

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**

**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE SAAD DAHLEB DE BLIDA 1**

*Institut d' Aéronautique et des études spatiales*

Département de construction aéronautique



**MEMOIRE DE FIN D' ETUDES**

**EN VUE DE L' OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN AÉRONAUTIQUE**

**Option : Avionique**

**Thème :**

**Etude et commandes LQG,  $H_{\infty}$  dédiées à  
un UAV type voilure fixe**

**Réalisé par :**

M<sup>lle</sup>. AMARA Nesrine

M<sup>lle</sup>. CHAIBERRAS Mawia

**Encadré par :**

Mr/ DILMI Smain.

**Promotion: 2015/2016**

## ملخص

تتناول هذه الأطروحة السيطرة القوية من قبل نهج LQG و  $H_{\infty}$  لأنظمة متعددة المتغيرات الخاضعة للاضطرابات المعلمة. لقد اخترنا لتطبيق هاتين المقاربتين للتحكم المتين نموذج الطائرة بدون طيار Zagi Fling Wing 2010. المقاربة LQG تكمن في تركيب مراقب متين بالحد الأدنى في معيار رباعي للأنظمة متعددة المتغيرات الموصوفة. المراقب LQG مؤلف من مقيم الحالة (مرشح كلمان، Filtre de Kalman) والتحكم برجوع الحالة (LQ). هذا الأخير يعمل على اضعاف خاصية متانة المقيم، فلجانا الى استعمال استرجاع بتحويل الحلقة (LTR) الذي يتعلق باعادة خاصيات متانة المقيم، حيث أننا أثبتنا في النتائج المتحصل عليها في التصنع على فعالية هذه على النظام الاسمة والمضطرب للنموذج. النهج  $H_{\infty}$  هو نموذج لتشكيل التحويل الحلقي بحيث يقدم حلا وسطا جيدا بين المتانة والأداء. ويتحقق هذا التشكيل من قبل المرشحات التي تمت إضافتها في حلقة السيطرة، حول وظيفة نقل النظام. ويتم اختيار هذه المرشحات لتكون لها قيم فريدة لها مكاسب عالية التردد المنخفض، وتوهين في الترددات العالية وفي ترددات قطع معينة.

كلمات البحث: ديناميكية، مراقبة، المحاكاة، الطائرات بدون طيار، خطي، غير خطي، LQG،  $H_{\infty}$ ، Zagi.

## Résumé :

Ce mémoire traite de la commande robuste par les approches LQG et  $H_{\infty}$  des systèmes multivariables soumis à des perturbations paramétriques. Nous avons choisi d'appliquer ces deux lois de commande robuste sur le modèle de drone Zagi Flying Wing 2010. L'approche LQG consiste à synthétiser un contrôleur robuste minimisant un critère quadratique pour les systèmes multivariables décrits sous forme d'espace d'état. Le contrôleur LQG est constitué d'un Estimateur d'état (Filtre de KALMAN) et d'une commande par retour d'état (LQ). La présence de cette dernière fait qu'affaiblir les propriétés de robustesse de l'Estimateur, alors on a utilisé le recouvrement du transfert de la boucle LTR, pour restaurer les propriétés de robustesse de l'Estimateur, par conséquent les résultats obtenus en simulation ont montrés l'efficacité de cette approche sur le régime nominal et perturbé des deux systèmes. L'approche  $H_{\infty}$  consiste à modeler le transfert de la boucle de telle sorte qu'il présente un bon compromis entre la robustesse et les performances. Ce modelage est réalisé par les filtres qui sont ajoutés dans la boucle de régulation, autour de la fonction de transfert du système. Ces filtres sont choisi tels que les valeurs singulières présentent un gain élevé en basse fréquence, une atténuation en hautes fréquence et une certaine fréquence de coupure.

Mots clés: control, dynamique,  $H_{\infty}$ , linéaire, LQG, non linéaire, simulation, UAV, Zagi.

## Abstract:

This memory deals with the robust control by using LQG and  $H_{\infty}$  approaches for a multivariable system subject to parametric disturbances. We have chosen to apply these two robust control laws on a Zagi Fling Wing 2010 drone. The LQG approach consists on synthesizing a robust controller that minimizes a quadratic criterion for a state space multivariable system. The LQG controller comprises a state estimator (Kalman Filter) and a state feedback control (LQ). The presence of this latter weakens the robustness properties of the estimator, so we used the loop transfer recovery LTR, to restore the robustness properties of the estimator; hence the results obtained by simulation have shown the effectiveness of this approach on the nominal and the disrupted systems. The  $H_{\infty}$  approach consists on modeling the loop transfer so that it presents a good compromise between robustness and performance. This modeling is achieved by filters that are added in the control loop, around the system transfer function. These filters are selected such that the singular values have a high gain at low frequencies and attenuation in high frequencies and a certain cutoff frequency.

Keywords: control, dynamics,  $H_{\infty}$ , linear, LQG, non linear, simulation, UAV, Zagi.

## Dédicaces

Que ce travail témoigne de mes respects :

### **A mes parents Mhamed et Fatima Zohra:**

Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux. Je prie Allah de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi. Je vous dédie ce travail en témoignage de mon profond amour. Puisse Allah, le tout puissant, vous préserver et vous accorder santé, longue vie et bonheur.

### **A mon cher grand frère Mehdi et à mes très chères sœurs Rahil et Bouchra:**

En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affection que je porte pour vous. Je vous dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

### **A ma grand mère maternelle Yemma keltoum :**

Grace à tes conseils et tes prières je suis une personne meilleure. Je te dédie ce travail avec tous mes vœux de bonheur, de santé et de longue vie.

### **A la mémoire de mes grands parents Abdelkader, Amar et Bekhta :**

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours eu pour vous.

### **A tous les membres de ma famille Petits et grands :**

Veillez trouver dans ce modeste travail l'expression de mon affection

### **A mes cher(e)s ami(e)s Houria, Sara, Imène, Nesrine, Chaima, Laalia, Fethia, Reda, Hiba, Yousra, meriem et Hanane:**

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous uni et des souvenirs de tous les moments que nous avons passé ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

### **A Mme Chahbounia et à Mme Hassina :**

Elles vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'elles n'ont cessé de me porter. Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération.

### **A mes collègues de la promotion 2016 Amal, Lydia, Safia, Chaima, Sarah et Islem:**

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

### **A tous ceux qui avec un mot m'ont aidée à continuer Et enfin à vous qui lisez ce mémoire**

*Mawia*

## Dédicaces

Je tiens, tout d'abord, à remercier mes parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi afin que je puisse arriver là ; Je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, ainsi et sans oublier ma chère binôme Mawia et ses parents pour leur chaleureuse hospitalité...

### **Je dédie ce mémoire :**

à ma famille avec tous mes sentiments de respect, d'amour, de gratitude et de reconnaissance pour tous les sacrifices déployés pour m'élever dignement et assurer mon éducation dans les meilleures conditions. ...

à Ma Mère, qui a œuvré pour ma réussite, par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie.

à mon frère Farouk ma sœur Imene, à toute ma famille sans exception.

à tous mes amis et collègues de la promotion 2016.

*Nesrine*

## Remerciement

---

Louange à Allah, seigneur de l'univers, pour la volonté, la santé, et le courage qu'Il nous a donné pour la réalisation de ce travail.

Nous tenons ainsi, à exprimer ici tout notre respect et toute notre reconnaissance à notre encadreur Monsieur : DILMI Smain, pour sa bienveillance, sa gentillesse, ses encouragements et ses conseils.

Nous remercions vivement les membres du jury pour avoir accepté d'évaluer ce modeste mémoire :

Mme Mouffok d'avoir accepté de juger notre travail et de présider le jury. Mme Khelifa et Mme Benenia de nous avoir fait l'honneur d'accepter de juger notre travail.

Nous tenons également à remercier Monsieur CHOUTRI Khireddine de nous avoir consacré une partie de son temps et de son effort pour nous aider à progresser dans notre mémoire.

En fin, nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

# Nomenclature

---

$A$  : Matrice d'état du système linéaire.

$A_{lat}$  = Matrice d'état du mode latéral directionnel.

$A_{long}$  = Matrice d'état du mode longitudinal.

$B$  : Matrice d'action des commandes du système linéaire.

$B_{lat}$  = Matrice d'action des commandes du mode latéral directionnel.

$B_{long}$  = Matrice d'action des commandes du mode longitudinal.

$c$  [m] : La corde aérodynamique moyenne.

$C$  : Matrice d'état de sortie du système linéaire.

$C_1$  : Coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de roulis.

$C_{lat}$  = Matrice d'état de sortie du mode latéral directionnel.

$C_{long}$  = Matrice d'état de sortie du mode longitudinal.

$C_m$  : Coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de tangage.

$C_n$  : Coefficient aérodynamique de moment sur l'axe de lacet.

$C_x$  : Coefficient aérodynamique de trainée.

$C_y$  : Coefficient aérodynamique de force latéral.

$C_z$  : Coefficient aérodynamique de portance.

$D$  : Matrice de commande de sortie du système linéaire.

$D_{lat}$  = Matrice de commande de sortie du mode latéral directionnel.

$D_{long}$  = Matrice de commande de sortie du mode longitudinal.

$M_{ext}$  [kg.m<sup>2</sup>] : Les moments extérieurs.

$F$  [N] : Force extérieure s'exerçant sur l'avion.

$F_x, F_y, F_z$  [N] : Forces aérodynamiques dans le repère  $X_b Y_b Z_b$ .

$G(s)$  : Fonction de transfert.

$g$  [m/s<sup>2</sup>] : Force de gravité ou Pesanteur.

$h$  [m] : Altitude du drone.

$H_x, H_y, H_z$  [N.m] : Les moments cinétiques de l'avion dans le repère  $X_b Y_b Z_b$ .

$I$  : Matrice identité.

$I_x$  [kg.m<sup>2</sup>] : Moment d'inertie suivant  $X_b$ .

$I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$  [kg.m<sup>2</sup>] : Moment d'inertie de l'avion dans le repère  $X_b Y_b Z_b$ .

$I_y$  [kg.m<sup>2</sup>] : Moment d'inertie suivant  $Y_b$ .

$I_z$  [kg.m<sup>2</sup>] : Moment d'inertie suivant  $Z_b$ .

$J_{xy}, J_{yz}, J_{xz}$  [kg.m<sup>2</sup>] : Produit d'inertie de l'avion dans le repère  $X_b Y_b Z_b$ .

$K$  : Matrice des gains retour.

$K_c$  = Gain du régulateur LQ

$K_f$  = gain du filtre de Kalman

$L$  [N.m] : Le moment de roulis total.

$M$  [N.m] : Le moment de tangage total.

$N$  [N.m] : Le moment de lacet total.

$p$  [rad/s] : Vitesse angulaire de lacet.

$P_f, P_c$  = solutions des équations de Ricatti

# Nomenclature

---

$Q$  : Matrice de pondération.  
 $q$  [rad/s] : Vitesse angulaire de tangage.  
 $\theta$  [rad] : Ανγλε δε τανγαγε (ασσιεττε λονγιτυδιναλ).  
 $Q, R$  = matrices de pondération  
 $R$  : Matrice de pondération.  
 $r$  : Le signal de référence.  
 $S$  [m<sup>2</sup>] : Surface de l'aile.  
 $u$  [m/s] : La composante de la vitesse suivant l'axe  $X_b$ .  
 $U$  : Vecteur de la commande.  
 $v$  [m/s] : La composante de la vitesse suivant l'axe  $Y_b$ .  
 $V$  = matrice de bruit sur la mesure  
 $w$  [m/s] : La composante de la vitesse suivant l'axe  $Z_b$ .  
 $W$  = matrice de bruit sur l'état  
 $x$  : Vecteur d'état.  
 $X_a Y_a Z_a$  : Repère aérodynamique.  
 $X_b Y_b Z_b$  : Repère lié a l'avion.  
 $X_E Y_E Z_E$  : Repère normal terrestre.  
 $\Psi$  [rad] : Ανγλε δε λαχετ ου χαπ (αζιμυτ).  
 $y$  : Vecteur de sortie.  
 $\beta$  [rad] : Angle de dérapage.  
 $\delta_a$  [rad] : Déflexion de la gouverne de gauchissement.  
 $\delta_e$  [rad] : Déflexion de la gouverne de profondeur.  
 $\delta_r$  [rad] : Déflexion de la gouverne de direction.  
 $\delta T$  [rad] : La position de la manette des gaz.  
 $\phi$  [rad] : Angle de roulis ou angle de gite.

## Abréviations :

VTOL Vertical Take-off and Landing aircraft  
ADAV: Aéronefs à Décollage et Atterrissage Vertical  
GPS: Global Positioning System  
HALE: Haute Altitude Longue Endurance  
IMU) «Inertial Measurement Unit  
ISTAR: Intelligence, Surveillance, Target Acquisition and  
Reconnaissance  
LFR: Linear Fractional Representation  
LFT: Linear Fractional Transformation  
LMI: Linear Matrix Inequality  
LPV: Linéaire à Paramètres Variants  
LQ: Linear Quadratic  
LQG: Linear Quadratic Guassian  
LTI: Linear Time Invariant  
LTR : Loop Transfer Recovery

# Nomenclature

---

MALE: Moyenne Altitude Longue Endurance

MAV :Mini Air Vehicule

MEMS:Micro Electro-Mechanical Systems

PID: Proportionnel Intégral Dérivatif

TUAV :Tactical Unmanned Aerial Vehicle

UAS: Unmanned Arial System

UAV: Unmanned Arial Vehicule

UCAV :Unmanned Combat Air Vehicles

USICO : UAV Safety Issues for Civil Operations

VSS: Valeurs Singulières Structurées



## Table des matières

Résumé .....	I
Dédicaces.....	II
Remerciements.....	IV
Table des matières.....	V
Nomenclature .....	VIII
Liste des figures .....	XI
Liste des tableaux.....	XV
Introduction générale.....	01

### Chapitre I : Les drones et leurs commandes

I.1 introduction .....	04
I.2 contexte et historique.....	05
I.3. Les grandes familles des drones .....	06
I.3.1. drones à voilure fixe .....	08
I.3.2 drones à ailes battantes ou ornithoptères .....	09
I.3.3 drones à voilure tournante .....	10
I.4. Les capteurs pour la navigation et la localisation .....	10
I.4.1 les centrales inertielles .....	11
I.4.2. Les accéléromètres .....	11
I.4.3. magnétomètres .....	12
I.4.4. gyromètres et gyroscopes .....	12
I.4.5. système de géolocalisation .....	13
I.4.6. les altimètres barométriques .....	13
I.5. Les architectures des commandes des drones .....	13
I.5.1. la commande linéaire quadratique gaussienne .....	14
I.5.2. la commande $\infty$ .....	14
I.6. Conclusion .....	14

### Chapitre II : Modélisation de l'UAV

Introduction.....	15
II.1. introduction aux repères de référence .....	15
II.1.1. trièdre inertiel (O Xi Yi Zi) .....	15
II.1.2. trièdre non inertiel .....	16

# Table des matières

---

II.1.2.1. trièdre avion (O Xb Yb Zb) .....	16
II.1.2.2. trièdre terrestre (OXE YE ZE) .....	16
II.1.2.3. trièdre aérodynamique (OXa Ya Za) .....	17
II.1.2.4. trièdre de navigation (OXv Yv Zv) .....	19
II.2. Equations de mouvement .....	19
II.2.1. Hypothèses .....	19
II.2.2. Equations d'Euler .....	20
II.2.2.1. les forces et les moments .....	20
II.2.2.2. la mécanique newtonienne .....	21
II.3. Linéarisation des équations .....	25
II.3.1. La théorie des petites perturbations .....	26
II.3.2. La linéarisation des petites perturbations des équations latérales et longitudinales.....	28
II.3.2.1. Les équations longitudinales .....	28
II.3.2.2. Les équations latérales directionnelles .....	28
II.4. Les équations d'états .....	28
II.4.1. Mode longitudinal .....	28
II.4.2. Mode latéral directionnel .....	29
II.4.3. caractéristiques du modèle choisi « Zagi » .....	30
II.4.3.1. Les équations de mouvement linéarisées pour le « Zagi » .....	31

## Chapitre III : Techniques de contrôle

III.1.introduction .....	34
III.2. La commande LQG .....	34
III.2.1. Formulation .....	35
III.2.2. Théorème de séparation .....	35
III.2.3.Choix des pondérations .....	37
III.2.3.1. Généralités .....	37
III.2.3.2. réglage de l'estimateur d'états .....	37
III.2.3.3. Loop Transfert Recovery .....	37
III.3. La commande $H^\infty$ .....	38
III.3.1. Introduction .....	38
III.3.2. le problème standard .....	39

# Table des matières

---

III.3.3. Formulation $H_\infty$ par Loop Shaping .....	41
III.3.3.1. Résolution du problème $H_\infty$ .....	41
III.3.3.2. Synthèse $H_\infty$ pondérée .....	43
III.3.3.3. Mise sous forme standard .....	45
III.3.3.4. Synthèse de la commande d'un contrôleur à deux degrés de liberté .....	46

## Chapitre IV : Simulations et Interprétations

Introduction.....	48
IV.1. Analyse en boucle en boucle ouverte du système linéaire .....	48
IV.1.1. mode longitudinal .....	48
IV.1.2. mode latéral directionnel .....	48
IV.2. Application de la commande LQG sur le système linéaire .....	51
IV.2.1. Mode longitudinal .....	51
IV.2.1.1. Etude de stabilité .....	51
IV.2.1.2. Etude de robustesse .....	52
IV.2.2. Mode latéral directionnel .....	54
IV.2.2.1. Etude de stabilité .....	55
IV.2.2.2. Etude de robustesse .....	56
IV.3. Application de la commande $H_\infty$ sur le système linéaire .....	57
IV.4. Modèle non linéaire .....	64
IV.4.1. Analyse en boucle ouverte .....	64
IV.4.2. Application de la commande LQG sur le système non linéaire .....	66
IV.4.3. Application de la commande $H_\infty$ sur le système non linéaire .....	68
IV.5. Conclusion .....	71
Conclusion générale .....	72
Bibliographie .....	81
Annexes .....	a.1

# Liste des figures et tableaux

---

## Liste des figures et tableaux

- **Liste des figures :**

### Chapitre I

<b>Figure (I.1) :</b> Maquette de vis aérienne de Léonard de Vinci du musée des sciences et des techniques Léonard de Vinci à Milan.....	06
<b>Figure (I.2) :</b> HALE et MALE .....	07
<b>Figure (I.3) :</b> UCAV et TUAV .....	08
<b>Figure(I.4) :</b> MiniAV et microAV .....	08
<b>Figure(I.5) :</b> Quelques exemples de drones à voilure fixe .....	09
<b>Figure (I.6) :</b> Quelques projets en cours de micro drones à voilure battante .....	10
<b>Figure(I.7) :</b> Exemple de centrales inertielles .....	11
<b>Figure(I.8) :</b> Accéléromètre MEMS ADXL325 monté sur le Zagi flying wing 2010.....	12
<b>Figure (I.9):</b> magnétomètre Honeywell HMR3300 monté sur le Zagi flying wing 2010 .....	12
<b>Figure (I.10) :</b> Capteurs MEMS .....	13
<b>Figure (I.11) :</b> Capteur de pression MPXV5004G monté sur le Zagi flying wing 2010.....	13

### Chapitre II

<b>Figure (II.1) :</b> les différents trièdres de références .....	15
<b>Figure (II.2) :</b> Position du repère avion vis-à-vis du repère terrestre : $\Psi$ azimuth, $\Theta$ assiette longitudinale et $\Phi$ angle de gîte .....	17
<b>Figure(II.3):</b> Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre terrestre : $\chi$ azimuth aérodynamique, $\gamma$ pente aérodynamique et $\mu$ angle de gîte aérodynamique .....	18
<b>Figure (II.4) :</b> Transformation liant le repère aérodynamique au repère avion .....	18
<b>Figure (II.5) :</b> le prototype Zagi utilisé par les étudiants de Brigham Young University.....	31

# Liste des figures et tableaux

---

**Figure (II.6)** : les paramètres et les dérivées de stabilité « Zagi flying wing » .....31

## Chapitre III

**Figure (III.1)** : Structure du contrôleur LQG ..... 36

**Figure (III.2)** : Modèle standard pour la synthèse de correcteur LTI ..... 39

**Figure (III.3)** : Modèle standard avec incertitude ..... 40

**Figure (III.4)** : Allure des fonctions de pondérations ..... 41

**Figure (III.5)** : système asservi pondéré. .... 43

**Figure (III.6)** : Forme standard de sensibilité mixte S/KS/T ..... 46

**Figure (III.7)** : Modèle de synthèse  $\infty$  à deux degrés de liberté..... 46

## Chapitre VI

**Figure (IV.1)** : représentation du mode longitudinal ..... 48

**Figure (IV.2)** : Réponse indicielle des états ‘u’ et ‘h’ à l’action sur l’élévateur (en boucle ouverte) ..... 48

**Figure(IV.3)** : Réponse indicielle des états ‘u’ et ‘h’ à l’action sur la poussée (en boucle ouverte) ..... 49

**Figure (IV.4)** : représentation du mode latéral ..... 49

**Figure (IV.5)** : Réponses indicielles de la vitesse de changement de lacet « r » et l’angle de roulis «  $\Phi$  » (en boucle ouverte) à une action sur l’aileron. .... 50

**Figure (IV.6)** : Réponses indicielles de l’angle de dérapage ‘  $\beta$  ’ et la vitesse de roulis ‘p’ (en boucle ouverte) à une action sur la gouverne de direction. .... 50

**Figure (IV.7)** : Représentation du mode longitudinal avec un régulateur LQG ..... 51

**Figure (IV.8)** : Réponse indicielle du mode longitudinal avec un régulateur LQG .....51

## Liste des figures et tableaux

---

<b>Figure (IV.9)</b> : pôles du mode longitudinal avec un régulateur LQG .....	52
<b>Figure (IV.10)</b> : les valeurs singulières du système nominal et le système commandé. .....	53
<b>Figure (IV.11)</b> : comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoire du système incertain. ....	54
<b>Figure (IV. 12)</b> : Représentation du mode latéral avec un régulateur LQG .....	54
<b>Figure (IV.13)</b> : Réponse indicielle du mode latéral avec un régulateur LQG .....	55
<b>Figure (IV.14)</b> : pôles du mode latéral avec un régulateur LQG .....	56
<b>Figure (IV.15)</b> : les valeurs singulières du système nominal et le système commandé.....	57
<b>Figure (IV.16)</b> : comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoire du système incertain. ....	57
<b>Figure (IV.17)</b> : comparaison entre $S(s)$ et $W_1^{-1}$ (diagramme de Bode des valeurs singulières) .....	58
<b>Figure (IV.18)</b> : comparaison entre $T(s)$ et $W_3^{-1}$ (diagramme de Bode des valeurs singulières).....	59
<b>Figure (IV.19)</b> : réponses indicielles des fonctions de pondération .....	59
<b>Figure (IV.20)</b> : La réponse indicielle du système avec un correcteur $H_\infty$ .....	60
<b>Figure (IV.21)</b> : valeurs singulières de $S, T, L, W_1$ et $1/W_3$ .....	63
<b>Figure (IV.22)</b> : comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoire du système incertain. ....	64
<b>Figure (IV.23)</b> : Représentation non linéaire du modèle de drone .....	64
<b>Figure (IV.24)</b> : mode longitudinal en boucle ouverte (non linéaire) .....	65
<b>Figure (IV.25)</b> : mode latéral en boucle ouverte (non linéaire) .....	65
<b>Figure (IV.26)</b> : Réponse indicielle du mode longitudinal aux excitations latérales (non linéaire) .....	66

## Liste des figures et tableaux

---

<b>Figure (IV.27)</b> : Application de la commande LQG sur le modèle non linéaire .....	66
<b>Figure (IV.28)</b> : Réponse indicielle du mode longitudinal avec correcteur LQG (non linéaire) .....	67
<b>Figure (IV.29)</b> : Réponse indicielle du mode latéral avec correcteur LQG (non linéaire) ...	67
<b>Figure (IV.30)</b> : Rejection du bruit blanc introduit aux différentes entrées du système.....	68
<b>Figure (IV.31)</b> : Application de la commande $H_\infty$ sur le modèle non linéaire .....	69
<b>Figure (IV.32)</b> : Réponse indicielle du mode longitudinal avec correcteur $H_\infty$ (non linéaire) .....	69
<b>Figure (IV.33)</b> : Réponse indicielle du mode latéral avec correcteur $H_\infty$ (non linéaire).....	70
<b>Figure (IV.34)</b> : Rejection du bruit blanc introduit aux différentes entrées du système .....	71

## Annexes

<b>Figure (1)</b> : Valeurs singulières d'une matrice de transfert.....	a.2
<b>Figure (2)</b> : Norme $H_\infty$ d'un système SISO.....	a.3
<b>Figure (3)</b> : Norme $H_\infty$ d'un système MIMO.....	a.3
<b>Figure (4)</b> : Schéma classique d'un système de commande bouclé.....	a.4

# Liste des figures et tableaux

---

- **Liste des tableaux**

<b>Tableau (2.1):</b> Résumé des dérivées longitudinales.....	29
<b>Tableau (2.2) :</b> Résumé des dérivées latérales directionnelles.....	30
<b>Tableau (4.1):</b> valeurs propres du système avec un correcteur LQG (mode longitudinal)...	51
<b>Tableau (4.2) :</b> interprétations des valeurs des marges de stabilité (système+LQG).....	52
<b>Tableau (4.3):</b> valeurs propres du système avec un correcteur LQG (mode latéral).....	54
<b>Tableau (4.4) :</b> interprétations des valeurs des marges de stabilité (système+LQG).....	55
<b>Tableau (4.5) :</b> valeur propres et pôles du système commandé ( $H_\infty$ ).....	60
<b>Tableau (4.6) :</b> interprétations des valeurs des marges de stabilité (commande $H_\infty$ ) .....	61



# Introduction générale

## Introduction générale

---

Dans la langue française, le mot « drone » est utilisé pour décrire tout véhicule terrestre, aérien, marin ou sous-marin doté d'une certaine autonomie. Dans ce manuscrit, la signification anglo-saxonne lui sera cependant préférée et le mot drone représentera uniquement un véhicule aérien autonome.

Un drone est un aéronef sans pilote à son bord et doté d'une certaine autonomie et d'une capacité de décision. Les drones ou UAV (Unmanned Aerial vehicle) possèdent une charge utile pour l'emport de matériels nécessaires à l'accomplissement des missions auxquelles ils sont employés. Ce sont les conflits armés qui, au cours de l'histoire, ont révélé l'utilité des drones et ont ainsi amplifié leurs intérêts sur le champ de bataille. La première utilisation de drone dans l'histoire remontait à juillet 1849, lorsque l'armée autrichienne envoya plusieurs ballons sans pilote munis de bombes à retardement au-dessus de la ville de Venise. Cet événement, qui passa presque inaperçu à l'époque, marqua pourtant un véritable tournant dans la façon de mener une guerre. Malgré quelques apparitions durant les Première et Seconde Guerres Mondiales, ce n'est qu'à partir de la première guerre du Golfe en 1990 que l'intérêt pour les véhicules aériens a pris de l'ampleur. De nos jours, grâce aux nombreuses avancées techniques et technologiques, les drones sont de plus en plus performants et permettent de réaliser diverses missions, aussi bien civiles que militaires. Quoiqu'il en soit la conception d'un système aérien autonome nécessite toujours une certaine expertise dans de nombreux domaines de l'ingénierie. Toutefois, un seul de ses domaines va constituer le fil directeur de ce mémoire, mais cet unique domaine fait intervenir tous les autres : la commande.

En quelques mots, le système de commande est un algorithme mathématique qui génère les signaux de commande permettant au drone de se déplacer de façon appropriée. Pour cela il se base sur une représentation mathématique du véhicule et sur les signaux de mesure issus des capteurs embarqués. Son rôle est avant tout de garantir la stabilité du véhicule dans la phase du vol autonome. Malgré un principe général relativement simple à appréhender, la conception d'un tel système est plutôt complexe et requiert une attention particulière. En effet les drones sont des systèmes sensibles aux perturbations aérodynamiques et dont la dynamique est fortement non-linéaire. Cette dernière présente de plus un couplage important entre les variables d'état du système et ses entrées de commande. Le couplage caractérise le fait que tout changement de dans une entrée de commande affecte non seulement la variable d'intérêt, mais également les autres. Afin d'éliminer l'excitation indésirable de ces variables d'état, la coordination de toutes les entrées de commande est indispensable à chaque instant. Par conséquent, il est clair que toutes ces caractéristiques intrinsèques aux drones forment un écueil qui doit être surmonté lors de la conception de l'algorithme de commande.

De manière générale, Le développement d'une stratégie de commande passe par trois étapes :

- l'identification d'un modèle,
- la synthèse de la loi de commande,
- la validation de la loi de commande et notamment l'analyse de sa robustesse.

# Introduction générale

---

Ces différentes phases ne peuvent être effectuées de manière déconnectée car elles se contraignent mutuellement : le choix du type de synthèse et d'analyse contraignent la structure du modèle à identifier. Inversement, la structure du modèle identifié peut amener à revoir les méthodes de synthèse et d'analyse initialement prévues.

En effet, tant les couplages et les non-linéarités sont nombreux, il est pratiquement impossible de fournir une modélisation fidèle de la dynamique des drones. Par conséquent, dans les problèmes de commande, il est généralement utilisé une représentation simplifiée, mais suffisamment proche, de la dynamique du véhicule étudié. Ce modèle dynamique approximatif est généralement linéaire.

Les approches linéaires sont très appréciées car leur conception et leur exécution sont relativement simples, ce qui fait qu'elles ont été intégrées dans la majorité des véhicules aériens autonomes. De plus, ces techniques sont plus intéressantes car elles permettent de déterminer avec précision la stabilité, les performances et la robustesse de la boucle de commande.

## **Objectifs du projet :**

A la lumière de ce préambule, les problématiques traitées dans ce mémoire concerneront la modélisation et la commande d'un véhicule aérien autonome à voilure fixe. Ce sont des problématiques compliquées car la conception de stratégie de commande pour les drones est devenue un domaine très concurrentiel depuis quelques années. Par conséquent, il est difficile de proposer de nouvelles architectures de commande ayant véritablement un caractère innovant. En réalité, l'originalité du projet viendra surtout du concept de voilure fixe dont est caractérisé le drone en question ce qui est peu répandu et aussi l'utilisation de commande autre que la commande PID ou celle du placement de pôles qui ont constitué la majorité des sujets déjà traités à l'échelle nationale voire internationale.

Les objectifs du projet sont :

- Modéliser la dynamique du drone lors de sa phase de vol autonome. Ce modèle devra être suffisamment riche pour décrire le comportement du véhicule avec précision, mais également suffisamment simple pour l'analyse et la synthèse des stratégies de commande.
- Développer des algorithmes de commande garantissant la stabilisation de l'appareil et garantir la robustesse de ces algorithmes.
- Validation des lois de commande en les appliquant sur le modèle non linéaire du drone

## **Organisation du manuscrit :**

Afin de répondre à chacun des objectifs cités précédemment, le manuscrit est structuré en quatre chapitres :

## Introduction générale

---

- Le premier chapitre constitue une véritable mine d'informations concernant les véhicules aériens autonomes et les approches de commande garantissant leur stabilité qui seront détaillées dans les chapitres suivants.
- Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation non linéaire du système choisi (zagi flying wing 2010) basée sur les lois de la mécanique et l'aérodynamique. Ce modèle est ensuite transformé en une représentation plus simple, appropriée à la synthèse d'algorithme de commande.
- Ce mémoire se poursuit sur un troisième chapitre intitulé « techniques de contrôle » où deux approches de commande pour la stabilisation du véhicule sont détaillées. Il s'agit de la commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) et la commande par synthèse  $H_\infty$ .
- Ce mémoire s'achève sur un quatrième chapitre intitulé « simulations et interprétations » permettant la confrontation expérimentale des stratégies de commandes explicitées en troisième chapitre. les résultats comparatifs obtenus y seront exposés sans faire l'impasse sur les difficultés de mise en œuvre, difficilement perceptibles lorsque l'on se limite aux calculs.

# Chapitre I:

## Les drones et leurs commandes

## I.1 Introduction

La robotique aérienne est un champ vaste et interdisciplinaire. Un drone est un engin volant sans pilote à bord, commandé à distance et réutilisable. Même si le terme « drone » n'a pas encore rejoint les dictionnaires français, il est aujourd'hui largement utilisé pour désigner un «aéronef sans pilote », quelque soit sa taille, sa forme, sa fonction et ses caractéristiques. Drone peut désigner n'importe quel objet volant depuis le cerf-volant jusqu'au missile de croisière en passant par le modèle réduit radiocommandé et le ballon captif. On retiendra donc la définition anglo-saxonne: 'Drone: an aircraft without a pilot that is operated by remote control'. On peut noter dans cette définition qu'un drone :

- est contrôlé, i.e. qu'il n'est pas complètement autonome ;
- n'est pas contrôlé nécessairement depuis le sol, i.e. qu'il peut être piloté depuis un autre aéronef ;
- peut transporter des passagers.

Il peut se définir comme un système mécanique, électronique et informatique contrôlé ou programmé pour effectuer des tâches trop répétitives, dangereuses ou difficiles pour être faites directement par des êtres humains. Ils sont aussi connus sous la dénomination "UAV (Unmanned Aerial Vehicle)" ou "UAS (Unmanned Aerial System)". Les recherches et les développements liés aux drones autonomes reposent sur la capacité de contrôle de leur vol dans des environnements hostiles et complexes. Cette capacité passe par la maîtrise des phénomènes aérodynamiques de ces engins, des lois de contrôle associées, de l'estimation et l'observation d'état et éventuellement des perturbations, de la cartographie de l'environnement et la prise en compte de leur interaction avec l'environnement.

La réalisation d'un drone efficace, de petite taille et de bas coûts est devenue possible grâce à des innovations technologiques dans les domaines de l'électronique et des systèmes embarqués. Ces systèmes ont la capacité d'embarquer plusieurs types de capteurs simultanément. Ils sont choisis principalement en raison de leurs capacités à effectuer des missions complexes en environnements difficiles et à réduire les risques en minimisant l'intervention humaine. Ils peuvent transporter une variété de charges utiles en fonction de missions qui leur sont dévolues. Mais tous ces robots volants souffrent du même handicap : leur temps d'autonomie est court. En fait, la puissance nécessaire à la propulsion d'un micro drone est supérieure à 90% de la consommation totale d'énergie, ce qui rend l'optimisation des composants électroniques insignifiante.

L'utilisation de technologies avancées telles que les aéronefs autonomes à décollage et atterrissage vertical (ADAV) augmentera le succès des opérations de recherche et de sauvetage par exemple dans le cas des catastrophes naturelles. Les ADAV miniatures présentent de nombreux avantages pour les applications de surveillance, de renseignement, de recherche et sauvetage en raison de leur maniabilité et leur capacité à effectuer un vol quasi-stationnaire. L'état de l'art que nous présentons dans ce chapitre est inspiré de nombreux travaux, parmi lesquelles [1,2,3,4]

Dans ce chapitre, nous présentons : Dans un premier temps, le contexte et l'historique des drones, les principales architectures de drones et pour chaque famille, nous exposons ses avantages techniques et pratiques à travers différents projets et applications existantes. Dans un deuxième temps, nous présenterons les différentes technologies de capteurs permettant au drone de se positionner et de s'orienter dans l'espace. Dans une dernière partie, les différentes architectures de commande qui permettent d'améliorer les performances de vol du drone sont présentées.

## **I.2 Contexte et historique :**

Le recours à des aéronefs non pilotés à des fins militaires n'est pas une nouveauté historique. Depuis les cerfs-volants et les ballons chargés d'explosifs, en passant par les «bombes volantes », utilisés dans plusieurs conflits dans l'histoire pour l'observation ou le combat, jusqu'aux aéronefs automatisés, ce sont des siècles d'innovations et d'efforts technologiques qui se sont écoulés. En 1483, le père de l'hélicoptère Léonard de Vinci imagina le concept de machine volante à aile tournante nommée vis aérienne (voir figure 1.1) fondée sur le principe de la vis d'Archimède. En 1754, le Russe Mikhaïl Lomonosov a développé un modèle complexe à deux rotors coaxiaux contrarotatifs entraînés par un mécanisme d'horlogerie, l'aéronef a volé librement et a atteint une bonne altitude, ce concept a contribué au développement de l'hélicoptère moderne. La première utilisation des drones pour le combat remonte à 1849 quand les Autrichiens ont utilisé des ballons chargés d'explosifs pour attaquer la ville italienne de Venise. Les premiers avions sans pilote, destinés à être utilisés comme des avions pour l'entraînement au combat, ont été conçus pendant et après la première guerre mondiale. En septembre 1916, l'avion-cible Hewitt-Sperry Automatic Airplane a réalisé son premier vol autonome. Le développement secret de nouveaux drones a continué pendant la deuxième guerre mondiale et la guerre froide. Pendant les années 1980, les drones ont été utilisés pour des missions de reconnaissance, de surveillance et d'attaque, principalement par les Américains, et par les forces alliées lors des deux guerres du Golfe, en Irak et en Afghanistan. Dans la dernière décennie, beaucoup de configurations de drones de différentes tailles ont été développées notamment grâce à la miniaturisation des capteurs et unités de traitement d'un côté, et une demande croissante pour les applications militaires et civiles de l'autre côté.



Figure 1.1 – Maquette de vis aérienne de Léonard de Vinci du musée des sciences et des techniques Léonard de Vinci à Milan.

### I.3. Les grandes familles des drones :

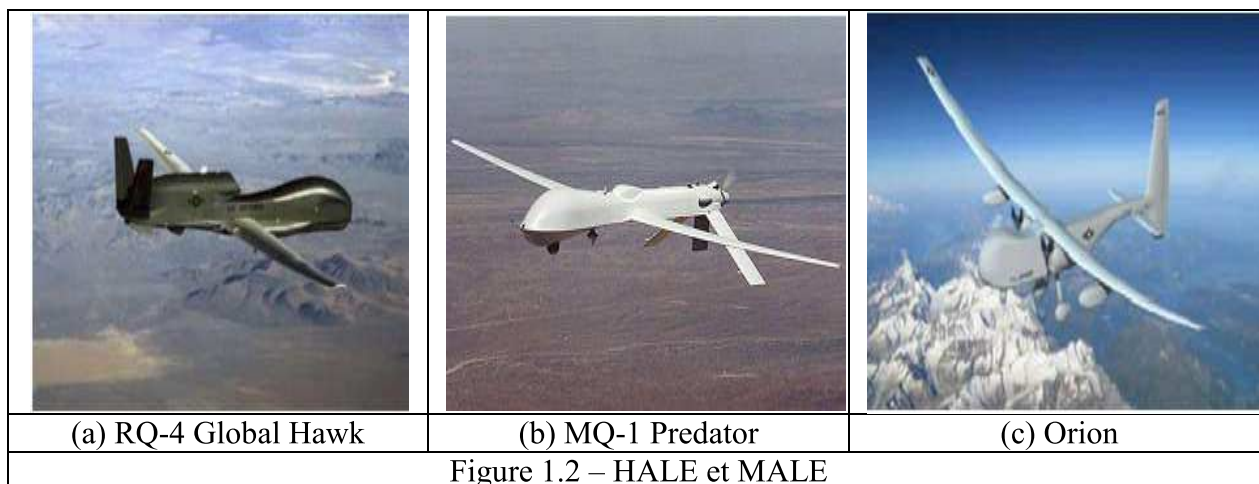
Le développement de drones aériens s'accélère et suscite un intérêt croissant, ils ont été utilisés au début pour des missions militaires de renseignement, de surveillance, d'acquisition de cible et de reconnaissance, connues sous l'abréviation d'ISTAR (Intelligence, Surveillance, Target Acquisition and Reconnaissance). Les drones aériens possèdent aussi de nombreuses applications civiles comme la surveillance jour et nuit et l'observation de sites sensibles (Les drones de l'armée suisse ont par exemple été utilisés pour surveiller les frontières dans le Tessin pendant l'été 2004. Des drones Hermes surveillent la frontière entre le Mexique et USA depuis fin juin 2004), la gestion des infrastructures (réseau routier, lignes électriques, pipe-lines...), les activités gouvernementales (police, douanes, environnement, ...) grâce aux capteurs infrarouges, la cartographie d'un terrain, expériences scientifiques et l'intervention dans des sites hostiles. Dans un premier temps, ces applications concerneront surtout les petits drones, mais elles devraient petit à petit évoluer vers de plus grandes plateformes. Toutefois, l'utilisation civile pose certaines contraintes, essentiellement à cause des réglementations restreignant ou interdisant leur utilisation au sein de l'espace aérien.

