','Optimale', ...
```

```

    'Style','radiobutton', ...
    'Callback','opt(1)', ...
    'Tag','Radiobutton1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[75.75 243.75 55.5 15], ...
    'String','perturbation', ...
    'callback','opt(1)',...
    'Style','radiobutton', ...
    'Tag','Radiobutton2');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[76.5 221.25 49.5 15], ...
    'String','Résultats', ...
    'Style','radiobutton', ...
    'callback','opt(4)',...
    'Tag','Radiobutton3');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0 0 0], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[36 311.25 117.75 25.5], ...
    'String','Simulation des commandes LQ, LQG et LTR', ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText5');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0 0 0], ...
    'FontSize',10, ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[13.5 189.75 105.75 15], ...
    'String','= La commande LQG :', ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText6');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...

```

```

'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
'ListboxTop',0, ...
'Position',[63 111 87.75 75], ...
'Style','text', ...
'Tag','StaticText7');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'ListboxTop',0, ...
'Position',[79.5 163.5 65 15], ...
'String','Vol perturbé', ...
'Style','radiobutton', ...
'callback','opt(1)',...
'Tag','Radiobutton4');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'ListboxTop',0, ...
'Position',[79.5 140.25 45 15], ...
'String','LQG', ...
'Style','radiobutton', ...
'callback','opt(1)',...
'Tag','Radiobutton5');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'ListboxTop',0, ...
'Position',[79.5 118.5 50.5 15], ...
'String','Résultats', ...
'callback','opt(7)',...
'Style','radiobutton', ...
'Tag','Radiobutton6');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
'Units','points', ...
'BackgroundColor',[0 0 0], ...
'FontSize',10, ...
'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'ListboxTop',0, ...
'Position',[14.25 89.25 106.5 15], ...

```

```

    'String','La commande LTR :', ...
    'Style','text', ...
    'Tag','StaticText1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[63 33 88.5 54.75], ...
    'Style','frame', ...
    'Tag','Frame1');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[80.25 62.25 45 15], ...
    'String','LTR', ...
    'Style','radiobutton', ...
    'callback','opt(1)', ...
    'Tag','Radiobutton7');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.2 0.2 0.2], ...
    'ForegroundColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[81 40.5 51 15], ...
    'String','Résultats', ...
    'Style','radiobutton', ...
    'callback','opt(10)', ...
    'Tag','Radiobutton8');
h1 = uicontrol('Parent',h0, ...
    'Units','points', ...
    'BackgroundColor',[0.501960784313725 0.501960784313725
0.501960784313725], ...
    'Callback','close', ...
    'FontWeight','bold', ...
    'ForegroundColor',[0.733333333333333 0.925490196078431
0.0745098039215686], ...
    'ListboxTop',0, ...
    'Position',[186 41.25 45 15], ...
    'String','CLOSE', ...
    'Tag','Pushbutton1');
h1 = axes('Parent',h0, ...
    'AmbientLightColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...

```

```

'Box','on', ...
'CameraUpVector',[0 1 0], ...
'Color',[0 0 0], ...
'ColorOrder',mat8, ...
'Position',[0.5779768786127169 0.11 0.3270231213872832
0.3439017341040462], ...
'Tag','Axis1', ...
'XColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'XLim',[-0.55 0.55], ...
'XLimMode','manual', ...
'YColor',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'YLim',[-0.55 0.55], ...
'YLimMode','manual');
h2 = text('Parent',h1, ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[-0.002606635071090047 0.5952941176470588
17.32050807568877], ...
'String','Animation', ...
'Tag','Axis1Text4', ...
'VerticalAlignment','bottom');
set(get(h2,'Parent'),'Title',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'Color',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[-0.002606635071090047 -0.7052941176470589
17.32050807568877], ...
'Tag','Axis1Text3', ...
'VerticalAlignment','top');
set(get(h2,'Parent'),'XLabel',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'Color',[0.956862745098039 0.823529411764706
0.541176470588235], ...
'HandleVisibility','off', ...
'HorizontalAlignment','center', ...
'Position',[-0.7220379146919431 -0.006470588235294228
17.32050807568877], ...
'Rotation',90, ...
'Tag','Axis1Text2', ...
'VerticalAlignment','baseline');
set(get(h2,'Parent'),'YLabel',h2);
h2 = text('Parent',h1, ...
'HandleVisibility','off', ...

```

```

    'HorizontalAlignment','right', ...
    'Position',[-2.515402843601896 2.290588235294118
17.32050807568877], ...
    'Tag','Axes1Text1', ...
    'Visible','off');
set(get(h2,'Parent'),'ZLabel',h2);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',2, ...
    'Tag','Axes1Line10', ...
    'XData',[0.35 -0.35], ...
    'YData',[0.03 0.03]);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',2, ...
    'Tag','Axes1Line9', ...
    'XData',[0.35 -0.15], ...
    'YData',[-0.030000000000000001 -0.030000000000000004]);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',2, ...
    'Tag','Axes1Line8', ...
    'XData',[0.5 0.35], ...
    'YData',[0 0.03]);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',2, ...
    'Tag','Axes1Line7', ...
    'XData',[0.5 0.35], ...
    'YData',[0 -0.030000000000000001]);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',2, ...
    'Tag','Axes1Line6', ...
    'XData',[-0.35 -0.35], ...
    'YData',[0.03 0]);
h2 = line('Parent',h1, ...
    'Color',[1 1 0], ...
    'EraseMode','xor', ...
    'LineWidth',3, ...
    'Tag','Axes1Line5', ...
    'XData',[-0.3533333333333333 -0.2333333333333333], ...

```

```
'YData',[0 0]);
h2 = line('Parent',h1, ...
'Color',[1 1 0], ...
'EraseMode','xor', ...
'LineWidth',2, ...
'Tag','Axes1Line4', ...
'XData',[-0.35 -0.15], ...
'YData',[0 -0.030000000000000004]);
h2 = line('Parent',h1, ...
'Color',[1 1 0], ...
'EraseMode','xor', ...
'LineWidth',2, ...
'Tag','Axes1Line3', ...
'XData',[-0.2348809470778364 -0.15], ...
'YData',[0.2178702339998797 0.03]);
h2 = line('Parent',h1, ...
'Color',[1 1 0], ...
'EraseMode','xor', ...
'LineWidth',2, ...
'Tag','Axes1Line2', ...
'XData',[-0.3 -0.3], ...
'YData',[0.23 0.030000000000000001]);
h2 = line('Parent',h1, ...
'Color',[1 1 0], ...
'EraseMode','xor', ...
'LineWidth',2, ...
'Tag','Axes1Line1', ...
'XData',[-0.2348809470778364 -0.3], ...
'YData',[0.2178702339998797 0.23]);
h2 = patch('Parent',h1, ...
'EraseMode','xor', ...
'FaceColor',[1 0 0], ...
'Faces',mat9, ...
'Tag','Axes1Patch1', ...
'VertexNormals',mat10, ...
'Vertices',mat11);
if nargin > 0, fig = h0;
end
```


Simulation en boucle ouverte :

