

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE



UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE DEPARTEMENT
DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master
En Fabrication mécanique et technique productique

Thème

**Torsion axisymétrique d'un milieu élastique fissuré dans un matériaux en
utilisant la méthode des éléments finis (ANSYS)**

Proposé et encadré par :

Mr MADANI Fateh

Co-promoteur :

Mr ZEDDAM Lokman

Réalisé par :

LAHRECH Ali
GUERMI Med Rostom

Année universitaire 2022/2023

Remerciements

On remercie DIEU le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire. Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de

Mr MADANI FATEH

et On le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos sincères remerciements pour tous les enseignants et collègues du département de génie mécanique de l'université SAAD DAHLEB.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions

On tient enfin nos sincères remerciements à toutes les personnes qui ont participé et contribué de près ou de loin pour accomplir ce travail.

LISTE DES FIGURES :

Figure 1 Modèles de fissure.....	6
Figure 2 Naufrage du FLARE 16 janvier 1998 au large de Terre Neuve.	8
Figure 3 modes de rupture fragile et ductile	11
Figure 4 présentation d'une rupture par fatigue.....	11
Figure 5 Modes fondamentaux de rupture.....	13
Figure 6 Elément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne	14
Figure 7 Définition du taux de restitution d'énergie G	16
Figure 8 Exemples d'élément à deux dimensions.....	23
Figure 9 Exemples d'élément à deux dimensions.....	24
Figure 10 Elément de référence à deux dimensions.....	26
Figure 11 Eléments de référence triangulaire quadratique à 6 nœuds	28
Figure 12 Eléments de référence rectangulaire quadratique à 8 nœuds	28
Figure 13 Elément treillis (2D).....	32
Figure 14 Géométrie et coordonnées de système.....	38
Figure 15 interface de la création d'un projet.....	39
Figure 16 Module de création géométrique.....	39
Figure 17 interface du Design Modeler	40
Figure 18 les étapes de Création de demi espace.....	40
Figure 19 les étapes de Création de demi-espace.....	41
Figure 20 les étapes de Création de demi-espace	41
Figure 21 géométrie de demi espace	42
Figure 22 les étapes de Création de disque.....	42
Figure 23 les étapes de Création de disque.....	43
Figure 24 Définition de la géométrie	43
Figure 25 choix la méthode de maillage.....	44
Figure 26 création le dimensionnement de maillage.....	44
Figure 27 choix la taille des éléments	45
Figure 28 choix la taille des éléments	45
Figure 29 création de la fissure	45
Figure 30 choix type de fissure.....	46
Figure 31 créer le plan de fissure	46
Figure 32 Les détails de système coordonnées	47
Figure 33 Les détails de système coordonnées 2	47
Figure 34 Les détails de fissure semi elliptique.....	48
Figure 35 Les détails de fissure semi elliptique 2	49
Figure 36 Modèle des fissures	49
Figure 37 création le dimensionnement de maillage.....	50
Figure 38 Détails de dimensionnement	50
Figure 39 Nouveau maillage du modèle.....	51
Figure 40 Définir le support fixe.....	51
Figure 41 Insertion la rotation du disque.....	52
Figure 42 Détails de déplacement distant.....	52
Figure 43 Résolution	53
Figure 44 Contour de déplacement	53
Figure 45 Contour de la contrainte équivalente	54
Figure 46 Variation du facteur d'intensité de contrainte normalisé	55
Figure 47 Déplacement tangentiel u_{θ}^1 versus $\rho=r/b$ pour divers $\zeta=z/b$, $0 \leq z \leq h$	56
Figure 48 Contrainte de cisaillement $\tau_{\theta z}^1$ versus $\rho=r/b$ pour divers z/b , $z \leq h$	56