La classification des systèmes aériens est difficile, car il existe de nombreux types de drones aériens partant du nano drone de quelques grammes jusqu'au drone lourd capable d'effectuer des missions de plus de 24 heures à plusieurs milliers de kilomètres de sa base. Cependant, les véhicules autonomes peuvent être classés en plusieurs catégories selon : l'altitude de croisière, le rayon d'action, l'endurance, la taille (longueur, envergure, etc.) ou encore leur voilure (fixe, tournante ou battante). Le projet européen USICO (Le projet européen USICO (mai 2002, avril 2004) est un consortium d'entreprises et de centres de recherche européens.) y a identifié les drones selon les applications civiles. Nous présentons d'abord une classification générale des drones en fonction de leur rayon d'action, l'endurance et l'altitude :



- Drones HALE (Haute Altitude Longue Endurance) : Ils sont caractérisés par une envergure proche de celle d'un aéronef classique, ils peuvent voler à une altitude opérationnelle atteignant 20 000 mètres avec un rayon d'action de plusieurs milliers de kilomètres et une autonomie d'une trentaine d'heures. Ces avions possèdent une charge utile importante et sont équipés de caméras (visible et infrarouge) et de radars divers. Un exemple célèbre de Drone HALE est le RQ-4 Global Hawk de Northrop Grumman illustré par la figure 1.2a. Cette machine est utilisée pour des missions de reconnaissance, désignation d'objectifs et d'observation des dommages de combat, il peut voler à 18 300 mètres d'altitude, atteindre la vitesse de 635 kilomètres par heure et dispose d'une autonomie de 36 heures.

- Drones MALE (Moyenne Altitude Longue Endurance) : Ils ont une autonomie d'une trentaine d'heures et peuvent voler entre 5 000 et 15 000 mètres d'altitude. Un exemple célèbre de Drone MALE est le MQ-1 Predator B construit par General Atomics illustré par la figure 1.2b. Ce drone peut voler à 7 600 mètres d'altitude avec une endurance de 28 heures. Il a largué plusieurs fois des bombes ou missiles en Afghanistan en 2001. Les Américains testent actuellement des drones MALE à très longue endurance telle que l'Orion d'Aurora visible sur la figure 1.2c dont l'autonomie serait portée à 120 heures.



- Drones de combatUCAV (Unmanned Combat Air Vehicles) : Ils sont équipés de systèmes d'armes ou de recueils de renseignements. Ils sont destinés à accomplir des missions de reconnaissance, d'attaque, de tir, et d'occupation de l'espace aérien sur de très longues périodes, pouvant embarquer une charge utile létale. La figure 1.3a présente le drone de combat furtif X-47B développé par la société Northrop Grumman, ce drone est capable de maîtriser l'opération de catapultage et d'enchaîner naturellement sur sa mission selon les paramètres préétablis. Il dispose d'un rayon d'action de 2 800 kilomètres, se déplace à plus de 1000 kilomètres par heure à une hauteur de 12 200 mètres.

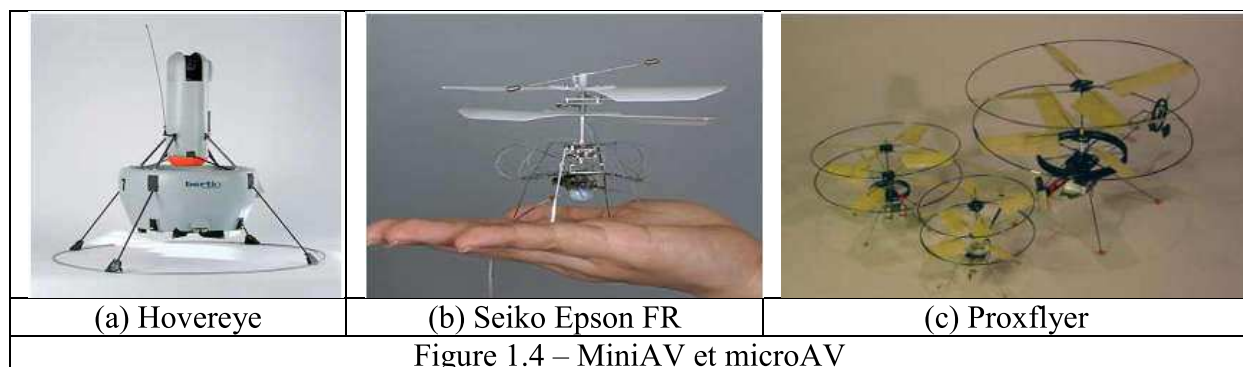
- Drones tactiques TUAV (Tactical Unmanned Aerial Vehicle) : Ils ont un rayon d'action jusqu'à plus de cent kilomètres, une autonomie d'une dizaine

d'heures et peuvent y voler à une altitude opérationnelle de 200 à 5 000 mètres. Citons en exemple le drone Watchkeeper WK450 de groupe Thales en figure 1.3b ou encore le Sperwer développé par la société Sagem (groupe Safran) en figure 1.3c. Les drones TUAV concernent une très large gamme d'engins :



- Mini drones MAV (Mini Air Vehicule) : Ils ont une endurance de quelques heures et des dimensions de l'ordre du mètre, ils peuvent voler jusqu'à un plafond de 300 mètres, fonctionnant à des distances allant jusqu'à environ 30 kilomètres en emportant une charge utile très légère. Ce type d'appareils est en général propulsé électriquement. La figure 1.4a présente le mini drone Hovereye [5], développé par Bertin Technologies.

- Micro/Nano drones : Ils désignent des appareils d'une taille inférieure à quinze centimètres, de quelques dizaines à quelques centaines de grammes. Ils sont souvent dotés d'hélices entraînées par des moteurs électriques, l'autonomie est d'environ une vingtaine de minutes pour un rayon d'action d'une dizaine de kilomètres et pourraient accomplir des tâches dont des engins plus gros sont incapables. Citons en exemple le micro drone Seiko Epson FR en figure 1.4b qui ne pèse que 8,9 grammes. La figure 1.4c montre les différentes tailles de drone coaxial Proxflyer [6][7]

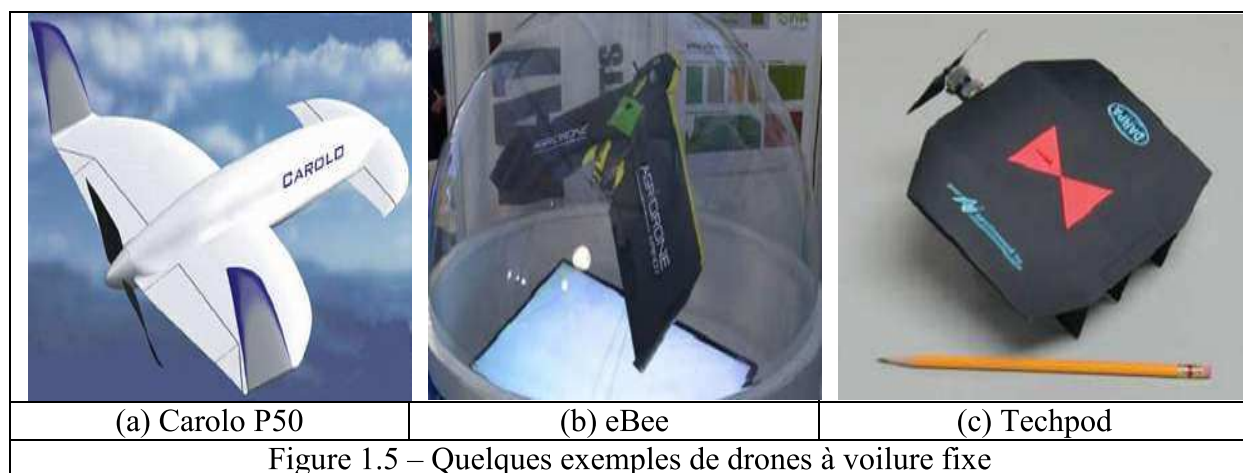


Afin de mieux décrire les caractéristiques des drones. Nous avons classé les drones selon trois grandes familles : Ceux à voilures fixes, ceux à ailes battantes (ornithoptères) et les aéronefs à voilures tournantes.

### **I.3.1 Drones à voilure Fixe**

Ces configurations sont constituées d'une paire d'ailes assurant la sustentation, un fuselage, une dérive et un empennage, la propulsion est assurée par une ou plusieurs hélices.

Ces configurations offrent le plus d'autonomie, mais nécessitent une plateforme pour être opérées. Parmi les projets actuels, mentionnons Carolo P50 de l'Université technique de Braunschweig/Allemagne illustré par la figure 1.5a, ce minidrone est capable d'atteindre une vitesse de 65 kilomètres par heure à un plafond de plus de 100 mètres. Le drone avion eBee de Parrot illustré par la figure 1.5b se déplace à une vitesse de 57 kilomètres par heure avec une autonomie de 45 minutes et de 96 centimètres d'envergure, ou encore le micro drone Black Widow d'AeroVironment en figure 1.5c qui pèse 42 grammes avec une autonomie de 30 minutes et de 20 centimètres d'envergure.



L'inconvénient principal de cette configuration est qu'elle n'autorise pas le vol stationnaire, des vols à basse vitesse et à basse altitude et aussi le besoin de piste de décollage ou d'atterrissage.

### **1.3.2 Drones à ailes battantes ou ornithoptères**

Pour ces drones, la sustentation et le pilotage sont assurés grâce à des ailes battantes. Dotés d'une capacité de vol avec des trajectoires similaires à celles des insectes ou du colibri (oiseau-mouche, seul oiseau capable de vol stationnaire maîtrisé), et de vol stationnaire à basses vitesses, comme les voilures tournantes, ce qui est intéressant pour des missions en intérieur ou dans des espaces réduits. Ces configurations permettent des manœuvres agiles tout en étant plus discrètes que les voilures tournantes, ce qui représente un autre avantage certain pour les missions de reconnaissance ou de surveillance. Le micro Delfly illustré par la figure 1.6a ne pèse que 3 grammes et à une envergure de 10 centimètres avec une vitesse de déplacement de 18 kilomètres par heure. Parce qu'il avait aussi une caméra embarquée, il a été déclaré par le livre Guinness des records 2009 comme "le plus petit aéronefs équipés de caméra dans le monde".

Le Robobee de l'Université de Harvard en figure 1.6b pèse 80 milligrammes et a 3 centimètres d'envergure. Cet engin volant utilise des matériaux particulièrement fins, suffisamment légers pour que ses ailes actionnées par des muscles artificiels battent à une allure de l'ordre de 120 fois par seconde, comme celles d'une mouche.

### I.3.3 Drones à voilure tournante

Les engins à voilure tournante sont des appareils volants ayant la capacité de décoller, voler et atterrir verticalement (ADAV, en anglais Vertical Take-off and Landing aircraft ou VTOL) et donc n'ont pas besoin de piste de décollage ou d'atterrissage. Ils utilisent des voilures tournantes ou rotors multiples pour voler en état stationnaire au-dessus d'une zone précise ou encore des vols à basse vitesse et à basse altitude. Ils peuvent réaliser une très grande variété de missions irréalisables pour des véhicules à voilure fixe telle que la surveillance, renseignement, secours et sauvetage. La famille des véhicules à voilure tournante, regroupe les hélicoptères, les convertibles, et les voilures carénées. Ces types d'aéronefs s'appellent aussi giravions y équivalent de l'anglais « Rotorcraft ».

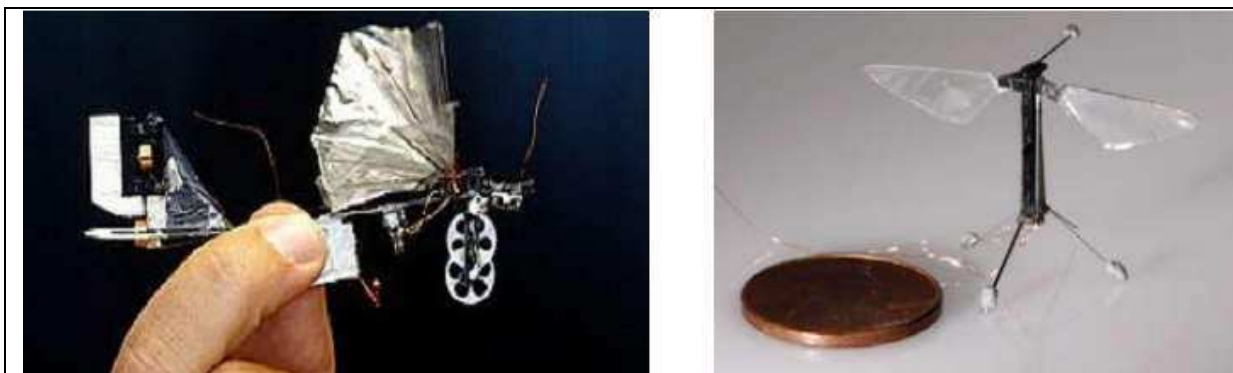


Figure 1.6 – Quelques projets en cours de micro drones à voilure battante

### **I.4- Les capteurs pour la navigation et la localisation :**

Dans cette section nous décrivons les différents capteurs qui équipent les drones et sont essentiels pour les doter de capacités de navigation et de localisation. Ces capteurs peuvent être classés selon plusieurs critères. Le premier consiste par exemple à différencier les capteurs passifs des capteurs actifs, c'est-à-dire respectivement ceux qui ont besoin d'un apport d'énergie extérieure afin de mesurer le phénomène physique, de ceux dont le phénomène physique fait naturellement varier la grandeur électrique de sortie, comme par exemple les thermocouples. Tous les capteurs embarqués sur le Zagi Flying Wing sont passifs, on peut alors distinguer les capteurs proprioceptifs des capteurs extéroceptifs :

- les capteurs proprioceptifs : ne nécessitent pas une connaissance de l'environnement dans lequel évolue l'engin. Ces capteurs mesurent la position, la vitesse ou encore l'accélération de l'engin par rapport à un état de référence. Cependant, l'intégration des grandeurs mesurées se dégrade au cours du temps, c'est pourquoi il est vital de recalibrer les signaux par un système de mesure absolu et composé de capteurs extéroceptifs ;
- les capteurs extéroceptifs : quant à eux utilisent les informations de l'environnement extérieur au drone afin de connaître sa situation par rapport à certains repères absolus (repères visuels, balise) dont la situation est connue dans le repère lié à l'environnement (repère inertiel). Ces capteurs sont nécessaires à la localisation mais également pour déterminer la structure de l'environnement dans lequel l'engin évolue.

La conception de capteurs et d'actionneurs plus performants assure la perfection et l'autonomie pour les drones. Ces plateformes constituent aujourd'hui des systèmes qui permettent la transmission de l'information en temps réel. En général, les drones s'intéressent aux grandeurs suivantes :

- Position (coordonnées géographiques et altitude).
- Vitesse linéaire (selon les trois axes orthogonaux).
- Vitesse angulaire (vitesse de rotation autour des trois axes orthogonaux).
- Position angulaire ou attitude (roulis, tangage et lacet).

#### **I.4.1 Les centrales inertielles**

Une centrale de mesure inertielle ou encore appelée (IMU) «Inertial Measurement Unit » est un système de navigation fournissant l'attitude, le vecteur de vitesse et de position d'un objet (voir figure 1.7). Elle contient principalement trois accéléromètres et trois gyromètres mesurant l'accélération non gravitationnelle et la vitesse instantanée de rotation du véhicule par rapport à un référentiel inertielle. La technologie MEMS (Micro Electro-Mechanical Systems) est la technologie actuellement la plus utilisée, les capteurs étant simples, de petites tailles, légers et économiques. Quelques exemples de ces capteurs sont montrés dans la figure 1.8. Cette technologie permet de disposer d'accéléromètres, de gyroscopes et de magnétomètres intégrés dans un circuit électronique d'une dizaine de grammes.

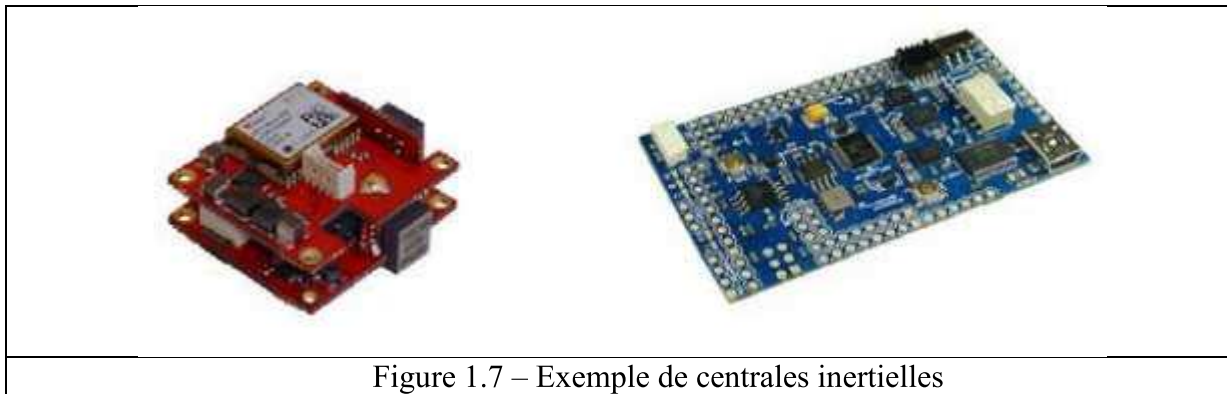


Figure 1.7 – Exemple de centrales inertielles

#### **I.4.2 Accéléromètres**

Un accéléromètre permet comme son nom l'indique, de mesurer l'accélération non gravitationnelle (ou spécifique) de l'objet qui le supporte suivant un, deux ou trois axes. Un accéléromètre de trois axes permet de mesurer les trois accélérations linéaires selon trois axes orthogonaux. Leur principe repose sur la déformation ou le déplacement d'un corps pendant une accélération. L'avantage d'un accéléromètre est sa grande facilité à révéler une multitude de données (accélération, vitesse, déplacement, force...). Néanmoins, l'obtention du déplacement élémentaire nécessite une double intégration entraînant des problèmes de précision. Dans ce cas, la fusion avec d'autres capteurs comme les gyromètres permet de recalibrer les mesures. Généralement, lorsque les accélérations subies sont faibles relativement à

la gravité, les accéléromètres peuvent fonctionner comme des inclinomètres pour indiquer la direction du mouvement.

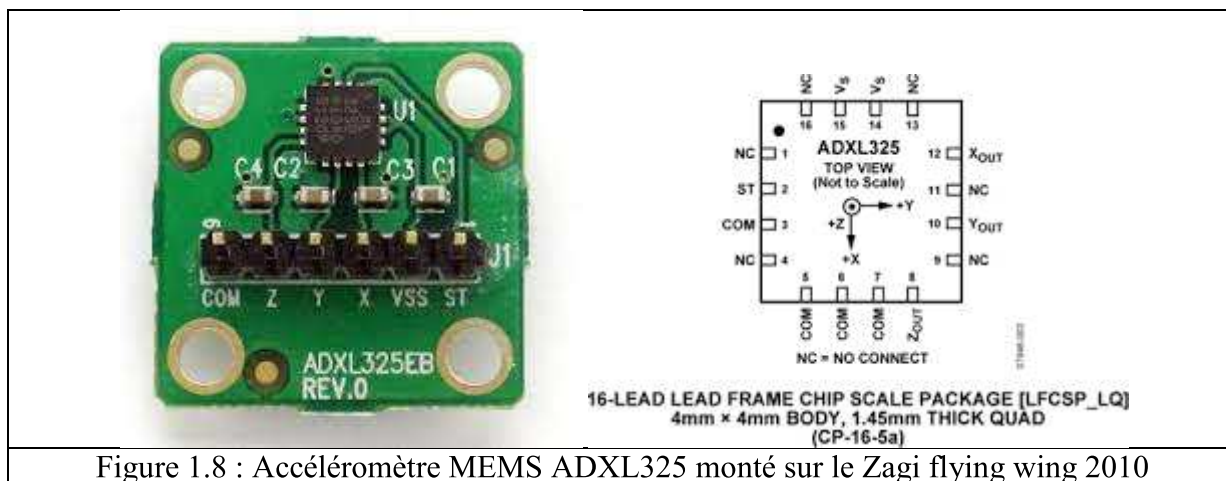


Figure 1.8 : Accéléromètre MEMS ADXL325 monté sur le Zagi flying wing 2010

### I.4.3 Magnétomètres

Un magnétomètre, appelé aussi compas magnétique, est un capteur permettant de mesurer la direction et/ou l'intensité d'un champ magnétique, et en particulier la direction du champ magnétique terrestre appelé aussi induction magnétique. Néanmoins ce capteur présente une sensibilité à perturbations magnétiques extérieures du drone.

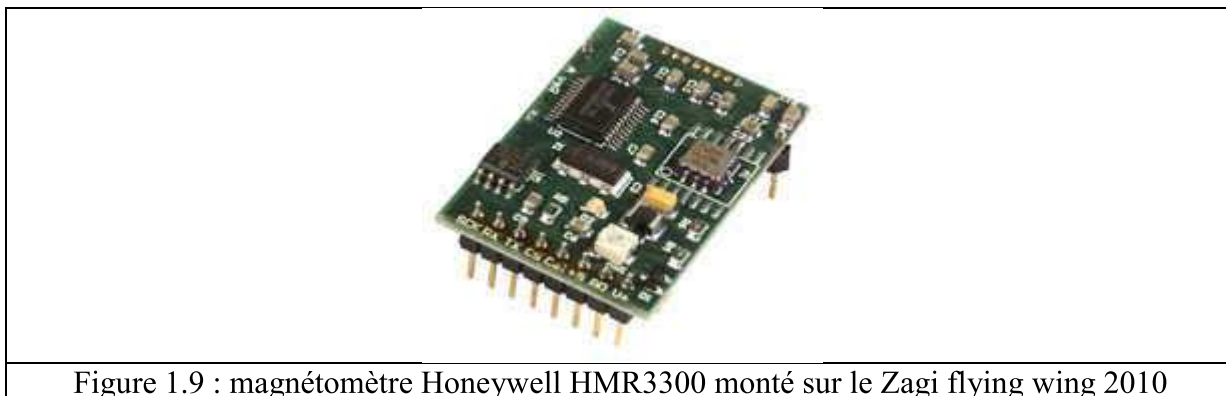


Figure 1.9 : magnétomètre Honeywell HMR3300 monté sur le Zagi flying wing 2010

### I.4.4 Gyromètres et Gyroscopes

Un gyromètre est un capteur permettant de mesurer une vitesse instantanée de rotation autour d'un axe. Un gyromètre de trois axes permet de mesurer la vitesse de rotation sur les trois axes du repère mobile (vitesses de roulis, de tangage et de lacet). Un gyroscope mesure la position angulaire suivant l'axe où il est monté dans le repère inertiel. La distinction est parfois subtile, car un même gyro peut fonctionner en mode gyroscope ou en mode gyromètre.

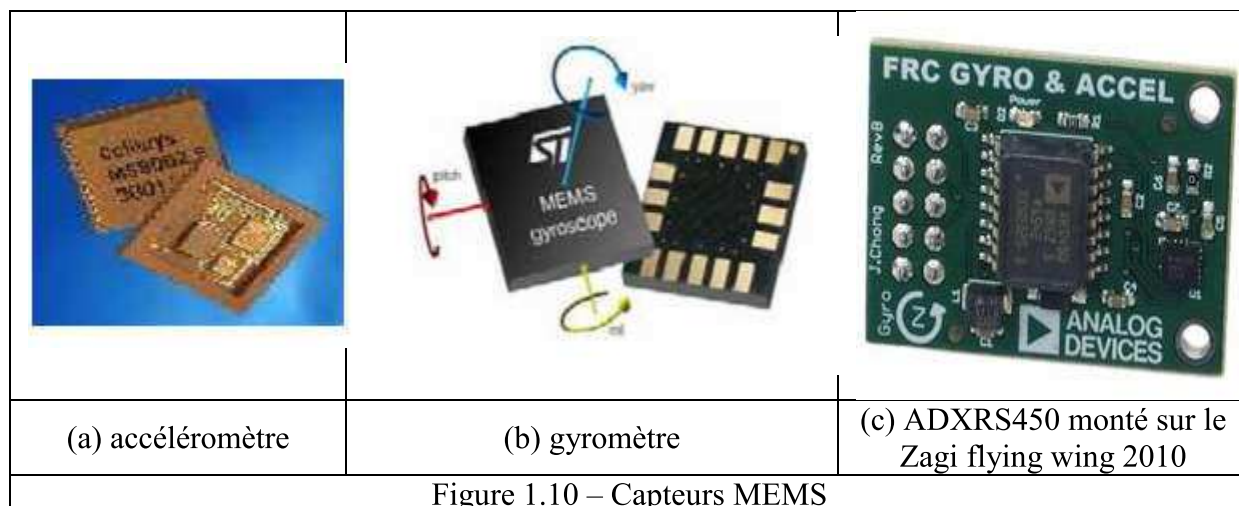


Figure 1.10 – Capteurs MEMS

#### **I.4.5 Système de géolocalisation**

Le GPS signifié « Global Positioning System » est un système de positionnement et de navigation par satellite. Ce système est composé de vingt-quatre satellites répartis sur six orbites (quatre satellites par orbite) tournant autour du globe (2 tours en 24 heures) et situés à une altitude de 20.184 kilomètres. Les erreurs de mesures sont principalement dues aux brouillages qui altèrent la propagation des signaux.

#### **I.4.6 Les altimètres barométriques**

Un altimètre barométrique est un capteur permettant de déterminer l'altitude entre le niveau de capteur et le niveau de référence. La mesure de ce capteur est très sensible aux changements des conditions atmosphériques (rafales de vent). Pour les drones miniatures. Il est préférable généralement utiliser ces capteurs pour des applications intérieures.



Figure 1.11 : Capteur de pression MPXV5004G monté sur le Zagi flying wing 2010

### **I.5- Les architectures de commande des drones :**

Les drones possèdent quelques caractéristiques spécifiques qui rendent difficile la conception d'algorithmes de commande. En effet, ces appareils sont des systèmes sous-actionnés (nombre d'actionneurs est inférieur au nombre de variables de configuration)

sensibles aux perturbations aérodynamique et dont la dynamique est fortement non-linéaire. Cette dernière présente de plus un couplage important entre les variables d'état du système et ses entrées de commande. Ayant pour objectif de diminuer, voire de supprimer ces effets indésirables, le développement des stratégies de commande des drones a fait l'objet de plusieurs centaines, voire plusieurs milliers de publications au cours des dernières décennies. Cette section est destinée à présenter les architectures de commande qui seront employées dans ce mémoire.

### **I.5.1- La commande linéaire quadratique gaussienne :**

La commande linéaire quadratique gaussienne, dite commande LQG, est une combinaison de deux commandes élémentaires. En effet, la commande LQG réunit un correcteur LQ et un estimateur de Kalman dans un souci particulier de réduire les bruits de mesure. Les propriétés de robustesse de la boucle fermée, garanties par la commande LQ, ne seront plus assurées, sauf si la dynamique de l'observateur est suffisamment rapide relativement à celle du véhicule. Toutefois, des outils permettant de restaurer les marges de stabilité de la commande LQ existent, comme la procédure de réglage LTR (de l'anglais Loop Transfer Recovery).

### **I.5.2- La commande $\mathcal{H}_\infty$ :**

L'approche  $\infty$  est certainement la structure de la commande qui a été la plus appliquée pour le pilotage des véhicules aériens autonomes. En effet, ses performances sont supérieures à celle obtenues avec la commande LQG car elle intègre des éléments de robustesse directement dans sa synthèse. De manière générale, la commande  $\infty$  consiste à modéliser le transfert de la boucle de telle sorte qu'il présente un bon compromis entre la robustesse et les performances. Ce modelage est réalisé par les filtres qui sont ajoutés dans la boucle de régulation, autour de la fonction de transfert du système. Ces filtres sont choisis tels que les valeurs singulières présentent un gain élevé en basse fréquence, une atténuation en hautes fréquences et une certaine fréquence de coupure. Le gain en hautes fréquences procure de la robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées dans la modélisation et des bruits dans le système. La fréquence de coupure définit quant à elle la bande passante souhaitée et donc le domaine de fonctionnement du système. Un correcteur est ensuite développé pour maximiser les marges de stabilité du système.

## **I.6- Conclusion :**

Ce premier chapitre dresse un inventaire des techniques utilisées sur le drone à voilure fixe faisant l'objet d'étude de ce mémoire. Il ne se veut pas exhaustif, mais il illustre toute l'ingéniosité et la diversité des capteurs et des stratégies de commandes utilisés.

Le chapitre suivant sera consacré à la modélisation linéaire et non linéaire menant à l'élaboration du modèle mathématique du drone concerné.



# **Chapitre II: Modélisation de l'UAV**

La dynamique de vol caractérise le mouvement d'un véhicule volant dans l'atmosphère. Ainsi, elle peut être considérée comme une branche de la dynamique des systèmes où le système étudié est un véhicule volant. La réponse du véhicule aux forces : aérodynamiques, propulsive et gravitationnelle et les commandes introduites par le pilote déterminent l'attitude du véhicule et la trajectoire résultante. Le domaine de la dynamique de vol peut être subdivisé en aspects conservés par :

- Performance : dans lequel les réponses à court terme sont ignorées et les forces sont assumées d'être en équilibre quasi-statique. Ici, les problèmes sont les vitesses de vol minimale et maximale, le taux de montée, le rayon maximal et l'endurance.
- Stabilité et contrôle : dans lequel les réponses de l'attitude et la vitesse du véhicule à court et moyen terme sont considérées. La stabilité considère la réponse du véhicule à des perturbations dans les considérations de vol d'un équilibre dynamique, tandis que le contrôle (commandes).
- Navigation et guidage : dans lequel les entrées de contrôle exigent d'exécuter une trajectoire particulière.

## II.1 Introduction aux repères de référence :

Avant de développer les équations de mouvement, il est impératif d'introduire les différents repères utilisés en dynamique de vol [8]. Il existe plusieurs façons d'exprimer la position, la vitesse, l'orientation, les forces et les moments qui agissent sur l'avion.

Dans cette section, seuls les repères nécessaires à l'identification du système sont adoptés.

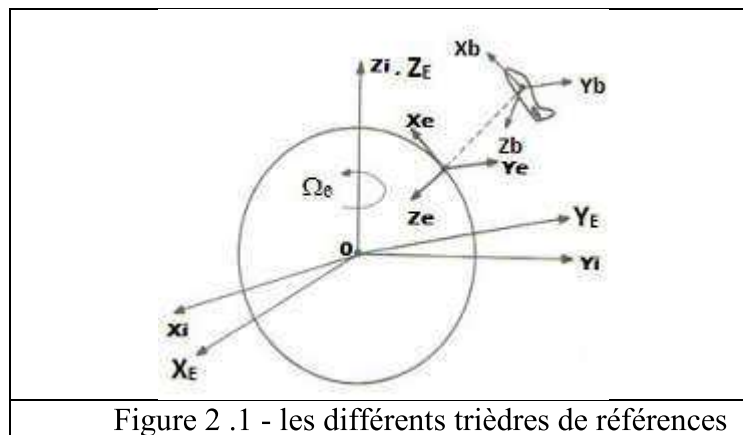


Figure 2 .1 - les différents trièdres de références

### II.1.1 Trièdre inertielle (O Xi Yi Zi):

Un trièdre inertielle est défini comme étant soit fixe dans l'espace ou en mouvement à vitesse constante. En dynamique du vol, il est nécessaire de spécifier un trièdre (repère) inertielle de référence car les lois fondamentales de la mécanique classique sont valides seulement que dans un repère inertielle.

Le repère inertielle choisi est décrit comme suit :

- L'origine  $O$  est au centre de masse de la Terre.
- L'axe  $Z_i$  est l'axe de rotation de la terre autour du pôle Nord.
- L'axe des  $X_i$  est dans le plan équatorial pointant vers l'équinoxe de printemps.
- L'axe des  $Y_i$  complète un système orthogonal.

### **II.1.2 Trièdres non inertiels :**

#### **II.1.2.1- Trièdre avion ( $Ox_b Y_b Z_b$ ):**

Il s'agit d'un repère orthogonal direct fixé à l'avion et ayant comme origine «  $O$  » son centre de gravité.

Le plan  $Ox_b Z_b$  correspond au plan de symétrie de l'avion.

- L'axe  $Ox_b$  pointe positif vers le nez de l'avion et suivant son axe longitudinal ou l'axe du véhicule à portance nulle.
- L'axe  $Oy_b$  est perpendiculaire au plan  $Ox_b Z_b$  et pointe positif vers l'aile droite.
- Finalement, l'axe  $Oz_b$  pointe vers le bas dans le plan de symétrie.

Le repère avion est très pratique pour définir les moments et produits d'inertie du corps ainsi que les forces et moments qui agissent sur l'avion. [9]

#### **II.1.2.2- Trièdre terrestre lié à l'avion ( $Ox_e Y_e Z_e$ ):**

La position dans l'espace d'un objet mobile est à priori définie dans un repère « fixe » c'est-à-dire lié à la terre. Le repère terrestre est un repère orthonormé direct supposé galiléen.

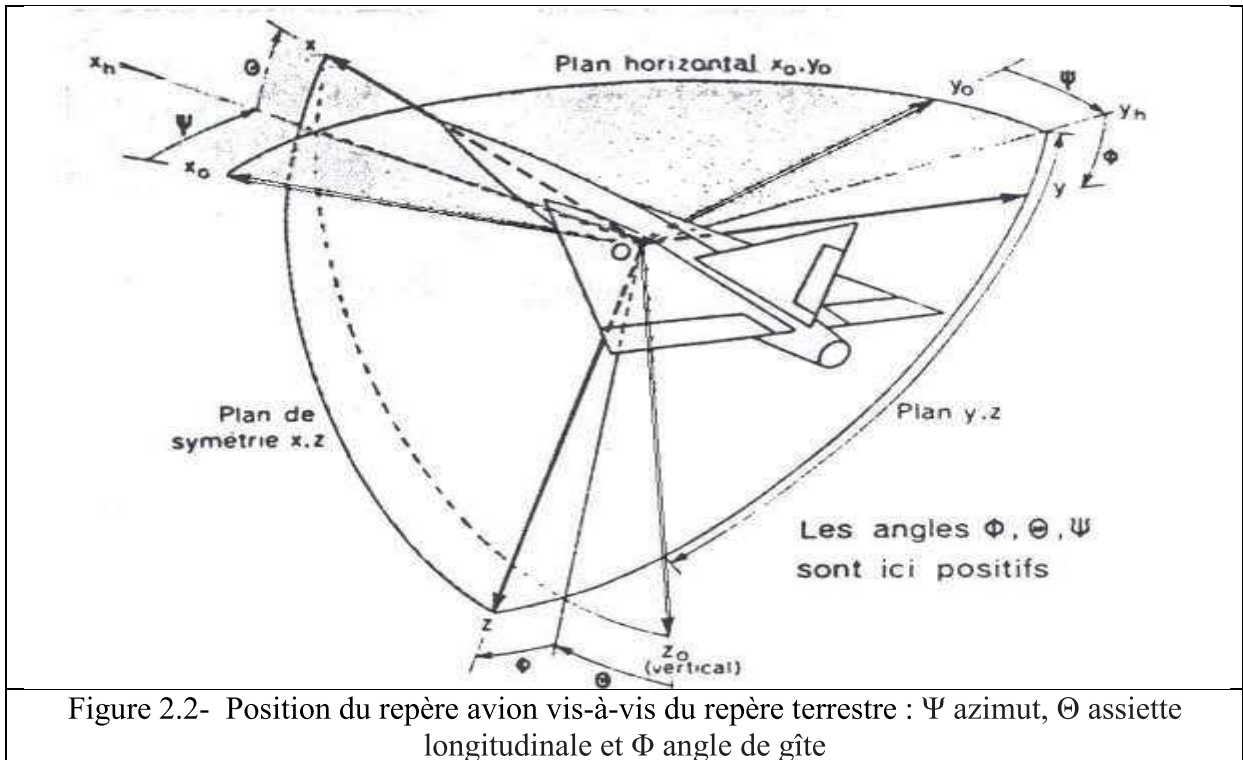
- L'origine «  $O$  » de ce repère est fixe par rapport à la terre, et se coïncide avec le centre de gravité « C.G » de l'avion.
- L'axe «  $Ox_e$  » est dirigé suivant l'azimut (nord vrai ou nord magnétique).
- L'axe «  $Oy_e$  » est perpendiculaire au plan ( $X_e Z_e$ ) et est orienté vers l'est.
- L'axe «  $Oz_e$  » complète le trièdre, il est orienté dans une direction du centre de la terre. [9]

Ce système de référence, décrit à la Figure (2.2) est très pratique pour définir la trajectoire de l'appareil à partir d'un point initial.

#### **Passage du repère terrestre au repère avion :**

La position de l'origine du repère avion est donnée par les coordonnées géographiques du centre de gravité rapportées à celle de l'origine du repère terrestre. Ces nouvelles coordonnées sont notées respectivement «  $x$  », «  $y$  » et «  $z$  ».

L'orientation relative du trièdre avion vis-à-vis du trièdre terrestre peut être déterminée à partir du cap ( $\psi$ ), de l'assiette ( $\theta$ ), et du gîte ( $\phi$ ) de l'avion. [8]



La matrice de changement de repère associée à ces transformations s'écrit :

$$\begin{aligned}
 M_{\text{avion} \rightarrow T} &= \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \Psi & (\cos \Psi \sin \theta \sin \phi + \sin \Psi \cos \phi) & (\cos \Psi \sin \theta \cos \phi + \sin \Psi \sin \phi) \\ \cos \theta \sin \Psi & (\sin \Psi \sin \theta \sin \phi + \cos \Psi \cos \phi) & (\sin \Psi \sin \theta \cos \phi + \cos \Psi \sin \phi) \\ \sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

### II.1.2.3- Trièdre aérodynamique (OXa Ya Za):

Un cas particulier du système d'axes lié à la vitesse dans le plan horizontal de l'avion s'appelle système d'axes aérodynamique.

- L'axe OXa se dirige vers la direction de la vitesse.
- L'axe OYa est normal au plan OXaZa et est dirigé vers la droite ou suivant l'aile droite.
- L'axe OZa est situé dans le plan de symétrie.