```

function ouverte(action)

if action==1

    A=[0          0    1.1320          0    -1.0000;
       0   -0.0538   -0.1712          0    0.0705;
       0          0          0    1.0000          0;
       0    0.0485          0   -0.8556   -1.0130;
       0   -0.2909          0    1.0532   -0.6859];

    B=[          0          0          0;
       -0.1200    1.0000          0;
          0          0          0;
        4.4190          0   -1.6650;
        1.5750          0   -0.0732];

    C=[0 0 0 0 0;
        0 0 0 0 0;
        0 0 1 0 0];

    D=zeros(3);
    D1=zeros(1,3);

    sys1=ss(A,B,[0 0 1 0 0],D1);
    h=sys1(1,3);

    %***** les poles *****
    p={'-0.0176 + 0.1826i';'-0.0176 - 0.1826i'};
    tex=findobj(gcf,'tag','poles');
    textt=get(tex,'string');
    set(textt,p);

    stephandle = findobj('Tag','stepslider');
    stepval=get(stephandle,'Value');
    de=-stepval*ones(2001,1);

    sys=ss(A,B,C,D);
    t=0:0.1:200;
    d=[zeros(2001,2) de];
    [y,x]=lsim(sys,d,t);
    theta=y(:,3);

    changel=theta;
    lt=length(theta);
    for nl=1:lt-1
        changel(1)=0;
        changel(nl+1)=theta(nl);
    
```

```

end
theta=change1;
theta=change1;
deltae=de;
ld=length(deltae);
change2=deltae;
for n2=1:ld-1
    change2(1)=0;
    change2(n2+1)=deltae(n2);
end
deltae=change2;

phandle = findobj('Tag','plotbox');
plotval=get(phandle,'Value');
if plotval == 1
    subplot(2,2,2)
    plot(t,theta)
else
    subplot(2,2,2)
    plot(t(1),theta(1), 'EraseMode', 'none')
end

if stepval > 0
    axis([0 200 -stepval*2 stepval*5])
elseif stepval < 0
    axis([0 200 stepval*5 -stepval*2])
else
    axis([0 200 -0.4 0.4])
end

title ('Step Response')
ylabel ('Pitch angle (rad)')
xlabel ('Time (sec)')

hold on

%programme d'animation
l=0.7;
l2=0.15;
l3=0.3;
l4=0.6;
l5=0.3;
l6=0.05;
h=0.03;
h2=0.2;
c=2*sqrt(h^2+(l/2)^2);
c2=2*sqrt(h^2+(l3/2)^2);

```

```

c3=2*sqrt(h^2+(14/2)^2);
c4=2*sqrt(h^2+(15/2)^2);
c5=sqrt(h2^2+(16)^2);
phi=atan(2*h/1);
phi2=atan(2*h/13);
phi3=atan(2*h/14);
phi4=atan(2*h/15);
phi5=atan(2*h2/16);

```

```

%les lines

```

```

xtopnose=c/2*cos(phi+theta);
ytopnose=c/2*sin(phi+theta);
xtoptail=-(c/2)*cos(phi-theta);
ytoptail=(c/2)*sin(phi-theta);

xbotnose=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybotnose=-c/2*sin(pi-phi+theta);
xbottail=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ybottail=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xtcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ytcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xtcapend=c/2*cos(phi+theta);
ytcapend=c/2*sin(phi+theta);

xbcaptip=(1/2+12)*cos(theta);
ybcaptip=(1/2+12)*sin(theta);
xbcapend=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybcapend=-c/2*sin(pi-phi+theta);

xendtop=-(c/2)*cos(phi-theta);
yendtop=(c/2)*sin(phi-theta);
xendbot=-(1/2)*cos(theta);
yendbot=-(1/2)*sin(theta);

xdiatop=-(1/2)*cos(theta);
ydiatop=-(1/2)*sin(theta);
xdiabot=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ydiabot=-(c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xwlbot=-(c3/2)*cos(phi3-theta);
ywlbot=(c3/2)*sin(phi3-theta);
xwltop=-(c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywltop=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

xwrbot=-(c4/2)*cos(phi4-theta);
ywrbot=(c4/2)*sin(phi4-theta);

```

```

xwrtop=- (c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-phi5+theta);
ywrtop=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);

xwtopr=- (c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-phi5+theta);
ywtopr=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);
xwtopl=- (c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywtopl=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

elevxl = -(1/3)*cos(theta)-0.12*cos(deltae);
elevxr = -(1/3)*cos(theta);
elevyl = -(1/3)*sin(theta)+0.12*sin(deltae);
elevyr = -(1/3)*sin(theta);

%Centre de gravité
radius=0.005;
arcstep = 18;
j = 0:arcstep:(360-arcstep);
arcx = radius * cos((j+arcstep) * pi/180);
arcy = radius * sin((j+arcstep) * pi/180);

subplot(2,2,4)
cla
K = plot([xtopnose(1) xtoptail(1)], [ytopnose(1) ytoptail(1)],
'k',...
'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');
hold on
L = plot([xbotnose(1) xbottail(1)], [ybotnose(1)
ybottail(1)],...
'k', 'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

M = plot([xtcaptip(1) xtcapend(1)], [ytcaptip(1)
ytcapend(1)], 'k',...
'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

N = plot([xbcaptip(1) xbcapend(1)], [ybcaptip(1)
ybcapend(1)], 'k',...
'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O = plot([xendtop(1) xendbot(1)], [yendtop(1)
yendbot(1)], 'k',...
'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O2 = plot([elevxl(1) elevxr(1)], [elevyl(1) elevyr(1)], 'r',...
'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [3], 'color', 'r');

P = plot([xdiatop(1) xdiabot(1)], [ydiatop(1)
ydiabot(1)], 'k',...

```

```

'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

Q = plot([xwrtop(1) xwrbot(1)],[ywrtop(1) ywrbot(1)],'k',...
'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

R = plot([xwltop(1) xwlbot(1)],[ywltop(1) ywlbot(1)],'k',...
'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

S = plot([xwtopr(1) xwtopl(1)],[ywtopr(1) ywtopl(1)],'k',...
'EraseMode','xor','LineWidth',[2],'color','y');