Figure 49	une plaque contenant deux fissures	59
Figure 50	Défine le type d'analyse	60
Figure 51	Défine élément Type	61
Figure 52	Définir les propriétés de section.....	61
Figure 53	Définir les propriétés de section.....	62
Figure 54	Création de la géométrie	62
Figure 55	Créer section	63
Figure 56	Créer une fissure.....	65
Figure 57	Soustraire les fissures de la forme	66
Figure 58	Créer un rectangle	67
Figure 59	Créer le point clé de concentration (point fissure)	68
Figure 60	Identifier plaque	69
Figure 61	Identifier rectangle.....	71
Figure 62	Meshing	72
Figure 63	Division la forme.....	72
Figure 64	Appliquer des charges (déplacement).....	73
Figure 65	Appliquer des charges (Rot y).....	74
Figure 66	L'analyse a commencé	74
Figure 67	Activer le système de coordonnées	75
Figure 68	définir le nom du chemin	76
Figure 69	Déterminer le facteur de contrainte	76
Figure 70	Affiche les valeurs KI, KII, KIII	77
Figure 71	Créer le point clé de concentration (fissure 2)	77
Figure 72	Affiche les valeurs KI, KII, KIII	78
Figure 73	Nodal solu	78
Figure 74	Définie le chemin	85
Figure 75	Plot Path on graph	87
Figure 76	Liste Path Item	87
Figure 77	Graphe de déplacement de la 1ère région	88
Figure 78	Graphe de déplacement de la 2ème région	88
Figure 79	Graphe de déplacement de la 3ème région	89
Figure 80	Graphe de contrainte de la 1ère région	90
Figure 81	Graphe de contrainte de la 2ème région	90
Figure 82	Graphe de contrainte de la 3ème région	91

SOMMAIRE :

INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : LA MECANIQUE DE LARUPTURE.....	5
1 INTRODUCTION.....	6
2 APERÇU HISTORIQUE	7
3 LES TYPES DE RUPTURE	10
3.1 LA RUPTURE DUCTILE.....	10
3.2 LA RUPTURE FRAGILE.....	10
3.3 LA RUPTURE PAR FATIGUE	11
4 LE CRITERE D'IRWIN	12
5 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE-APPROCHE LOCALE	13
5.1 ETAT DE CONTRAINTE EN FRONT DE FISSURE	13
5.2 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (FIC)	15
6 ASPECTS ENERGETIQUES- APPROCHE GLOBALE	16
6.1 RELATION ENTRE G ET K.....	17
7 COCCLUSION :.....	17
CHAPITREII : METHODE DES ELEMENTS FINIS	18
1 Introduction à la méthode des éléments finis :.....	19
2 L'historique de la méthode des éléments finis :.....	19
3 Présentation de la méthode des éléments finis :.....	20
4 Principe de la méthode des éléments finis :.....	21
5 Formes classique des éléments :	22
6 Principe de l'approximation par Elément fini bi dimensionnel (2D) :.....	22
7 Construction des fonctions d'interpolation :.....	26
8 Elément de référence :.....	26
9 Construction des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence :.....	27
10 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis :	32
11 Utilisation d'un logiciel élément fini :.....	35
12 COCCLUSION :.....	36
CHAPITRE III : TORSION AXISYMETRIQUE D'UN MILIEU ELASTIQUE FISSURE PAR UN DISQUE RIGIDE SUR ANSYS WORKBENCH	37
1 Introduction.....	38
2 Les étapes de simulation numérique sur Ansys workbench	38
2.1 Création du projet.....	38
2.1.1 Création de la demi espace	40
2.1.2 Création de disque.....	42
2.1.3 Le maillage du modèle	44
2.1.4 Création de la fissure.....	45