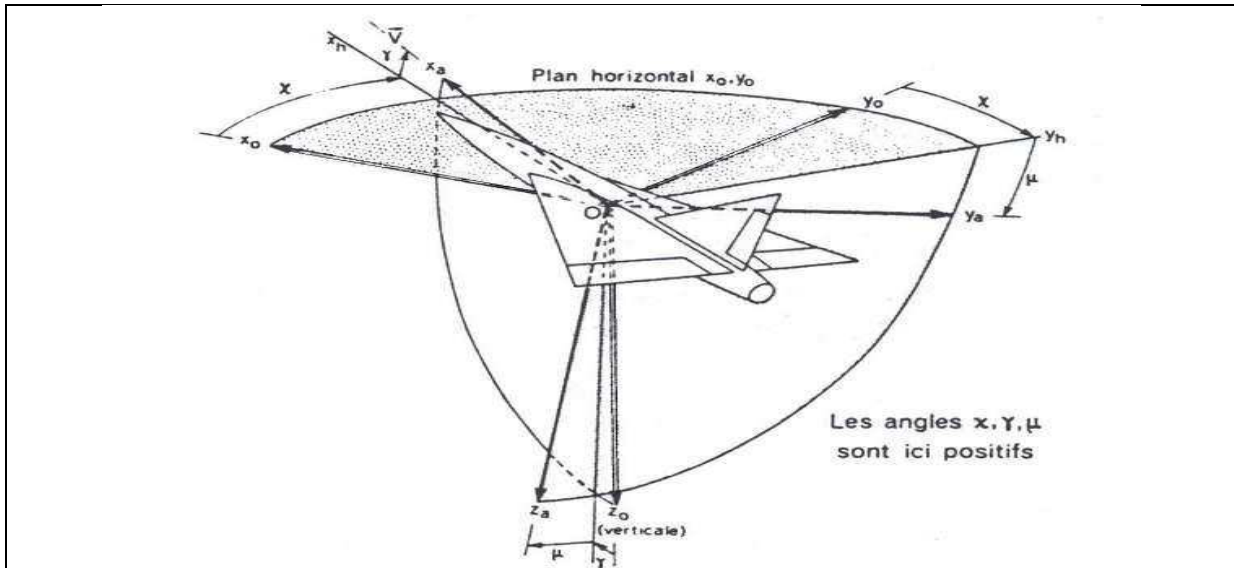


Figure 2.3- Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre terrestre :  $\chi$  azimut aérodynamique,  $\gamma$  pente aérodynamique et  $\mu$  angle de gîte aérodynamique.

Par rapport au trièdre avion, le trièdre associé au repère aérodynamique est obtenu à partir d'une rotation d'angle  $\alpha$  (l'incidence) autour de l'axe  $Y_b$  et d'angle  $\beta$  (le dérapage aérodynamique) autour de l'axe  $Z_b$ . [9]

La matrice de changement de repère associée à ces transformations s'écrit :

$$M_{AERO \rightarrow AVION} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{aero} & \sin \beta_{aero} & 0 \\ \sin \beta_{aero} & \cos \beta_{aero} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta_{aero} & \sin \beta_{aero} & \cos \beta_{aero} \sin \alpha \\ \sin \beta_{aero} \cos \alpha & \cos \beta_{aero} & \sin \alpha \sin \beta_{aero} \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

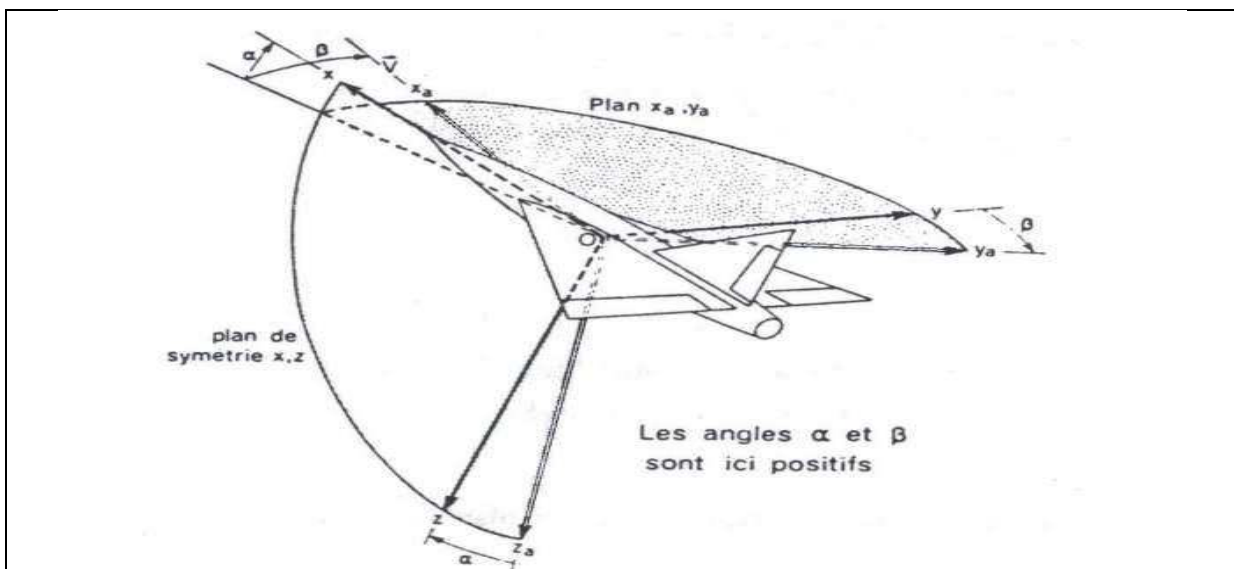


Figure 2.4 - Transformation liant le repère aérodynamique au repère avion.

#### II.2.1.4- Trièdre de navigation (OX<sub>v</sub> Y<sub>v</sub> Z<sub>v</sub>):

L'origine de ce trièdre est située sur la surface de la terre, il est également connu comme la locale géodésique ou un trièdre de navigation tels que:

- L'axe OZ<sub>v</sub> est orienté vers le centre de la terre.
- L'axe OX<sub>v</sub> se dirige habituellement vers le nord.
- L'axe OY<sub>v</sub> se dirige vers l'est.

L'emplacement de l'origine de ce système de coordonnées, est choisi de sorte qu'il se trouve lié à l'avion à  $t = 0$ . Il est utile pour définir la position de l'avion au moment du décollage, et représenter l'attitude et la vitesse d'un aéronef lorsqu'il est sur ou près de la surface de la Terre.

### II.2- Equations du mouvement :

Dans ce chapitre, nous commençons en premier lieu à établir les équations qui régissent le mouvement d'un avion en vol par application de la seconde loi de NEWTON.

Ensuite, nous modélisons analytiquement le comportement dynamique de l'avion soumis à des perturbations externes.

Le résultat obtenu se représente par un système d'équations non linéaires couplées. A ce niveau nous ferons appel à la théorie des petites perturbations pour linéariser et découpler les équations.

Enfin de compte, nous obtenons deux système d'équations, le premier gouvernant le mouvement longitudinal et le second le mouvement latéral.

#### II.2.1- hypothèses :

L'avion est un solide déformable, soumis à des forces externes très variables, dépendant à la fois de sa trajectoire, de son attitude, de ses déformations et de l'action de la pesanteur terrestre. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte simultanément tous les facteurs régissant le mouvement de l'avion. Des hypothèses simplificatrices appropriées au type de problème que l'on cherche à traiter ici sont donc introduites :

- Hypothèse 1 : l'avion est un corps rigide à six (6) degrés de liberté, portant un plan de symétrie.
- Hypothèse 2 : la masse et la matrice d'inertie de l'avion sont constantes (durant notre étude :  $\frac{dm}{dt}=0$ ).
- Hypothèse 3 : la terre est supposée plate et immobile, le repère terrestre est donc galiléen.
- Hypothèse 4 : afin de simplifier les calculs, on suppose que l'étude est faite dans l'atmosphère standard :

- Les propriétés de l'atmosphère ne dépendent que de l'altitude  $h$ .
- La température est inversement proportionnelle à l'altitude (la température décroît de façon régulière d'environ 6 degrés Celsius tous les 1000 mètres pour atteindre  $-56^{\circ}\text{C}$  à la tropopause).
- L'accélération gravitationnelle est constante.

## **II.2.2- Equations d'Euler :**

### **II.2.2.1- les forces et les moments :**

Les principales forces et moments agissant sur l'avion sont dus aux effets aérodynamiques, à la pesanteur, aux efforts liés aux interactions avec le sol (roulement) et à la poussée motrice. Cette partie a pour but de présenter comment s'établissent ces différents efforts, de manière à donner une vision d'ensemble du comportement de l'avion et du modèle qui peut y être associé. [10]

#### **a) Les efforts aérodynamiques :**

Ces forces et moments aérodynamiques dépendent de l'état du système (vitesses, attitude, altitude), des conditions extérieures (vitesse et orientation du vent, ...), de la configuration de l'avion (becs, volets, spoilers, ...), de la position des gouvernes aérodynamiques (ailerons, gouverne de direction, profondeur, ...). Leur détermination est le plus souvent basée sur l'identification de coefficients aérodynamiques.

Par soucis de simplicité, on exprimera ces efforts dans le trièdre avion.

Les forces et moments aérodynamiques sont souvent représentés sous la forme de fonctions proportionnelles à la pression dynamique ( $\rho$ ), à la surface de référence de l'avion ( $S$ ), au carré de la vitesse air ( $V_{\text{AIR}}$ ) et à des coefficients aérodynamiques ( $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ ,  $C_l$ ,  $C_m$ ,  $C_n$ ) :

$$\begin{aligned}
 F_{X_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S V_{air}^2 C_X & M_{P_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S e_{aero} V_{air}^2 C_l \\
 F_{Y_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S V_{air}^2 C_Y & M_{P_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S c_{aero} V_{air}^2 C_m \\
 F_{Z_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S V_{air}^2 C_Z & M_{r_{aero}} &= \frac{1}{2} \rho S e_{aero} V_{air}^2 C_n
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$e_{aero}$  Représente l'envergure et  $c_{aero}$  la corde aérodynamique.

#### **b) Effet de la pesanteur :**

Le poids de l'avion est considéré comme appliqué en son centre de gravité, suivant l'axe vertical. Lorsque l'assiette de l'avion est non nulle, il induit des forces longitudinales et latérales dues à la projection dans le trièdre avion. On a alors :

$$\begin{aligned}
 F_{Xp} &= \sin \theta \cdot mg \\
 F_{Yp} &= \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot mg \\
 F_{Zp} &= \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot mg
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

### II.2.2.2- la mécanique newtonienne :

Les équations générales de mouvement d'un avion à six degrés de liberté utilisées pour le contrôle et la simulation de vol sont considérées dans ce projet. Les équations sont développées à partir de la deuxième loi de Newton, qui stipule que la somme de toutes les forces et moments externes agissant sur le centre de gravité du corps sont égales au taux de variation dans le temps de l'impulsion (terme en anglais, *momentum*) linéaire et angulaire sur le corps sont :

$$F = m \left( \frac{d\bar{V}}{dt} \right)_i \tag{2.5}$$

$$\bar{M} = \frac{d\bar{H}}{dt} \tag{2.6}$$

Où :

$m$  : est la masse de l'avion (constante).

$V$  : la vitesse du centre de masse de l'avion.

$F$  : représente la force extérieure.

L'indice 'i' : repère inertiel.

$M$  : est le moment résultant autour du centre de gravité.

$H$  : l'impulsion angulaire autour du centre de gravité tel que

$$H = I \Omega \tag{2.7}$$

Avec :  $\Omega$ : la vitesse angulaire.

$I$  : la matrice d'inertie.

Les équations vectorielles (II.5) à (II.6) peuvent être exprimées sous forme scalaire de la façon suivante :

$$X = m \frac{d}{dt}(u) \quad Y = m \frac{d}{dt}(v) \quad Z = m \frac{d}{dt}(w) \tag{2.8}$$

$$L = \frac{d}{dt}H_x \quad M = \frac{d}{dt}H_y \quad N = \frac{d}{dt}H_z \tag{2.9}$$

Tel que les composantes de la force ( $X, Y, Z$ ) en fonction des composantes de la vitesse  $u, v, w$  ainsi que les composantes du moment ( $L, M, N$ ) en fonction des composantes de



l'impulsion angulaire  $(L, M, N)$  sont représentées le long des axes  $(x, y, z)$  du référentiel avion.

Puisque les équations (2.5) et (2.6) ne sont valides que dans un repère fixe d'inertie, lorsque l'avion effectue une rotation, les moments et produits d'inertie sont alors en fonction du temps. Il convient d'appliquer l'équation de Coriolis pour exprimer les dérivées des vecteurs  $V$  et  $H$  dans le repère avion afin d'utiliser une matrice d'inertie constante et d'observer la plupart des quantités mesurées sur l'appareil. [11]

$$F = m\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}\right)_i = m\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}\right)_b + \bar{\Omega}_b \bar{V}_b \tag{2.10}$$

$$\bar{M} = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\right)_i = \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}\right)_b + \bar{\Omega}_b \bar{H}_b \tag{2.11}$$

$$\bar{M} = \left(\frac{\partial (I \bar{\Omega})}{\partial t}\right)_b + \bar{\Omega} (I \bar{\Omega}) \tag{2.12}$$

En assumant que le plan du repère avion  $O_{xz}$  est un plan de symétrie du corps rigide, la matrice d'inertie  $I$  devient symétrique et les produits d'inertie  $I_{xy} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zy} = 0$ . La matrice des moments et des produits d'inertie de l'avion est donc réduite à :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Par conséquent, selon l'hypothèse précédente, la représentation scalaire des équations (2.8) et (2.9) se formule comme suit :

• **Équations générales de force**

$$X = m(u + qw \quad rv) \tag{2.14}$$

$$Y = m(v + ru \quad pw) \tag{2.15}$$

$$Z = m(w + pv \quad qu) \tag{2.16}$$

• **Équations générales de moment**

$$L = [I_x p] \quad I_{xz}(r + pq) \quad + rq(I_z \quad I_y) \tag{2.17}$$

$$M = [I_y q] \quad I_{xz}(p^2 \quad r^2) \quad + qr(I_x \quad I_z) \tag{2.18}$$

$$N = \underbrace{[I_z r]}_1 \quad \underbrace{I_{xz}p + pq(I_y \quad I_x)}_2 \quad + \underbrace{I_{xz}qr}_3 \tag{2.19}$$

Où

- L est le moment autour l'axe X.
- M est le moment autour l'axe Y.
- N est le moment autour l'axe Z.

En détaillant les expressions des moments [11],

- Le premier terme est lié à l'accélération angulaire.
- Le deuxième représente la précision des gyroscopes.
- Le troisième est le terme de couplage.

En projetant les équations de forces sur les axes avion, on peut écrire :

$$u = \frac{X}{m} \quad qw + rv \quad g \sin \theta \tag{2.20}$$

$$v = \frac{Y}{m} \quad ru + pw + g \cos \theta \sin \theta \tag{2.21}$$

$$w = \frac{Z}{m} \quad pv + qu + g \cos \theta \cos \theta \tag{2.22}$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{X}{m} = X_u(u - u_0) + X_w + X_{\delta E} \delta_E + X_{\delta T} \delta_T \\ \frac{Y}{m} = Y_v v + Y_{\delta a} \delta_a + Y_{\delta r} \delta_r \\ \frac{Z}{m} = Z_u(u - u_0) + Z_w w + Z_{\delta E} \delta_E + Z_{\delta T} \delta_T \end{array} \right. \tag{2.23}$$

A partir de (2.12) on peut calculer les trois accélérations angulaires dont l'expression peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} = I^{-1} \cdot (\bar{M} - \bar{\Omega} (I \cdot \bar{\Omega})) \tag{2.24}$$

Avec :

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} p = \text{vitesse de roulis} \\ q = \text{vitesse de tangage} \\ r = \text{vitesse de lacet} \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} iI_x & 0 & iI_{xz} \\ 0 & iI_y & 0 \\ iI_{xz} & 0 & iI_z \end{bmatrix}$$

Et  $\left\{ iI_x = \frac{I_z}{I_z I_x - I_{xz}^2}, \quad iI_y = \frac{1}{I_y}, \quad iI_z = \frac{I_x}{I_z I_x - I_{xz}^2}, \quad iI_{xz} = \frac{I_{xz}}{I_z I_x - I_{xz}^2} \right\}$

Cette expression peut aussi s'écrire de manière développée : [12]

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{I_x} \frac{1}{I_{xz}^2/I_z} \left[ L + \frac{I_{xz}}{I_z} \left[ N \quad pq(I_y \quad I_x) \quad I_{xz}qr \right] \quad I_{xz}pq \quad (I_z \quad I_y)qr \right] \\
 q &= \frac{1}{I_y} \left[ M + I_{xz}(p^2 \quad r^2) \quad (I_x \quad I_z)pr \right] \\
 r &= \frac{1}{I_z} \frac{1}{I_{xz}^2/I_x} \left[ N + \frac{I_{xz}}{I_x} \left( L \quad pqI_{xz} \quad (I_z \quad I_y)qr \right) \quad I_{xz}qr \quad pq(I_y \quad I_x) \right]
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Avec,

$$\left\{ \begin{aligned}
 L &= I_x(L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta a} \delta_a + L_{\delta r} \delta_r) \\
 M &= I_y(M_u(u \quad u_0) + M_w w + M_w \frac{z}{m} \quad pv + qu + g \cos \theta \cos \varphi \quad g) + M_q q + M_{\delta E} \delta_E + \\
 &\quad M_{\delta T} \delta_T \\
 N &= I_z(N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta a} \delta_a + N_{\delta r} \delta_r)
 \end{aligned} \right. \tag{2.26}$$

• Équations d'attitude et de position

La résolution des équations précédentes peut nécessiter la détermination de l'attitude et de la position de l'avion car participant au calcul de certains efforts (via par exemple l'incidence ou la pression atmosphérique). Ces informations peuvent aussi s'avérer intéressantes pour reconstituer le comportement et la trajectoire de l'avion. [11]

Les dérivées des trois angles d'Euler relatifs à l'attitude de l'avion sont données par les équations :

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta} &= q \cos \varphi \quad r \sin \varphi \\
 \dot{\varphi} &= p + r \tan \theta \cos \varphi + q \tan \theta \sin \varphi \\
 \dot{\Psi} &= q(\sin \varphi \sec \theta) + r(\cos \varphi \sec \theta)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

La position de l'avion peut être déterminée par intégration de la projection dans le repère terrestre de sa vitesse, précédemment déterminée dans le repère avion. Ce changement de repère peut être réalisé sur la base des équations (2.20), (2.21) et (2.22) . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 x &= [u \cos \theta + (v \sin \varphi + w \cos \varphi) \sin \theta] \cos \Psi + (v \cos \varphi + w \sin \varphi) \sin \Psi \\
 y &= [u \cos \theta + (v \sin \varphi + w \cos \varphi) \sin \theta] \sin \Psi + (v \cos \varphi \quad v \sin \varphi) \cos \Psi \\
 z &= u \sin \theta + (v \sin \varphi + w \cos \varphi) \cos \theta
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Le modèle correspondant à cette représentation est un modèle non linéaire d'ordre 12 dont les variables d'état sont :

- les projections de la vitesse de déplacement du centre de gravité sur les trois axes du repère « avion »,
- les trois vitesses angulaires de l'avion en tangage, roulis et lacet,
- les trois coordonnées donnant la position du centre de gravité dans le repère terrestre,
- les trois angles ( $\phi, \theta, \psi$ ) donnant l'attitude de l'avion.

$$\bullet u = X_u(u - u_0) + X_w w + X_{\delta_e} \delta_e - q w + r v - g \sin \theta$$

$$\bullet v = Y_v v + Y_{\delta_a} \delta_a + Y_{\delta_r} \delta_r - r u + p w + g \cos \theta \sin \phi$$

$$\bullet w = Z_u(u - u_0) + Z_w w + Z_{\delta_e} \delta_e - p v + q u + g \cos \theta \cos \phi$$

$$\bullet \dot{p} = \frac{1}{I_x - I_{xz}^2/I_z} \left( (I_x(L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r)) + \frac{I_{xz}}{I_z} [I_z(N_v v + N_p p + N_r r +$$

$$N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r) - p q I_y - I_x I_{xz} q r + I_x z p q - I_z I_y q r$$

$$\bullet \dot{q} = \frac{1}{I_y} \left( (I_y (M_u (u - u_0) M_w w + M_w \left[ \frac{Z}{m} - p v + q u + g \cos \theta \cos \phi \right] + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e +$$

$$M_{\delta_r} \delta_r) - I_x z p^2 - r^2 - I_x I_z r q \quad (2.29)$$

$$\bullet \dot{r} = \frac{1}{I_z - I_{xz}^2/I_x} \left( I_z (N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_a} \delta_a + N_{\delta_r} \delta_r) + \frac{I_{xz}}{I_x} [I_x (L_v v + L_p p + L_r r +$$

$$L_{\delta_a} \delta_a + L_{\delta_r} \delta_r) + p q I_x z - I_z I_y q r - I_x z q r - p q (I_y - I_x)$$

$$\bullet \theta = q \cos \phi - r \sin \phi.$$

$$\bullet \phi = p + r \tan \theta \cos \phi + q \tan \theta \sin \phi$$

$$\bullet \psi = q (\sin \phi \sec \theta) + r (\cos \phi \sec \theta)$$

$$\bullet x = [u \cos \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \sin \theta] \cos \psi + (v \cos \phi + w \sin \phi) \sin \psi$$

$$\bullet y = [u \cos \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \sin \theta] \sin \psi + (v \cos \phi - w \sin \phi) \cos \psi$$

$$\bullet z = u \sin \theta + (v \sin \phi + w \cos \phi) \cos \theta$$

Ceci, est un modèle non-linéaire, couplé et variable dans le temps. [13]

### II.3- Linéarisation des équations :

Dans cette partie du chapitre, premièrement, les équations linéarisées de mouvement de l'aéronef sont représentées dans l'espace d'états, puis en prenant les spécifications du « Zagi flying wing » comme référence. Les équations sont écrites au-dessous.

**II.3.1- La théorie des petites perturbations :**

En appliquant la théorie des petites perturbations nous supposons que le principe de mouvement de l'avion se compose de petites déviations sur les conditions de vol, toutes les variables dans les équations du mouvement sont remplacées par une référence de valeur plus une perturbation. [14]

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 + \mathbf{u} & \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0 + \mathbf{v} & \mathbf{w} &= \mathbf{w}_0 + \mathbf{w} \\
 \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 + \mathbf{p} & \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0 + \mathbf{q} & \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{r} \\
 \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \mathbf{X} & \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y} & \mathbf{Z} &= \mathbf{Z}_0 + \mathbf{Z} \\
 \mathbf{M} &= \mathbf{M}_0 + \mathbf{M} & \mathbf{N} &= \mathbf{N}_0 + \mathbf{N} & \mathbf{L} &= \mathbf{L}_0 + \mathbf{L} \\
 \varphi &= \varphi_0 + \varphi & \theta &= \theta_0 + \theta & \Psi &= \Psi_0 + \Psi \\
 \delta &= \delta_0 + \delta & & & & 
 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Les conditions de vol de référence sont supposées pour être symétriques et les forces de propulsion sont supposées rester constantes.

Si nous introduisons la notation des petites perturbations dans les équations du mouvement, nous pourrions simplifier l'équation du mouvement. Prenons l'exemple de **l'équation des forces X :**

$$X - mg \sin \theta = m(u + qv - rv) \quad (2.31)$$

Son remplacement par les variables des petites perturbations est :

$$\begin{aligned}
 X_0 + X - mg \sin(\theta_0 + \theta) &= m \left[ \frac{d}{dt} (u_0 + u) + (q_0 + q)(w_0 + w) \right. \\
 &\left. (r_0 + r)(v_0 + v) \right] \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

Alors l'équation X devient :

$$X_0 + X - mg \sin(\theta_0 + \theta) = m u \quad (2.33)$$

Cette équation peut être réduite en appliquant les formules trigonométriques suivantes :

$$\sin(\theta_0 + \theta) = \sin \theta_0 \cos \theta + \cos \theta_0 \sin \theta = \sin \theta_0 + \theta \cos \theta_0 \quad (2.34)$$

Par conséquent :

$$X_0 + X - mg(\sin \theta_0 + \theta \cos \theta_0) = m u \quad (2.35)$$

Si toutes les perturbations sont égales à zéro dans l'équation ci-dessus nous aurons la condition de vol de référence :

$$X_0 - mg \sin \theta_0 = 0 \quad (2.36)$$

Cela réduit l'équation de force X :

$$X - mg \theta \cos \theta_0 = m u \quad (2.37)$$

La force  $X$  est le changement dans la force aérodynamique et de propulsion dans la direction  $X$  et peut être exprimée au moyen d'une série de Taylor en ce qui concerne les variables de la perturbation, si nous supposons que  $X$  est une fonction uniquement de  $u, w, \delta_e$  et  $\delta_T$  alors  $X$  pourra être exprimée par :

$$X = \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (2.38)$$

Où :  $\partial X/\partial u$ ,  $\partial X/\partial w$ ,  $\partial X/\partial \delta_e$  et  $\partial X/\partial \delta_T$  sont appelées dérivées de stabilité et sont évaluées à la condition de vol de référence, les variables  $\delta_e$  et  $\delta_T$  sont le changement de l'angle de l'elevator et le réglage de la manette des gaz respectivement.

On remplace cette expression dans l'équation (II.38):

$$\frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T - mg \cos \theta_0 = m \dot{u} \quad (2.39)$$

Ou bien:

$$\left(m \frac{d}{dt} - \frac{\partial X}{\partial u}\right) u - \left(\frac{\partial X}{\partial w}\right) w + (mg \cos \theta_0) \theta = \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \quad (2.40)$$

L'équation peut être réécrite en une forme plus commode en divisant par le biais de la masse  $m$  de :

$$\left(\frac{d}{dt} - X_u\right) u - X_w w + (g \cos \theta_0) \theta = X_{\delta_e} \delta_e + X_{\delta_T} \delta_T \quad (2.41)$$

Où :  $X_u = \frac{\partial X/\partial u}{m}$ ,  $X_w = \frac{\partial X/\partial w}{m}$  ...ect : les dérivations aérodynamiques divisées par la masse de l'avion.

Le changement des forces aérodynamiques et des moments est en fonction du mouvement des variables ( $u, w$ ...ect) les dérivées aérodynamiques qui sont généralement les plus importantes pour l'analyse de mouvement d'avions classiques sont données ci-dessous.

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial X}{\partial u} u + \frac{\partial X}{\partial w} w + \frac{\partial X}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial X}{\partial \delta_T} \delta_T \\ Y &= \frac{\partial Y}{\partial v} v + \frac{\partial Y}{\partial p} p + \frac{\partial Y}{\partial r} r + \frac{\partial Y}{\partial \delta_r} \delta_r \\ Z &= \frac{\partial Z}{\partial u} u + \frac{\partial Z}{\partial w} w + \frac{\partial Z}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial Z}{\partial \delta_T} \delta_T \end{aligned} \quad (2.42)$$

Et :

$$\begin{aligned} L &= \frac{\partial L}{\partial v} v + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r + \frac{\partial L}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial L}{\partial \delta_a} \delta_a \\ M &= \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial w} w + \frac{\partial M}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial M}{\partial \delta_T} \delta_T \\ N &= \frac{\partial N}{\partial v} v + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta_r} \delta_r + \frac{\partial N}{\partial \delta_a} \delta_a \end{aligned} \quad (2.43)$$

### II.3.2- La linéarisation des petites perturbations des équations latérales et longitudinales :

#### II.3.2.1- Les équations longitudinales :

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d}{dt} \quad X_u \right) u \quad X_w \quad w + (g \cos \theta_0) \quad \theta &= X_{\delta_e} \quad \delta_e + X_{\delta_T} \quad \delta_T \\
 Z_u \quad u + \left( (1 \quad Z_w) \frac{d}{dt} \quad Z_w \right) w \quad \left( (u_0 + Z_q) \frac{d}{dt} \quad g \sin \theta_0 \right) \theta &= Z_{\delta_e} \quad \delta_e + Z_{\delta_T} \quad \delta_T \\
 M_u \quad u \quad \left( M_w \frac{d}{dt} + M_w \right) w + \left( \frac{d^2}{dt^2} \quad M_q \frac{d}{dt} \right) \theta &= M_{\delta_e} \quad \delta_e + M_{\delta_T} \quad \delta_T \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

#### II.3.2.2- Les équations latérales directionnelles:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d}{dt} \quad Y_v \right) v \quad Y_p \quad p + (u_0 \quad Y_r) \quad r \quad (g \cos \theta_0) \quad \varphi &= Y_{\delta_r} \quad \delta_r \\
 L_v \quad v + \left( \frac{d}{dt} \quad L_p \right) p \quad \left( \frac{I_{xz}}{I_x} \frac{d}{dt} + L_r \right) r &= L_{\delta_a} \quad \delta_a + L_{\delta_r} \quad \delta_r \\
 N_v \quad v \quad \left( \frac{I_{xz}}{I_z} \frac{d}{dt} + N_p \right) p + \left( \frac{d}{dt} \quad N_r \right) r &= N_{\delta_a} \quad \delta_a + N_{\delta_r} \quad \delta_r \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

### II.4- Les équations d'états :

#### II.4.1- Mode longitudinal :

La linéarisation des équations fondamentales de mouvement longitudinale sont formulées dans l'espace d'état comme  $X = AX + BU$  ; ou  $X = [ u, w, q, \theta ]^T$  sont les vecteurs d'état et  $U = [ \delta_e \quad \delta_T ]^T$  : est le vecteur de contrôle. [14]

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & g \\ Z_u & Z_w & u_0 & 0 \\ M_u + M_w Z_u & M_w + M_w Z_w & M_q + M_w u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_w Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_w Z_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Les matrices sont donc:

$$A = \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & g \\ Z_u & Z_w & 1 & 0 \\ M_u + M_w Z_u & M_w + M_w Z_w & M_q + M_w u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\text{Et : } B = \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_w Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_w Z_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Avec :  $X_u = \frac{\partial X/\partial u}{m}$  et :  $M_u = \frac{\partial M/\partial u}{m}$

Les lois des dérivées de stabilité du mode longitudinal sont représentées dans le tableau ci-dessous : [8]

Dérivée	Unité S.I	Dérivée	Unité S.I
$X_u = \frac{(C_{D_u} + 2C_{D_0})QS}{mu_0}$	$s^{-1}$	$M_w = C_{m_\alpha} \frac{\bar{c}}{2u_0} \frac{QS\bar{c}}{u_0 I_y}$	$s^{-1}$
$X_w = \frac{(C_{D_\alpha} - C_{L_0})QS}{mu_0}$	$s^{-1}$	$M_u = C_{m_u} \frac{(QS\bar{c})}{u_0 I_y}$	$(m.s)^{-1}$
$X_{\delta_e} = C_{X_{\delta_e}} QS/m$	$m/s^2$	$M_{\delta_e} = C_{m_{\delta_e}} (QS\bar{c})/I_y$	$(m.s)^{-1}$
$Z_u = \frac{(C_{L_u} + 2C_{L_0})QS}{mu_0}$	$s^{-1}$	$M_q = C_{m_q} \frac{\bar{c}}{2u_0} (QS\bar{c})/I_y$	$m^{-1}$
$Z_w = \frac{(C_{L_\alpha} + C_{D_0})QS}{mu_0}$	$s^{-1}$	$M_w = C_{m_\alpha} \frac{(QS\bar{c})}{u_0 I_y}$	$s^{-2}$
$Z_\alpha = U_0 Z_w$	$m/s^2$		
$Z_{\delta_e} = C_{Z_{\delta_e}} QS/m$	$m/s^2$		

Tableau (2.1): Résumé des dérivées longitudinales.

Avec :

S= la surface de l'aile

$C_{D0}$  : le coefficient de trainée

m : la masse de l'avion

$u_0$  : la vitesse de l'avion

**II.4.2- Mode latérale directionnel :**

Les équations fondamentales de mouvement latéral directionnel sont formulées dans l'espace d'état ; ou  $X = [ \beta, p, r, \varphi ]^T$  sont les vecteurs d'état et  $U = [ \delta_a, \delta_r ]^T$  sont les vecteurs de contrôle. [14]

$$X = AX + BU$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & 0 & 0 \\ L_v & L_p & 0 & 0 \\ N_v & N_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.49)$$



L'équation d'état en fonction de l'angle de dérapage  $\beta$  est donnée par la relation suivante :

$$\beta \approx \tan^{-1} \frac{v}{u_0} = \frac{v}{u_0} \tag{2.50}$$

Donc :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_\beta}{u_0} & \frac{Y_p}{u_0} & \left(1 - \frac{Y_r}{u_0}\right) & \frac{g \cos \theta_0}{u_0} \\ L_\beta & L_p & L_r & 0 \\ N_\beta & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{Y_{\delta r}}{u_0} \\ L_{\delta a} & L_{\delta r} \\ N_{\delta a} & N_{\delta r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Les lois des dérivées de stabilité du mode latéral directionnel sont représentées dans le tableau ci-dessous : [8]

Dérivée	Unité S.I	dérivée	Unité S.I
$Y_\beta = C_{Y\beta}QS/m$	m/s <sup>2</sup>	$N_{\delta a} = C_{n\delta a}QSb/I_z$	s <sup>-2</sup>
$Y_p = \frac{C_{Yp}b}{(2u_0)QS}/m$	m/s	$N_{\delta r} = C_{n\delta r}QSb/I_z$	s <sup>-2</sup>
$Y_r = \frac{C_{Yr}b}{(2u_0)QS}/m$	m/s	$L_\beta = \frac{C_{l\beta}b}{(2u_0)QSb}/I_x$	s <sup>-2</sup>
$Y_{\delta r} = C_{Y\delta r}QS/m$	m/s <sup>2</sup>	$L_p = \frac{C_{lp}b}{(2u_0)QSb}/I_x$	s <sup>-1</sup>
$N_\beta = C_{n\beta}QSb/I_z$	s <sup>-2</sup>	$L_r = \frac{C_{lr}b}{(2u_0)QSb}/I_x$	s <sup>-1</sup>
$N_p = \frac{C_{np}b}{(2u_0)QSb}/I_z$	s <sup>-1</sup>	$L_{\delta a} = C_{l\delta a}QSb/I_x$	s <sup>-2</sup>
$N_r = \frac{C_{nr}b}{(2u_0)QSb}/I_z$	s <sup>-1</sup>	$L_{\delta r} = C_{l\delta r}QSb/I_x$	s <sup>-2</sup>

Tableau (2.2) : Résumé des dérivées latérales directionnelles.

**II.4.3- caractéristiques du modèle choisi « Zagi » :**

Comme une plateforme expérimentale, le « Zagi Flying Wing » est choisi. On utilise Pour la démonstration des équations développées précédemment la dynamique et les caractéristiques de cet UAV. [12]



Figure (2.5) : le prototype Zagi utilisé par les étudiants de Brigham Young University.

Parameter	Value	Longitudinal Coef.	Value	Lateral Coef.	Value
$m$	1.56 kg	$C_{L_0}$	0.09167	$C_{Y_0}$	0
$J_x$	0.1147 kg m <sup>2</sup>	$C_{D_0}$	0.01631	$C_{l_0}$	0
$J_y$	0.0576 kg m <sup>2</sup>	$C_{m_0}$	-0.02338	$C_{n_0}$	0
$J_z$	0.1712 kg m <sup>2</sup>	$C_{L_\alpha}$	3.5016	$C_{Y_\beta}$	-0.07359
$J_{xz}$	0.0015 kg m <sup>2</sup>	$C_{D_\alpha}$	0.2108	$C_{l_\beta}$	-0.02854
$S$	0.2589 m <sup>2</sup>	$C_{m_\alpha}$	-0.5675	$C_{n_\beta}$	-0.00040
$b$	1.4224 m	$C_{L_q}$	2.8932	$C_{Y_p}$	0
$c$	0.3302 m	$C_{D_q}$	0	$C_{l_p}$	-0.3209
$S_{prop}$	0.0314 m <sup>2</sup>	$C_{m_q}$	-1.3990	$C_{n_p}$	-0.01297
$\rho$	1.2682 kg/m <sup>3</sup>	$C_{L_{\delta_e}}$	0.2724	$C_{Y_r}$	0
$k_{motor}$	20	$C_{D_{\delta_e}}$	0.3045	$C_{l_r}$	0.03066
$k_{T_p}$	0	$C_{m_{\delta_e}}$	-0.3254	$C_{n_r}$	-0.00434
$k_\Omega$	0	$C_{prop}$	1.0	$C_{Y_{\delta_a}}$	0
$e$	0.9	$M$	50	$C_{l_{\delta_a}}$	0.1682
		$\alpha_0$	0.4712	$C_{n_{\delta_a}}$	-0.00328
		$\epsilon$	0.1592		
		$C_{D_p}$	0.0254		

Figure (2.7) : les paramètres et les dérivées de stabilité « Zagi flying wing »

### II.4.3.1- les équations linéarisées de mouvement pour le Zagi :

Dans cette dernière étape, les dérivées de stabilité calculés précédemment, en utilisant les tableaux (2.1) (2.2) et les équations développée, sont substituées dans les équations linéarisées latérales et longitudinales de mouvement, en ajoutant la hauteur du drone « h » et remplaçant la composante de vitesse « v » par l'angle de dérapage  $\beta$ .

Pour le mode longitudinal :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & 0 & g \\ Z_u/u_0 & Z_\alpha & 1 & 0 \\ M_u + M_w Z_u & M_w + M_w Z_w & M_q + M_w u_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} X_{\delta_e} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_e} & Z_{\delta_T} \\ M_{\delta_e} + M_w Z_{\delta_e} & M_{\delta_T} + M_w Z_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Pour le mode latéral :

$$\begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p & (u_0 & Y_r) \\ L_v & L_p & L_r & 0 \\ N_v & N_p & N_r & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Y_{\delta_r} \\ L_{\delta_a} & L_{\delta_r} \\ N_{\delta_a} & N_{\delta_r} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Où :  $\delta_e$ ,  $\delta_a$  et  $\delta_r$  sont les déflexions des : élévateur, aileron, et la gouverne de direction, respectivement.  $\delta_T$  Est de la force de poussé, et  $X_u$ ,  $X_w \dots L_p$   $N_p \dots$  sont des dérivées de stabilité.

Application numérique,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.3356 & 1.3181 & 0 & 9.80665 \\ 1.7916 & 3.9003 & 9.8215 & 0 \\ 0.702 & 3.5375 & 11.392 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9.8215 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0.7436 & 6.8728 \\ 3.7855 & 0 \\ 47.917 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \end{bmatrix} \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.1069 & 0.1962 & 1 & 0.9984 \\ 1.2213 & 1.9155 & 1.0096 & 0 \\ 1.7255 & 0.0919 & 1.7198 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & 0.1855 \\ 8.348 & 0 \\ 4.24 & 2.1272 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Le modèle complet dans l'espace d'états, [14]

$$\begin{aligned}
 \begin{matrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{matrix} &= \begin{bmatrix} 0.3356 & 1.3181 & 0 & 9.80665 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7916 & 3.9003 & 9.8215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.702 & 3.5375 & 11.392 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9.8215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10690.1962 & 1 & 0.9948 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2213 & 1.9155 & 1.0096 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7255 & 0.0919 & 1.7198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ \beta \\ p \\ r \\ \varphi \end{matrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0.7436 & 6.8728 & 0 & 0 \\ 3.7855 & 0 & 0 & 0 \\ 47.917 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1855 \\ 0 & 0 & 8.348 & 0 \\ 0 & 0 & 4.24 & 2.1272 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_T \\ \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

Par identification de la représentation de l'espace d'états :  $X = AX + BU$

Où, A est la matrice de transition

B = matrice d'entrée.