H = patch(arcx, arcy,'b','EraseMode','xor');

axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55])

mhandle = findobj('Tag','manbox');
man=get(mhandle,'Value');
if man == 1
    'Press any key to advance the animation'
    pause
end

itime=length(t);
axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55]);
title ('Animation')

%exécution de l'animation
for i = 2:itime-1,
    if man == 1
        pause
    end

    set(K,'XData',[xtopnose(i) xtoptail(i)]);
    set(K,'YData',[ytopnose(i) ytoptail(i)]);
    set(L,'Xdata',[xbotnose(i) xbottail(i)]);
    set(L,'Ydata',[ybotnose(i) ybottail(i)]);
    set(M,'XData',[xtcaptip(i) xtcapend(i)]);
    set(M,'YData',[ytcaptip(i) ytcapend(i)]);
    set(N,'XData',[xbcaptip(i) xbcapend(i)]);
    set(N,'YData',[ybcaptip(i) ybcapend(i)]);
    set(O,'XData',[xendtop(i) xendbot(i)]);
    set(O,'YData',[yendtop(i) yendbot(i)]);
    set(P,'XData',[xdiatop(i) xdiabot(i)]);
    set(P,'YData',[ydiatop(i) ydiabot(i)]);
    set(Q,'XData',[xwrtop(i) xwrbot(i)]);
    set(Q,'YData',[ywrtop(i) ywrbot(i)]);

```

```

set(R, 'XData', [xwltop(i) xwlbot(i)]);
set(R, 'YData', [ywltop(i) ywlbot(i)]);
set(S, 'XData', [xwtopr(i) xwtopl(i)]);
set(S, 'YData', [ywtopr(i) ywtopl(i)]);

set(O2, 'XData', [elevxl(i), elevxr(i)]);
set(O2, 'YData', [elevyl(i), elevyr(i)]);
drawnow;

if plotval == 0
    subplot(2,2,2)
        plot([t(i), t(i+1)], [theta(i), theta(i+1)],
'EraserMode', 'none')
        end

    end

%initialisation des traceurs
elseif action == 2

    %les constantes
    l=0.7;
    l2=0.15;
    l3=0.3;
    l4=0.6;
    l5=0.3;
    l6=0.05;
    h=0.03;
    h2=0.2;
    c=2*sqrt(h^2+(l/2)^2);
    c2=2*sqrt(h^2+(l3/2)^2);
    c3=2*sqrt(h^2+(l4/2)^2);
    c4=2*sqrt(h^2+(l5/2)^2);
    c5=sqrt(h2^2+(l6)^2);
    phi=atan(2*h/l);
    phi2=atan(2*h/l3);
    phi3=atan(2*h/l4);
    phi4=atan(2*h/l5);
    phi5=atan(2*h2/l6);
    theta=0;
    deltae=0;

    %les lines
    xtopnose=c/2*cos(phi+theta);
    ytopnose=c/2*sin(phi+theta);
    xtoptail=-(c/2)*cos(phi-theta);
    ytoptail=(c/2)*sin(phi-theta);

```

```

xbotnose=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybotnose=-c/2*sin(pi-phi+theta);
xbottail=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ybottail=- (c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xtcaptip=(1/2+l2)*cos(theta);
ytcaptip=(1/2+l2)*sin(theta);
xtcapend=c/2*cos(phi+theta);
ytcapend=c/2*sin(phi+theta);

xbcaptip=(1/2+l2)*cos(theta);
ybcaptip=(1/2+l2)*sin(theta);
xbcapend=-c/2*cos(pi-phi+theta);
ybcapend=-c/2*sin(pi-phi+theta);

xendtop=- (c/2)*cos(phi-theta);
yendtop=(c/2)*sin(phi-theta);
xendbot=- (1/2)*cos(theta);
yendbot=- (1/2)*sin(theta);

xdiatop=- (1/2)*cos(theta);
ydiatop=- (1/2)*sin(theta);
xdiabot=(c2/2)*cos(pi-phi2-theta);
ydiabot=- (c2/2)*sin(pi-phi2-theta);

xwlbtop=- (c3/2)*cos(phi3-theta);
ywlbtop=(c3/2)*sin(phi3-theta);
xwlbtop=- (c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywlbtop=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

xwrbtop=- (c4/2)*cos(phi4-theta);
ywrbtop=(c4/2)*sin(phi4-theta);
xwrtop=- (c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-phi5+theta);
ywrtop=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);

xwtopr=- (c4/2)*cos(phi4-theta)-c5*sin((0.6+pi)/2-phi5+theta);
ywtopr=(c4/2)*sin(phi4-theta)+c5*cos((0.6+pi)/2-phi5+theta);
xwtopl=- (c3/2)*cos(phi3-theta)-h2*sin(theta);
ywtopl=(c3/2)*sin(phi3-theta)+h2*cos(theta);

elevxl = -(1/3)*cos(theta)-0.12*cos(deltae);
elevxr = -(1/3)*cos(theta);
elevyl = -(1/3)*sin(theta)-0.12*sin(deltae);
elevyr = -(1/3)*sin(theta);

```

?Centre de gravité

radius=0.005;

```

arcstep = 18;
j = 0:arcstep:(360-arcstep);
arcx = radius * cos((j+arcstep) * pi/180);
arcy = radius * sin((j+arcstep) * pi/180);

%position initial de l'avion
subplot(2,2,4)
cla
K = plot([xtopnose xtcptail], [ytopnose ytoptail], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');
hold on

L = plot([xbotnose xbottail], [ybotnose ybottail],...
        'k', 'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

M = plot([xtcaptip xtcapend], [ytcaptip ytcapend], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

N = plot([xbcaptip xbcapend], [ybcaptip ybcapend], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O = plot([xendtop xendbot], [yendtop yendbot], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

O2 = plot([elevxl elevxr], [elevyl elevyr], 'r',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [3], 'color', 'y');

P = plot([xdiatop xdiabot], [ydiatop ydiabot], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

Q = plot([xwrtop xwrbot], [ywrtop ywrbot], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

R = plot([xwltop xwlbot], [ywltop ywlbot], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

S = plot([xwtopr xwtopl], [ywtopr ywtopl], 'k',...
        'EraseMode', 'xor', 'LineWidth', [2], 'color', 'y');

H = patch(arcx, arcy, 'b', 'EraseMode', 'xor');

hold off
axis([-0.55 0.55 -0.55 0.55])
title ('Animation')