2.1.5	Établir les paramètres d'analyse	51
2.1.6	Résolution.....	53
3	Résultats et interprétations.....	54
	CHAPITRE VI : PROCESSUS DE MODELISATION SUR ANSYS	58
1	INTRODUCTION.....	59
2	PROCEDURE SUR ANSYS POUR MODELISER UNE INTERACTION ENTRE FISSURE ET INCLUSION.....	59
2.1	DEFINE LE TYPE D'ANALYSE.....	60
2.2	DEFINE ELEMENT TYPE.....	60
2.3	DEFINIR LES PROPRIETES DES MATERIAUX.....	61
2.4	CREATION DE LA GEOMETRIE :.....	62
2.4.1	DEFINIR EPAISSEUR DE CETTE PLAQUE :.....	62
2.4.2	CREER LA SECTION :.....	63
2.4.3	CREER LES DEUX FISSURES :	63
2.4.3.1	DEFINIR DES POINTS CLES :.....	63
2.4.3.2	DEFINIR DES SEGMENTS DE LIGNE :.....	64
2.4.3.3	CREER LA FORME :	64
2.4.3.4	SOUSTRAIRE LES FISSURES DE LA FORME :.....	66
2.4.4	CREER UN RECTANGLE :.....	66
2.5	DIVISION DE LA FORME :.....	68
2.5.1	CREER LE POINT CLE DE CONCENTRATION (POINT FISSURE 1) :.....	68
2.5.2	IDENTIFIER LE MATERIAU :.....	68
2.5.2.1	IDENTIFIER PLAQUE :.....	69
2.5.3	DIVISION DE LA FORME :.....	70
3	APPLIQUER DES CHARGES	73
4	L'ANALYSE A COMMENCE.....	74
5	ANALYSE DIMENSIONNELLE	75
5.1	ZOOEZ SUR LA ZONE DU FOND DE FISSURE :.....	75
5.1.1	ACTIVER LE SYSTEME DE COORDONNEES :.....	75
5.1.2	DETERMINER LE CHEMIN DE FISSURE :.....	76
5.1.3	DETERMINER LE FACTEUR DE CONTRAINTE MODE I AL'AIDE DE KCALC 76	
5.1.4	CREER LE POINT CLE DE CONCENTRATION (POINT FISSURE 2) :.....	77
5.1.5	DETERMINER LE FACTEUR DE CONTRAINTE MODE I AL'AIDE DE KCALC 78	
6	SOLUTION	78
7	CONVERGENCE.....	79
	CONCLUSION GENERALE.....	92

Références bibliographiques.....94

LISTE DES TABLEAUX:

Table 1 des points fissure 164
Table 2 des points fissure 264
Table 3 FIC en fonction de la distance entre fissure 1 et fissure 281
Table 4 des chemins.....84

RESUME

Dans ce travail, nous avons étudié le problème de torsion axiale d'un milieu élastique fissuré. Le code de compte ANSYS a été utilisé pour le calcul. L'aspect potentiel critique de la distance entre les deux fissures, les ailles de la fissure et leurs rapports. Le facteur d'intensité de contrainte étant le paramètre utilisé dans ce cas. La variance du facteur de déplacement, les contraintes et la sévérité de la contrainte sont données dans certains cas particuliers du problème.

Mots clés : méthode élément fini / fissure / facteur d'intensité de Contrainte / torsion axiale.

ABSTRACT

In this work, we have studied the problem of axial torsion of a cracked elastic medium. The ANSYS account code was used for the calculation. The critical potential aspect of the distance between the two cracks, the sides of the crack and their ratios. The stress intensity factor being the parameter used in this case. The variance of the displacement factor, the constraints and the severity of the constraint are given in some particular cases of the problem.

Keywords: finite element method / crack / Stress intensity factor / axial torsion.

ملخص

في هذا العمل ، درسنا مشكلة الالتواء المحوري لوسط مرن متصدع. تم استخدام كود حساب ANSYS للحساب. الجانب المحتمل الحرج للمسافة بين الشقوق وجانبي الكراك ونسبها. عامل شدة الإجهاد هو المعلمة المستخدمة في هذه الحالة. يتم إعطاء تباين عامل الإزاحة والقيود وشدة القيد في بعض الحالات الخاصة للمشكلة.

الكلمات المفتاحية: طريقة العناصر المحدودة / الكراك / عامل شدة الإجهاد / الالتواء المحوري.

INTRODUCTION GENERALE

Les problèmes liés à la torsion d'un milieu élastique constituent un domaine d'étude important dans les domaines de la géomécanique, du génie civil et de la mécanique appliquée. Ce sujet suscite un grand intérêt en raison de ses implications théoriques et pratiques dans des domaines tels que les turbines, les tuyaux et de nombreuses applications industrielles. En outre, l'étude de ces problèmes peut également améliorer notre compréhension du comportement des fondations sous des charges externes.