C =matrice de sortie

D=0 en général

$$\begin{aligned}
 A= \begin{bmatrix} 0.3356 & 1.3181 & 0 & 9.80665 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.7916 & 3.9003 & 9.8215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.702 & 3.5375 & 11.392 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9.8215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1069 & 0.1962 & 1 & 0.9984 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2213 & 1.9155 & 1.0096 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.7255 & 1.9155 & 1.7198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0919 & 1.7198 & 0 \end{bmatrix} \\
 B= \begin{bmatrix} 0.7436 & 6.8728 & 0 & 0 \\ 3.7855 & 0 & 0 & 0 \\ 47.917 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.1855 \\ 0 & 0 & 8.348 & 0 \\ 0 & 0 & 4.24 & 2.1272 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$U = [\delta_e \quad \delta_T \quad \delta_a \quad \delta_r]^T$$

$$X = [u \quad w \quad q \quad \theta \quad \beta \quad p \quad r \quad \varphi]^T$$

# **Chapitre III: Techniques de controle**

### **III.1- Introduction :**

La théorie de la Commande “Robuste” des Systèmes Linéaires a connu un essor remarquable durant ces dix dernières années. Sa popularité gagne aujourd’hui le milieu industriel où elle se révèle un outil précieux pour l’analyse et la conception des systèmes asservis. Cette percée rapide tient à deux atouts majeurs:

- son caractère appliqué et son adéquation aux problèmes pratiques de l’ingénieur automatique,

- sa contribution à la systématisation du processus de synthèse d’un asservissement.

Pour apprécier l’originalité et l’intérêt des outils de Commande Robuste, rappelons qu’un asservissement a deux fonctions essentielles:

- façonner la réponse du système asservi pour lui imprimer le comportement désiré,

- maintenir ce comportement face aux aléas et fluctuations qui affectent le système pendant son fonctionnement (rafales de vent pour un avion, usure pour un système mécanique, changement de configuration pour un robot, etc.). Cette seconde exigence est qualifiée de “robustesse à l’incertitude”. Elle revêt une importance critique pour la fiabilité du système asservi. En effet, l’asservissement est typiquement conçu à partir d’un modèle idéalisé et simplifié du système réel. Pour fonctionner correctement, il doit donc être robuste aux imperfections du modèle, c’est-à-dire aux écarts entre le modèle et le système réel, aux dérives des paramètres physiques, et aux perturbations externes. L’avantage essentiel des techniques de Commande Robuste est de générer des lois de commande qui satisfont à la double exigence mentionnée ci-dessus. Plus précisément, étant donné une spécification fréquentielle du comportement désiré et une estimation de l’ordre de grandeur de l’incertitude, la théorie évalue la faisabilité, produit une loi de commande adaptée, et fournit une garantie sur le domaine de validité de cette loi de commande (robustesse). Cette démarche de synthèse est systématique et très générale. En particulier, elle est directement applicable aux systèmes à plusieurs entrées/sorties.

Dans une certaine mesure, la théorie de la Commande Robuste réconcilie l’Automatique Classique à dominante fréquentielle (Bode, Nyquist, P.I.D.) et l’Automatique Moderne à dominante variables d’état (Commande Linéaire Quadratique, Kalman). Elle combine en effet le meilleur des deux. De l’Automatique Classique, elle emprunte la richesse de l’analyse fréquentielle des systèmes. Ce cadre est particulièrement favorable à la spécification des objectifs de performance (qualité du suivi ou de la régulation), de bande passante (domaine d’action de l’asservissement) et de robustesse. De l’Automatique Moderne, elle hérite la simplicité et la puissance des méthodes de synthèse par variables d’état des asservissements. Grâce à ces outils systématiques de synthèse, l’ingénieur peut désormais imposer des spécifications fréquentielles complexes et obtenir directement un diagnostic de faisabilité et une loi de commande appropriée. Il peut ainsi se concentrer sur la recherche du meilleur compromis et analyser les limites de son système.

### **III.2- La commande LQG : [15]**

La commande LQG présente l’intérêt de s’appliquer à des systèmes dont l’état n’est pas mesuré. Développée au début de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la

première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20<sup>ème</sup> siècle, la commande  $H_\infty$  apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

### **III.2.1- Formulation :**

Soit le système dynamique stochastique d'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + v \\ y = Cx + w \end{cases} \quad (3.1)$$

Où le bruit d'état  $v$  et le bruit de mesure  $w$  sont des bruits blancs centrés de variance  $E\{vv^T\}=V \geq 0$  et  $E\{ww^T\}=W > 0$ . Le problème LQG consiste en la minimisation du critère :

$$J(x_0, t_0, u) = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{t_f} \int_{-t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \right\} \quad (3.2)$$

Où  $Q$  et  $R$  deux matrices de pondération avec,  $Q=Q^T \geq 0$  et  $R=R^T > 0$ . Du fait des entrées de bruit  $v$  et  $w$ , les grandeurs  $u$  et  $x$  sont des grandeurs stochastiques. Comme critère, il est ainsi naturel de s'intéresser à l'espérance d'une intégrale. Il est possible de considérer des critères à temps.

### **III.2.2- Théorème de séparation:**

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom de théorème de séparation. Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée  $\hat{x}$  de  $x$  qui est non biaisée et à variance minimale,
- la commande par retour d'état  $u = K\hat{x}$  à appliquer à  $\hat{x}$  où  $K$  est calculé en considérant le problème LQ correspondant (en enlevant  $v$  et  $w$  de l'équation d'état et  $E$  dans le critère).

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples: celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman.

L'estimée optimale  $\hat{x}$  est donnée par l'observateur d'équation d'état :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K_f(y - C\hat{x}) \quad (3.3)$$

Où le gain de Kalman est :

$$K_f = P_f C^T W^{-1} \quad (3.4)$$

Avec  $P_f$  la solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$P_f A^T + A P_f - P_f C^T W^{-1} C P_f + V = 0 \quad (3.5)$$

La commande étant donnée par  $u = K \hat{x}$ , on peut réécrire les équations de la commande d'entrée  $y$  et de sortie  $u$  :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - K_f C)\hat{x} + K_f y \\ u = K \hat{x} \end{cases} \quad (3.6)$$

Le suivi d'une consigne  $y^*$  se fera par la loi de commande  $u = C(s)(y^* - y)$  où la fonction de transfert du correcteur est :

$$C(s) = K(sI - A + BK + K_f C)^{-1} \quad (3.7)$$

Ses équations d'état sont :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A - BK - K_f C)\hat{x} + K_f \epsilon \\ u = K \hat{x} \end{cases} \quad (3.8)$$

Où :  $\epsilon = y^* - y$ . Notons que ce correcteur LTI a le même ordre que le processus.

En employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ) ; soit : [16]

$$u = K_c \hat{x}$$

Avec :

$$\begin{cases} K_c = R^{-1} B^T P_c \\ P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La figure 3.1 représente la structure du correcteur LQG dans la boucle de régulation.

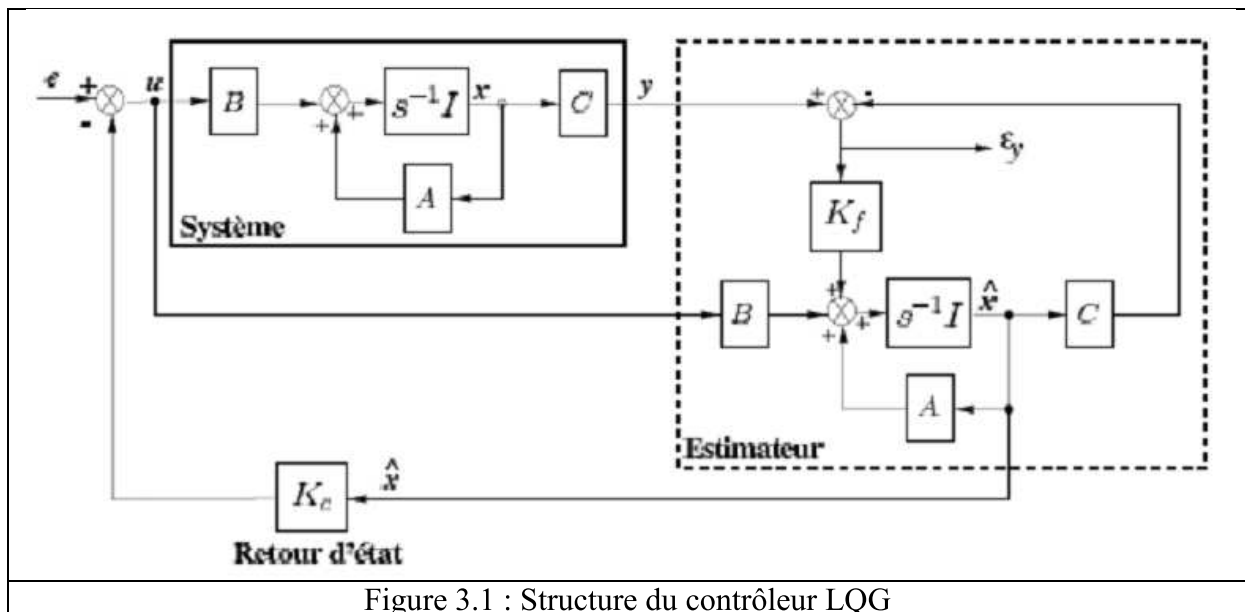


Figure 3.1 : Structure du contrôleur LQG



La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BK_c & K_f C + K_f DK_c & K_f \\ & K_c & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ y \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

### **III.2.3- Choix des pondérations**

#### **III.2.3.1- Généralités**

Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état ; V et W pour l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé : régler V et W de sorte que l'état soit « bien » reconstruit et régler Q et R pour avoir un « bon » retour d'état. Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande sera robuste (marge de module égale à 1). Si cette hypothèse n'est pas respectée, et ce sera le cas dès que vous souhaitez obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée. La méthode de réglage des pondérations Q et R du retour d'état vue au paragraphe précédent reste valable. Abordons la question du réglage de l'estimateur avant de présenter les méthodes de recouvrement du gain destinées à rendre robuste la commande LQG.

#### **III.2.3.2- Réglage de l'estimateur d'état :**

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande u et sur la mesure y du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure.

Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée ; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affecté par des signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des variances des bruits. Evaluer le bruit de mesure w en observant y est direct ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état v. Ce bruit peut être attribué à la commande u en choisissant :  $V = BV_u B^T$ , avec  $V_u$  la variance du bruit de mesure.

Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas aberrant d'en tenir compte globalement grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire en simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

#### **III.2.3.3 Loop Transfer Recovery :**

La présence d'un observateur fait que les propriétés de robustesse du correcteur LQ ne sont plus valables [17]. Les méthodes de Loop Transfer Recovery (LTR ou en Français recouvrement du transfert de la boucle) consistent à modifier les conditions de la synthèse afin de se rapprocher du transfert qui serait obtenu avec un retour d'état LQ. Si ce transfert est obtenu, la robustesse est alors assurée. Depuis les premiers travaux de Doyle et Stein en 1981 [18], de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet. C'est cette première approche qui est

présentée ici. Elle a l'inconvénient de ne pas convenir aux systèmes à déphasage non-minimal (systèmes possédant des zéros à partie réelle positive.).

La méthode de recouvrement repose sur l'écriture de la matrice de covariance  $V$  de la forme :

$$V = V_0 + q^2 B B^T \quad (3.9)$$

On montre que le gain de la boucle ouverte  $C(s)G(s)$  tend vers  $K(sI-A)^{-1}B$ , celui du régulateur LQ, lorsque  $q$  tend vers l'infini. Ainsi, à partir d'un correcteur initial reposant sur les pondérations  $V_0$  et  $W$ , on augmente petit-à-petit  $q$  jusqu'à obtenir la robustesse suffisante.

Une approche duale consiste à retoucher le gain du retour d'état en choisissant la matrice de pondération  $Q$  de la forme :

$$Q = Q_0 + q^2 C^T C \quad (3.10)$$

La méthode reste la même : on augmente  $q$  jusqu'à obtenir la robustesse désirée. Dans tous les cas, l'augmentation de la robustesse se fait au détriment des performances et un compromis doit être trouvé.

### **III.3- La commande $H_\infty$ :**

#### **III.3.1- Introduction**

Les techniques de la commande robuste multivariable, développées depuis les années 1980, permettent de résoudre de nombreux problèmes de commande avec des temps de développement assez limités. Elles ont fait leurs preuves sur des problèmes réputés difficiles (flexibilités, non-minimum de phase) et sont maintenant considérées comme un standard dans l'aéronautique et dans le spatial [19,20,21].

La commande  $H_\infty$  (appelée encore commande fréquentielle avancée ou commande robuste multivariable) est une nouvelle approche de l'Automatique Fréquentielle, elle a été initiée par Zames au début des années 80 et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [22],[23],[24]. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « commande robuste » [25], elle est utilisée pour mise au point rapide de lois de commande robustes des systèmes linéaires stationnaires et multivariables [25],[26]. Elle prend une place de plus en plus importante parmi les méthodes de synthèse de contrôleurs. Dans cette approche, l'un des points intéressants est qu'elle permet de prendre en compte, à priori et explicitement, des spécifications fréquentielles et temporelles du cahier des charges, qui est ainsi traduit directement sous forme d'un critère mathématique à vérifier [26]. Celui-ci est formulé en utilisant la norme  $H_\infty$ , d'où le nom qu'on donne à cette méthode de synthèse. La synthèse du contrôleur qui satisfasse ce critère se fait algorithmiquement par résolution du problème d'optimisation en exploitant la puissance de calcul des ordinateurs actuels.

La commande  $H_\infty$  possède plusieurs avantages parmi eux :

- que la commande prend en compte des spécifications temporelles et fréquentielle du cahier de charge.
- Le critère est construit directement du cahier de charge (la traduction des spécifications en termes de gabarits fréquentielle correspond aux pondérations).

- Elle permet de synthétiser des correcteurs qui prennent en compte à la fois les spécifications robuste et les spécifications de performance.
- Elle permet de traiter simplement la commande des systèmes MIMO.

**III.3.2 Le problème standard :**

Les approches modernes de la commande multivariable s'appuient sur des schémas de synthèse standards. Ces schémas, introduits par J.C. Doyle [27], ont l'intérêt de regrouper les deux problèmes classiques de l'automatique sous une forme unique : le suivi de consigne et le rejet de perturbation, pour une multitude de configurations possibles. Les techniques de synthèse proposées dans ce cadre standard peuvent s'appliquer à de nombreuses situations. Elles permettent de synthétiser des lois de commande multivariable de manière quasiment aussi simple qu'en monovariante.

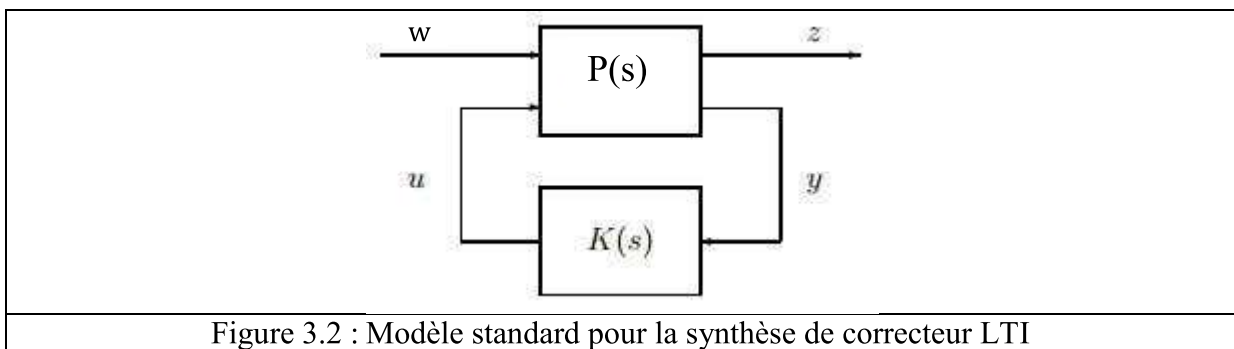


Figure 3.2 : Modèle standard pour la synthèse de correcteur LTI

Où :

Le vecteur  $z$  est choisi pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement et  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

Considérons le système linéaire multivariable  $P(s)$  disposant de deux canaux de signaux:

- le canal de performance ou d'incertitude, d'entrée  $v$  et de sortie  $z$ ,
- le canal de commande, d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ .

Notons  $G_{bf}(s)$  le système en boucle fermée, bouclé par une loi de commande  $u = K(s) y$ . L'algorithme itératif de Glover-Doyle [28,29] basé sur la résolution d'une équation de Riccati, permet de synthétiser un correcteur linéaire  $K(s)$  de manière à minimiser la norme  $H_\infty$ .

En notant  $\gamma$  l'indice de performance obtenu, on a  $\|G_{bf}(s)\|_\infty < \gamma$ . Ils ont l'avantage de nécessiter des hypothèses légèrement moins fortes sur le système. Le théorème du petit gain permet alors d'affirmer que le système présenté sur la figure 3.3 est stable pour toute incertitude vérifiant  $\| \Delta(s) \|_\infty \leq \frac{1}{\gamma}$ . C'est pour cette propriété que la commande  $H_\infty$  est qualifiée de robuste: il est possible de synthétiser un correcteur stabilisant le système incertain s'écrivant sous la forme d'une LFR entre des dynamiques connues  $P(s)$  et une partie incertaine bornée  $\Delta(s)$ . En réalité, cette propriété de robustesse a une portée pratique limitée. En effet, les systèmes physiques comportent de nombreuses incertitudes qui font que le système incertain  $\Delta(s)$  a une structure bien particulière. Ne pas tenir compte de cette structure entraîne un fort pessimisme qui limite l'intérêt de cette condition de robustesse.

La matrice de transfert  $P(s)$  qui représente un système LTI modélise les interactions dynamiques entre deux ensemble d’entrées et deux ensembles de sorties comme suit :

$$\begin{pmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(s) \\ U(s) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Le système  $P$  admet la représentation d’état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) = C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{cases} \quad (3.12)$$

Avec:  $x(t) \in R^n$ ,  $n$  le nombre d’état.

$w(t) \in R^{m_1}$ ,  $m_1$  le nombre d’entrées exogènes.

$u(t) \in R^{m_2}$ ,  $m_2$  le nombre de commandes.

$z(t) \in R^{p_1}$ ,  $p_1$  le nombre de sorties régulées.

$y(t) \in R^{p_2}$ ,  $p_2$  le nombre de mesures.

Ainsi, le transfert boucle fermée de  $w$  à  $z$  est donné par la Transformation Linéaire Fractionnelle (LFT):

$$F_l(P, K) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(sI - P_{22}(s)K(s))^{-1}.P_{21}(s) \quad (3.13)$$

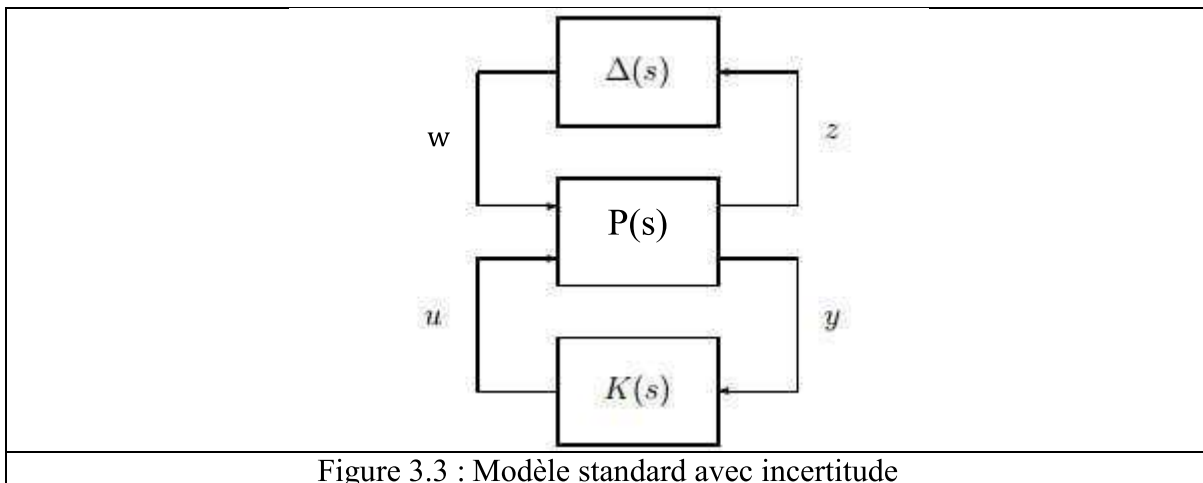


Figure 3.3 : Modèle standard avec incertitude

Plus classiquement, la synthèse  $H_\infty$  est utilisée de manière à modéliser les transferts en boucle fermée afin de conférer au modèle nominal certaines performances. Deux méthodes classiques de synthèse, sont présentées dans les paragraphes qui suivent. L’analyse de la robustesse sera alors faite à posteriori en tenant compte précisément de la structure des incertitudes. Précisons que des méthodes de synthèse de correcteurs pour des modèles incertains sont disponibles. Elles sont toutefois d’une utilisation plus délicate que la synthèse  $H_\infty$  [30].

L'ordre du correcteur obtenu est égal à celui du système. Compte-tenu des pondérations introduites dans le modèle augmenté, les synthèses standards aboutissent à des correcteurs d'ordres relativement élevés. Ces réductions d'ordre ne garantissent pas la stabilité et les performances du système asservi obtenu avec le correcteur d'ordre réduit ; il est donc conseillé d'analyser les performances du système obtenu et de limiter la réduction d'ordre à un niveau permettant de ne pas trop dégrader les performances.

**III.3.3-Formulation  $H_\infty$  par Loop Shaping**

Les spécifications fréquentielles peuvent s'exprimer par des contraintes sur le profil de la plus petite et plus grande valeur singulière du transfert en boucle ouverte  $GK(s)$ .

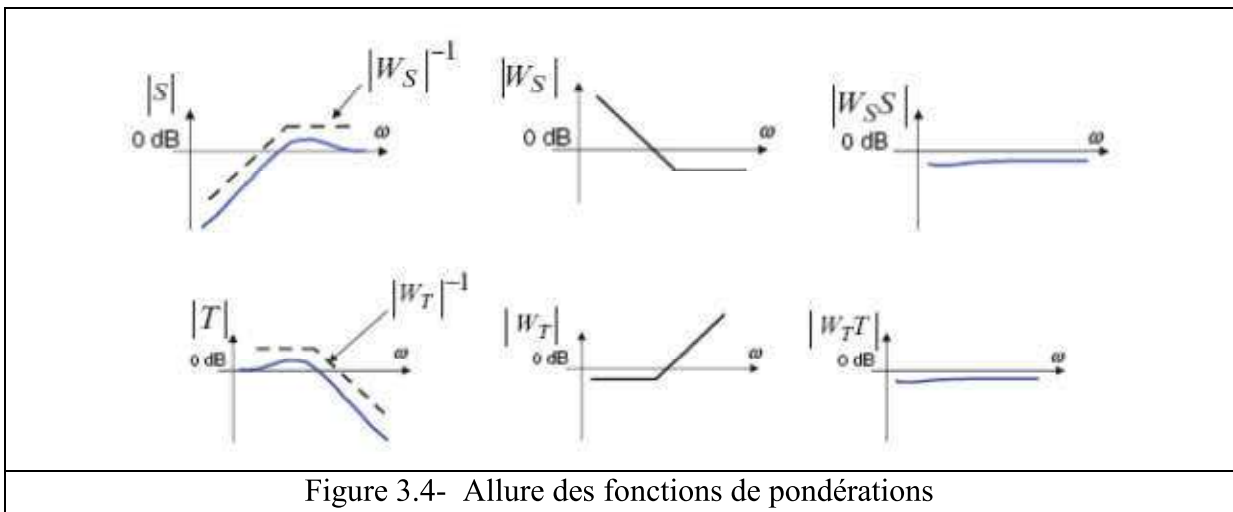
on peut raisonner en termes de contraintes sur l'allure des fonctions  $\sigma_{max}(S(j\omega))$  et  $\sigma_{max}(T(j\omega))$ . Ces contraintes sont de la forme:

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(S(j\omega)) &\leq |W_S|^{-1} \\ \sigma_{max}(T(j\omega)) &\leq |W_T|^{-1} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Où s'écrit autrement :

$$\begin{aligned} \|W_S S\|_\infty &< 1 \\ \|W_T T\|_\infty &< 1 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Où  $W_S$  et  $W_T$  sont des fonctions de pondérations spécifiant l'allure désirée suivant la figure suivante.



La figure montre la forme des fonctions  $S(s), T(s), W_S$  et  $W_T$  pour atteindre une bonne performance et une bonne robustesse vis-à-vis les bruits hautes fréquence et la dynamique négligée. Ce concept est principale pour designer le contrôler optimal  $H_\infty$ .

**III.3.3.1- Résolution du problème  $H_\infty$  :**

Cette section présente les techniques de résolution par variable d'état des problèmes  $H_\infty$  sous-optimaux et optimaux. L'approche est donnée par la technique DGKF offre un cadre méthodologique riche et la mieux adaptée au calcul numérique pour la résolution de problèmes de commande. Elle marque un pas décisif vers une synthèse systématique des asservissements robustes. Nous reprenons donc ici les notations usuelles pour la forme standard exprimée en espace d'état.

La représentation d'état du système augmenté, est donnée classiquement sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (SI \quad A)^{-1} [B_1 B_2] \quad (3.16)$$

On supposera que :

$$D_{12} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m_2}; D_{21} \in \mathbb{R}^{p_2 \times m_1}$$

avec  $m_1 \geq p_2$  et  $p_1 \geq m_2$ . Enfin  $n$  désignera la taille de  $A$ , i.e., l'ordre du système  $P(s)$ .

La solution par variable d'état n'est applicable que sous les hypothèses suivantes.

**Théorème 1 :** le problème  $H_\infty$  standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

(1) La matrice  $H_\infty = \begin{pmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T & B_2 B_2^T \\ C_1^T C_1 & & A^T \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

(2) Il existe une matrice symétrique positive définie  $X$  solution de l'équation de Riccati c'est-à-dire  $A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T \quad B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 = 0$ . (3.17)

(3) La matrice  $J_\infty = \begin{pmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1 C_1^T & C_2 C_2^T \\ B_1^T B_1 & & A \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

(4) Il existe une matrice symétrique positive définie  $Y$  solution de l'équation de Riccati  $AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1 C_1^T \quad C_2 C_2^T)Y + B_1^T B_1 = 0$  (3.18)

(5)  $\lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ . Qui indique que les valeurs propres du produit de la solution des deux équations de Riccati sont inférieure à  $\gamma^2$ .

**Théorème 2 :** Sous les hypothèses (1)-(5) ci-dessus, il existe un compensateur  $K(s)$  qui stabilise le système de manière interne et assure  $\|F_1(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  si et seulement si:

(i) les équations de Riccati

$$\begin{aligned} A^T X + XA + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T \quad B_2 B_2^T)X + C_1^T C_1 &= 0 \\ AY + YA^T + Y(\gamma^{-2} C_1 C_1^T \quad C_2 C_2^T)Y + B_1^T B_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

ont des solutions stabilisantes  $X_\infty$  et  $Y_\infty$ , respectivement.

(ii) Ces solutions vérifient de plus

$$X_\infty \geq 0; Y_\infty \geq 0; \lambda_{\max}(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2 \quad (3.20)$$

L'existence de solutions stabilisantes traduit la contrainte  $\|F_1(P(s), K(s))\|_\infty < \gamma$  alors que les conditions de positivité assurent la stabilité interne.

**Théorème 3 :** Supposons (1)-(5) et soit  $\gamma > \gamma_{opt}$ . Alors le compensateur

$$K_c(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \tag{3.21}$$

Avec

$$A_c = A + (\gamma^{-2}B_1B_1^T \quad B_2B_2^T)X_\infty \quad (I \quad \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T C_2 \tag{3.22}$$

$$B_c = (I \quad \gamma^{-2}Y_\infty X_\infty)^{-1}Y_\infty C_2^T; \quad C_c = B_2^T X_\infty \tag{3.23}$$

Stabilise le système de manière interne et satisfait

$$\|F_1(P(s), K_c(s))\|_\infty < \gamma \tag{3.24}$$

Cette solution particulière du problème  $H_\infty$  sous-optimal est appelé compensateur central.

**III.3.3.2- Synthèse  $H_\infty$  pondérée :**

Une mise en œuvre possible de la synthèse  $H_\infty$  consiste à introduire des fonctions de pondérations sur les entrées exogènes  $w$  et les sorties régulées  $z$ . Il s'agit donc de bien choisir ces filtres de pondération afin d'obtenir les propriétés désirées en boucle fermée. Il est important de souligner dans ce contexte que les fonctions de pondération peuvent être placées à différents endroits à l'intérieur du système augmenté, de manière à avoir une matrice de transfert pondérée entre les entrées exogènes  $w$  et les sorties à minimiser  $z$ .

Considérons à cette fin le schéma de la (Figure 3.4), dans lequel :

- l'erreur  $\varepsilon$  est pondérée par le filtre  $W_1(s)$  ;
- la commande  $u$  est pondérée par le filtre  $W_2(s)$  ;
- la perturbation  $d$  est la sortie d'un filtre  $W_3(s)$ .

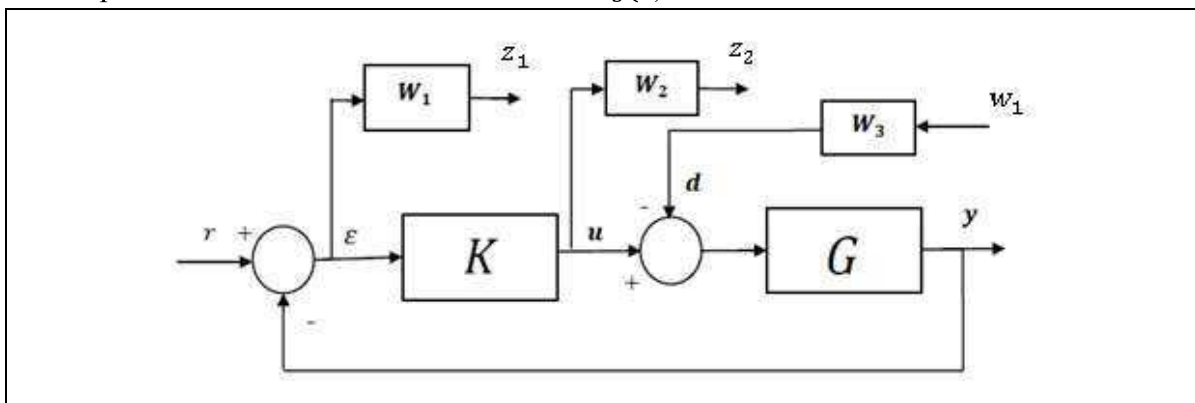


Figure 3.4- système asservi pondéré.

En se référant au problème représenté par le schéma ci-dessus, les variables sont reliées par :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & GW_3 & G \\ 0 & 0 & W_2 \\ 0 & GW_3 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ w_1 \\ u \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

En éliminant  $u$  et  $y$ , on peut calculer la matrice de transfert du système interconnecté, on obtient :

$$T_{zw} = \begin{pmatrix} W_1 S_s & W_1 S_s G W_3 \\ W_2 S_e K & W_2 S_e K G W_3 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Où les fonctions de sensibilité en entrée et en sortie sont :

$$S_e = (I + KG)^{-1} \text{ et } S_s = (I + GK)^{-1}$$

Dans le cas d'un SISO et pour assurer que  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$  alors les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$\|W_1 S\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega)|} \quad (2.27)$$

$$\|W_2 S G W_3\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega) G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_1(j\omega) W_3(j\omega)|} \quad (2.28)$$

$$\|W_2 S K\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega) K(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega)|} \quad (2.29)$$

$$\|W_2 S K G W_3\|_\infty < \gamma \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, |S(j\omega) K(j\omega) G(j\omega)| < \frac{\gamma}{|W_2(j\omega) W_3(j\omega)|} \quad (2.30)$$

On voit donc que les réponses fréquentielles de chacune des fonctions S, SK, SG et SKG sont contraintes par un gabarit qui dépend des fonctions de pondérations choisies, ce choix requiert en générale plusieurs essais et il est difficile de donner des règles absolues qui fonctionneront dans tous les cas. Néanmoins, il existe quelques guides pour le choix initial, qu'il faudra éventuellement affiner par la suite :

- le gabarit sur la fonction de sensibilité S entre la consigne et l'erreur nous permet de fixer plusieurs aspects de l'asservissement. On prend en général un passe-bas d'ordre 1 de la forme :

$$W_1 = \frac{s + \omega_1}{s + \omega_1 \varepsilon_1} \quad (3.31)$$

La pulsation  $\omega_1$  pour laquelle le gabarit possède un gain unitaire peut être interprétée comme la bande passante minimale souhaitée. La précision du système est assurée par un faible choix de  $\varepsilon_1$  aux basses fréquences. Enfin la valeur de  $M_1$  aux hautes fréquences limite le maximum de la réponse fréquentielle de S, ce qui impose une marge de module au moins égale à  $1/M_1$ .

- Le gabarit de SK entre la consigne et la commande permet de limiter l'action du contrôleur lui-même. On prend typiquement un passe-haut d'ordre 1 de la forme :

$$W_2 = \frac{s + \frac{\omega_2}{M_2}}{\varepsilon_2 s + \omega_2} \quad (3.32)$$

L'amplitude de  $|SK|$  aux basses fréquences est essentiellement limitée par les capacités de l'actionneur ; le gain  $M_2$  est choisi en fonction. La pulsation  $\omega_2$  permet de régler la bande passante du contrôleur ; au-delà de cette pulsation, un certain roll off est censé atténuer les hautes fréquences. Enfin on rend le filtre propre grâce à une faible valeur de  $\varepsilon_2$ , qui introduit un pôle aux hautes fréquences.



- Le gabarit sur  $|SG|$  fait intervenir les deux filtre  $W_1$  et  $W_3$ . On choisit en général  $W_3$  constant et faible pour régler l'atténuation aux basses fréquences mais on peut aussi choisir un filtre variable afin de modifier le comportement de  $|SG|$  aux moyennes fréquences.
- Le gabarit sur  $|SKG|$  fait intervenir les deux filtre  $W_2$  et  $W_3$ . Dans ce cas, on cherche essentiellement à améliorer la stabilité robuste face aux dynamiques négligées.

**III.3.3.3- Mise sous forme standard :**

Une fois choisis les filtres de pondération, il reste à mettre le problème ainsi défini sous forme standard, c'est-à-dire à identifier le schéma bloc de la (Figure 3.6 et 3.7). Il est possible donc de générer un nouveau modèle appelé modèle augmenté donné par :

$$P = \begin{array}{cccc|c|ccc} A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & B_G \\ B_{W1} & A_{W1} & 0 & 0 & B_{W1} & B_{W1}D_G \\ 0 & 0 & A_{W2} & 0 & 0 & B_{W2} \\ B_{W3}C_G & 0 & 0 & A_{W3} & 0 & B_{W3}D_G \\ \hline D_{W1}C_G & C_{W1} & 0 & 0 & D_{W1} & D_{W3}D_G \\ 0 & 0 & C_{W2} & 0 & 0 & D_{W2} \\ D_{W3}C_G & 0 & 0 & C_{W3} & 0 & D_{W3}D_G \\ \hline C_G & 0 & 0 & 0 & I & D_G \end{array} \quad (3.33)$$

Avec

$$G = \begin{bmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{bmatrix}; W_1 = \begin{bmatrix} A_{W1} & B_{W1} \\ C_{W1} & D_{W1} \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} A_{W2} & B_{W2} \\ C_{W2} & D_{W2} \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} A_{W3} & B_{W3} \\ C_{W3} & D_{W3} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

On note ici que l'ordre du système augmenté  $P$  est la somme des ordres de  $G$  et des différentes fonctions de pondération.

Sous réserve que les hypothèses (1)-(3) soient vérifiées, on peut directement appliquer l'algorithme de  $\gamma$  itération pour déterminer si l'atténuation  $\gamma = 1$  est faisable. Si oui, le problème de sensibilité mixte de critère

$$\| (P, K) \|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_2 K S \\ w_3 T \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (3.35)$$

est solvable et les formules du compensateur central fournissent une solution particulière d'ordre égal à l'ordre du système augmenté.

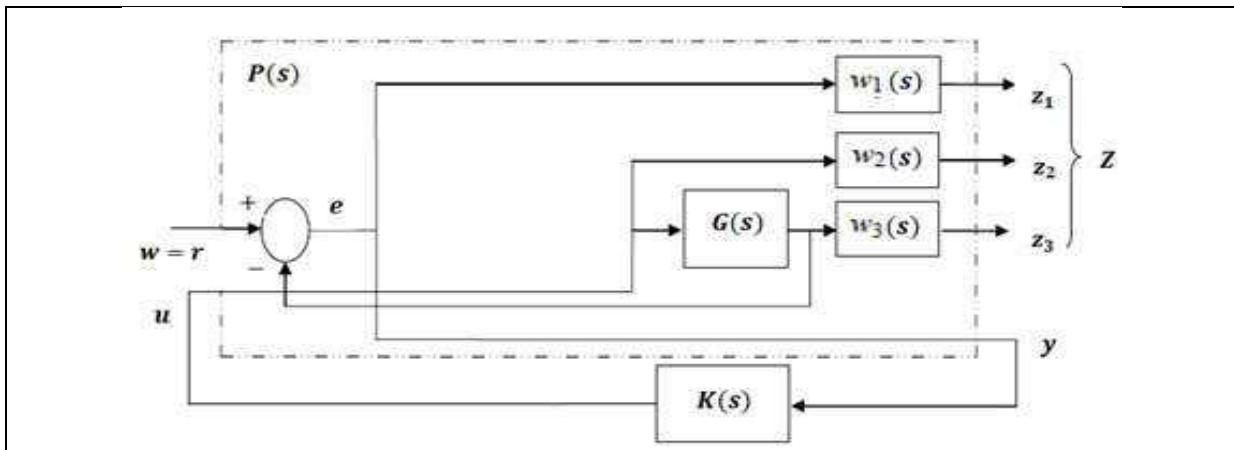


Figure 3.5-Forme standard de sensibilité mixte S/KS/T

Pour conclure, le problème de sensibilité mixte consiste à trouver un compensateur  $K(s)$  qui assure la stabilité interne de la boucle (Figure 3.5) et satisfasse :

$$\|T_{zw}(s)\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} w_1 S \\ w_2 K S \\ w_3 T \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \tag{3.36}$$

**III.3.3.4- Synthèse de la commande d'un contrôleur à deux degrés de liberté :**

On cherche souvent à ce que le système en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence  $F$  qui satisfait déjà un ensemble de spécifications, notamment temporelles. Dans un contexte  $\infty$ , on minimise alors l'écart entre le modèle de référence et le système bouclé sur une bande de fréquence donnée. On considère pour cela le modèle de synthèse de la figure suivante dans lequel :

- L'erreur d'appariement avec le modèle  $F$  est pondérée par le filtre  $W_1$  ;
- La commande  $u$  est pondérée par le filtre  $W_2$  ;
- La perturbation est la sortie d'un filtre  $W_3$  .

Le contrôleur  $K = [K_1 \quad K_2]$  est un contrôleur à deux degrés de liberté.