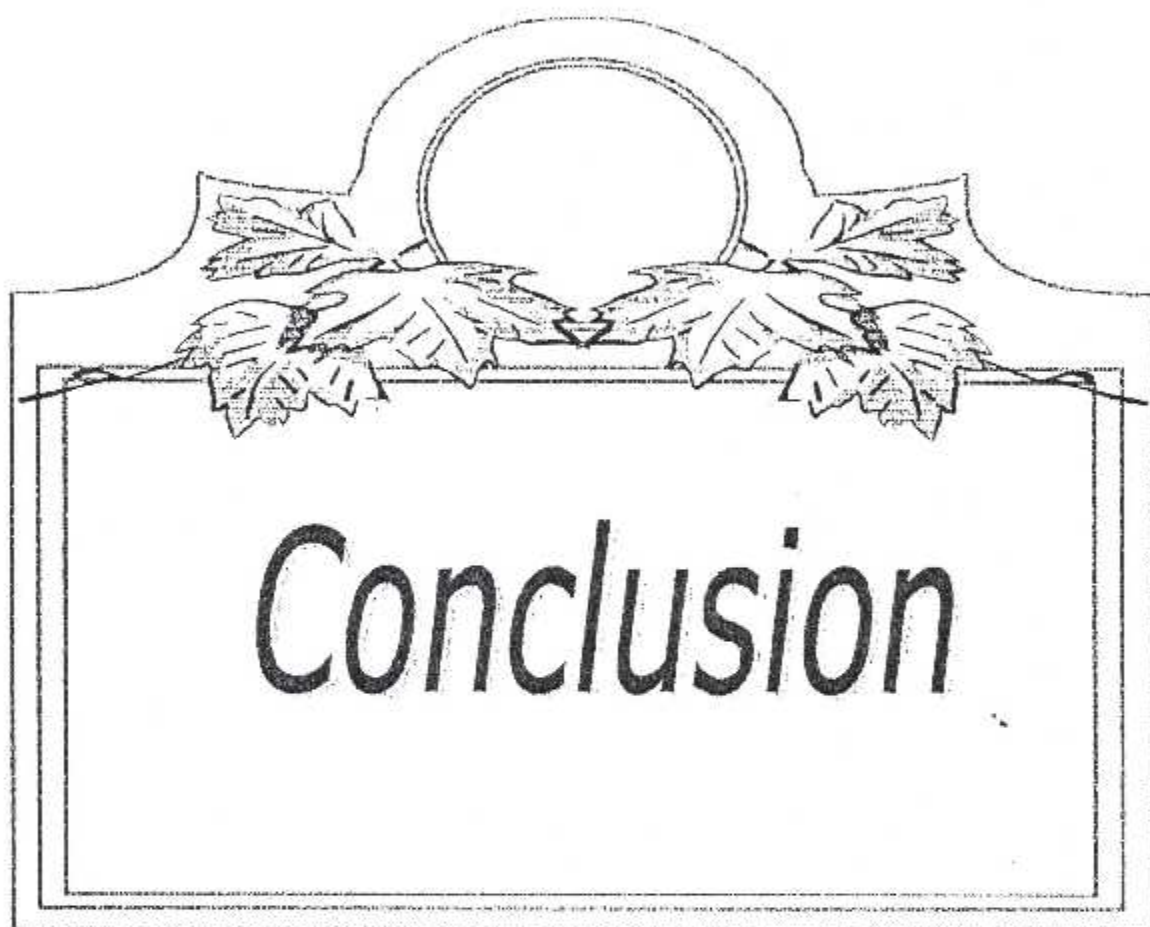
%initialiser la reponse
subplot (2,2,2)

```



```
cla
axis ([0 10 0 0.25])
ylabel ('Pitch angle (rad)')
xlabel ('Time (sec)')
title ('Step Response')