Dans le domaine de l'ingénierie ces problèmes, où les problèmes d'interaction structure-milieu sont courants, les fondations sont généralement modélisées à l'aide d'inclusions de formes circulaires, en bande, rectangulaires ou arbitraires. De nos jours, les matériaux fissurés jouent un rôle essentiel dans l'ingénierie géomécanique et peuvent entraîner divers défauts à l'intérieur des composants tels que des fissures et des déformations [1]. Ces problèmes sont également pertinents dans de nombreuses applications industrielles, où les ingénieurs sont confrontés à l'analyse des contraintes de corps tridimensionnels présentant une géométrie et des charges symétriquement axiales. Les exemples de tels problèmes incluent les disques d'imprimante et de turbine, les tubes, les arbres et les éléments de machine présentant des géométries axisymétriques. Des domaines spécifiques d'application englobent le forage de fondations, les essais in situ en géotechnique, la mécanique des composites et les conceptions mécaniques.

La problématique de la torsion d'un milieu élastique infini par une inclusion rigide enfoncée a été étudiée par Selvadurai [2,3]. Ses résultats reposent sur la notion de rigidité à la rotation et à la translation du disque rigide intégré. Le problème de torsion d'un demi-espace élastique a été initialement examiné par Reissner et Sagoci [4]. Ils ont étudié l'interaction statique entre un disque rigide et un demi-espace élastique isotrope, en obtenant la solution à l'aide des coordonnées sphéroïdales. Sneddon [5] a résolu le même problème en utilisant une méthode différente, basée sur les transformations de Hankel, réduisant ainsi le problème à une paire d'équations intégrales duales. Collins [6] a abordé le problème de torsion d'un demi-espace élastique en supposant que le déplacement en chaque point du demi-espace est dû à une distribution de sources d'ondes sur la surface libre en contact avec le disque. Gladwell [7] a donné la solution du problème des vibrations de torsion forcée d'une couche élastique d'épaisseur finie, avec une face inférieure soit libre de contraintes, soit rigidement fixée. Pak et Saphores [8] ont proposé une formulation analytique pour le problème général de torsion d'un disque rigide immergé dans un demi-espace isotrope. De plus, Bacci et Bennati [9] ont étudié la torsion d'un disque rigide circulaire adhérent à la surface supérieure d'une couche élastique fixée sur un support indéformable. Plus récemment, Singh et al. [10] ont examiné la torsion d'un demi-espace isotrope non homogène par la rotation d'une partie

circulaire de sa surface limite. Cai et Zue [11] ont discuté des vibrations de torsion d'un disque collé à un poro-élastique multicouche.

D'autres chercheurs ont également étudié les oscillations de torsion forcées à l'intérieur de solides multicouches. Yu [12] a étudié les oscillations de torsion forcées dans un solide multicouche. Il a utilisé la fonction élastodynamique de Green du centre de rotation et une méthode de charge ponctuelle pour résoudre le problème. Pal et Mandal [13] ont examiné les oscillations de torsion forcées d'un demi-espace élastique transversalement isotrope sous l'action d'un disque rigide interne. Un problème similaire, impliquant une rotation bascule, a été résolu ultérieurement par Ahmadi et Eskandari [14]. Ils ont utilisé une fonction de Green appropriée pour formuler le problème des valeurs aux limites mixtes sous la forme d'une équation intégrale double. Tous ces problèmes reposent sur la théorie de la transformation intégrale de Hankel afin de formuler le problème des valeurs aux limites mixtes sous forme de systèmes d'équations intégrales doubles. La solution correspondante est ensuite obtenue à partir d'une équation intégrale de type Fredholm. La torsion des couches élastiques contenant des fissures circulaires a également été étudiée par plusieurs chercheurs. Sih et Chen [15] ont examiné le problème d'une fissure circulaire dans un composite stratifié soumis à une contrainte de torsion uniforme. Les champs de déplacement et de contrainte dans tout le composite ont été obtenus en résolvant une équation intégrale de Fredholm standard de deuxième type. Low [16] a étudié les effets des défauts incrustés, tels que des inclusions ou des fissures, dans un demi-espace élastique soumis à des déformations de torsion. Les équations intégrales de Fredholm correspondantes ont été résolues numériquement en utilisant une méthode d'approximation par quadrature. Dhawan [17] a utilisé une méthode similaire pour résoudre le problème d'un disque rigide fixé à un demi-espace élastique avec une fissure interne. Basu et Mandal [18] ont traité la charge de torsion sur une fissure en forme de penny dans une couche élastique prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques en utilisant les transformations de Hankel et de Laplace, avec inversion numérique de la transformée de Laplace. Des travaux récents de Madani et Kebli [19] ont abordé un problème similaire, celui d'une fissure en forme de penny à l'intérieur d'un matériau élastique homogène ayant un plan de symétrie, soumis à une torsion axisymétrique par deux disques rigides circulaires situés de manière symétrique dans le milieu élastique.