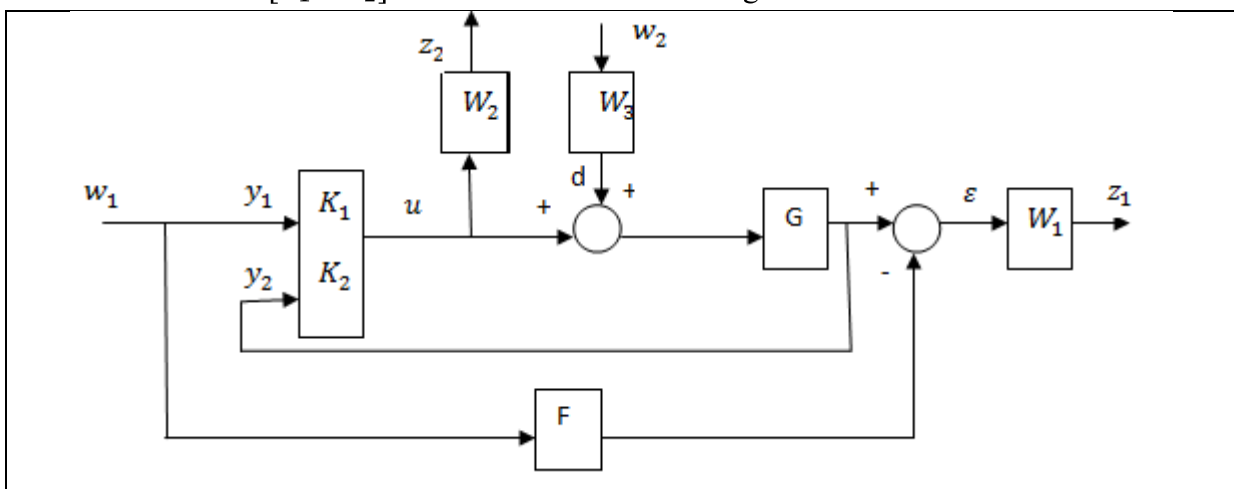


Figure 3.6- Modèle de synthèse  $\infty$  à deux degrés de liberté.

Le transfert  $T_{zw}$  de  $w$  à  $z$  est alors donné par :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1(S_s G K_1 \quad F) & W_1 S_s G W_3 \\ W_2 S_e K_1 & W_2 S_e K_2 G W_3 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Où les fonctions de sensibilité en entrée et en sortie sont :

$$S_e = (I - K_2G)^{-1} \text{ et } S_s = (I - GK_2)^{-1} \quad (3.38)$$

On retrouve des transferts relativement similaires à ceux du contrôleur précédent, et les guides énoncés précédemment restent valides.

# **Chapitre IV:**

## **Simulations et interprétations**

Dans ce chapitre nous allons présenter les applications des commandes précédemment introduites mais nous commencerons par l'étude en boucle ouverte du système.

**IV.1 Analyse en boucle ouverte du système linéaire :**

Appliquons à l'entrée du processus un signal de type échelon unitaire sous forme  $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$  où  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ . Un tel test est largement utilisé pour l'analyse des systèmes car on considère que l'action des perturbations est similaire à un signal saut.

**IV.1.1- mode longitudinal :**

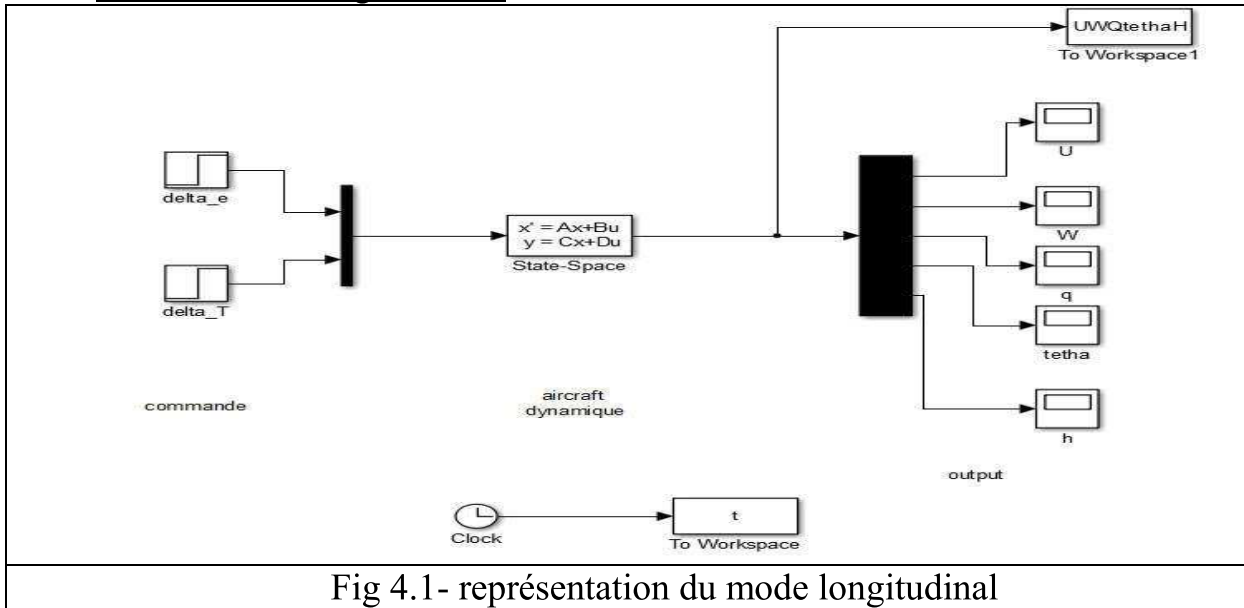


Fig 4.1- représentation du mode longitudinal

• **Les réponses indicielles du système :**

On prend deux états lors de l'étude de système, la vitesse linéaire 'u' et l'altitude h pour le mode longitudinal.

**a- Action sur l'élevateur :**

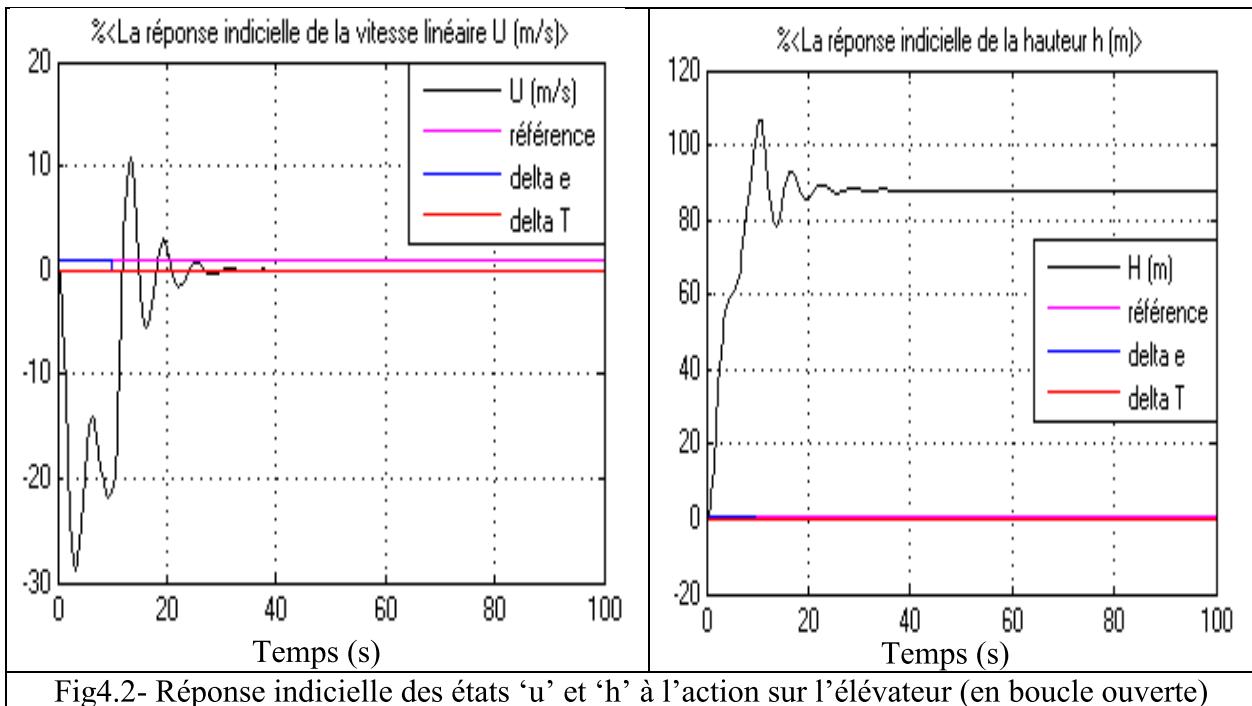


Fig4.2- Réponse indicielle des états 'u' et 'h' à l'action sur l'élevateur (en boucle ouverte)

- a. La réponse indicielle de la vitesse ‘u’: on remarque que la vitesse présente de fortes oscillations pour s’annuler à la fin après 39 secondes environ.
- b. La réponse de l’altitude ‘h’: en actionnant l’élévateur, on remarque que l’altitude augmente pour atteindre une valeur finale (85 m) après quelques oscillations de fortes amplitudes, après environ 28 secondes.

**b- Action sur la poussée :**

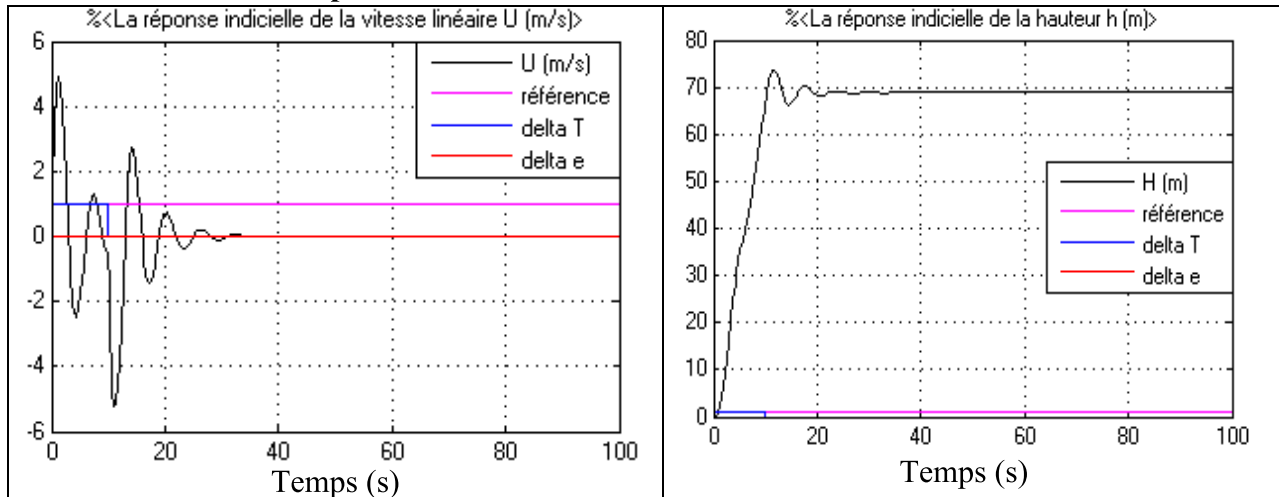


Fig4.3- Réponse indicielle des états ‘u’ et ‘h’ à l’action sur la poussée (en boucle ouverte)

- a. La réponse indicielle de la vitesse ‘u’: on remarque des fortes oscillations les premières 35 secondes puis elles s’atténuent graduellement jusqu’à atteindre une valeur finale nulle. (Le signe (-) revient aux conventions de direction déjà prise)
- b. La réponse indicielle de l’altitude ‘h’ : même remarque, une augmentation brutale pour atteindre une valeur finale (68 m) après 39 secondes.

IV.1.2- Mode latéral directionnel :

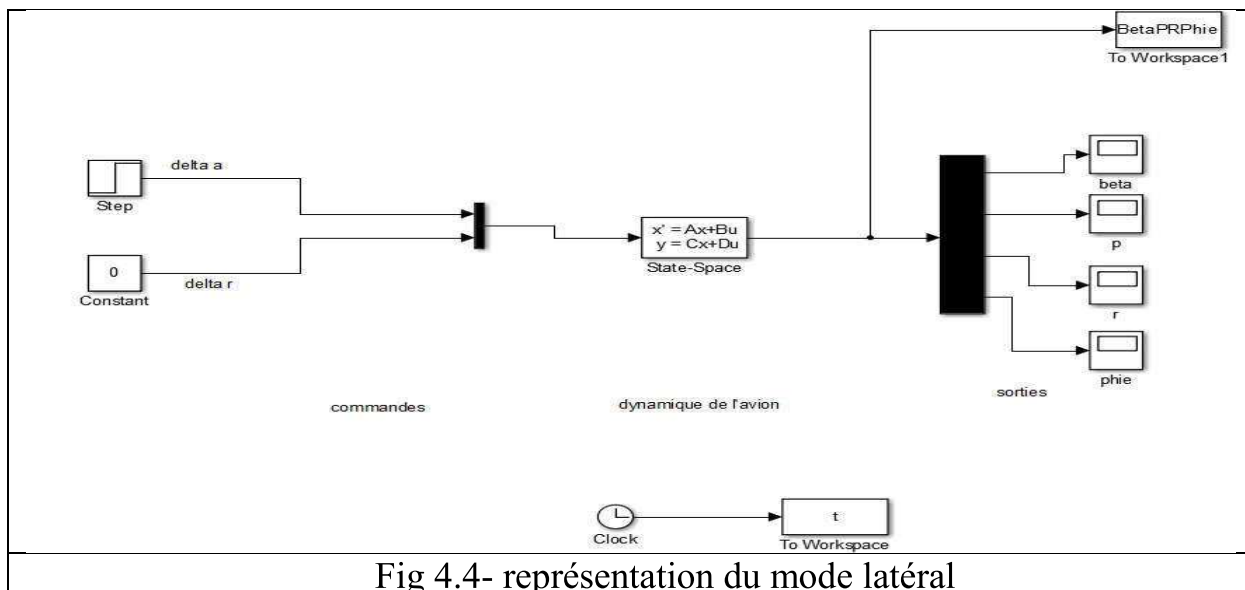


Fig 4.4- représentation du mode latéral

• Les réponses indicielles du système :

On prend deux états lors de l’analyse du mode latéral, la vitesse de lacet ‘r’ et l’angle de roulis  $\Phi$ .

**a- Action sur l'aileton :**

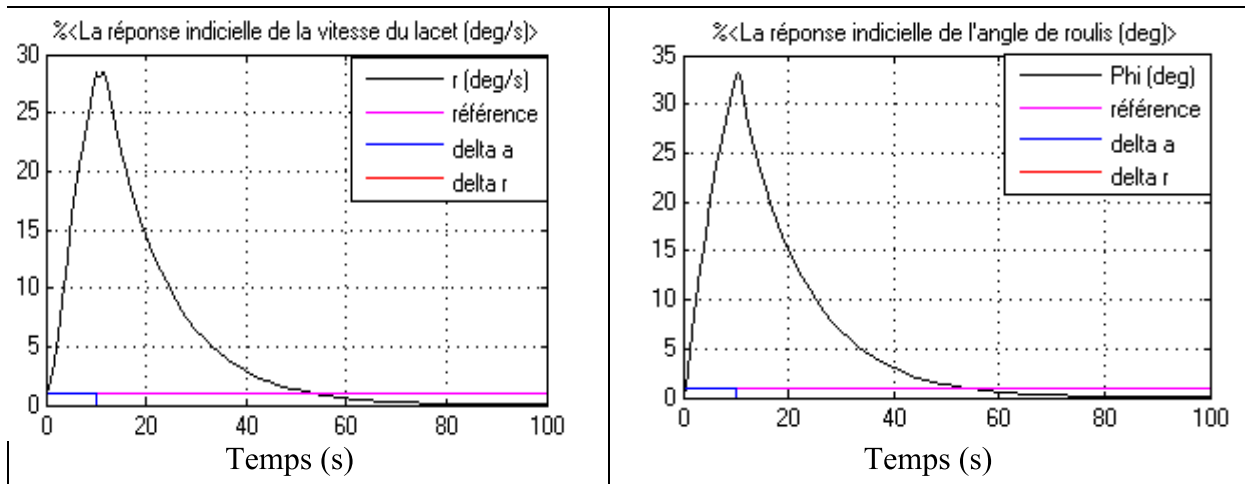


Fig4.5- Réponses indicielles de la vitesse de changement de lacet « r » et l'angle de roulis « Φ » (en boucle ouverte) à une action sur l'aileton.

- a. LA vitesse du changement du lacet « r »: sur ce graph, on remarque que la vitesse de lacet augment séquentiellement jusqu'à sa valeur finale en 49 secondes.
- b. L'angle de roulis : Le temps de réponse est d'environ 48 secondes.

**b- Action sur la gouverne de direction :**

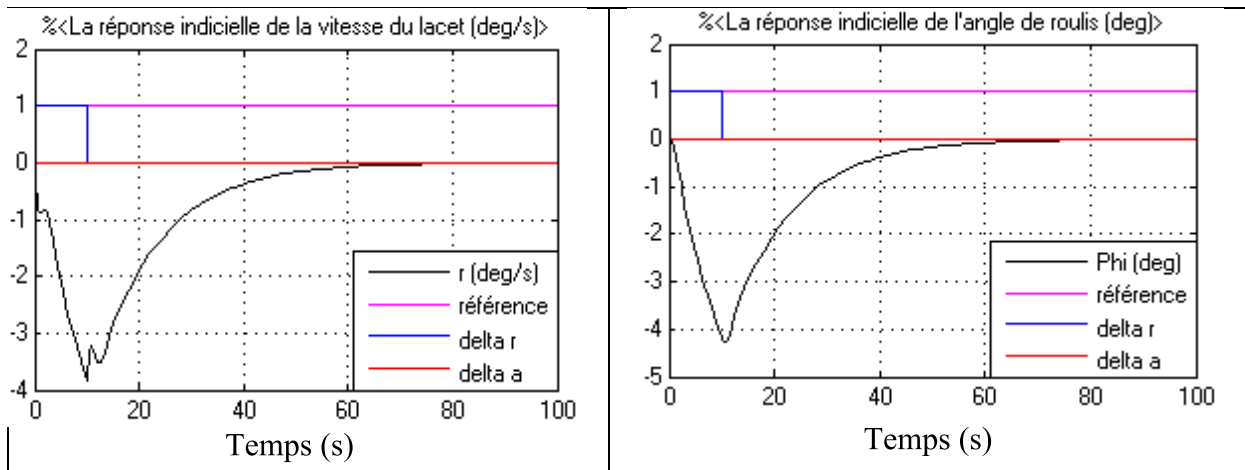


Fig4.6- Réponses indicielles la vitesse de lacet « r » et de l'angle de roulis « Φ » (en boucle ouverte) à une action sur la gouverne de direction.

- a. La vitesse de lacet : est au début nulle puis elle augmente jusqu'à sa valeur finale dans 48 secondes environ. Le signe (-) est dicté par la direction que prend le vecteur vitesse par rapport au repère.
- b. L'angle de roulis : Le temps de réponse est d'environ 48 secondes.

**Conclusion :** l'étude du système en boucle ouverte nous a permis de conclure les sorties ont modes transitoires très lents traduits par des temps de réponse très grands et différents. Ils présentent de grandes oscillations qui doivent être contrôlées.

**IV.2 Application de la commande LQG sur le système linéaire :**

La théorie de la commande linéaire quadratique gaussienne est maintenant appliquée au modèle. Les gains  $K_f$  et  $K_c$  sont calculés à partir des matrices de pondérations :

$$Q_{Long} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 \end{pmatrix} \quad R_{Long} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{Lat} = \begin{pmatrix} 1200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1200 \end{pmatrix} \quad R_{Lat} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**IV.2.1- Mode longitudinal :**

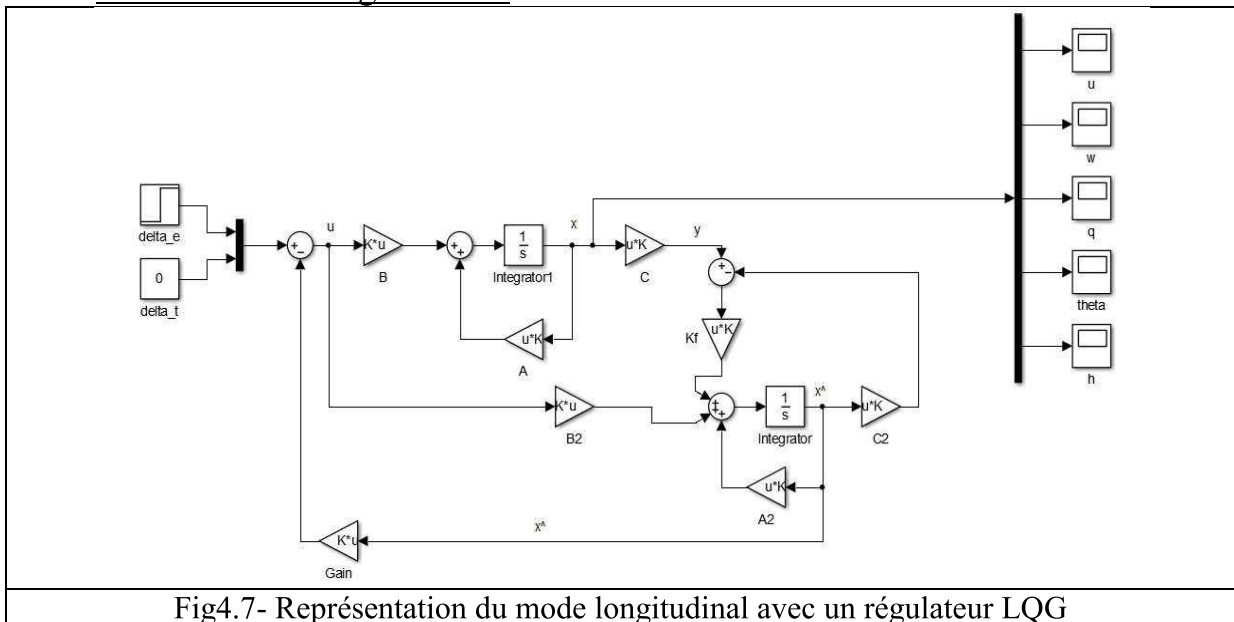


Fig4.7- Représentation du mode longitudinal avec un régulateur LQG

**IV.2.1.1-Etude de stabilité :**

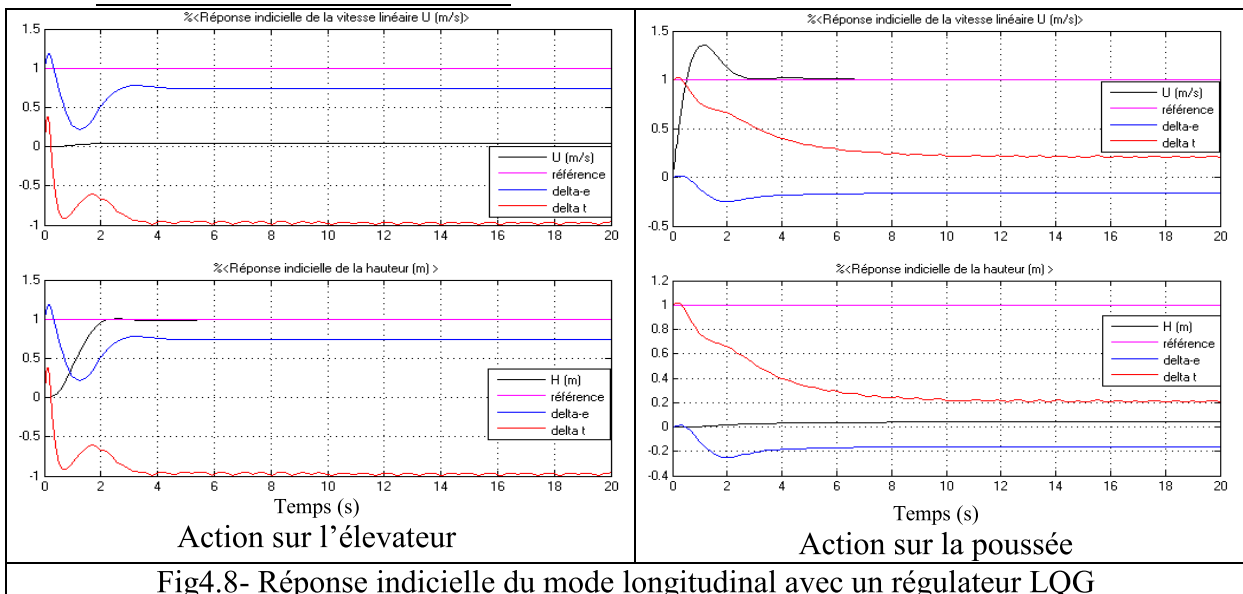


Fig4.8- Réponse indicielle du mode longitudinal avec un régulateur LQG

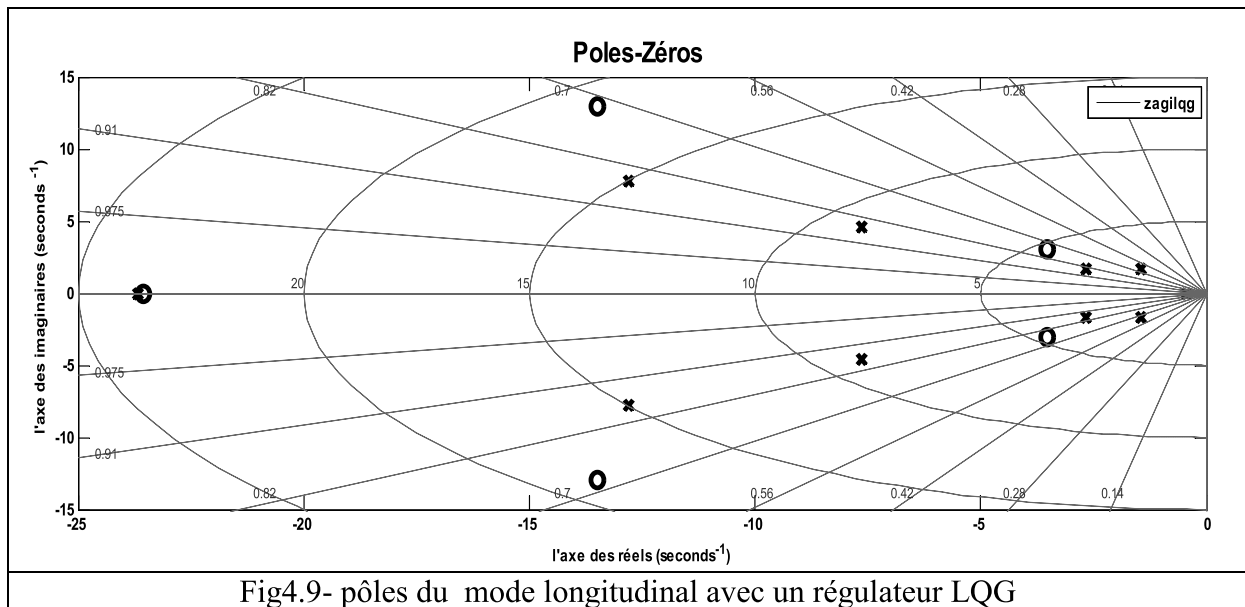


- Action sur l'élèveur : en actionnant le système par un échelon unitaire, on remarque que l'altitude augmente graduellement pour atteindre la valeur finale dans des temps de réponses plus raisonnables tandis que la vitesse linéaire est presque nulle.
- Action sur la poussée : sur ce graphe, on voit que seulement la vitesse 'u' est excitée par la commande de poussée  $\delta_T$ . elle augmente de 0 jusqu'à sa valeur finale, après environ 9.5 secondes, alors que l'altitude garde sa valeur initiale.

Les valeurs propres du système avec le correcteur en boucle fermée sont tous à parties réelles négatives

Valeurs propres	amortissements	Pulsations (rad/s)
-0.447	1.000	0.447
-1.450+ 1.720i	0.645	2.250
-1.450 - 1.720i	0.645	2.250
-2.660 + 1.700i	0.843	3.160
-2.660 - 1.700i	0.843	3.1600
-7.630 + 4.590i	0.857	8.900
-7.630 - 4.590i	0.857	8.900
-12.800 + 7.750i	0.855	15.000
-12.800 - 7.750i	0.855	15.000
-23.700	1.000	23.700

Tableau 4.1: valeurs propres du système avec un correcteur LQG (mode longitudinal)



Et les pôles du système sont tous stables (ils se trouvent tous sur le demi plan gauche)

**Conclusion** : La stabilité interne du système est ainsi garantie.

VI.2.1.2-Etude de robustesse :

Pour que le contrôleur conçu soit robuste, le système en boucle fermée doit retrouver les exigences de stabilité et de performance requis pour toute valeur incertaine que peut prendre les paramètres. Pour le vérifier on procède au calcul des bornes supérieure et inférieure des performances dans « le cas le plus contraignant » d'incertitude sur le système. Pour ce faire on doit ajouter un paramètre d'incertitude au système nominal (sans correcteur). Le paramètre d'incertitude qu'on ajoute au système est égal à  $1 \pm 25\%$ . On obtient les résultats suivants :

	paramètre	valeur	interprétation
Marges de stabilité	Borne supérieure	4.0000	$>0$ donc la stabilité du système face à l'incertitude modélisée est garantie.
	Borne inférieure	2.5036	$>1$ ce qui veut dire que le système incertain est garanti d'être stable pour la valeur d'incertitude modélisée.
	Fréquence de déstabilisation	$6.7989 \cdot 10^6$	C'est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec l'élément incertain proche de sa valeur nominale

Tableau 4.2 : interprétations des valeurs des marges de stabilité (système+LQG)

Le système est robuste pour toute variation dans la gamme  $\pm 25\%$  et la plus petite valeur déstabilisant le système se trouve quelque part entre 250% et 400% plus grande que  $\pm 25\%$  c'est-à-dire entre  $\pm 62.20\%$  et  $\pm 100\%$ . Une estimée de la variation du paramètre provoquant la déstabilisation à 400% est d'une amplitude de -4.0000.

La sensibilité du système en respectant l'élément incertain déjà introduit est de 90%. En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 23%.

**Conclusion:** le système possède une confortable marge de sécurité entre 250% et 400% de la valeur du paramètre de variation anticipé  $\pm 25\%$  avant que le système devient instable.

Si on compare les valeurs singulières du système nominal et celles du système avec le contrôleur LQG :

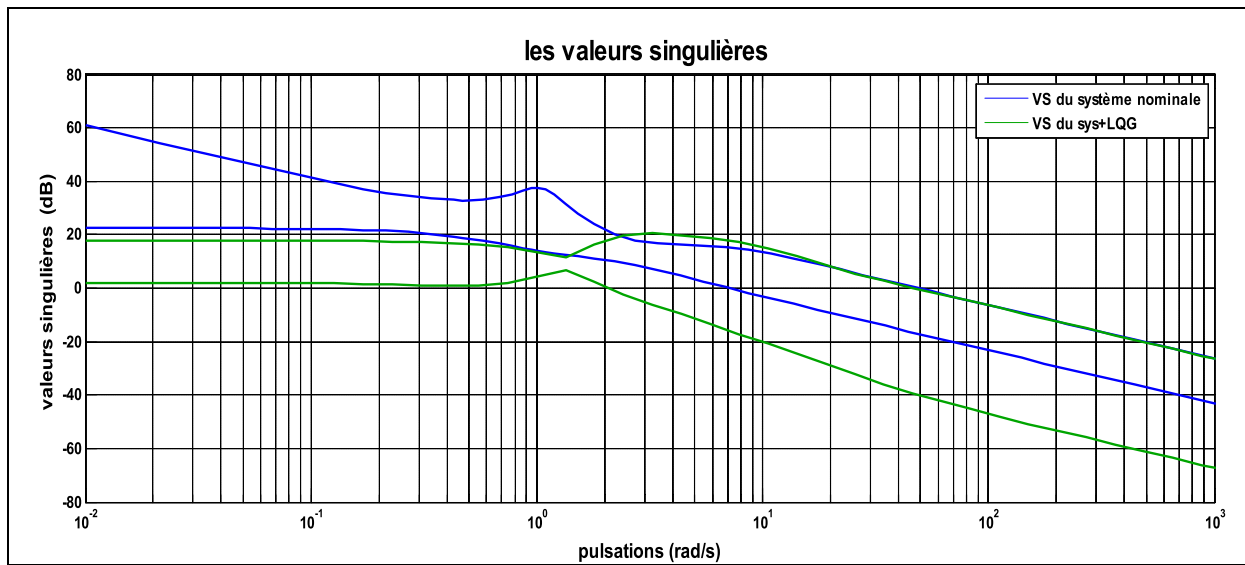


Fig4.10- les valeurs singulières du système nominal et le système commandé.

Le gabarit fréquentiel du système nominal ci-dessus illustre, les valeurs singulières du processus qui est mal conditionné. En effet, le gain principal maximal est éloigné du

gain principal minimal à partir des petites fréquences. Par contre, le système commande présente des valeurs singulières maximale et minimale très rapprochée surtout en petite fréquences.

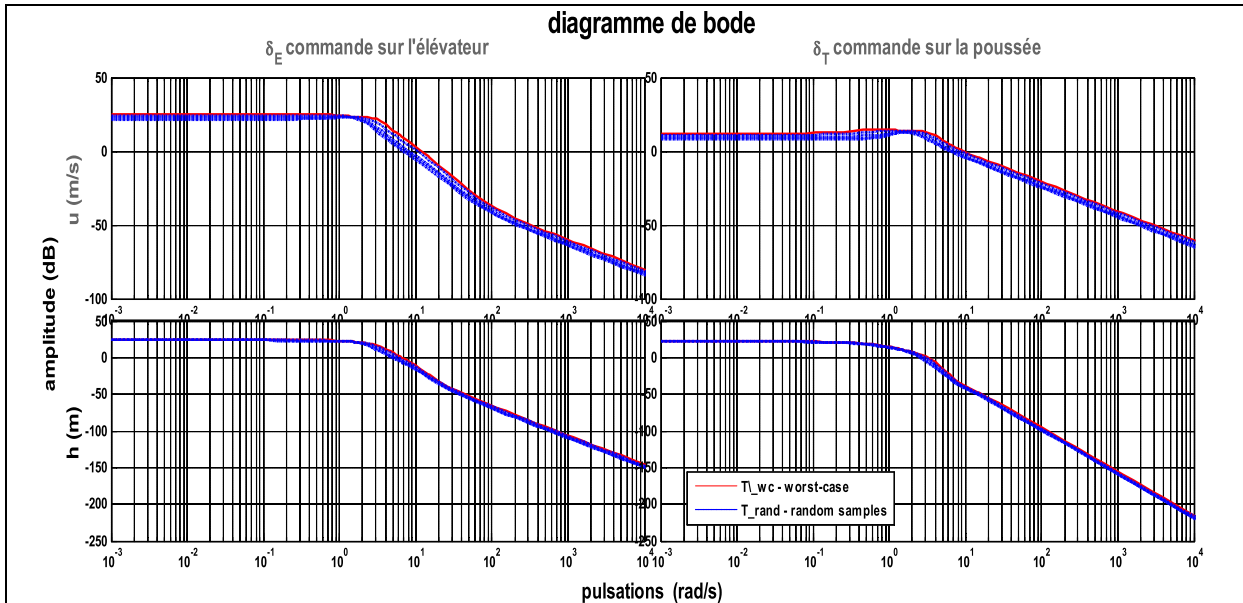


Fig4.11- comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoires du système incertain.

On remarque sur cette figure que les gains des échantillons aléatoires sont toujours inférieurs à celui du « worst case ».

Le gain d'un système incertain dépend de la valeur de son élément d'incertitude. Ici le mot 'gain' fait référence à la valeur singulière maximale de la matrice de réponse fréquentielle. L'analyse du « worst case » (le cas le plus contraignant) revient à la détermination du gain maximal parmi toutes les valeurs permises de l'élément incertain.

VI.2.2-Mode latéral:

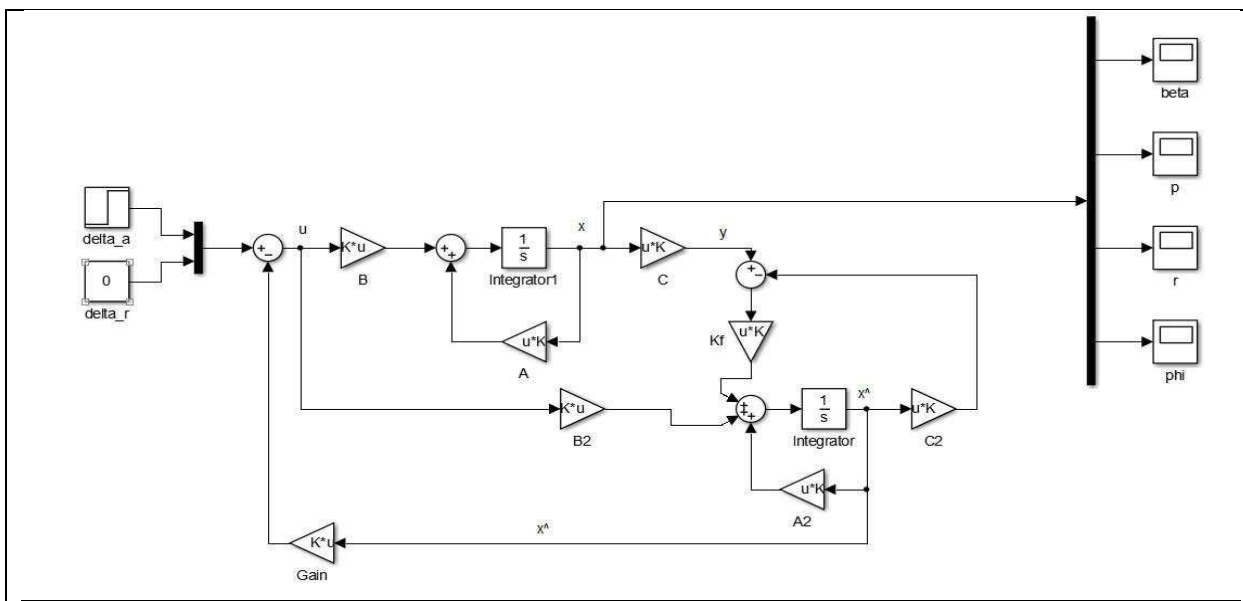
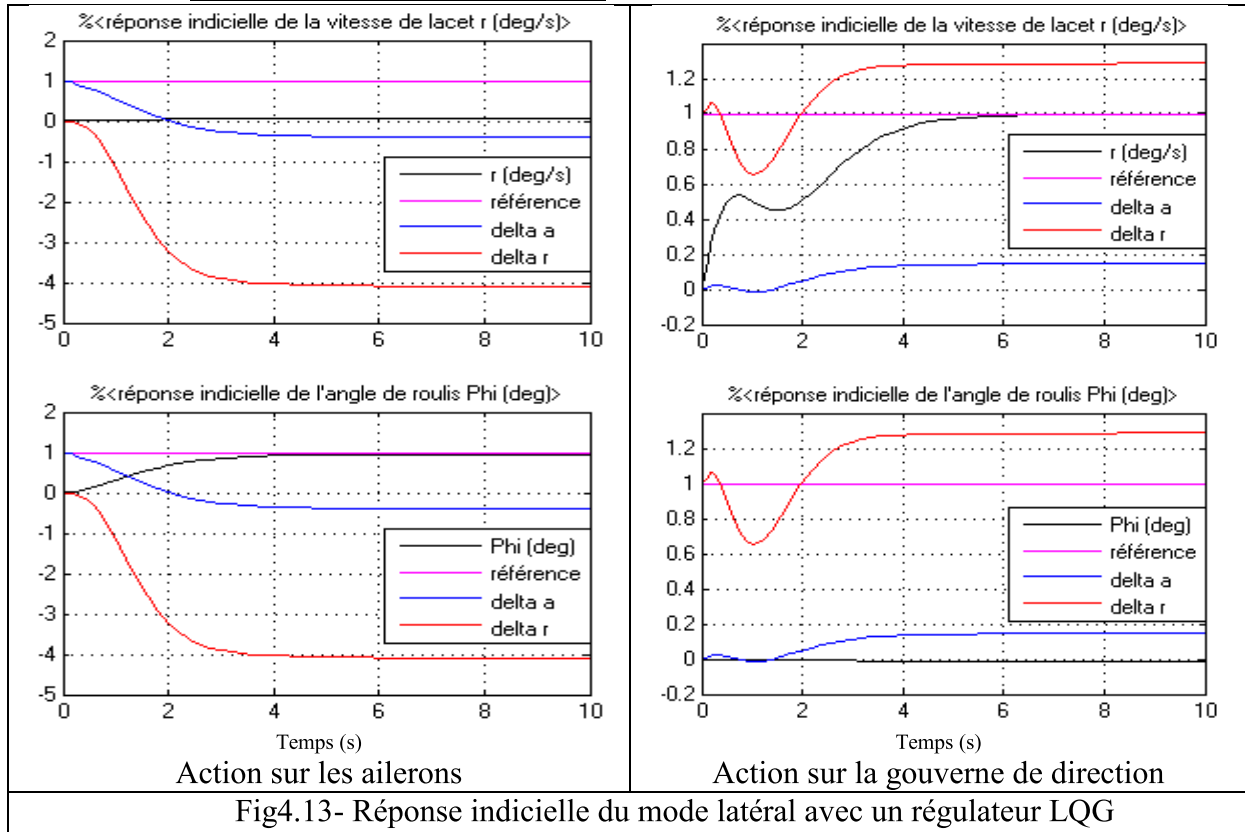


Fig4.12- Représentation du mode latéral avec un régulateur LQG

VI.2.1.1-Etude de stabilité :



- Action sur l'aileeron : en actionnant le système par un échelon unitaire, on remarque que l'angle de roulis  $\Phi$  qui augmente graduellement pour atteindre la valeur finale '1' (poursuite de consigne).
- Action sur la gouverne de direction : sur ce graphe, la vitesse de lacet atteint sa valeur finale au bout de cinq secondes environ et que l'angle de roulis garde sa valeur initiale nulle.