elseif action == 3
    stephandle = findobj('Tag', 'stepslider');
    stepval=get(stephandle, 'Value');
    curhandle = findobj('Tag', 'curtext');
    set(curhandle, 'String', sprintf('%0.4f', stepval));
end
```



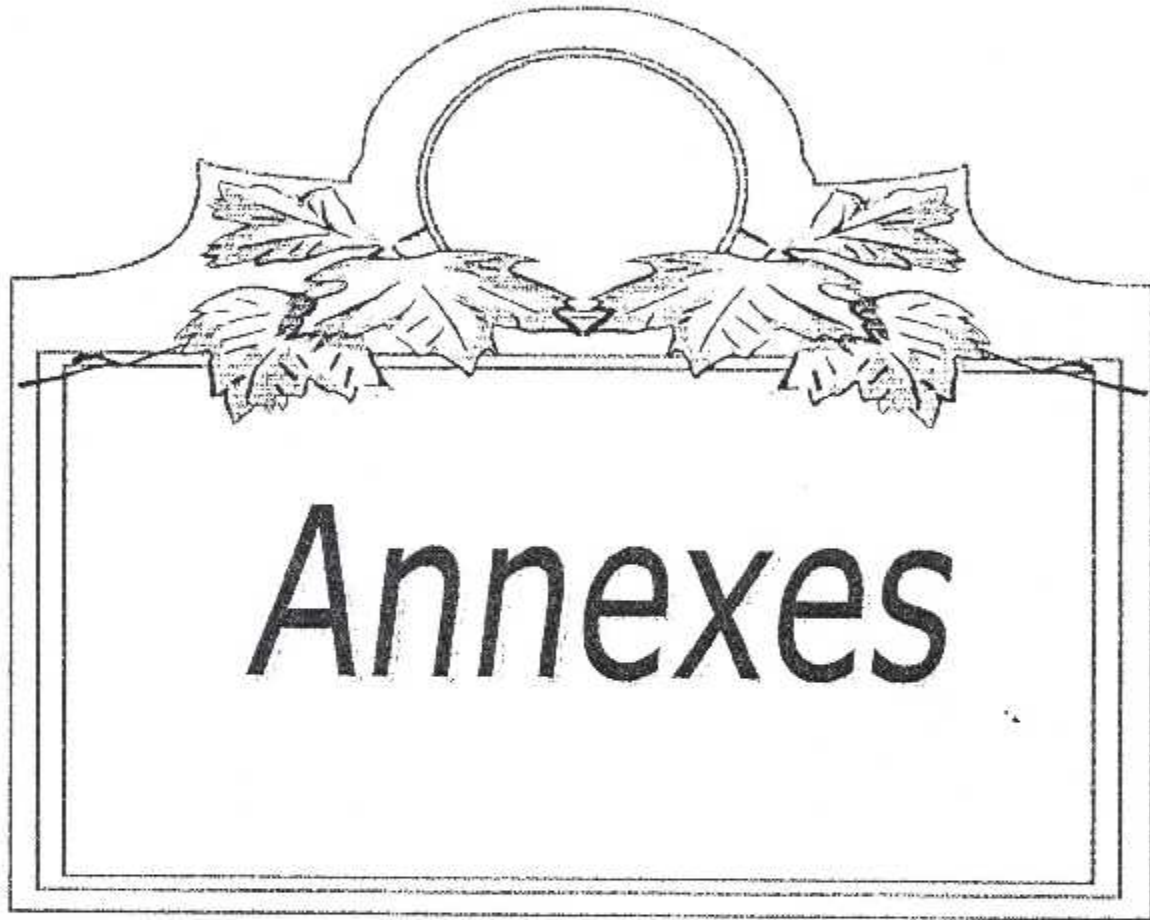
Conclusion

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail de thèse nous avons essayer d'élaboré une loi de commande qui régit le vol longitudinal d'un avion B777 et qui assure aussi la robustesse de ce vol . Pour cela on a proposé la commande optimal à critère quadratique dont on à démontré qu'elle possède des bonne propriétés de robustesse mais comme inconvénient elle ne peut pas filtré les différents perturbations qui affecte le vol, Pour cela on performe ce type de commande en l'ajoutant un filtre de KALMAN, Filtre capable d'éliminer les perturbations contrairement aux idée a priori ce couplage s'avère très faible en terme de robustesse et afin de résoudre ce problème on à adopter un recouvrement asymptotique c'est la commande LTR .

La simulation est implémenté à travers le logiciel MATLAB qui nous a permet aussi de visualiser les différents types de commandes appliqués sur notre avion dans le plans longitudinal.

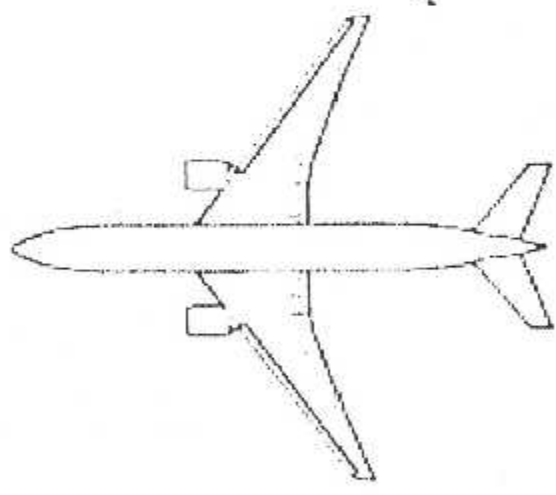
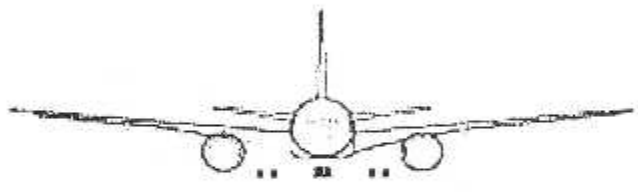
Nous suggérons pour les futurs travaux de concevoir une interface complète qui visualise le mouvement et aussi tout les indicateurs existant au bord de l'avion .



Annexes

L'avion Boeing :

Cette figure nous montre l'avion Boeing 777,veu plusieurs côtes :



CRACTERISTIQUES DE L'AVION BOEING 777 :

Longueur	63,70 m
Hauteur	18,50 m
Envergure	60,90 m
Fuel	91.380 litres
Vitesse maxi	0,84 mach
Motorisation	2 réacteurs Pratt & Whitney PW4077 / 4090 ou General Electric GE90-77B / 90-94B ou Rolls Royce Trent 877 / 895
Rayon d'action maximum	5.925 à 8.861 miles / 9.525 à 14.260 km
Nombre de places	320 à 440
Nombre de Mach	M0,79-M0,84
Vp maxi en croisière	490 kt
Vitesse d'atterrissage	140 kt / 1,3 Vs0
Catégorie en Approche	C
Masse maxi au décollage	242.67 T
Plafond certifié	FL 430
Autonomie maxi	7380 Nm / 169208L (<i>Avec réservoirs supplémentaires éventuels et charge marchande minimum</i>)
Taux de montée maxi	f/min (<i>au niveau de la mer</i>)
Longueur de piste au décollage	2652 m (<i>Passage 15m</i>)
Longueur de piste à l'atterrissage	1707 m (<i>Passage 15m</i>)
Classe SSIS	9

Turbulence de sillage	· II
Charge marchande	54.660T
Nombre de personnes à bord	2 + 440 (<i>maximum</i>)
I_{xx}	1948. slugs.sq.ft
I_{yy}	1346. slugs.sq.ft.
I_{zz}	2867. slugs.sq.ft.
I_{xz}	0.00 slugs.sq.ft.
X_{cg}	0.25

Les dérivées de « Stabilité longitudinales » sont définies par :

$$X_u = \frac{-(CD_u + 2 * CD_0) * Q * S}{m * u_0}$$

$$X_\alpha = X_w * U_0 = \frac{-(CD_\alpha + 2 * CL_\alpha) * Q * S}{m * u_0}$$

$$X_h = 0$$

$$Z_u = \frac{-(CL_u + 2 * CL_0) * Q * S}{m * u_0}$$

$$X_\alpha = Z_w * u_0 = \frac{-(CL_\alpha + 2 * CD_0) * Q * S}{m}$$

$$Z_h = 0$$

$$M_u = Cmu * \frac{Q * S * C}{u_0 * B}$$

$$M_w' = Cm\alpha' * \frac{Q * S * C^2}{2 * u_0 * B}$$

$$M_w = Cm\alpha * \frac{Q * S * C}{u_0 * B}$$

$$M_q = Cm q * \frac{Q * S * C^2}{2 * u_0 * B}$$

$$X_{\delta m} = \frac{-Q * S * C_{D\delta m}}{m}$$

$$Z\delta m = -C_{Z\delta m} * \frac{Q * S}{m}$$

$$M\delta m = -C_{m\delta m} * \frac{Q * S * C}{B}$$

$$M\delta m = 0$$

$$X\delta x = 0$$

ANNEXE II

II\ MATRICE DE PASSAGE :

L'avion est initialement supposée orienter de manière que ses axes (x, y, z) Soient parallèles à (x', y', z') puis soumis aux trois rotations suivantes :

II-1\ MOUVEMENT DE LACET D'ANGLE POSITIF ψ AROUND CZ :

Soit le repère (x₁, y₁, z₁) la base de repère (c, x₁, y₁, z₁) et (x, y, z) celle du repère (c, x, y, z).

On peut écrire :

$$\vec{x}_1 = \alpha_1 \vec{x} + \beta_1 \vec{y} + \gamma_1 \vec{z} \quad \dots(1)$$

$$\vec{y}_1 = \alpha_2 \vec{x} + \beta_2 \vec{y} + \gamma_2 \vec{z} \quad \dots(2)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z} \quad \dots(3)$$

$$(1). \vec{x} \longrightarrow \vec{x}_1 \cdot \vec{x} = \alpha_1 = \cos(\psi)$$

$$(1). \vec{y} \longrightarrow \vec{x}_1 \cdot \vec{y} = \beta_1 = \cos(\pi/2 - \psi) = \sin(\psi)$$

$$(1). \vec{z} \longrightarrow \vec{x}_1 \cdot \vec{z} = \gamma_1 = 0$$

$$(2). \vec{x} \longrightarrow \vec{y}_1 \cdot \vec{x} = \alpha_2 = \cos(\pi/2 + \psi) = -\sin(\psi)$$

$$(2). \vec{y} \longrightarrow \vec{y}_1 \cdot \vec{y} = \beta_2 = \cos(\psi)$$

$$(2). \vec{z} \longrightarrow \vec{y}_1 \cdot \vec{z} = \gamma_2 = 0$$

ainsi on peut écrire :

$$\vec{x}_1 = \cos(\psi) \vec{x} + \sin(\psi) \vec{y}$$

$$\vec{y}_1 = -\sin(\psi) \vec{x} + \cos(\psi) \vec{y} \quad \dots(I)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}$$

II-2\ MOUVEMENT DE TANGAGE D'ANGLE POSITIF θ AROUND CY₁ :