Le travail est structuré de la manière suivante. . Le deuxième chapitre donne un aperçu succinct de la mécanique de la rupture, en mettant particulièrement l'accent sur les modes de rupture et les facteurs d'intensité de contrainte.

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, le maillage est une étape cruciale qui consiste à diviser le domaine d'étude en éléments géométriques plus petits afin de résoudre numériquement les équations différentielles ou intégrales qui décrivent le problème physique. Le troisième chapitre de votre ouvrage aborde donc les différents éléments utilisés dans le maillage.

Dans le quatrième chapitre de notre travail, l'accent est mis sur la résolution des problèmes proposés qui impliquent une fissure circulaire à l'intérieur d'un matériau élastique homogène dans le plan de symétrie, soumis à une torsion axisymétrique par un disque rigide circulaire attaché symétriquement à la surface dans le premier problème. Le disque tourne avec un angle donné dans une direction spécifique autour de l'axe passant par son centre. La présence de la fissure circulaire parallèle au plan du disque affaiblit le matériau. Dans le second problème la charge est appliquée sur la fissure.

Pour résoudre ces problèmes, la méthode des éléments finis peut être utilisée. La géométrie du domaine étant axisymétrique, la modélisation peut être réduite à une seule section transversale du matériau.

Ce travail se termine par les résultats les plus importants dans la conclusion générale.

***CHAPITRE I : LA MECANIQUE
DE LARUPTURE***

1 INTRODUCTION

La mécanique de la rupture est une discipline relativement récente initiée par Griffith au début du vingtième siècle ([4]). La naissance de cette discipline a été motivée par l'amélioration constante des techniques de détection des défauts dans les structures. En effet, cette amélioration a mis en évidence la présence de fissures et de défauts impossibles à éliminer. Par conséquent, le besoin de quantifier la nocivité de ces fissures est devenu primordial.

La mécanique de la rupture est donc la quantification de la nocivité des fissures. C'est à dire introduire des quantités permettant d'évaluer le danger que représentent ces fissures, et introduire également des critères de propagation.

Une fissure est modélisée par deux surfaces, appelées faces (ou lèvres), dont la courbe d'intersection est appelée front. En deux dimensions, les deux surfaces se réduisent à deux lignes se joignant en un point appelé pointe (Figure 1.1). Nous supposons que les faces (ou lèvres) de la fissure sont libres de contraintes. Cette hypothèse fondamentale veut dire :

Nous supposons que les faces (ou lèvres) de la fissure sont libres de contraintes. Cette hypothèse fondamentale veut dire :

Primo, Nous prenons Seulement les fissures ouvertes, sans contact entre les lèvres. Ceci exclut le cas des fissures en compression.

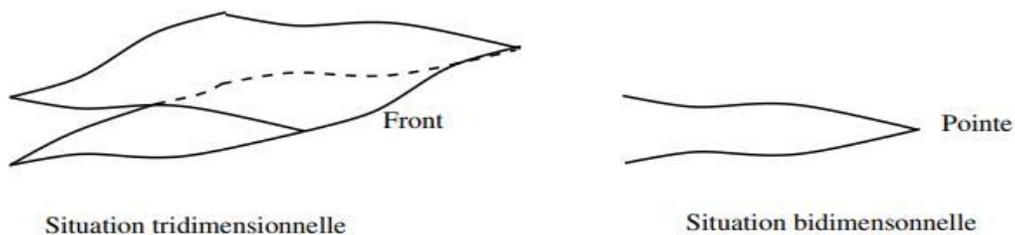


Figure 1 Modèles de fissure

Nous négligeons les interactions existantes au voisinage du front, dues aux interactions atomiques. Cette approximation est raisonnable car la zone d'interaction est infinitésimale (de l'ordre des distances interatomiques).