Les valeurs propres du système avec le correcteur en boucle fermée sont tous à parties réelles négatives

Valeurs propres	amortissements	Pulsations (rad/s)
-0.936	1.000	0.936
-1.520 + 1.380i	0.740	2.060
-1.520 - 1.380i	0.740	2.060
-2.290	1.000	2.290
-3.400	1.000	3.400
-4.870 + 1.950i	0.928	5.250
-4.870 - 1.950i	0.928	5.250
-16.000	1.000	16.000

Tableau 4.3: valeurs propres du système avec un correcteur LQG (mode latéral)

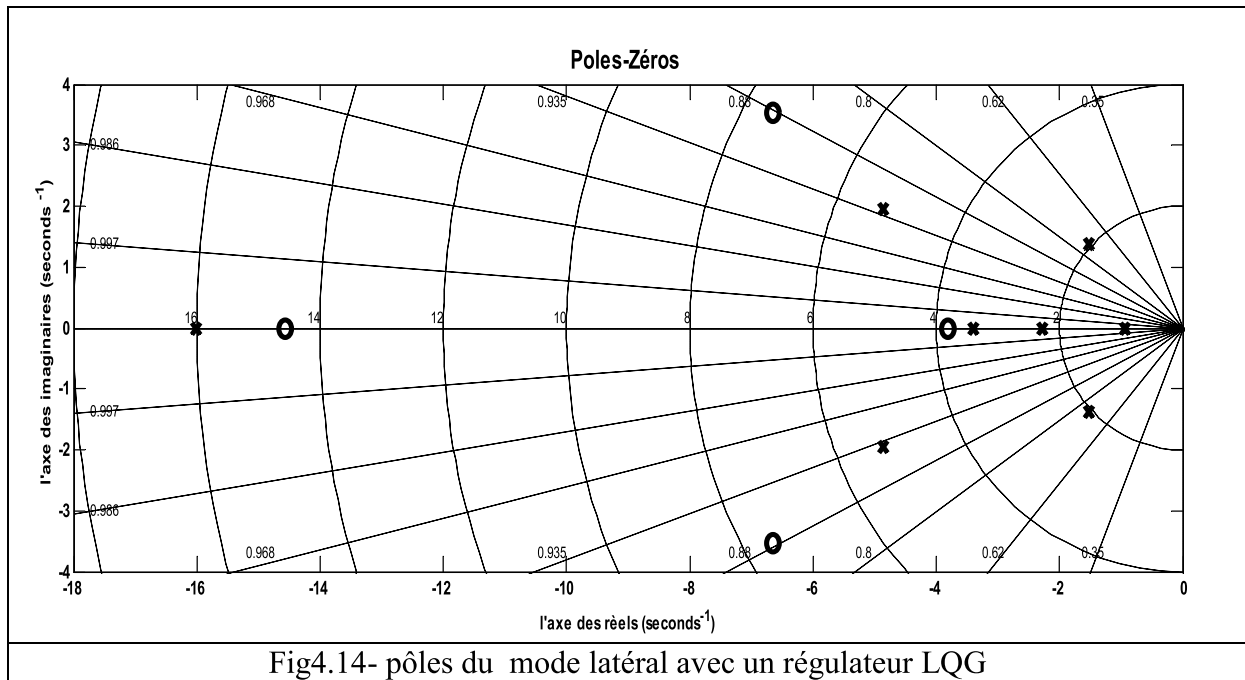


Fig4.14- pôles du mode latéral avec un régulateur LQG

Et les pôles du système sont tous stables (ils se trouvent tous sur le demi plan gauche)

**Conclusion :** La stabilité interne du système est ainsi garantie.

VI.2.1.2-Etude de robustesse :

Le paramètre d’incertitude qu’on ajoute au système est égal à  $1 \pm 20\%$ . On obtient les résultats suivants :

	paramètre	valeur	interprétation
Marges de stabilité	Borne supérieure	4.0000	>0 donc la stabilité du système face à l’incertitude modélisée est garantie.
	Borne inférieure	3.5577	>1 ce qui veut dire que le système incertain est garanti d’être stable pour la valeur d’incertitude modélisée.
	Fréquence de déstabilisation	$9.8893 \cdot 10^3$	C’est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec l’élément incertain proche de sa valeur nominale

Tableau 4.4 : interprétations des valeurs des marges de stabilité (système+LQG)

Le système est robuste pour toute variation dans la gamme  $\pm 25\%$  et la plus petite valeur déstabilisant le système se trouve quelque part entre 356% et 400% plus grande que  $\pm 25\%$  c'est-à-dire entre  $\pm 89\%$  et  $\pm 100\%$ . Une estimée de la variation du paramètre provoquant la déstabilisation à 400% est d’une amplitude de -4.0000.

La sensibilité du système en respectant l’élément incertain déjà introduit est de 400%. En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 100%.

**Conclusion:** le système possède une confortable marge de sécurité entre 356% et 400% de la valeur du paramètre de variation anticipé  $\pm 20\%$  avant que le système devienne instable.

Si on compare les valeurs singulières du système nominal et celles du système avec le contrôleur LQG :

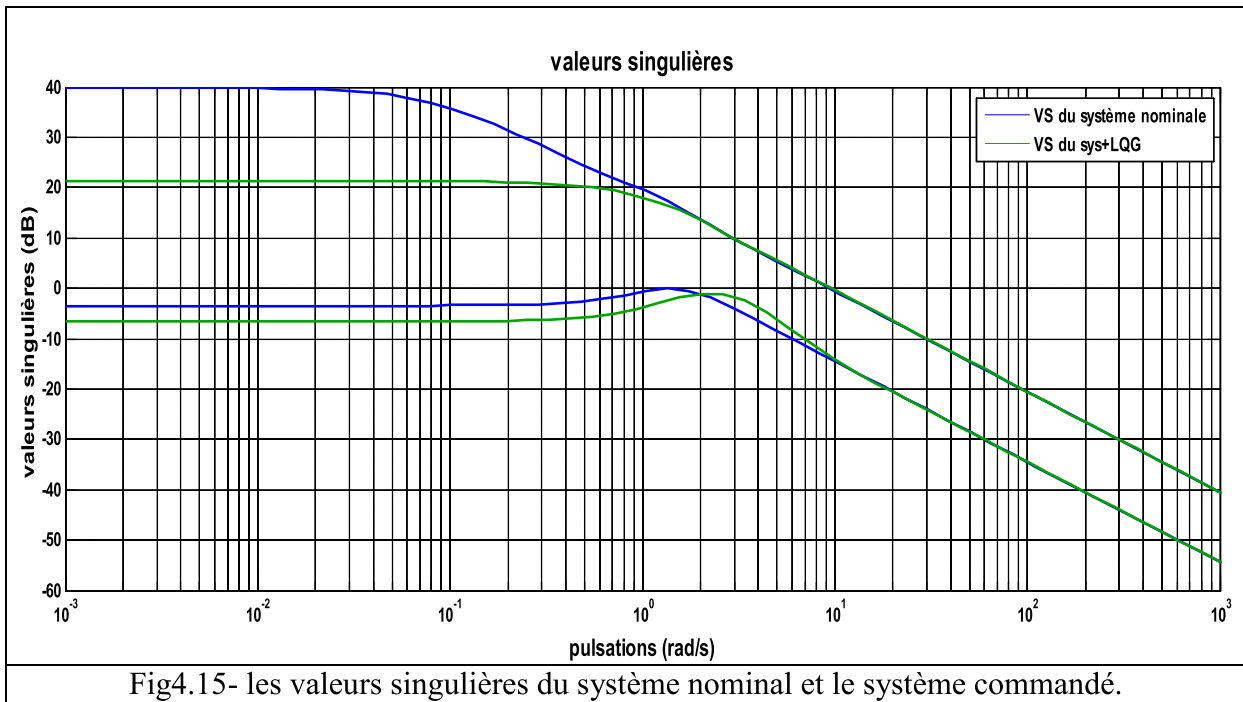


Fig4.15- les valeurs singulières du système nominal et le système commandé.

Le gabarit fréquentiel du système nominal ci-dessus illustre, les valeurs singulières du processus qui est mal conditionné. En effet, le gain principal maximal est éloigné du gain principal minimal à partir des petites fréquences. Par contre, le système commande présente des valeurs singulières maximale et minimale moins éloignées en petite fréquences.

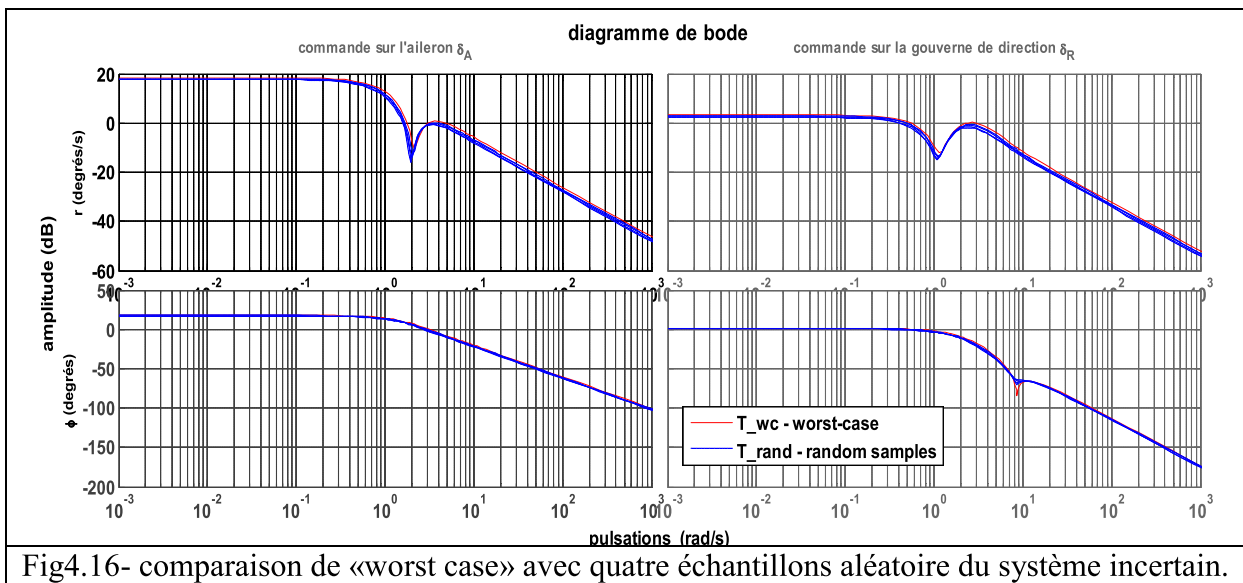


Fig4.16- comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoire du système incertain.

On remarque sur cette figure que les gains des échantillons aléatoires sont en majorité inférieurs à celui du « worst case ».

**Conclusion :** Cette commande a permis au système d'améliorer ses performances (temps de réponse, poursuite de consigne et découplage des états) et aussi sa robustesse.

**IV.3 Application de la commande  $H_\infty$  sur le système linéaire :**

Les deux matrices  $S(s)$  et  $T(s)$  sont respectivement “la fonction de sensibilité” et “la fonction de sensibilité complémentaire” elles sont définies comme suit :

$$S(s) = (I + L(s))^{-1}$$

$$T(s) = L(s)(I + L(s))^{-1} = I - S(s)$$

Où  $L(s)=G(s)*K(s)$  [ $G(s)$  est la représentation du système et  $K(s)$  est celle du contrôleur] est la matrice des fonctions de transfert de la boucle.

Le diagramme de Bode des valeurs singulières de ces fonctions joue un rôle important dans la modélisation des commandes robustes des systèmes multivariables. Les valeurs singulières de la matrice des fonctions de transfert en boucle  $L(s)$  sont importantes parce que  $L(s)$  détermine les matrices  $S(s)$  et  $T(s)$ .

Les valeurs singulières de  $S(s)$  déterminent l’atténuation des perturbations, parce que  $S(s)$  est, en effet, la fonction de transfert en boucle fermée de la perturbation vers les sorties  $y$ . Ainsi, la spécification des performances d’atténuation des perturbations peut s’écrire :

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)|$$

Où  $|W_1^{-1}(j\omega)|$  est le facteur d’atténuation de perturbation désiré.

$|W_1^{-1}(j\omega)|$  dépend de la pulsation  $\omega$  permet de spécifier de différents facteurs d’atténuation pour chaque pulsation  $\omega$ .

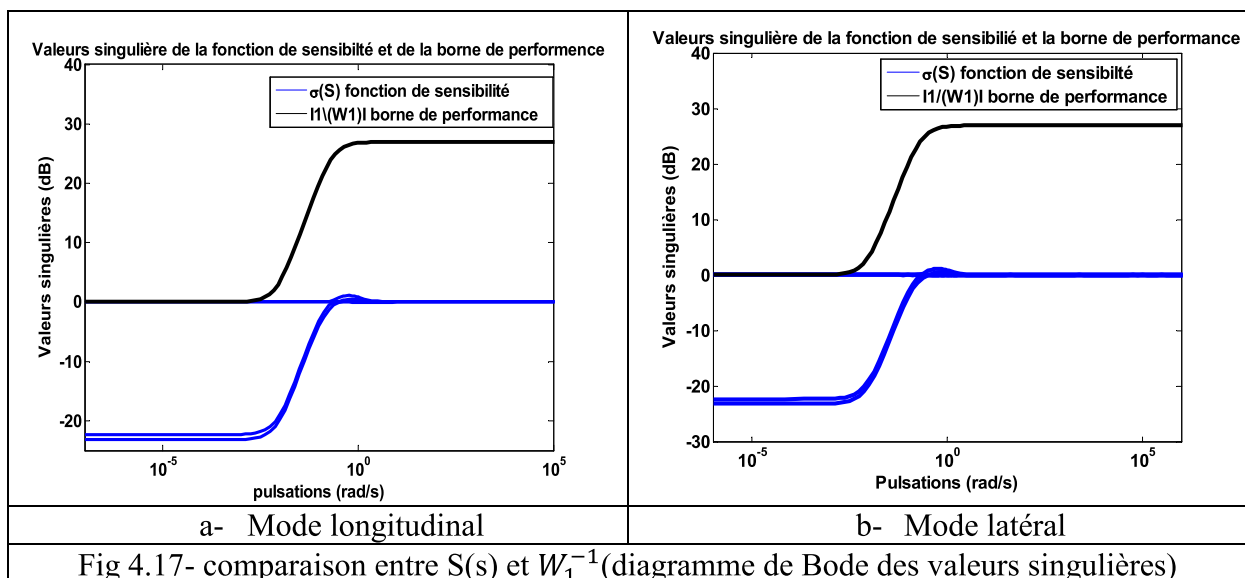


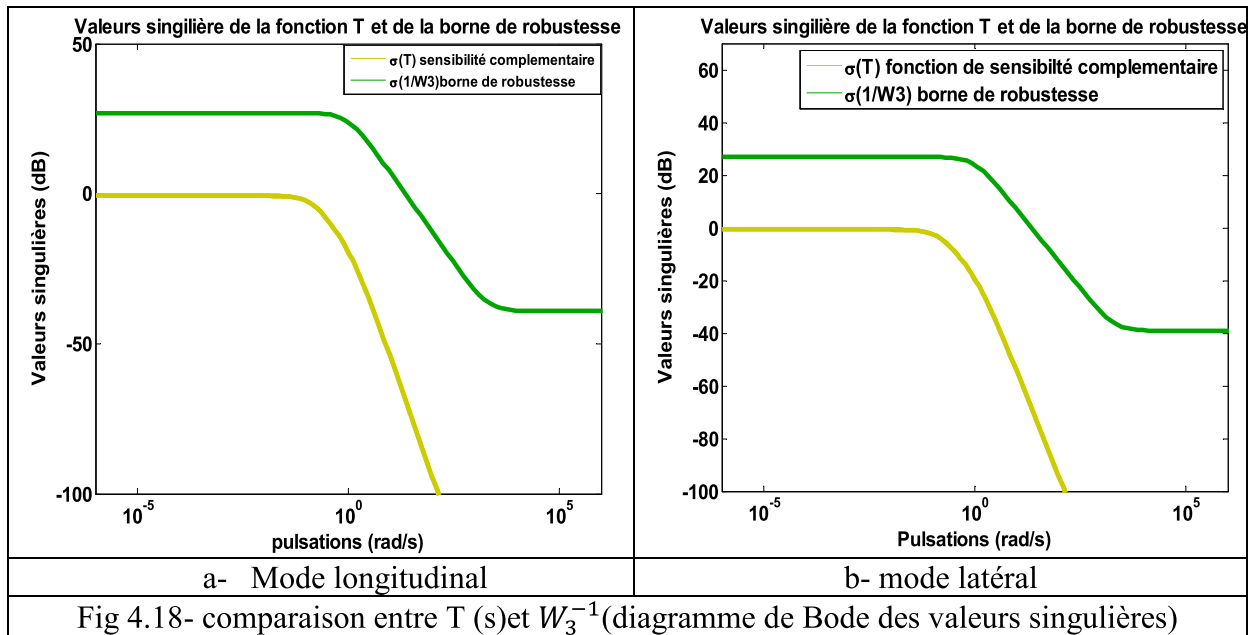
Fig 4.17- comparaison entre  $S(s)$  et  $W_1^{-1}$ (diagramme de Bode des valeurs singulières)

Le diagramme de Bode des valeurs singulières de  $T(s)$  est utilisé pour mesurer les marges de stabilité d’une modélisation d’un contrôleur pour système multivariable face à des perturbations multiplicatives.

Une conséquence du théorème de robustesse permet de spécifier les marges de stabilité du système de commande à travers l’inégalité suivante :

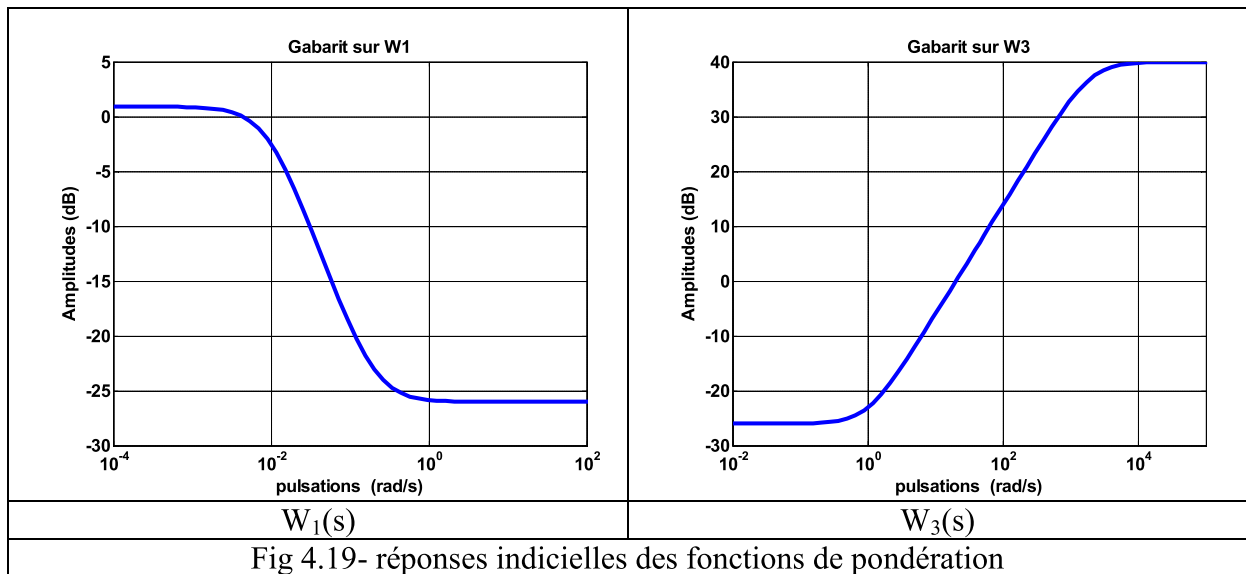
$$\bar{\sigma}(T\{j\omega\}) \leq |W_3^{-1}(j\omega)|$$

Ce qui est clairement satisfait par les choix des fonctions de pondération que nous avons effectués et qui est représenté sur la figure 4.18 :



Les fonctions de pondérations choisies sont :

$W_1(s) = \frac{0.05(s+0.2)}{s+0.009}$  et  $W_3(s) = \frac{100(s+1)}{(s+200)}$  qui sont un passe bas et un passe haut respectivement comme le montre la figure 4.18. Par ce choix on obtient  $\gamma=1.1125$  pour le mode longitudinal et  $\gamma=1.1024$  pour le mode latéral.



Les paramètres  $\omega_1$  joue sur le gain basses fréquences du filtre  $W_1$ . En effet, pour  $\omega_1=1$ , les termes de couplage ne sont pas annulés et le correcteur ne présente plus de pôles proches de l'origine. La diminution de ce paramètre vient peu à peu régler la question et assurer le découplage désiré.

Le paramètre  $\omega_1$  joue sur la bande passante du filtre  $W_1$ . En restreignant la bande passante sur laquelle on veut assurer le suivi de modèle, le système répond plus lentement. En augmentant  $\omega_1$ , le suivi devient meilleur et l'annulation des couplages beaucoup plus rapide.

Le paramètre  $M_1$  joue sur le gain hautes fréquences du filtre  $W_1$ . L'augmentation de  $M_1$  entraîne l'annulation rapide des termes de couplage mais une amplitude initiale d'autant plus grande.



Le paramètre  $\omega_3$  joue sur la bande passante du filtre  $W_3$ . Pour les fréquences de coupure les plus basses ; la bande passante du correcteur est trop restreinte pour assurer un suivi de modèle convenable et le système est trop lent. Pour les fréquences de coupure les plus hautes, les performances sont meilleures.

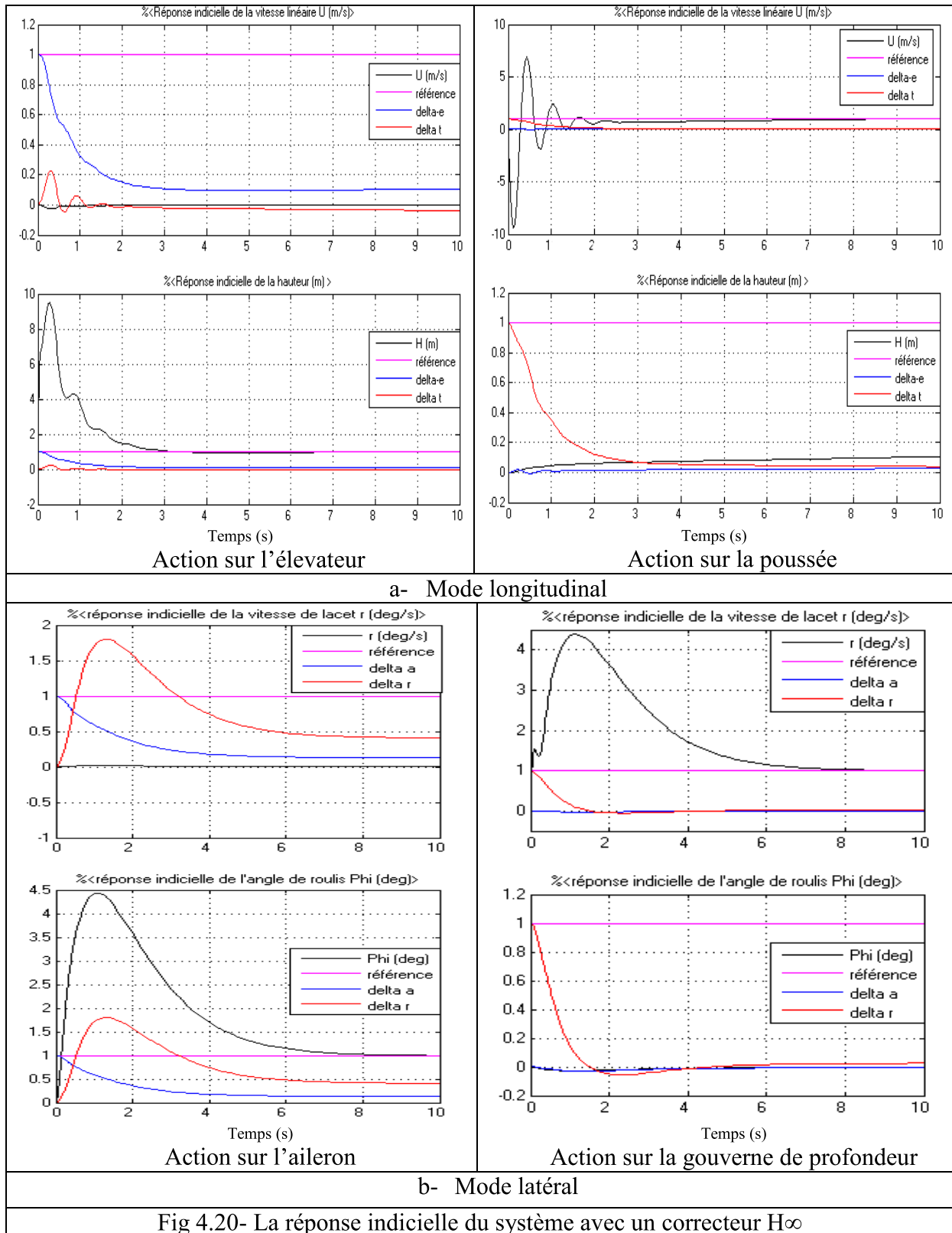
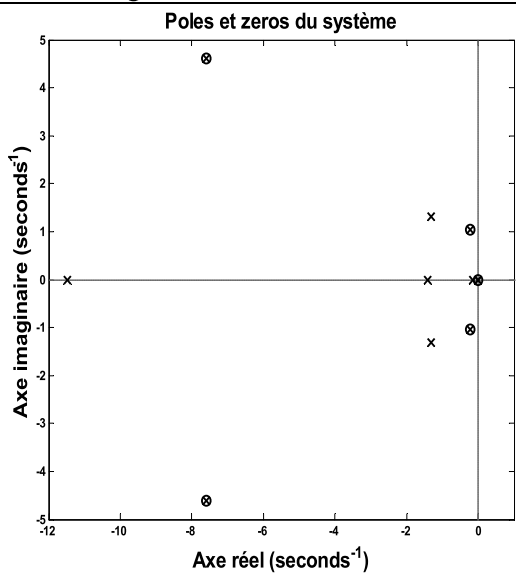
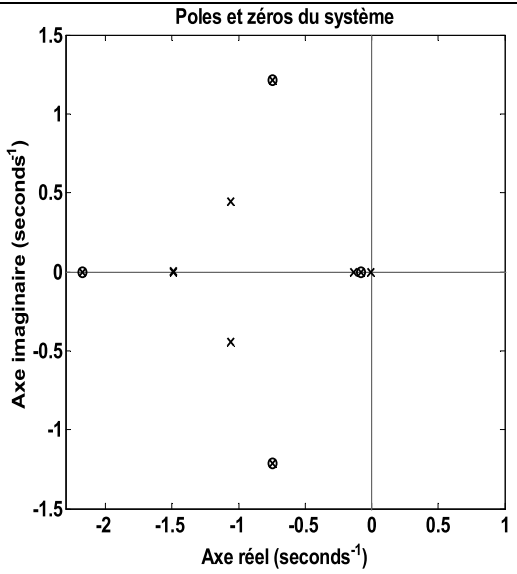


Fig 4.20- La réponse indicielle du système avec un correcteur  $H_\infty$

On remarque sur cette figure que la réponse indicielle des différents états du système est une évolution avec de faibles oscillations vers les valeurs finales désirées qui se croisent avec la référence. Les temps de réponse sont de l'ordre de 3 secondes pour le mode longitudinal et aux environs de 6 secondes pour le mode latéral.

La réponse indicielle du processus représentée sur la figure précédente montre que les sorties atteints la consigne avec certains dépassement et le régime transitoire est faiblement découplé, car le temps de réponse est différent pour chaque sortie.

Les valeurs propres du système avec le correcteur en boucle fermée sont tous à parties réelles négatives. Les pôles du système sont tous à parties réelles négative ce qui confirme sa stabilité interne.

	Mode longitudinal	Mode latéral
Pôles		
Valeurs propres	<pre> -4.89e-08 -1.00e-01 -1.00e-01 -1.00e-01 -1.65e-01 + 1.32e-01i -1.65e-01 - 1.32e-01i -1.85e-01 + 1.69e-01i -1.85e-01 - 1.69e-01i -6.25e-01 -6.25e-01 -6.25e-01 -7.98e-01 + 2.57e-01i -7.98e-01 - 2.57e-01i -2.16e-01 + 1.04e+00i -2.16e-01 - 1.04e+00i -4.37e+00 -7.60e+00 + 4.61e+00i -7.60e+00 - 4.61e+00i -1.24e+06 -8.71e+06                     </pre>	<pre> -8.14e-02 -1.00e-01 -1.00e-01 -1.00e-01 -1.69e-01 + 1.44e-01i -1.69e-01 - 1.44e-01i -1.80e-01 + 1.78e-01i -1.80e-01 - 1.78e-01i -4.56e-01 + 1.24e-01i -4.56e-01 - 1.24e-01i -6.25e-01 -6.25e-01 -7.44e-01 + 1.21e+00i -7.44e-01 - 1.21e+00i -2.17e+00 -3.43e+05 -1.71e+06                     </pre>
Tableau 4.5 : valeur propres et pôles du système commandé ( $H_\infty$ )		

Les valeurs propres du système avec le correcteur en boucle fermée sont tous à parties réelles négatives. Les pôles du système sont tous à parties réelles négative ce qui confirme sa stabilité interne.

	paramètre	valeur	interprétation
Mode longitudinal	Borne supérieure	Inf	>0 donc la stabilité du système face à l'incertitude modélisée est garantie.
	Borne inférieure	3.8844	>1 ce qui veut dire que le système incertain est garanti d'être stable pour la valeur d'incertitude modélisée.
	Fréquence de déstabilisation	0.2259	C'est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec l'élément incertain proche de sa valeur nominale
Mode latéral	Borne supérieure	4.0000	>0 donc la stabilité du système face à l'incertitude modélisée est garantie.
	Borne inférieure	2.3952	>1 ce qui veut dire que le système incertain est garanti d'être stable pour la valeur d'incertitude modélisée.
	Fréquence de déstabilisation	$0.1.3750 \cdot 10^7$	C'est la valeur critique pour laquelle déstabilisation se produit, avec l'élément incertain proche de sa valeur nominale

Tableau 4.6 : interprétations des valeurs des marges de stabilité (commande  $H_\infty$ )

a- Mode longitudinal: La stabilité robuste du système est garantie pour toute variation dans la gamme  $\pm 25\%$  et le système peut tolérer jusqu'à 388% de l'incertitude tolérée. La borne supérieure est infinie, ceci veut dire qu'il n'y a aucune incertitude dans cette gamme pouvant causer la déstabilisation du système.

La sensibilité du système en respectant l'élément incertain déjà introduit est de 15%. En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 4%.

b- Mode latéral : Le système est robuste pour toute variation dans la gamme  $\pm 25\%$  et la plus petite valeur déstabilisant le système se trouve quelque part entre 240% et 400% plus grande que  $\pm 25\%$  c'est-à-dire entre  $\pm 60\%$  et  $\pm 100\%$ . Une estimée de la variation du paramètre provoquant la déstabilisation à 400% est d'une amplitude de -4.0000.

La sensibilité du système en respectant l'élément incertain déjà introduit est de 14%. En augmentant ce paramètre de 25% la marge de stabilité diminue de 4%.

**Conclusion:** le système possède une confortable marge de sécurité avant que le système devienne instable.

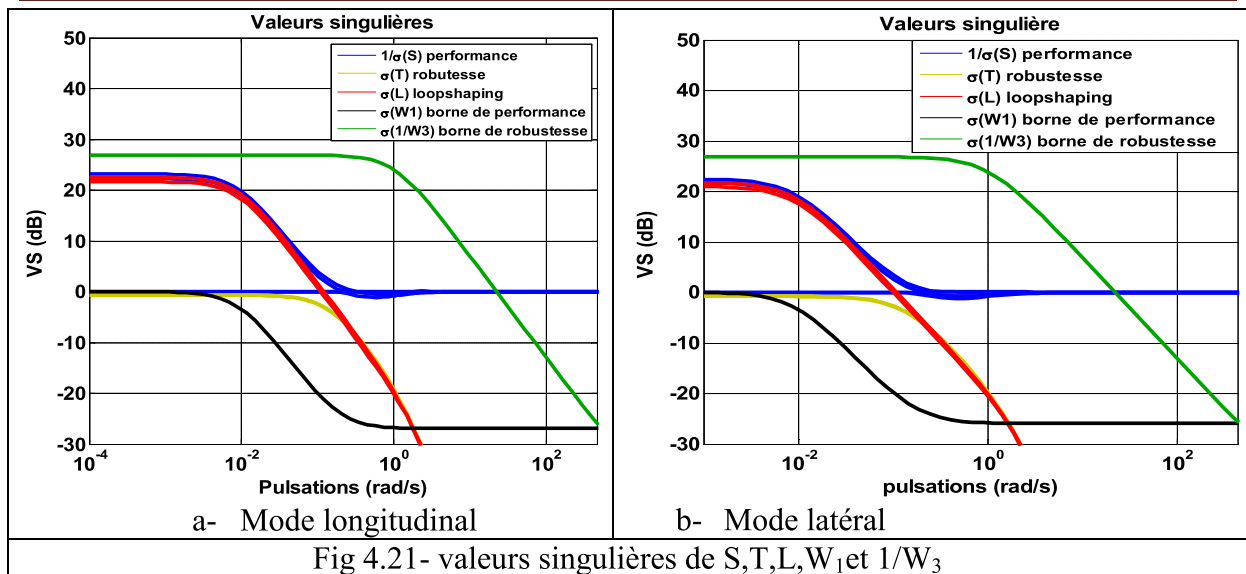
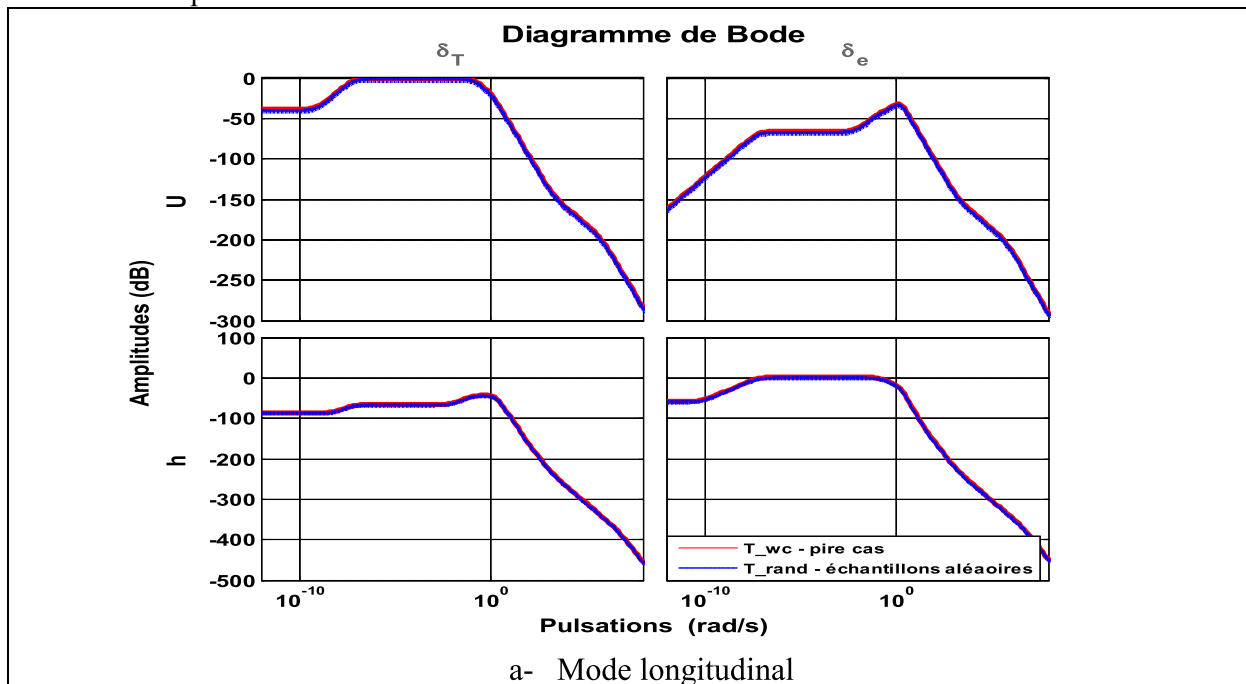


Fig 4.21- valeurs singulières de S,T,L,W<sub>1</sub>et 1/W<sub>3</sub>

Nous observons sur la figure ci-dessus que les conditions de robustesse sont assurées, ainsi que le système est complètement découplé où les gains principaux de la fonction de transfert en boucle fermée sont superposés.