Soit le repère (x₂, y₂, z₂) la base du repère (c, x₂, y₂, z₂) de la même que le précédente

on peut facilement obtenir :

$$\vec{x}_2 = \cos(\theta) \vec{x}_1 - \sin(\theta) \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_2 = \vec{y}_1 \quad \dots(II)$$

$$\vec{z}_2 = \cos(\theta) \vec{z}_1 + \sin(\theta) \vec{y}_1$$

II-3 \ MOUVEMENT DE ROULIS D'ANGLE POSITIF Φ AUTOUR cx_2 :

Soit le repère (x_3, y_3, z_3) la base de repère (c, x_3, y_3, z_3) de manière on peut obtenir :

$$X_3 = X_2$$

$$\vec{y}_3 = \cos(\Phi) \vec{y}_2 + \sin(\Phi) \vec{z}_2 \quad \dots(III)$$

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$

$$\vec{z}_3 = \cos(\Phi) \vec{z}_2 - \sin(\Phi) \vec{y}_2$$

En substituant les équations (I) et (II) dans les équations (III) on obtient la transformation permettant de passer du repère initial (c, x, y, z) au repère final

(c, x_3, y_3, z_3) . cette transformation est donnée par :

$$\vec{x}_3 = x \cos(\theta) \cos(\psi) + y \cos(\theta) \sin(\psi) - z \sin(\theta)$$

$$\vec{y}_3 = x(\cos\psi \sin\theta \sin\Phi - \sin\psi \cos\Phi) + y(\cos\psi \sin\Phi + \sin\psi \sin\theta \sin\Phi) + z \cos\theta \sin\Phi$$

$$\vec{z}_3 = x(\cos\psi \sin\theta \cos\Phi + \sin\psi \sin\Phi) + y(\sin\psi \cos\Phi - \cos\psi \sin\Phi) + z \cos\theta \cos\Phi$$

ANNEXE III

→ Une matrice A est définie positif si :

$$\forall V \neq 0, \quad V^T * A * V > 0$$

alors, Si $\lambda_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) sont les valeur propres de A :

$$\lambda_i > 0 \quad i=1, \dots, n$$

→ Une matrice A est semis-définie positive si :

$$\forall V \neq 0, \quad V^T * A * V \geq 0$$

alors, Si $\lambda_i > 0$ ($i=1, \dots, n$) sont les valeur propres de A :

$$\lambda_i \geq 0 \quad i=1, \dots, n$$

→ Si $f(x) = Y^T X$, ou $f(x) = X^T Y$, avec $A \in R^{n \times n}$ constante ou indépendant de X , il vient :

$$\frac{df}{dX} = A^T$$

à partir des résultats obtenus ci-dessus, nous aurons :

→ Si $f(x) = X^T A X$, avec $A \in R^{n \times n}$ constante ou indépendant de X , il vient :

$$\frac{df}{dX} = AX + A^T X$$

si A est symétrique :

$$\frac{df}{dX} = 2AX$$

→ Si $f(x) = Y^T A X$, avec $X, Y \in R^{n \times 1}$ et A et Y sont indépendant de X , il vient :

$$\frac{df}{dX} = A^T Y$$

I-1\FORMULATION DU PROBLEME :

Soit le processus décrit dans l'équation d'état sous la forme :

$$\dot{X} = f(x, u, t) \quad \dots(\text{III-1})$$

Les conditions initiale X_0 et X_f doivent satisfaire les conditions :

$$K(t_0, t_f) = 0 \quad , \quad L(t_0, t_f) = 0 \quad \dots(\text{III-2})$$

La détermination d'une commande optimale U consiste à rechercher la trajectoire $X(t)$ en minimisant le critère :

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, x', t) dt + G(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad \dots(\text{III-3})$$

La résolution de ce problème fait appel au "calcul des variation"

I-2\ VARIATION D'UNE FONCTIONNELLE :

Soit

$$J(t) = \int_{t_0}^{t_f} r(x, x', t) dt + G(x_0, t_0, x_f, t_f) \quad \dots(\text{III-4})$$

Et considérons la trajectoire perturbée $x(t) + \delta x(t)$, dont $\delta x(t)$ temps $[t_0 + \delta t_0, t_f + \delta t_f]$.

En introduit la notion suivante :

$$\begin{aligned} \delta J &= J(x + \delta x) - J(x) \\ r_0 &= r(x(t_0), x'(t_0), t_0) \\ r_f &= r(x(t_f), x'(t_f), t_f) \end{aligned} \quad \dots(\text{III-5})$$

Et en faisant un développement limite an 1^{er} ordre sur la fonction J on obtient :

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (r_x^T \delta x + r_x^T d/dt(x\delta)) dt + (r_f \delta t_f - r_0 \delta t_0) + (G_{x_0}^T \delta x_0 + G_{t_0} \delta t_0) + (G_{x_f}^T \delta x_f + G_{t_f} \delta t_f) \quad \dots(\text{III-6})$$

soit :

$$I = \int_{t_0}^{t_f} r_x^T d/dt(x\delta) dt \quad \dots(\text{III-7})$$

L'intégration par partie de I donne :

$$I = r_x^T \delta x \int d/dt(r_x^T) \delta x dt$$

donc les nouveau d'état initiaux et finaux du système s'expriment sous la forme :

$$x(t_f + \delta t_f) = x(t_f) + \delta x(t_f) + x'(t_f) \delta t_f \quad \dots \text{(III-9)}$$

$$x(t_0 + \delta t_0) = x(t_0) + \delta x(t_0) + x'(t_0) \delta t_0 \quad \dots \text{(III-10)}$$

et :

$$\begin{aligned} \delta x_f &= \delta x(t_f) + x'(t_f) \delta t_f \\ \delta x_0 &= \delta x(t_0) + x'(t_0) \delta t_0 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-10)}$$

d'après (III-6), (III-7) et (III-9) :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_f} (r_x - d/dt r_x)^T \delta x dt + \left[(r - r_x^T x')_f + G_{t_f} \right] \delta t_f + \left[r_x(t_f) + G_{x_f} \right]^T \delta x_f \\ &\quad \left[(r - r_x^T x')_0 + G_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[r_x(t_0) + G_{x_0} \right]^T \delta x_0 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-11)}$$