Il existe deux types de rupture : fragile et ductile. Nous nous intéressons au premier type. Dans la rupture fragile, la plasticité est confinée au voisinage du front de fissure, le reste de la structure est dans le domaine élastique. La plasticité est donc négligée et toute la structure est considérée élastique. Cette hypothèse est valable pour les matériaux fragiles (verre, céramique, métaux à basse température...).

La modélisation complète de la rupture en trois dimensions est très difficile. Certains aspects de cette modélisation sont encore dans le stade de la recherche. Par conséquent, nous nous contenterons d'une étude en deux dimensions, valable dans beaucoup de cas pratiques. Deux cas seront traités : élasticité plane et élasticité anti-plane.

2 APERÇU HISTORIQUE

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. Cette dernière constitue le défaut majeur qui pilote la rupture pouvant déboucher à la ruine.

Le coût des accidents liés aux ruptures catastrophiques des structures jusqu'à la fin des années quatre-vingt du siècle dernier représente, d'après une étude économique [Zeg-2003], près de 4% du produit national brut (PNB) dans les pays industrialisés. D'après la même étude, on pourrait réduire ce coût d'environ 30% si on appliquait correctement les concepts connus de la mécanique de la rupture d'une part, et de 25% supplémentaires par le développement de recherches dans le domaine de la rupture d'autre part. La pertinence de la maîtrise d'une telle science est due à l'importance des incidents liés à la rupture et à la délicatesse de la prévention de leurs risques.

Par gros temps, le « FLARE » s'est brisé en deux. Vingt et un membres de l'équipage ont péri et quatre ont survécu. Le gasoil qui s'est échappé n'a pu être récupéré et s'est dispersé sur une grande superficie, causant une catastrophe écologique en mer.



Figure 2 Naufrage du FLARE 16 janvier 1998 au large de Terre Neuve.

On distingue deux causes majeures provoquant la rupture des structures :

- Une négligence dans la conception, dans la construction ou dans l'utilisation de la structure qui pourrait être évitée si la structure avait été bien dimensionnée avec un choix de matériaux adapté et un chargement correctement évalué.
- L'utilisation d'un nouveau matériau ou d'un nouveau procédé, qui peut provoquer une rupture inattendue où la prévention de la rupture est plus délicate ; en effet lorsqu'on utilise un nouveau matériau ou un nouveau procédé, il Ya souvent un certain nombre de facteurs que le concepteur ne maîtrise pas toujours.

Eviter la rupture des édifices et des structures est depuis longtemps une préoccupation pour l'homme. Les concepteurs des structures de l'Egypte des pharaons (pyramides) ou ceux des civilisations qui leurs ont succédé (romaine, perse, musulmane, ...) nous ont laissé des édifices que l'on peut contempler, prouvant bien qu'ils avaient le souci d'éviter la ruine des structures. Mais comme les structures anciennes de pierre, de brique ou de mortier étaient conçues de telle sorte à n'avoir que des contraintes en compression, elles ont autant résisté car le risque de rupture par fissuration était très faible en l'absence de la traction contribuant directement à l'ouverture des fissures. Le problème de la rupture est actuellement plus crucial avec le développement de structures complexes lié au progrès technologique utilisant des matériaux travaillant en traction tels que les aciers, les alliages métalliques et les composites. Les avancées dans la connaissance en mécanique de la rupture ont permis de mieux prévenir le risque de rupture.

La première vraie interprétation qualitative de la rupture est exposée en 1920 par Griffith [**Gri-1920**]qui établit une relation directe entre la taille du défaut et la contrainte de rupture .S'appuyant sur les travaux de Inglis [**Ing-1913**]au début du 20^{ème}, Griffith appliqua l'analyse des contraintes

autour d'un trou elliptique à la propagation instable d'une fissure. Il formule ainsi à partir du premier principe de la thermodynamique, une théorie de la rupture basée sur la stabilité de la fissure uniquement pour les matériaux fragiles, ne tenant pas compte de la dissipation d'énergie due à la plastification. Il a fallu attendre les travaux d'Irwin [Irw1948- Irw1949] qui proposa une modification de la théorie de Griffith en incluant justement dans le bilan énergétique, l'énergie due à la plastification, pour que l'approche de Griffith soit applicable aux matériaux ductiles .