En comparant les allures des fonctions présentée ci-dessus nous remarquons que :

- La fonction  $1/S(s)$ , reflétant les performances du système commandé, a pour toutes les pulsations, la graphe de ses valeurs singulière (qui est en bleu) en dessus de celui de la borne de performance (le graphe en noir).
- La fonction  $T(s)$ , reflétant le robustesse du système commandé, a pour toutes les pulsations, la graphe de ses valeurs singulière (qui est en jaune) en dessous de celui de la borne de robustesse (le graphe en vert).
- Le graphe en rouge représentant le « loopshaping » suit l'allure de celui de la borne de performance pour les basses fréquences et celui de la robustesse pour les hautes fréquences.



a- Mode longitudinal

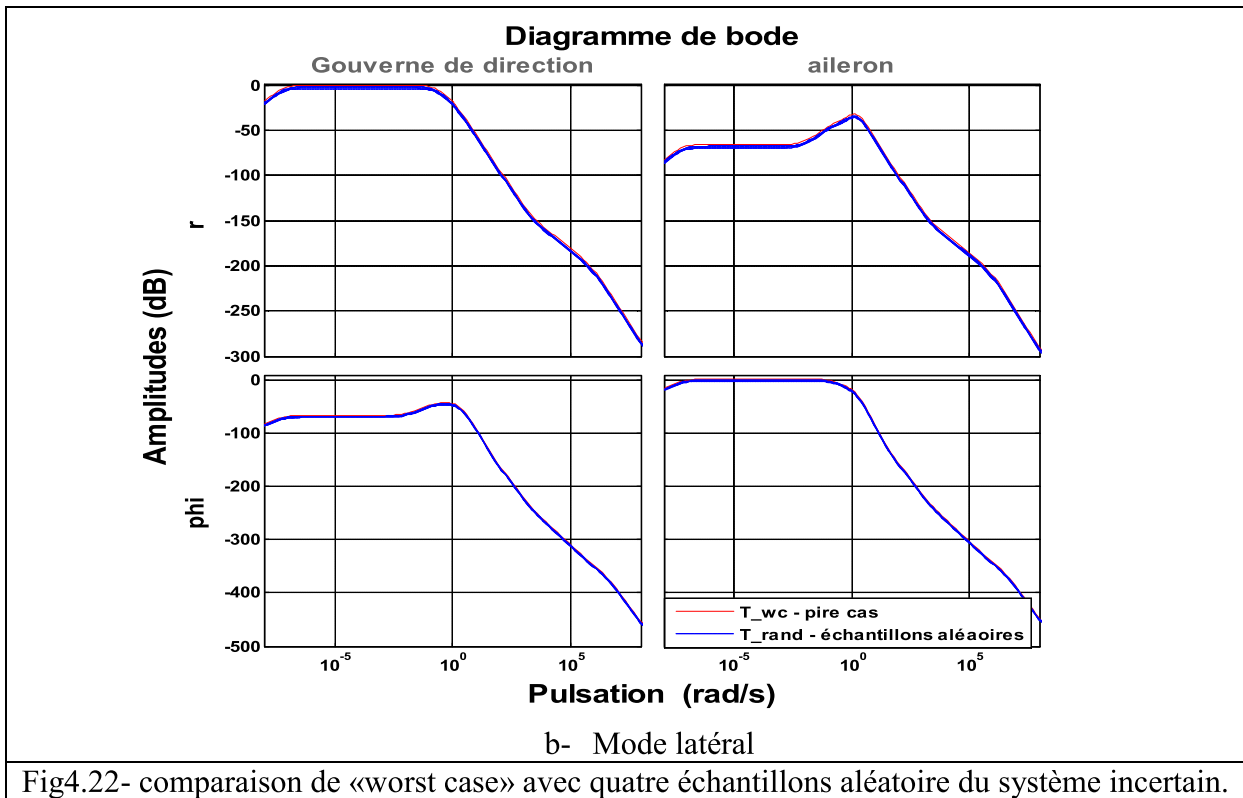


Fig4.22- comparaison de «worst case» avec quatre échantillons aléatoire du système incertain.

On remarque sur cette figure que les gains des échantillons aléatoires est toujours inférieur à celui du « worst case ».

**IV.4-Modèle non linéaire :**

Ce modèle a été réalisé à partir de la représentation non linéaire développée dans le deuxième chapitre de ce mémoire. On essaiera dans cette partie d'appliquer les lois de commandes obtenues dans les paragraphes §4.2 et §4.3 sur le modèle linéaire afin de prouver la justesse de ce dernier et, au même temps, la robustesse de ces commandes.

4.4.1- Analyse en boucle ouverte :

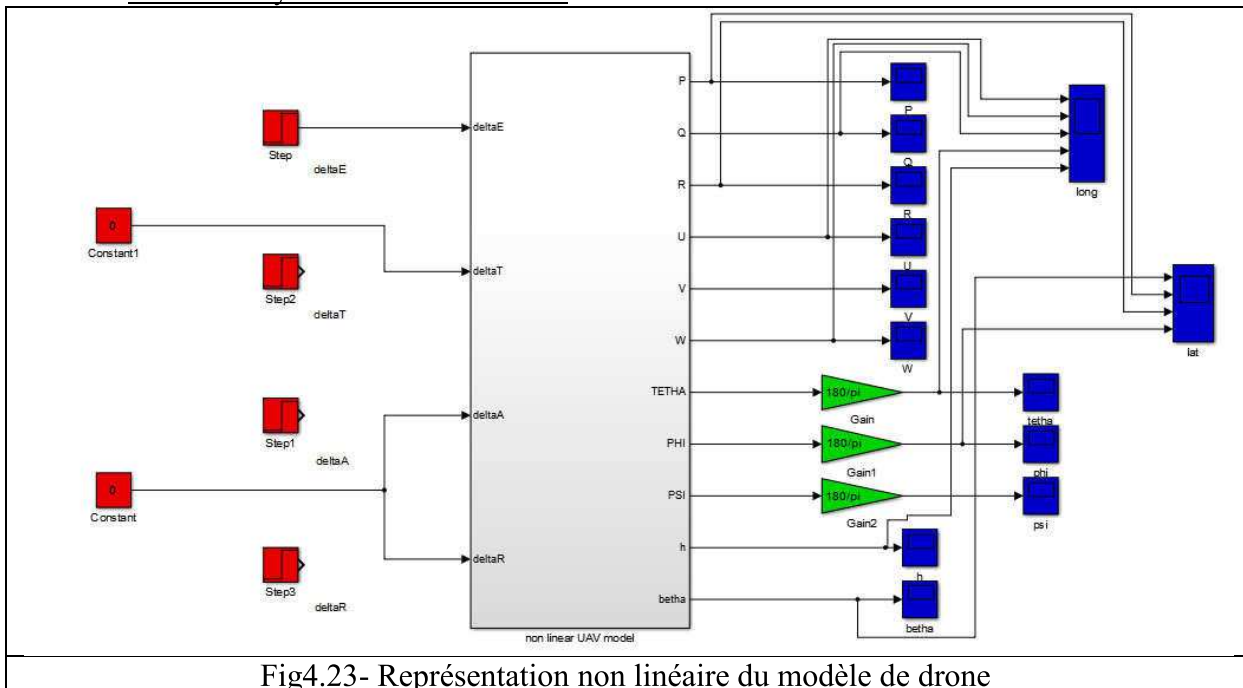


Fig4.23- Représentation non linéaire du modèle de drone

On applique un échelon unitaire à chacune des quatre entrées séparément on obtient les réponses indicielles suivantes :

- Pour le mode longitudinal

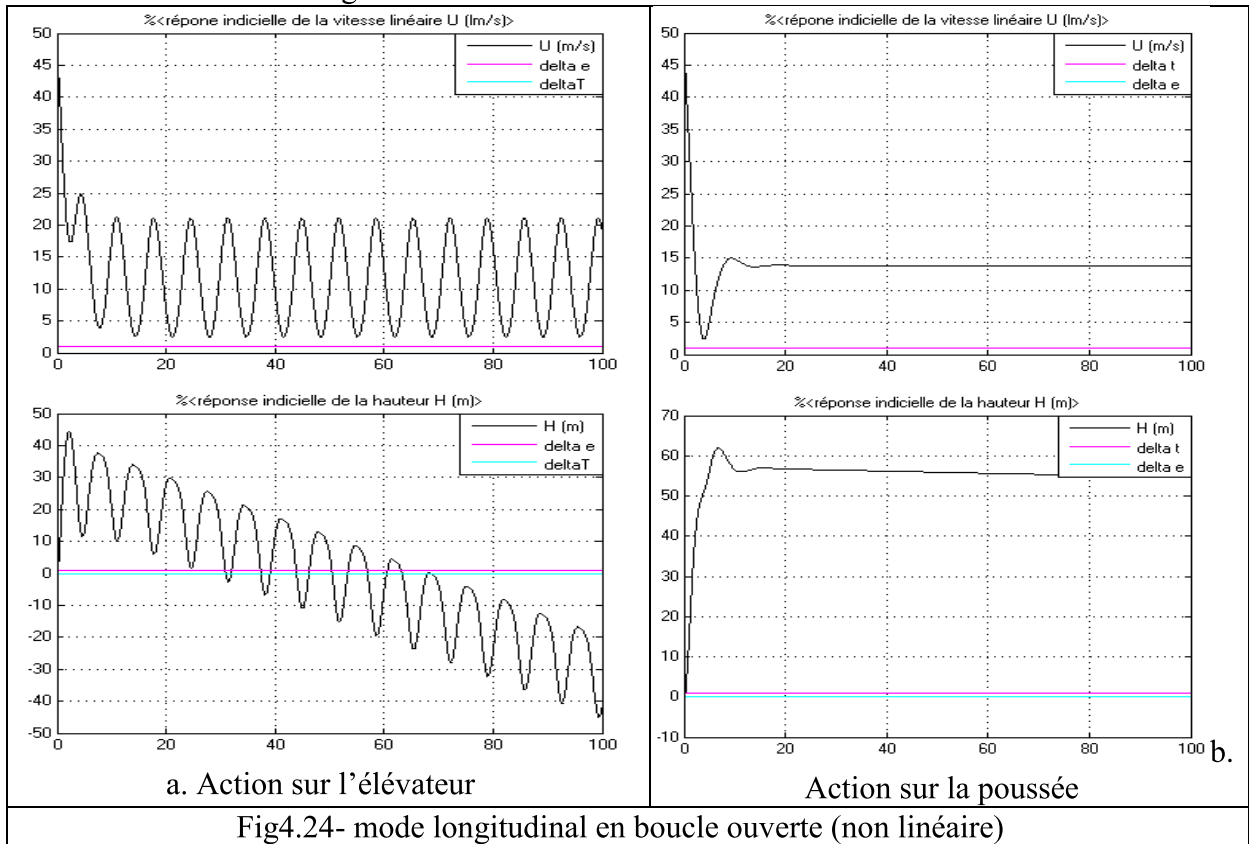


Fig4.24- mode longitudinal en boucle ouverte (non linéaire)

- Pour le mode latéral :

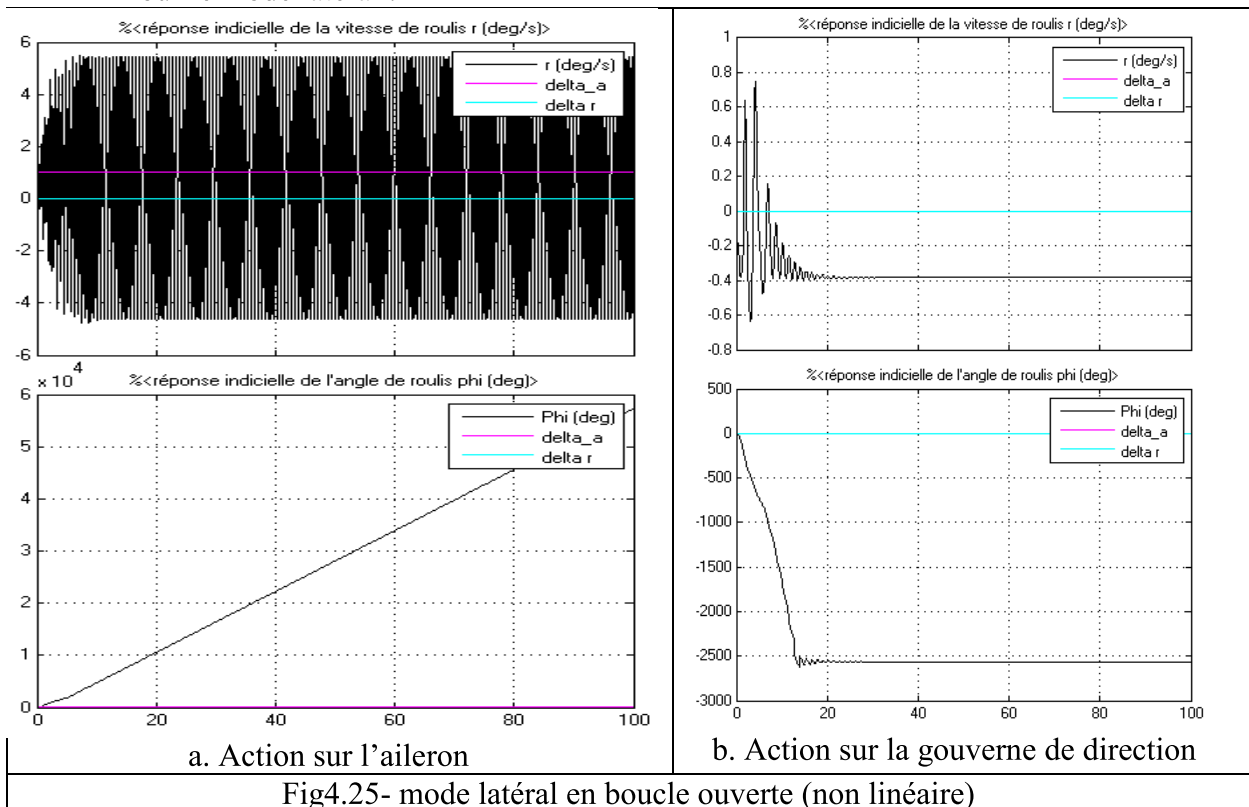


Fig4.25- mode latéral en boucle ouverte (non linéaire)

On remarque que le système est sujet de forte oscillations et qu'il n'a pas tendance à se stabiliser contrairement au cas du modèle linéaire.

On remarque pour cette représentation que le découplage caractérisant le modèle linéaire n'est plus valide puisque l'action sur une des gouvernes excite non seulement les variables du mode mais aussi ceux de qui en étaient indépendantes dans le cas linéaire. Pour illustrer cette remarque on propose les graphes suivants représentant la réponse indicielle du mode longitudinal aux excitations latérales :

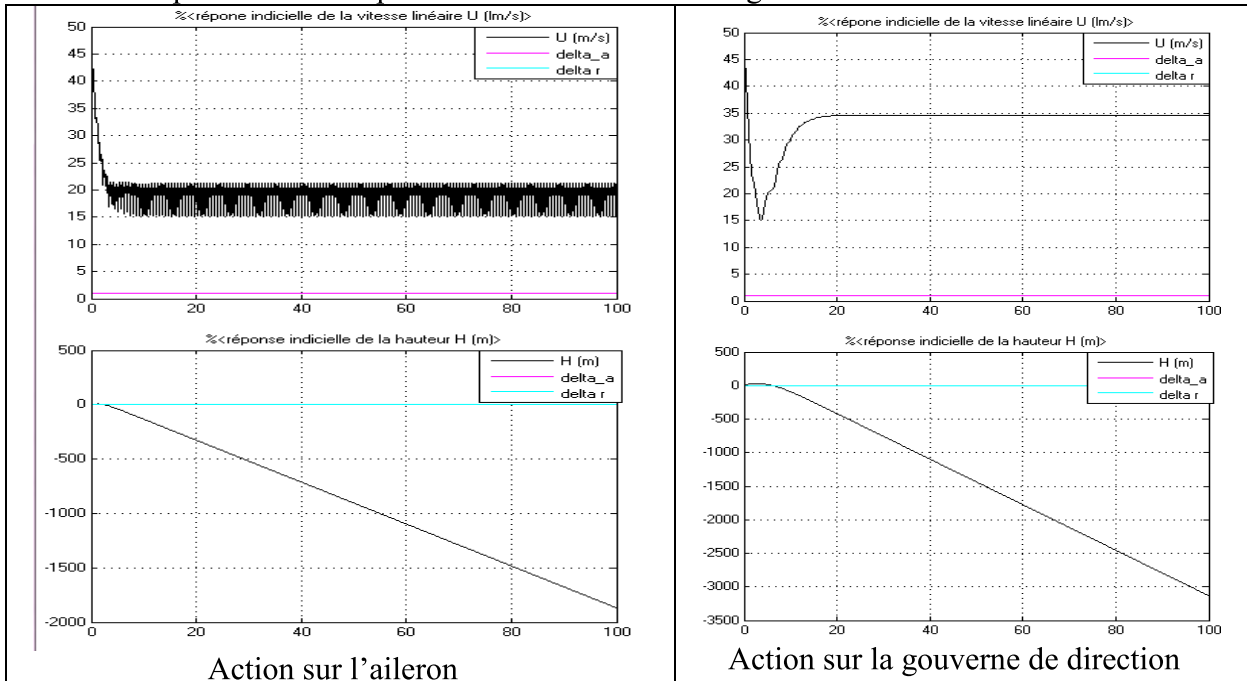


Fig4.26- Réponse indicielle du mode longitudinal aux excitations latérales (non linéaire)

IV.4.2- Application de la commande LQG sur le système non linéaire :

On applique la loi de commande obtenue dans §4.2 sur le modèle non linéaire comme représenté dans le graphe ci-dessous :

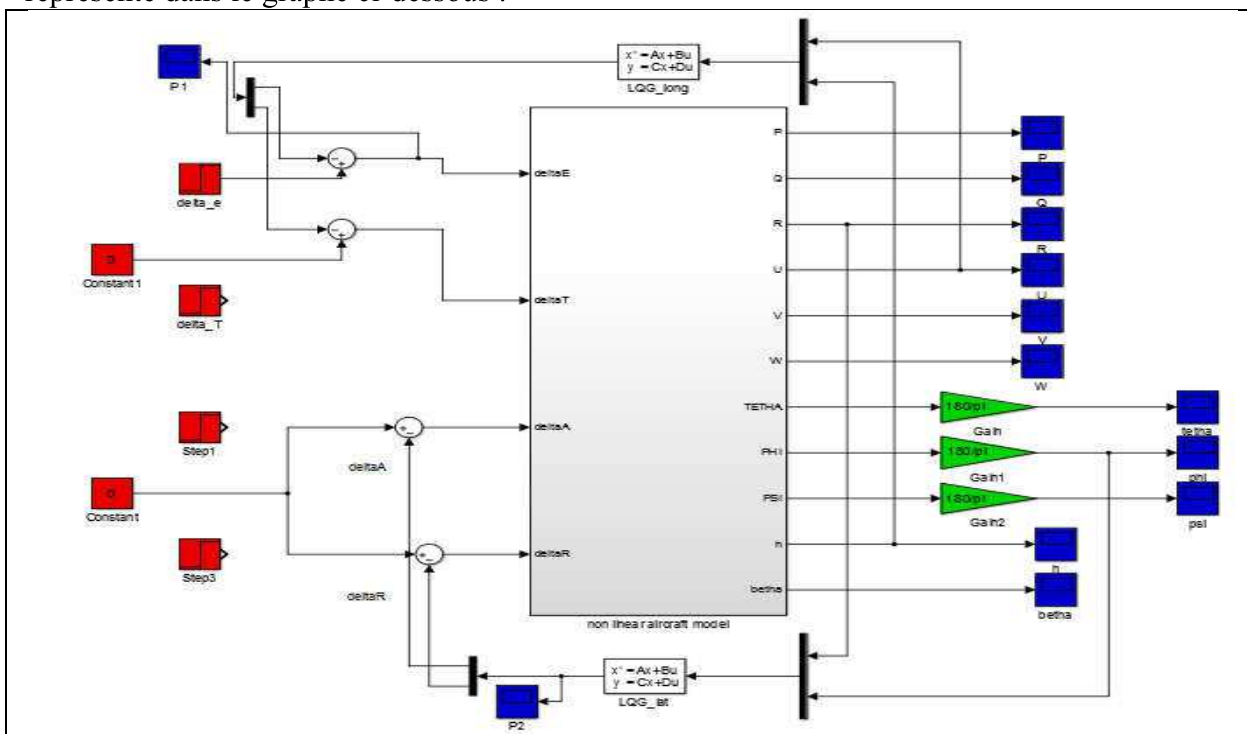
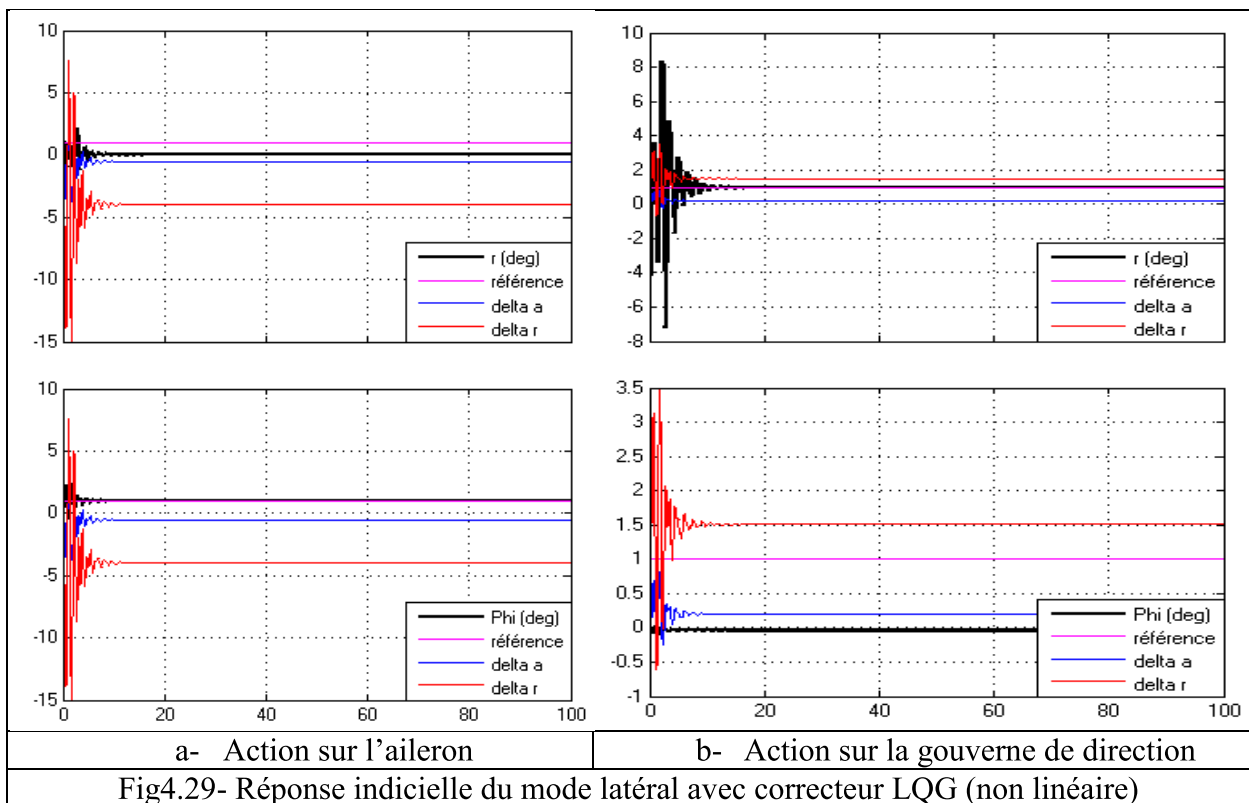
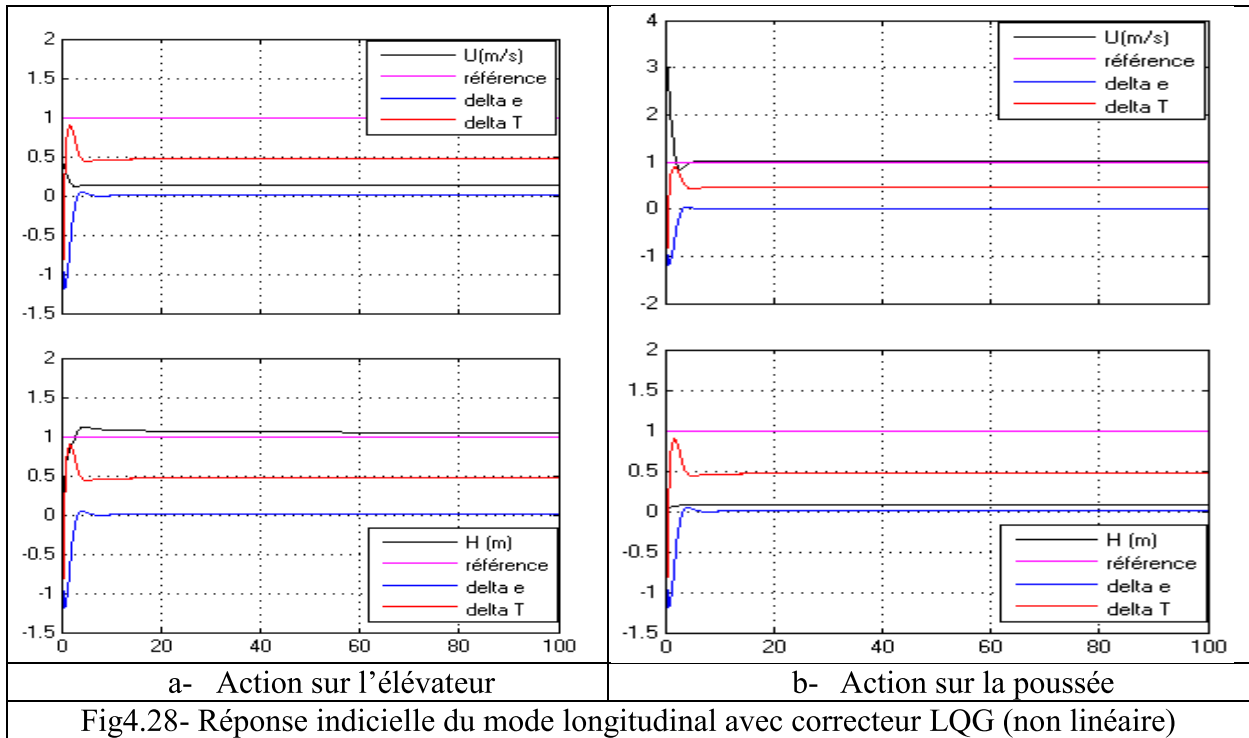


Fig4.27- Application de la commande LQG sur le modèle non linéaire



Les lois de commandes LQG ont été réajustées en utilisant la méthode LTR expliquée dans le chapitre précédent jusqu'à obtention de ces résultats qui semblent être le meilleur compromis stabilité/robustesse pour les deux représentations du modèle (linéaire et non linéaire) ce qui peut être démontré par une injection d'un signal de bruit aux différentes entrées du système ce qui se traduira par une rejection presque totale :



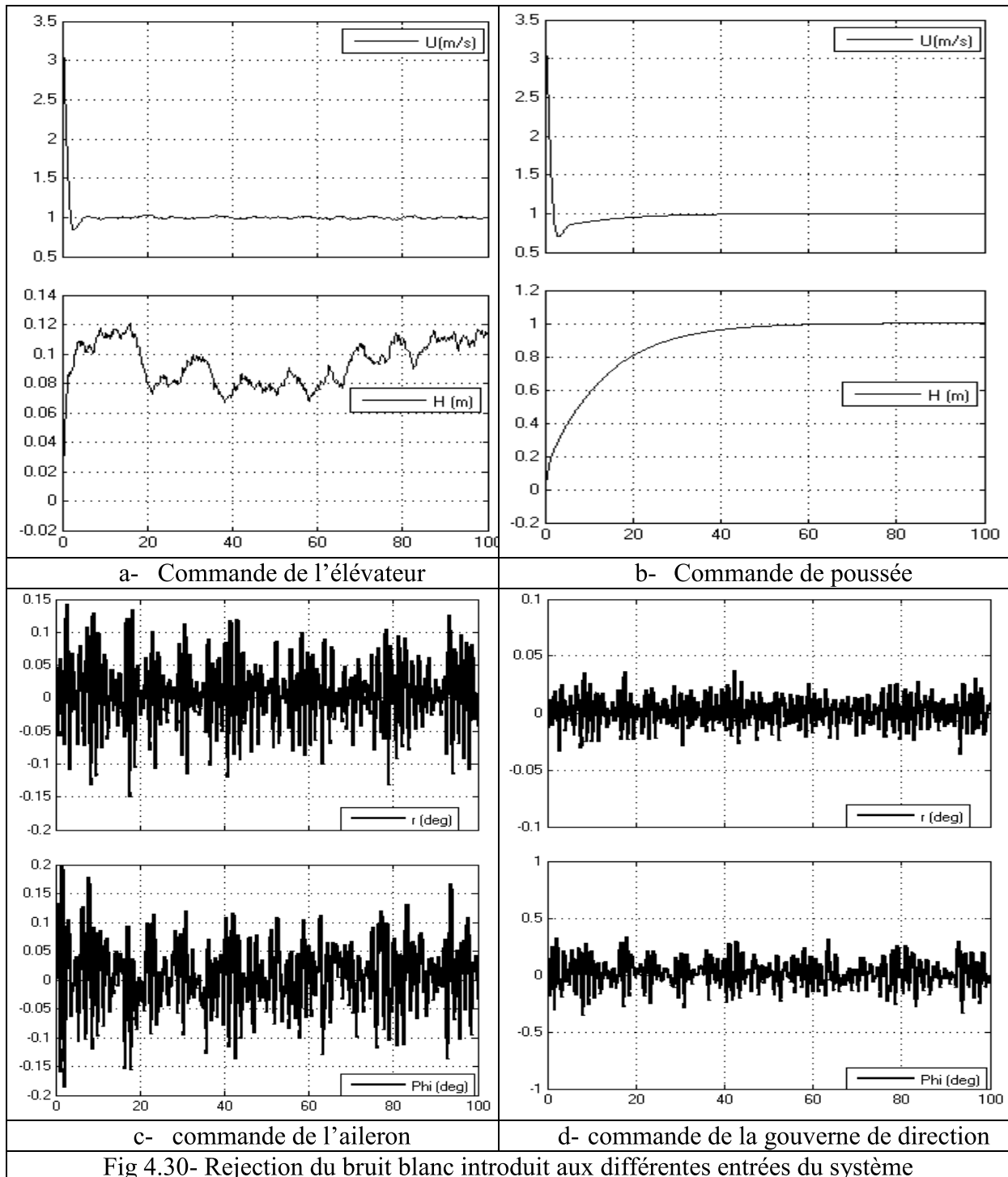


Fig 4.30- Rejection du bruit blanc introduit aux différentes entrées du système

On déduit d'après la figure ci-dessus que le système possède une bonne rejection de perturbation lui procurant la robustesse requise vu que toutes les réponses tendent à zéro avec une légère fluctuation autour de cette valeur.

Il est intéressant de signaler que les constantes vers lesquelles tendent les réponses du mode longitudinale sont du à l'introduction du paramètre  $u_0$ .

4.4.3- Application de la commande  $H_\infty$  sur le système non linéaire :

On applique la loi de commande obtenue dans §4.3 sur le modèle non linéaire comme représenté dans le graphe ci-dessous :

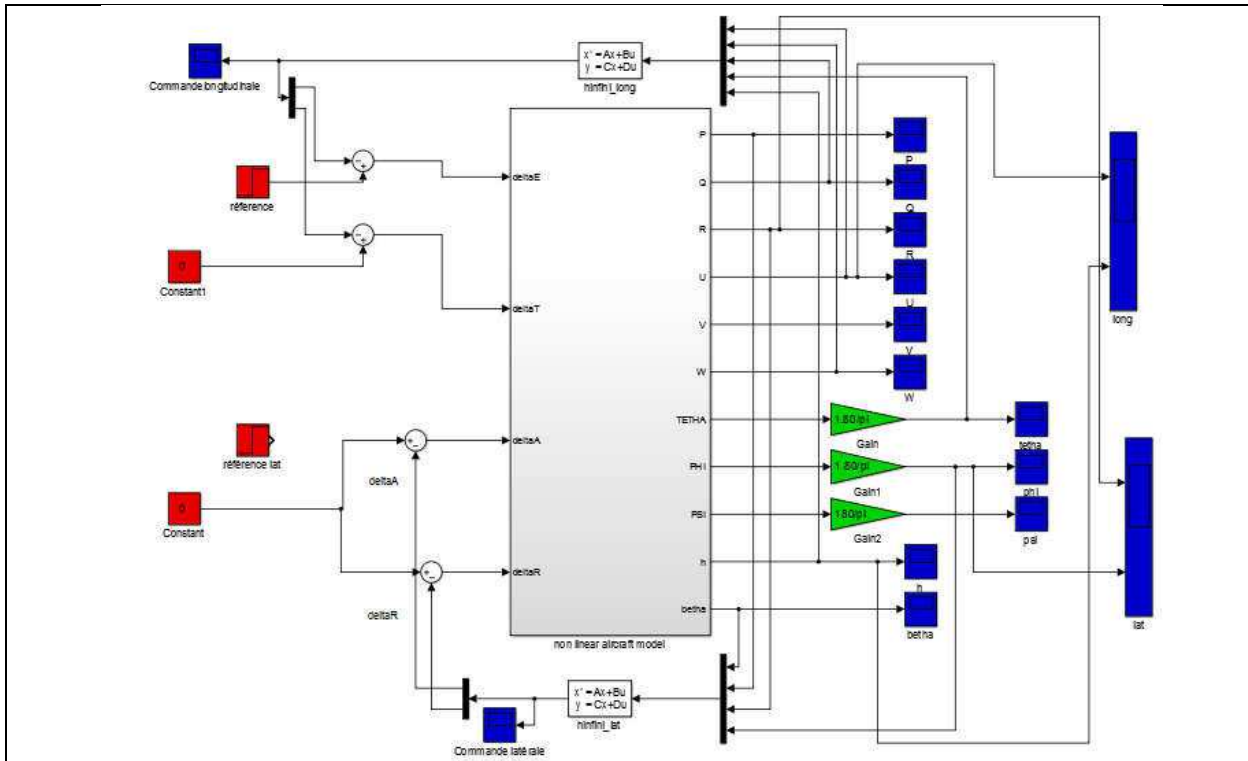


Fig4.31- Application de la commande  $H_{\infty}$  sur le modèle non linéaire

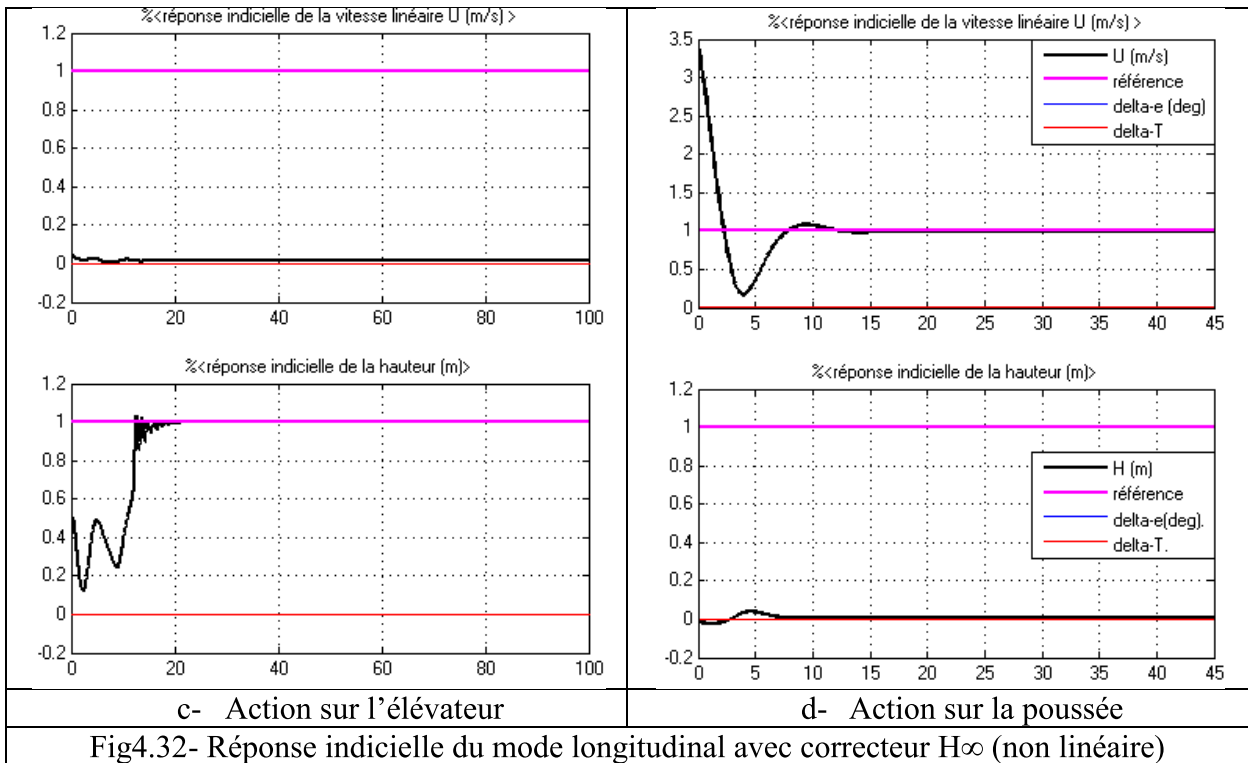


Fig4.32- Réponse indicielle du mode longitudinal avec correcteur  $H_{\infty}$  (non linéaire)

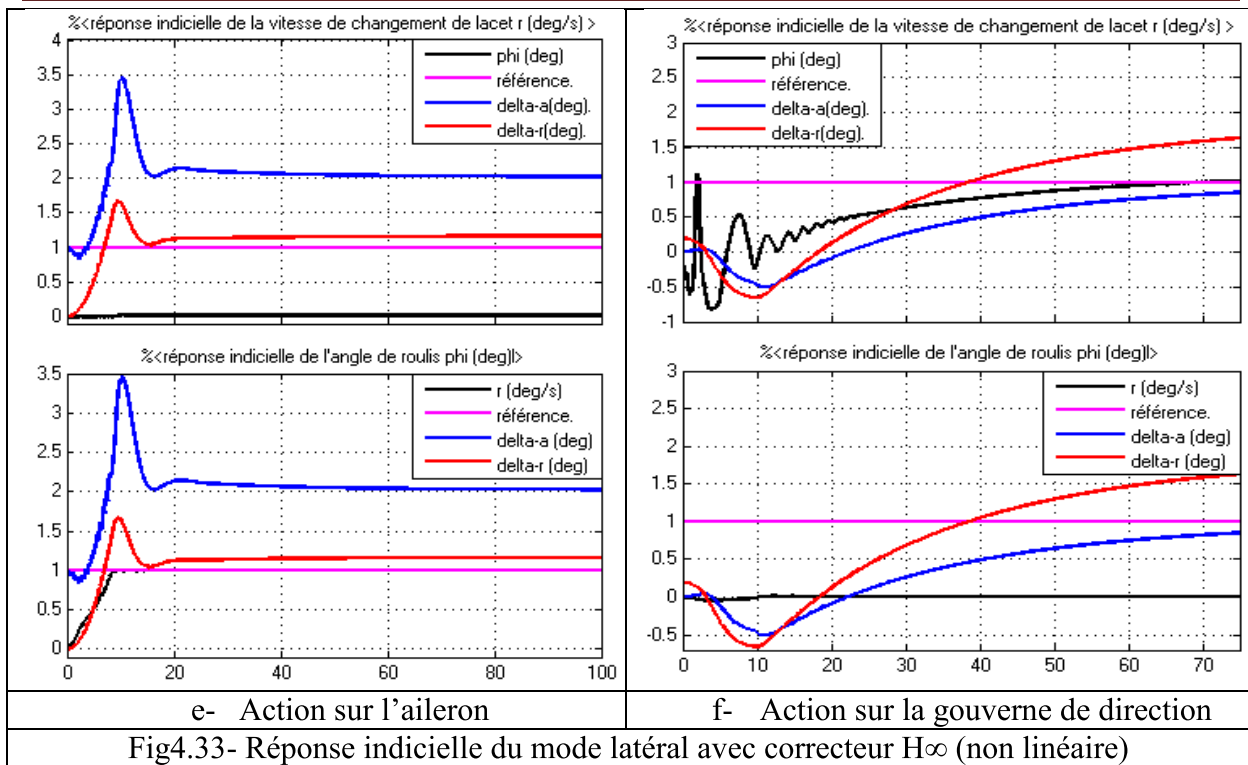
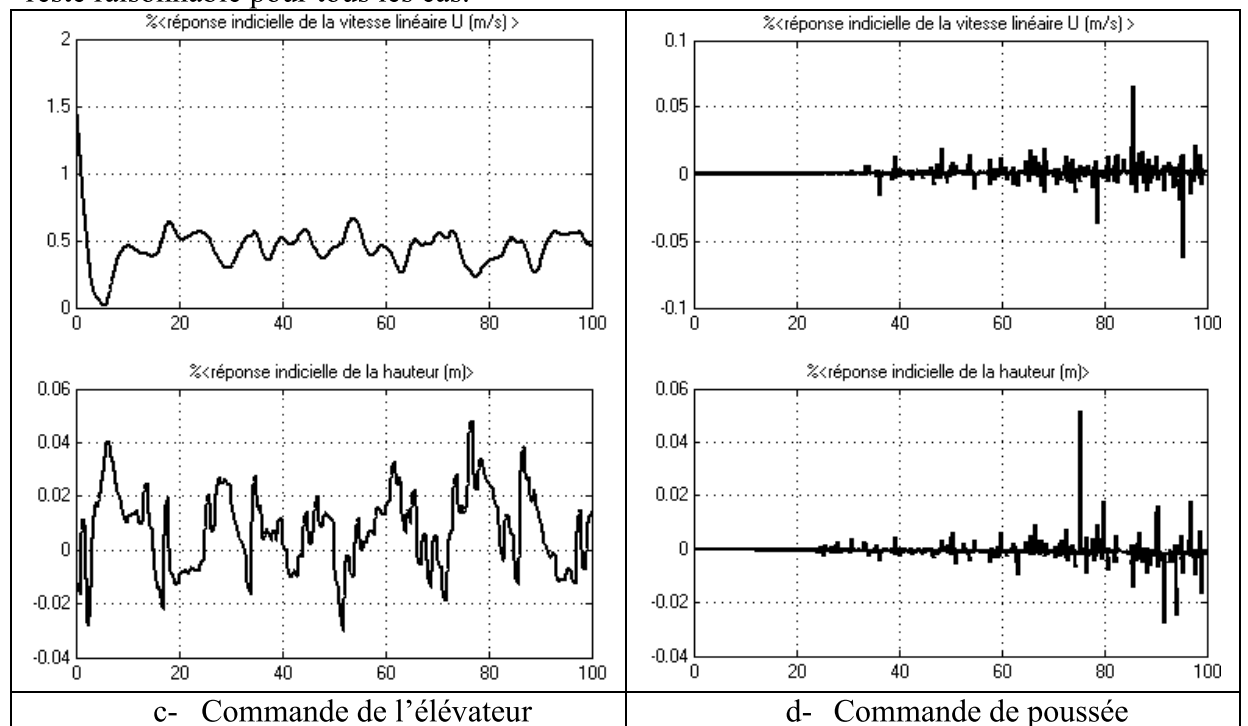


Fig4.33- Réponse indicielle du mode latéral avec correcteur  $H_\infty$  (non linéaire)

Les réponses indicielles du processus non-linéaire présentent une évolution oscillatoire au début avec quelques dépassements avant d'atteindre la consigne dans des temps de réponse relativement lents par rapport à ceux du processus linéaire. La sollicitation des gouvernes reste raisonnable pour tous les cas.