Si $X^*(t)$ est la trajectoire minimisant le fonctionnel $J(x)$, cette minimisation implique que quelque soit les variations admissibles sur la trajectoire, telles que :

$$\begin{aligned} \delta J_x \delta x_f + L_f &= 0 \\ K x_0 \delta x_0 + K t_0 \delta t_0 &= 0 \end{aligned} \quad \dots \text{(III-12)}$$

on ait :

$$\delta J = J(x^* + \delta x) - J(x^*) \geq 0 \quad \dots \text{(III-13)}$$

* $\forall \delta x$:

$$\int_{t_0}^{t_f} (r_x - d/dt r_x)^T \delta x dt \geq 0 \quad \dots \text{(III-14)}$$

* $\forall \delta x_f$ et : δt_f :

$$\left[(r - r_x^T x')_f + G_{t_f} \right] \delta t_f + \left[r_x(t_f) + G_{x_f} \right]^T \delta x_f \geq 0 \quad \dots \text{(III-15)}$$

* $\forall \delta x_0$ et : δt_0 :

$$\left[(r - r_x^T x')_0 + G_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[r_x(t_0) + G_{x_0} \right]^T \delta x_0 \geq 0 \quad \dots \text{(III-16)}$$

I-3\CONDITION D'EULER :

LEMME DE LAGRANGE :

Si $Y(t)$ est une fonction continue sur $[t_0, t_1]$ et si :

$$\int_{t_0}^{t_1} Y^T(t)x(t)dt = 0$$

« Si pour toute fonction $\alpha(t)$ continue, alors $Y(t)$ est identiquement nulle sur $[t_0, t_1]$ »

Donc l'équation (III-14) donne :

$$r_x - d/dt r_x = 0 \quad \text{équation d'EULER}$$

I-4\CONITION DE HAMILTON :Si on pose : $\lambda(t) = r_x$

L'équation d'EULER implique :

$$\lambda' = r_x$$

Il est possible d'écrire x' sous la forme :

$$x' = \phi(x, \lambda, t)$$

Le HAMILTONIEN est la quantité :

$$H(x, \lambda, t) = -r + \lambda' \phi$$

Il vient :

$$H_x = -r_x + \phi_x^T \lambda - \phi_x^T r_x$$

et comme :

$$\text{On a : } H = -\lambda'$$

De même :

$$H_\lambda = \phi + \phi_\lambda^T \lambda - \phi_x^T r_x = \phi$$

Donc :

$$H = x'$$

et :

$$H_t = -r_t + \phi_t^T r_x + \lambda^T \phi$$

donc

$$H = -r_t$$

On obtient les équations canonique de HAMILTON :

$$dH / dx = -\dot{\lambda}$$

$$dH / d\lambda = -x'$$

$$dH / dt = -r_t$$

I-5) PRINCIPE DU MAXIMUM :

Le principe du maximum s'énonce comme :

“La commande optimale est celle qui maximise le Hamiltonien”

ce ci donne :

$$dH / dt = 0$$

ANNEXE VPASSAGE D'UN BRUIT BLANC DANS UN SYSTEME LINEAIRE :

Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = p(t)x(t) + v(t) \quad \dots (V-1)$$

1- $x(t)$ est un processus markovien

la relation qui lie $x(t')$ à $x(t)$ s'écrit :

$$x(t') = \Phi(t', t)x(t) + \int_t^{t'} \Phi(t', \tau)v(\tau)d\tau \quad \dots(V-2)$$

a partir de cette formule qui permettrait de démontrer le caractère markovien de $x(t)$, nous allons retrouver les propriétés statistiques de $x(t)$ à l'ordre 2.

2- moment d'ordre 1 et 2

puisque $v(t)$ est à moyenne nulle, il vient :

$$E[x(t')] = \Phi(t', t)E[x(t)]$$

Posons :

$$\begin{aligned} M(t) &= E[x(t)] \\ M(t') &= \Phi(t', t)M(t) \end{aligned} \quad \dots(V-3)$$

Calculons :

$$\Lambda(t_1, t_2) = E[(x(t_1) - M(t_1))(x(t_2) - M(t_2))^T]$$

Pour $t' \geq t$, l'application des formules III.12 et III.13 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda(t', t) &= \Phi(t', t)\Lambda(t, t) \\ \Lambda(t, t') &= \Lambda(t, t)\Phi^T(t', t) \end{aligned}$$

En raison de l'indépendance de $x(t)$ et des $v(\tau)$ pour $\tau \geq t$.

Exprimons $\Lambda(t', t')$ en fonction de $\Lambda(t, t)$:

$$X(t') - M(t') = \Phi(t', t)(x(t) - M(t)) + \int_t^{t'} \Phi(t', \tau)v(\tau)d\tau$$

Calculons :

$$A = (x(t') - M(t'))(x(t') - M(t'))^T$$

$$A = \Phi(t', t)(x(t) - M(t))(x(t) - M(t))^T \Phi^T(t', t) + \Phi(t', t)(x(t) - M(t)) \left(\int_t^{t'} \Phi(t', \tau) v(\tau) d\tau \right)^T$$

$$\Phi(t', \tau) v(\tau) d\tau)^T$$

$$+ \left(\int_t^{t'} \Phi(t', \tau) v(\tau) d\tau \right) (x(t) - M(t))^T \Phi^T(t', t) + \iint_t^{t'} \Phi(t', \tau) v(\tau) v^T(u) \Phi^T(t', u) du d\tau$$

(t', u) du d\tau

Il reste à calculer $E[A]$.

Dans le premier terme, nous reconnaissons $\Lambda(t, t)$. les deux termes suivants sont nuls (covariance de terme indépendants et e moyenne nulle).

Dans le dernier terme, la présence de $E[v(\tau)v^T(u)] = Q(\tau) \delta(\tau - u)$ montre qu'il faut intégrer pour $\tau = u$ par rapport à une seule variable.

En définitive, il vient :

$$\Lambda(t', t') = \Phi(t', t) \Lambda(t, t) \Phi^T(t', t) + \int_t^{t'} \Phi(t', \tau) Q(\tau) \Phi^T(t', \tau) d\tau$$

On peut maintenant repasser aux équations différentielles en écrivant que les Λ calculés sont solutions des équations :

$$\dot{M}(t) = F(t) M(t)$$

$$\dot{\Lambda}(t, t) = F(t) \Lambda(t, t) + \Lambda(t, t) F^T(t) + Q(t) \quad \dots(V-4)$$

ANNEXE VI

1\COMPORTEMENT DES MODES EN BOUCLE FERMEE :

Dans la commande optimale nous analyserons le comportement des modes en boucle fermée lorsque $\rho \rightarrow 0$ et $\rho \rightarrow \infty$ où ρ désigne le facteur de pondération sur la commande qui apparaît dans le critère.

$$J = \int_0^{\infty} (z^2 + \rho u^2) dt = \int_0^{\infty} (x^T N^T N x + \rho u^2) dt$$