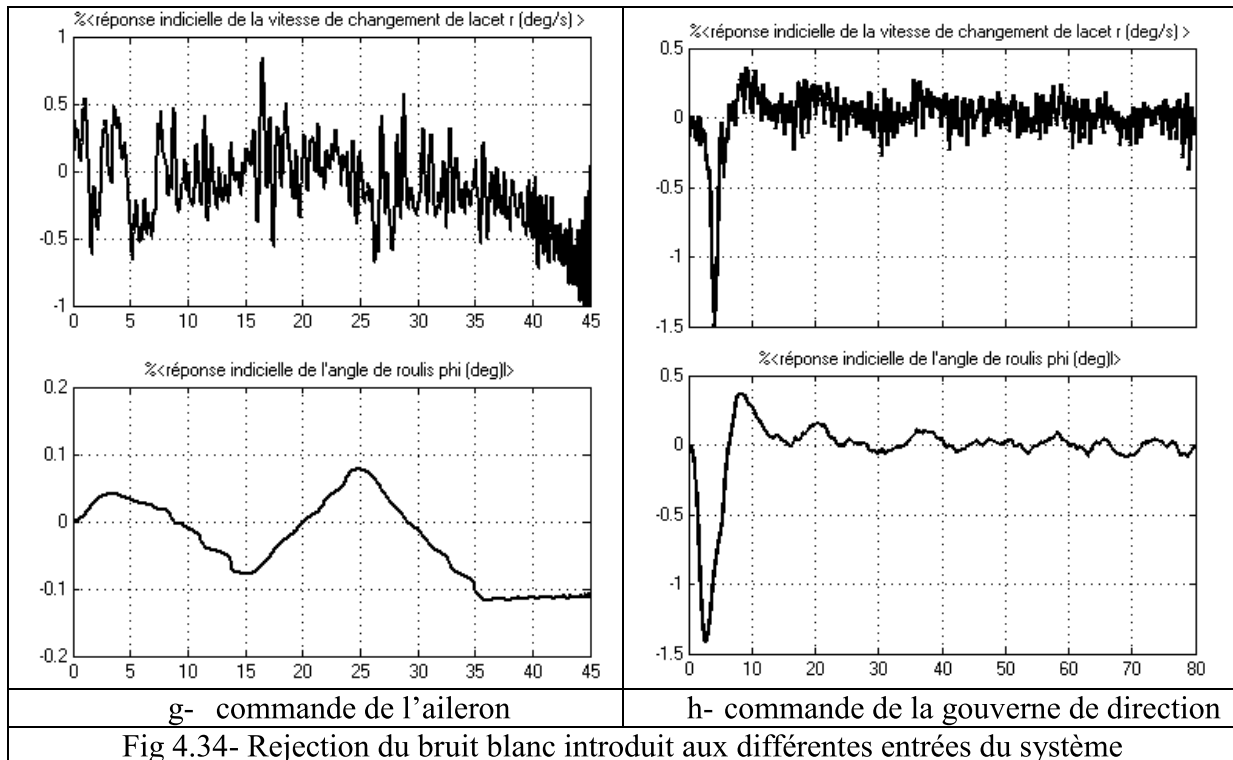


Fig 4.34- Rejection du bruit blanc introduit aux différentes entrées du système

On déduit d'après la figure ci-dessus que le système possède une bonne rejection de perturbation lui procurant la robustesse requise vu que toutes les réponses oscillent autour du zéro.

**4.5- Conclusion :**

Ce chapitre présente l'application de deux techniques de commande à retour d'état linéaire, à savoir, la commande LQG et la commande  $H_\infty$  permettant la stabilisation robuste du modèle de drone choisi.

En étudiant la réponse du système aux commandes utilisées, on conclue que la commande  $H_\infty$  fournit des marges de robustesse plus grandes que celles de la commande LQG et que cette robustesse dépend d'un bon choix des fonctions de pondérations (pour la commande  $H_\infty$ ) ou des matrices de pondération (pour la commande LQG). Toutefois, la synthèse d'une commande LQG est plus facile par rapport à celle de la commande  $H_\infty$  quoiqu'il n'existe pas de méthode bien précise permettant l'obtention de ces paramètres.

# Conclusion générale

## Conclusion générale

---

Dernière étape de ce mémoire, la conclusion est ce lieu privilégié où l'on mêle allègrement bilan du travail accompli et perspectives de développements. Avant une dernière synthèse générale, nous souhaitons, au travers ce rapport, avoir apporté un éclairage original quant au comportement expérimental de deux techniques de régulation réputées robustes.

En quelques mots, les travaux entrepris dans ce mémoire s'articulent principalement autour de la modélisation et de la commande d'un véhicule aérien sans pilote à voilure fixe. Des travaux d'observation de l'état du véhicule ont également été esquissés afin de pallier l'imprécision de la mesure.

### **Travaux sur la modélisation :**

Avant de traiter le problème de commande, il était indispensable de construire un modèle de la dynamique de l'UAV. La difficulté dans le développement de ce modèle résidait dans le fait qu'il devait être suffisamment riche afin de simuler le comportement du drone avec précision, mais également suffisamment simple pour la synthèse d'algorithmes de commande. Au final, ce modèle a été obtenu en utilisant les équations de la physique et en caractérisant certains phénomènes aérodynamiques tels que les différentes forces aérodynamiques. Le système obtenu était alors non linéaire.

Certaines hypothèses ont été proposées afin de simplifier le modèle dynamique complet. Ces simplifications ont permis l'obtention d'un modèle linéaire qui sera plus-tard exploité dans la commande.

### **Travaux sur la commande :**

Durant ce mémoire, deux approches de commande ont été développées et testées en simulation sur le modèle linéaire de la dynamique de drone qui sont la commande LQG et la commande  $H_\infty$ . La commande LQG a été développée en utilisant la méthode de commande LQG/LTR où, un observateur optimal a été développé, qui permet de reconstituer l'état du système, en tenant compte des conditions de robustesse sur la stabilité et les performances, puis en calculant la commande par retour d'état (LQ) de façon à ne pas dégrader les propriétés de robustesse de l'observateur optimal (Filtre de KALMAN). Ensuite la commande et l'observateur ont été appliqués au modèle de synthèse. Les résultats de simulations réalisés sur la commande LQG/LTR montrent un comportement très satisfaisant de la robustesse sur le régime nominal et perturbé et aussi sur le modèle non linéaire. De même, nous avons utilisé la même méthodologie pour la conception d'une commande  $H_\infty$ .

### **Perspectives du travail :**

Bien que les travaux présentés dans ce mémoire aient permis d'atteindre les objectifs initiaux, certains aspects auraient pu être améliorés. De plus, un certain nombre d'options alternatives auraient mérité d'être envisagées afin de perfectionner le système de commande. Ces différentes pistes de réflexion sont désormais reléguées dans les perspectives de travail.

## Conclusion générale

---

L'élément qui le plus fait défaut à nos yeux, et qui est pourtant un élément central dans ce genre de projet, est l'absence d'essais expérimentaux.

Un autre élément sur lequel il aurait été également intéressant de se focaliser est le guidage et positionnement du drone. Cette propriété, traitée dans de nombreux autres projets surtout en matière de l'évitement de collision aurait permis l'étude complète du modèle.

# Bibliographie



# Bibliographie

---

- [1] : **PASCAL BRISSET**. « Drones civils Perspectives et réalités ». Ecole Nationale de l'Aviation Civile, 2004.
- [2] : **P. CASTILLO ET A. E. DZUL R. LOZANO**. « Modelling and Control of Mini-Flying machines”. Springer-Verlag London Limited, 2005.
- [3] : **MOKHTARI MOHAMMED RIDA**. « Observation et Commande de Drones Miniatures à voilures tournantes ». Thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences Spécialité : Automatique. Université Aboubekr Belkaid Tlemcen. Octobre 2015.
- [4] : **ARNAUD KOEHL**. « Modélisation, observation et commande d'un drone miniature à birotor coaxial ». Thèse pour l'obtention du Doctorat de l'Université de Lorraine (spécialité automatique). Mars 2012.
- [5] : **J. M. PFLIMLIN**. « Commande d'un minidrone à hélice carénée : De la stabilisation dans le vent à la navigation autonome ». Thèse de Doctorat de l'École Doctorale Systèmes de Toulouse, 2006.
- [6] : **ALEXANDER**. « Coaxial Rotary-Wing Mini Aerial Vehicle Aeromechanics». Thèse pour obtenir le titre de Docteur en Sciences, 2009.
- [7] : **ALEXANDER ET DOUG AULD HALL KC WONG**. Coaxial Rotor Interaction Modelling Using Blade Element Momentum Theory. 7th Australian Pacific Vertiflite Conference on Helicopter Technology, 2009.
- [8] : **BEARD, R. W., et MCLAIN, T. W.** Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice. Princeton University Press. 2011
- [9] : **MARK ANDREW OWEN**. Aerial Rendezvous Between an Unmanned Air Vehicle and an Orbiting Target Vehicle, Brigham Young University – Provo.
- [10] : **J.G.MANATHARA et D.GHOSE** Reactive algorithm for collision avoidance of multiple realistic UAVs,. Department of Aerospace Engineering, Indian Institute of Science, Bangalore. 2011.
- [11] : **CHINGIZ HAJIYEV**. State Estimation and Control for Low-cost Unmanned Aerial Vehicles, Faculty of Aeronautics and Astronautics, Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey. 2015.
- [12] : **MONTARNAL PHILIPPE**. “Non linear Aircraft dynamics and PIO, Hamburg university of applied sciences, 8 july 2009.
- [13] : **SAMUEL COURCHESNE**. Estimation et validation des drivées de stabilité et de contrôle du modèle dynamique NON-LINÉAIRE d'un drone à voilure fixe, MONTRÉAL, LE 13 MARS 2013
- [14] : **JEAN DUPREZ**. Automatisation du pilotage au sol pour la navigation aéroportuaire. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004.
- [15] : **Edouard LAROCHE**, cours « Commande Optimale », année académique 2009/2010.
- [16] : **Daniel ALAZARD**, « Régulation LQ/LQG: Note de cours », SUPAERO.
- [17] : **J. C. DOYLE et G. STEIN**, “Robustness with observers”, IEEE Trans.Autom. Control. AC-24, No 4. Aout 1979.
- [18] : **J. C. DOYLE et G. STEIN**, “Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis”, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 26, no. 1, 1981.

## Bibliographie

---

[19] : **S. GARG** et **P. OUZTS**. «Integrated flight/propulsion control design for a STOVL aircraft using H-infinity control design techniques». Dans «American Control Conference (ACC)», 1982.

[20] : **C. PITTET** et **D. ARZELIER**. «DEMETER : a benchmark for robust analysis and control of the attitude of flexible micro satellites». Dans «IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)», Toulouse, France, 2006.

[21] : **D. ARZELIER** et **D. PEAUCELLE**. «Multiobjective H<sub>2</sub>/H<sub>∞</sub> impulse to peak synthesis: application to the control of an aerospace launcher». Dans «IFAC Symp. Automatic Control in Aerospace (ACA)», Saint-Petersbourg, Russie, 2004.

[22] : **A. BENLATRECHE**, « Contribution à la commande robuste H<sub>∞</sub> de systèmes à grande échelle d'enroulement de bandes flexibles ». Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 26 Janvier 2007.

[23] : **G. ZAMES**, « Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations ». IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 26, issue N°4, 1981

[24] : **L. LAVIGNE**, « Outils d'analyse et de synthèse des lois de commande robustes des systèmes dynamiques plats », Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I, 17 Juin 2003.

[25] : **G. SCORLETTI**, **V. FROMION**, « Introduction à la commande multivariable des systèmes : méthodes de synthèse fréquentielle H<sub>∞</sub> », Cours AU32 du Master Recherche ESCI 2A UFR de Sciences, Université de Caen/Basse Normandie, France, 2007.

[26] : **A. LAHMER**, « Implantation expérimentale de la commande robuste par un contrôleur H<sub>∞</sub> », Mémoire de Magister, Université de Batna, 12 Janvier 2011.

[27] : **J. DOYLE**. «Synthesis of robust controllers and filters». Dans «IEEE Conf.Dec. Control», San-Antonio, Texas, USA, dec 1983.

[28] : **K. GLOVER** et **J. DOYLE**. «State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H<sub>norm</sub> bound and relations to risk sensitivity». Systems and Control letters, tome 11, pages 167–172, 1988.

[29] : **J. DOYLE**, **K. GLOVER**, **P. KHARGONEKAR**, and **B. FRANCIS**. «State-space solutions to standard H<sub>2</sub> and H<sub>∞</sub> control problems». IEEE Trans. Autom. Control, tome 34, 1989.

[30] : **G. SALLOM**, « Contribution à la commande robuste de la machine asynchrone à double alimentation », Thèse de Doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 13 Mars 2007.

**Annexe**

### Valeurs singulières et norme $H_\infty$ :

Les valeurs singulières d'une matrice de transfert permettent de généraliser la notion de gain aux systèmes multivariables. Elles permettent également de définir la norme  $H_\infty$  d'un système linéaire.

#### **a) Valeurs singulières d'une matrice de transfert :**

Considérons un système linéaire invariant avec un vecteur d'entrée  $e(t)$  et un vecteur de sortie  $s(t)$  de dimensions respectives  $m$  et  $p$  et soit  $G(s)$  sa matrice de transfert. En réponse à une excitation harmonique  $e(t) = Ee^{j\omega t}$ ,  $E \in \mathbb{C}^m$ , la sortie du système s'écrit :

$$S(t) = G(j\omega)Ee^{j\omega t} \quad (1)$$

Pour un système monovarié, on définit à partir de cette relation le gain du système à la pulsation  $\omega$  par le module  $|G(j\omega)|$ . Dans le cas multivariable, on utilise la notion des valeurs singulières, définies comme les racines carrées des valeurs propres de  $G(j\omega)$  multipliée par sa transconjuguée :

$$\sigma_i(j\omega) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega) G(j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)^T G(j\omega))} \quad (2)$$

$i = 1, \dots, \min(m, p)$

On notera  $\bar{\sigma}(G(j\omega))$  la plus grande valeur singulière et  $\underline{\sigma}(G(j\omega))$  la plus petite :

$$\bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sigma_1(G(j\omega)) \geq \sigma_2(G(j\omega)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(G(j\omega)) \geq 0$$

Remarque : pour un système monovarié, il n'existe qu'une seule valeur singulière, qui est donnée par :

$$\sigma(G(j\omega)) = \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \underline{\sigma}(G(j\omega)) = |G(j\omega)|$$

Quelques propriétés des valeurs singulières sont indiqués ci-dessous où  $A$  et  $B$  sont des matrices complexes de dimension compatible :

- $\bar{\sigma}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ .
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}; \bar{\sigma}_i(\lambda A) = |\lambda| \bar{\sigma}_i(A)$
- $\bar{\sigma}(A+B) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A) \bar{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(A) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A^{-1})}, \underline{\sigma}(A) = \frac{1}{\bar{\sigma}(A^{-1})}$
- $\underline{\sigma}(\lambda A) = |\lambda| \underline{\sigma}(A)$
- $\underline{\sigma}(A+B) \geq \underline{\sigma}(A) + \underline{\sigma}(B)$
- $\bar{\sigma}(A) \underline{\sigma}(B) \leq \bar{\sigma}(AB)$
- $\bar{\sigma}(A) = \max_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$  (amplification maximale)
- $\underline{\sigma}(A) = \min_{x \in \mathbb{C}^m} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

## Annexe

On peut écrire alors:

$$\underline{\sigma}(G(j\omega)) \leq \frac{\|s(t)\|_2}{\|e(t)\|_2} \leq \frac{\|G(j\omega)E(j\omega)\|_2}{\|E(j\omega)\|_2} \leq \bar{\sigma}(G(j\omega))$$

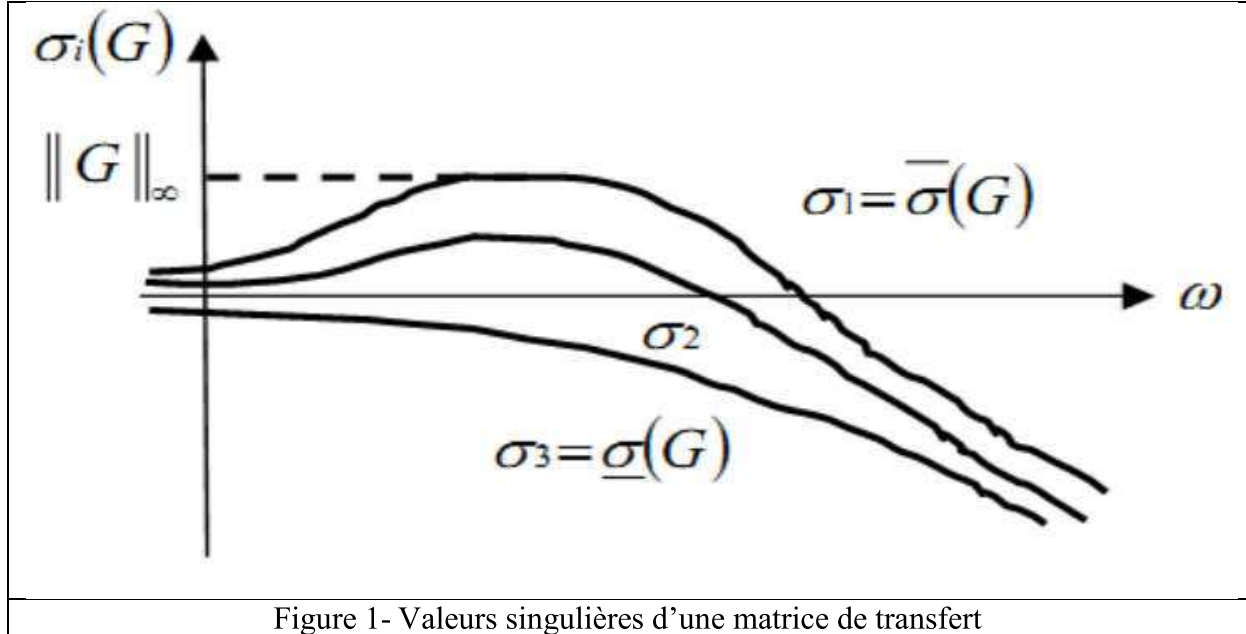


Figure 1- Valeurs singulières d'une matrice de transfert

Toute matrice complexe  $A \in \mathbb{C}^{p \times m}$  admet une décomposition en valeurs singulières, qui s'écrit :

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad \text{si } p = m$$

$$A = V\Sigma W \quad \text{avec } \Sigma = \text{diag}\left[\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\} 0_{p \times (m-p)}\right] \quad \text{si } p < m$$

$$\Sigma = \text{diag}\left[\begin{matrix} \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \\ 0_{(p-m) \times m} \end{matrix}\right] \quad \text{si } p > m$$

Où V et W sont des matrices unitaires :  $VV^H = V^H V = I_p$  et  $WW^H = W^H W = I_m$

### b) Norme $H_\infty$ d'un système linéaire invariant :

Soit un système linéaire invariant (stationnaire) décrit par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3)$$

Avec  $x(t)$  est le vecteur d'état,  $u(t)$  le vecteur d'entrée,  $y(t)$  est le vecteur de sortie, A la matrice d'état, B la matrice d'entrée, C la matrice de sortie et D la matrice de transmission. Avec l'hypothèse des conditions initiales nulles sur le vecteur d'état, la matrice de transfert du système sera de la forme :  $G(s) = (sI - A)^{-1}B + D$ .

Pour toute matrice  $G(s)$  dans  $\text{RH}_\infty$ , on définit une norme, appelée norme  $H_\infty$ , noté  $\|G(s)\|_\infty$ , celle-ci est calculée de la manière suivante :

## Annexe

### ➤ La norme pour les systèmes SISO :

Pour un système monovariante, la norme  $H_\infty$  est le maximum de  $|G(j\omega)|$  qui est représenté par le diagramme de Bode, ce qui est conforme à la définition car un système monovariante n'a qu'une seule valeur singulière

$$\|G(s)\|_\infty = \max |G(j\omega)| = \sigma(G(j\omega))$$

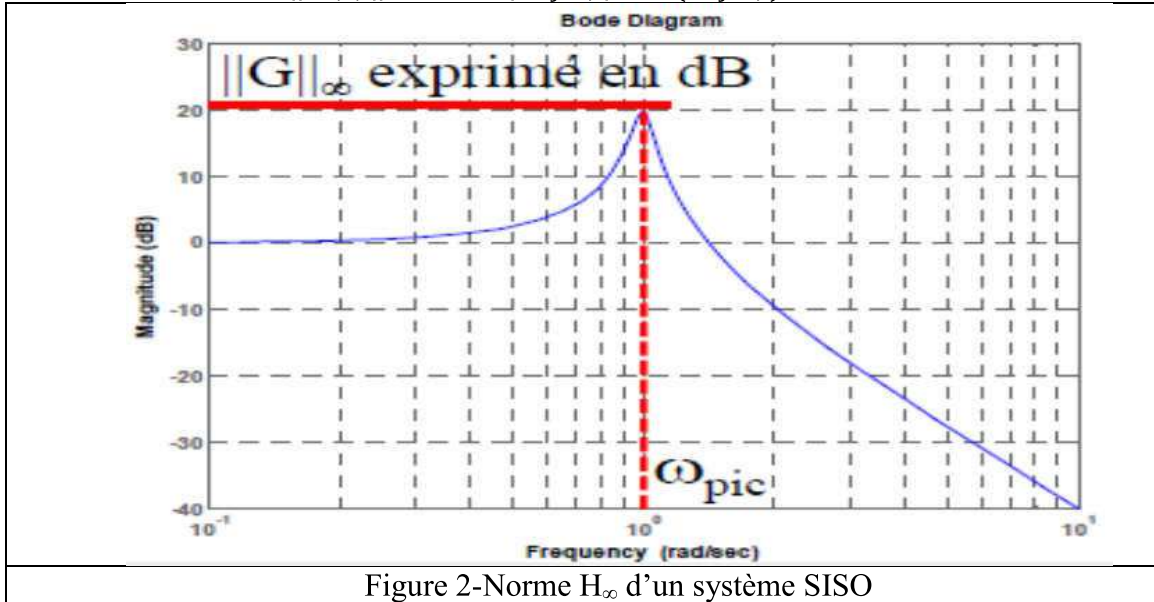


Figure 2-Norme  $H_\infty$  d'un système SISO

### ➤ La norme pour les systèmes MIMO :

Dans le cas multivariable, on montre que cette norme est le maximum de la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert  $G(j\omega)$ , soit:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup \sigma_{\max}(G(j\omega))$$

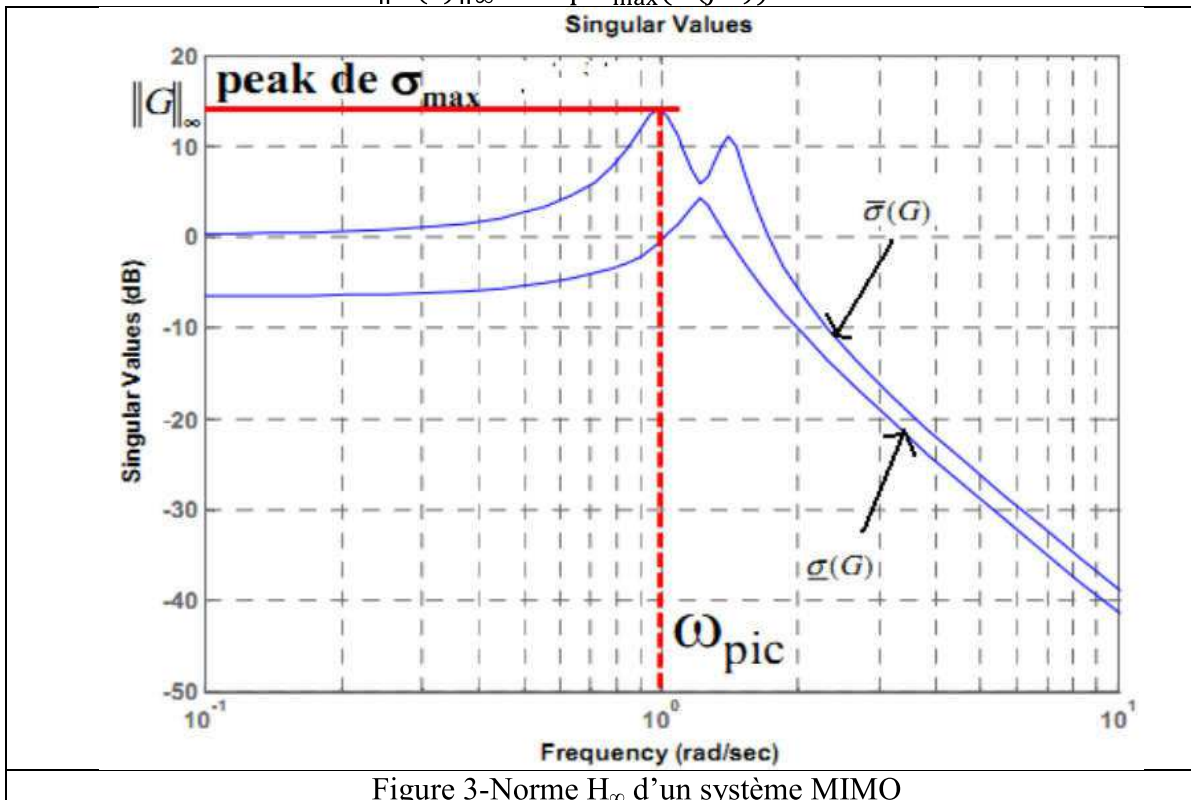


Figure 3-Norme  $H_\infty$  d'un système MIMO

### Propriétés :

- $\forall F, G \in C^p m, \|F(s)G(s)\|_\infty \leq \|F(s)\|_\infty \|G(s)\|_\infty$
- $\forall F, G \in C^p m, \left\| \begin{matrix} F(s) \\ G(s) \end{matrix} \right\|_\infty \geq \sup (\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$
- $\forall F, G \in C^p m, \|F(s) \ G(s)\|_\infty \geq (\|F(s)\|_\infty, \|G(s)\|_\infty)$

Sur le plan algorithmique la norme  $H_\infty$  peut être calculée d'une manière itérative, en recherchant la plus petite valeur de  $\gamma$  pour laquelle la matrice Hamiltonienne  $H(\gamma)$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire. La propriété suivante fournit un majorant  $\gamma$  de la norme  $H_\infty$ :

- Soit un réel positif  $\gamma > \bar{\sigma}(D)$  . Alors  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si la matrice Hamiltonienne :

$$H_\gamma = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}D^TC & \gamma BR^{-1}B^T \\ \gamma C^T S^{-1}C & A^T + C^T DR^{-1}B^T \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} R = D^T D & \gamma^2 I \\ R = DD^T & \gamma^2 I \end{cases}$$

n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

Pour déterminer la norme du système, il suffit alors de rechercher le plus petit  $\gamma$  tel que  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ . Pour cela, on peut effectuer une recherche linéaire sur le paramètre  $\gamma$  en faisant par exemple une la méthode de Dichotomie, et voici les étapes à suivre :

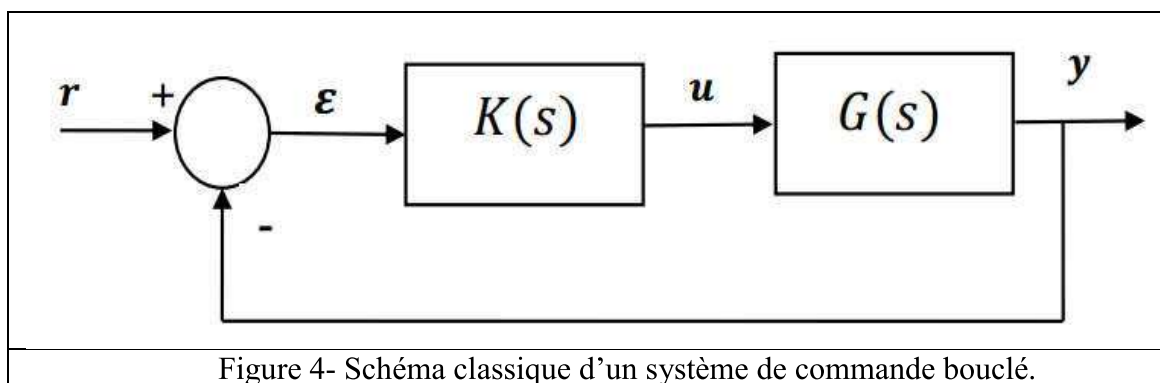
- a. Choix d'un niveau de tolérance et de deux valeurs  $\gamma_{sup}$  et  $\gamma_{inf}$ .
- b. On teste pour  $\gamma = 1/2(\gamma_{sup} + \gamma_{inf})$  Si  $H_\gamma$  n'a pas de pole sur l'axe imaginaire alors  $\gamma_{sup} = \gamma$  sinon  $\gamma_{inf} = \gamma$ .
- c. Si  $(\gamma_{sup} - \gamma_{inf}) > \epsilon$  alors retourner à b, sinon  $\|G(s)\|_\infty = 1/2(\gamma_{sup} + \gamma_{inf})$ .

### Robustesse des systèmes

Un système asservi est robuste s'il reste stable, tout en assurant des bonnes performances, en présence des différents types d'incertitude.

#### ❖ Théorème du petit gain

Le théorème du petit gain présente un résultat extrêmement important pour étudier la stabilité en boucle fermée , il se base sur la notion de norme des systèmes. C'est une méthode plus restrictive mais aussi plus légère à mettre en œuvre, elle donne une condition suffisante facile à tester qui permet de conclure à la stabilité interne du type de la Figure 4



### **Théorème 1 : (théorème du petit gain)**

Etant donné un asservissement à retour unitaire stable en boucle ouverte alors le système en boucle fermée est stable si :  $\|L\|_{\infty} = \max \bar{\sigma}(L(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega$

Où  $\bar{\sigma}$  est la valeur singulière maximale de  $L(j\omega) = K \quad G$  calculée à la pulsation  $\omega$ .

### **Définitions**

- Stabilité nominale : Nous distinguons deux définitions pour la stabilité nominale:
  - La stabilité externe qui exige que toute entrée bornée  $u$  devra produire une sortie bornée  $y$
  - La stabilité interne est plus large et exige que tout signal injecté en n'importe quel point de la boucle génère une réponse bornée en tout autre point.
- Stabilité robuste: La stabilité est dite robuste si, en plus de la nominale, la stabilité de tous les systèmes atteignables par les perturbations est garantie.
- Performances nominales: Un asservissement est performant s'il réagit rapidement, rejette les perturbations et suit avec précision la consigne.
- Performances robustes: Un système bouclé satisfait le critère de robustesse en performances si les conditions de performances nominales sont vérifiées pour toute une classe de modèles de procédés caractérisés par des incertitudes structurées ou non.

### **Résolution du problème $H_{\infty}$ standard par équation de Riccati**

Cette méthode, aussi connue sous le nom d'algorithme de Glover-Doyle, est apparue à la fin des années 1980, et en générale mise en œuvre numériquement sur un ordinateur et elle repose sur la résolution d'une série d'équation de Riccati. Elle reste aujourd'hui la méthode de résolution la plus utilisée et la plus fiable numériquement.

L'équation de Riccati étant donnée par :

$$XA + A^T X - X P X + Q = 0$$

Avec :  $P=P^T$  et  $Q=Q^T$

La solution stabilisante  $X$ , si elle existe, sera une matrice symétrique et tel que  $(A-PX)$  est une matrice stable (ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative). Une telle solution sera notée :

$$X = Ric \left( \begin{array}{c|c} A & P \\ \hline Q & A^T \end{array} \right)$$

### **Hypothèses :**

Dans la présente étude, l'approche choisie pour résoudre le problème  $H_{\infty}$  standard nécessite la vérification d'un certain nombre d'hypothèses.

Hypothèse 1 (H1): La paire  $(A ; B_2)$  est stabilisable et la paire  $(C_2 ; A)$  est détectable.

Cette hypothèse classique de toute méthode utilisant les variables d'état. Elle garantit l'existence d'une loi de commande  $K(s)$  qui stabilise le système en boucle fermée.



## Annexe

Hypothèse 2 (H2) :  $\text{rang}(D_{12}) = m_2$  ; et  $\text{rang}(D_{21}) = p_2$

Ce sont des conditions suffisantes pour assurer que la matrice de transfert du correcteur soit propre.

Hypothèse 3 (H3) :  $\forall w \in \mathbb{C}, \text{rang} \begin{bmatrix} A & jwI_n & B_2 \\ C_1 & & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$ .

Cette hypothèse garantit que le transfert  $P_{z \rightarrow u}(P_{12})$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire.

Hypothèse 4 (H4) :  $\forall w \in \mathbb{C}, \text{rang} \begin{bmatrix} A & jwI_n & B_1 \\ C_2 & & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$ .

Cette hypothèse garantit que le transfert  $P_{y \rightarrow w}(P_{21})$  n'a pas de zéro sur l'axe imaginaire. Il faut noter que la première hypothèse est commune à toutes les méthodes de commande, les autres sont propres à la méthodologie  $H_\infty$ , et ces quatre hypothèses doivent être impérativement vérifiées. Et pour obtenir des expressions plus simple, on introduits les conditions supplémentaires suivantes:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = 0 \\ D_{12}^T(C_1 \ D_{12}) &= (0 \ I_{m_2}) \\ \begin{pmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{pmatrix} D_{21}^T &= \begin{pmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Rappelons que pour un système d'ordre  $n$ , un système d'équation  $x = Ax + B_2u$  est commandable donc stabilisable si la matrice de commandabilité :  $[B_2 \ AB_2 \ \dots \ A^{n-1}B_2]$  est de rang plein. De plus, la paire  $(C_2 ; A)$  est observable, donc détectable. Rappelons aussi que pour un système d'ordre  $n$ , un système d'équation :  $\begin{cases} x = Ax + Bu \\ y = C_2x + Du \end{cases}$  est observable si la

matrice d'observabilité :  $\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2A \\ \vdots \\ C_2A^{n-1} \end{bmatrix}$  est de rang plein.

Il faut noter que, les deux hypothèses passées sont fondamentales. Les trois dernières, quant à elles, sont purement techniques et permettent d'alléger les calculs et surtout de fournir des expressions analytiques relativement simples.

Il est maintenant possible d'écrire le théorème suivant qui permet de trouver un contrôleur pour le problème sous-optimal.

**Théorème 2:** Sous les hypothèses H1 – H4 et les conditions (4), le problème  $H_\infty$  standard a une solution si et seulement si les cinq conditions suivantes sont remplies:

(i) La matrice  $H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2}B_1B_1^T & B_2B_2^T \\ C_1^TC_1 & & A^T \end{bmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire.

## Annexe

---

(ii) Il existe une matrice symétrique  $X_\infty = Ric(H_\infty) \geq 0$ . e.  $A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T X + C_1^T C_1) = 0$

(iii) La matrice  $J_\infty = \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 & C_2^T C_2 \\ B_1 B_1^T & A & \end{bmatrix}$  n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire

(iv) Il existe une matrice symétrique  $Y_\infty = Ric(J_\infty) \geq 0$ . e.  $A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 Y + B_1 B_1^T) = 0$ .

(v)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Où  $\rho(\cdot)$  désigne le module de la plus grande valeur propre (rayon spectral).

Ce théorème nécessite donc la solution de deux équations de Riccati et la dernière condition introduit un lien entre les deux solutions. Enfin la solution du problème standard est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 3 :** Sous les conditions du théorème 2, le correcteur central  $K_c(s)$  stabilisant le système d'une manière interne et satisfait  $\|F_l((P(s), K(s)))\|_\infty < \gamma$  est décrit par la représentation suivante :

$$K_c = \begin{pmatrix} \hat{A}_\infty & Z_\infty Y_\infty C_2^T \\ B_2^T X_\infty & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - B_2 B_2^T X_\infty - Z_\infty Y_\infty C_2^T C_2 \\ Z_\infty &= (I_N - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \end{aligned}$$

La mise en œuvre de cette solution consiste à utiliser tout d'abord les résultats du théorème 2 pour approcher la valeur optimale de  $\gamma$  par Dichotomie (procédure appelée couramment « $\gamma$  -itération »), puis on calcule ensuite le correcteur central en appliquant le théorème 3.