A cet effet, nous rappelons d'abord dans un lemme les formules donnant le déterminant d'une matrice partitionnée à partir des matrices élémentaires.

Soit M une matrice carrée

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix}$$

$$\det M = \det(M_1) \det(M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2) \quad \text{si } \det M_1 \neq 0 \quad \dots(1-1)$$

$$\det M = \det(M_4) \det(M_1 - M_3 M_4^{-1} M_2) \quad \text{si } \det M_4 \neq 0 \quad \dots(1-2)$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} I_m & N_1 \\ -N_2 & I_n \end{bmatrix} \right) = \det(I_n + N_2 N_1) = \det(I_m + N_1 N_2) \quad \dots(1-3)$$

dans la suite, nous désignerons par :

$$\varphi(s) = \det(sI - A)$$

$$G_c(s) = \frac{\psi(s)}{\varphi(s)} N(sI - A)^{-1} B$$

où $G_c(s)$ représente la fonction de transfert reliant en boucle ouverte la commande $u(t)$ à la sortie régulée $z(t)$.

Pour analyser le comportement des modes, nous nous intéressons aux modes de la matrice Hamiltonienne en calculant $\det(sI - H)$. Nous avons :

$$\det(sI - H) = \det \left(\begin{bmatrix} sI - A & \rho^{-1} B B^T \\ N^T N & sI + A^T \end{bmatrix} \right)$$

que l'on peut réécrire en utilisant la relation (1-1) sous la forme suivante

$$\det(sI - H) = \varphi(s) \det \left((sI + A^T) - N N (sI - A)^{-1} \rho^{-1} B B^T \right)$$

la mise en facteur de $(sI + A^T)$ suivie de l'utilisation de la relation (I-3) conduisent à :

$$\det(sI - H) = (-1)^n \varphi(s)\varphi(-s)(1 + \rho^{-1}G_c(s)G_c(-s))$$

Les $2n$ valeurs propres de la matrice Hamiltonienne sont donc solutions de l'équation algébrique :

$$\varphi(s)\varphi(-s) + \rho^{-1}\psi(s)\psi(-s) = 0 \quad \dots(I-4)$$

précisons maintenant les zéros des deux polynômes $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ sous la forme suivante :

$$\varphi(s) = \prod_{i=1}^n (s - \pi_i) \quad \dots(I-5)$$

$$\psi(s) = \alpha \prod_{i=1}^q (s - v_i) \quad \dots(I-6)$$

L'équation (I-4) se réécrit sous la forme (I-7).

$$\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)(s + \pi_i)(-1)^{n-q} \alpha^2 \rho^{-1} \prod_{i=1}^q (s - v_i)(s + v_i) = 0 \quad \dots(I-7)$$

La forme de cette expression nous permet l'application directe des règles du lieu d'Evans conduisant au positionnement des pôles en boucle fermée à partir de la position des pôles et zéros en boucle ouverte. L'expression (I-5) conduit alors directement aux conclusions suivantes :

Quand $\rho \rightarrow 0$, $2q$ racines parmi les $2n$ racines tendent asymptotiquement vers les q zéros v_i ($i=1, \dots, q$) et leurs opposés $-v_i$ ($i=1, \dots, q$)

Comme nous nous intéressons parmi ces $2n$ valeurs propres aux n valeurs propres à partie réelle négative, nous aboutissons aux résultats suivants, qui précisent la position des modes en boucle fermée d'une commande LQ dans le cas monovarié (dimz=dimu=1) avec

$$G_c(s) = \frac{\alpha \prod_{i=1}^q (s - v_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}$$

Lorsque $\rho \rightarrow 0$, q des n modes en boucle fermée tendent asymptotiquement vers les valeurs :

$$\hat{v}_i = \begin{cases} v_i & \text{Si } R_c(v_i) \leq 0 \\ -v_i & \text{Si } R_c(v_i) < 0 \end{cases}$$

Lorsque $\rho \rightarrow 0$, les $(n-q)$ modes restants tendent asymptotiquement vers l'infini dans des directions, se coupant à l'origine et formant avec l'axe réel.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{i\pi}{n-q} \quad i = 0, 1, \dots, \frac{n-q-1}{2} \text{ Si } n-q \text{ est impair} \\ \pm \frac{(i+0.5)\pi}{n-q} \quad i = 0, 1, \dots, \frac{n-q}{2} - 1 \text{ Si } n-q \text{ est pair} \end{array} \right.$$

Pour $\rho \rightarrow 0$ (aucune limitation sur l'amplitude de la commande n'est spécifiée), la tendance est une accélération du temps de réponse. Si le système est à déphasage minimal, on vient de montrer que les zéros de $G_c(s)$ composent les pôles en boucle fermée à distance finie. Et le système en boucle fermée des vient infiniment rapide. Notons, dans ce cas, la solution P de l'équation de RECATI tend vers 0.

BIBLIOGRAPHIE :

- J.L.KRIEF Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace
« SUP'AERO » « LE FILTRE DE KALMAN »
- Daniel ALAZARD « Robustesse et Commande Optimale »
- M. Rivoir « Cours d'automatique : signaux et système », édition Eyrolles.
- P. Borne « Commande et optimisation des Processus », édition technip.
- Landau « Commande adaptatif » édition dekker ,1979
- P.Larminat « Automatique :Commande des systèmes linéaires », édition
Hermes.
- Roskam « Airplane Flight Dynamics and Automatic flight Control »,
Partie I et II, university of Kansas, 1982.
- D. Kauvin « Aérodynamique, Mécanique du vol » édition 1983
- Simulink « Dynamic System simulation Software User Guide »
- Gonzalez « Mathematical Modling for Analysis of non-lineare Aircraft
Dynamics »,1990.