Irwin [Irw-1956], avec un groupe de chercheurs dans les laboratoires de la marine américaine, développa en 1956 le concept de taux de restitution d'énergie à partir toujours de la théorie de Griffith mais sous une forme facilement exploitable par les concepteurs de structures. En 1957, s'appuyant sur les travaux de Westergaard [Wes-1939] et [Irw-1956], montra que les déplacements et les contraintes au voisinage de l'extrémité d'une fissure peuvent être décrits à l'aide d'un paramètre unique relié aux taux de restitution d'énergie. Ce paramètre issu de la mécanique linéaire de la rupture, est appelé *le facteur d'intensité de contrainte* (FIC). Le concept de FIC fut également utilisé par Paris [Par-1963] afin de décrire la propagation des fissures en remplaçant la notion d'endurance par la notion de fatigue pour une meilleure prédiction des durées de vie des fissures.

La période entre 1960 et 1980 vit une intensification des recherches sur la rupture avec deux écoles concurrentes. D'une part les tenants de l'approche utilisant la mécanique linéaire de la rupture et d'autre part ceux qui s'intéressaient essentiellement à la plastification qui se développe à l'extrémité d'une fissure. La mécanique linéaire de la rupture cesse d'être valable lorsqu'une plastification importante précède la rupture. Pour tenir compte de l'effet de cette plastification sur les champs de contraintes et de déplacements à l'extrémité d'une fissure, plusieurs auteurs comme Irwin [Irw-1962], Dugdale [Dug-1960], et Barenblatt [Bar-1962] proposèrent ce qu'on appelle une correction de zone plastique. La taille de la fissure est augmentée de cette zone plastique pour retrouver les champs de contraintes élastiques décrits par le FIC.

Actuellement, on s'intéresse en plus au comportement viscoplastique et viscoélastique.

Généralement, le comportement viscoplastique est observé à température élevée lorsque les phénomènes de fluage deviennent importants.

Cependant beaucoup de mécanismes de rupture restent toujours mal connus lorsqu'on utilise de nouveaux matériaux ou de nouveaux procédés.

L'apparition des matériaux composites a de nouveau permis l'utilisation des concepts de la mécanique linéaire de la rupture pour décrire le comportement de ces matériaux.

Dans cette étude, nous nous limitons à la mécanique linéaire de la rupture.

3 LES TYPES DE RUPTURE

On distingue essentiellement 3 types de rupture : la rupture fragile, la rupture ductile et la rupture par fatigue :

3.1 LA RUPTURE DUCTILE

. La ductilité est liée à une plasticité importante. En règle générale, la rupture résulte de la germination, croissance et coalescence de cavités amorcées sur des inclusions, précipités ou autres défauts à l'échelle microscopique. Ces cavités ont pour origine la décohésion inclusion/matrice ou la rupture de l'inclusion. Leur croissance résulte de la déformation plastique, et leur coalescence s'accompagne d'un phénomène d'instabilité plastique local. La surface de rupture résultant de ces mécanismes présente un aspect de cupules au fond desquelles on peut généralement observer l'inclusion d'origine. En présence d'un défaut de type fissure, ces trois étapes de la rupture ductile se succèdent en avant du front, là où la déformation plastique est importante, impliquant ainsi une avancée continue du défaut. [5]

3.2 LA RUPTURE FRAGILE

Du point de vue microscopique, la rupture fragile se caractérise par un processus de rupture localisé essentiellement à l'intérieur des grains (rupture transgranulaire), le long de plans atomiques bien définis

Il en résulte, à l'examen micrographique, un faciès de rupture brillant : la surface de rupture est constituée de petits fragments de surfaces planes réfléchissant la lumière, [5]

Du point de vue macroscopique, la rupture fragile se caractérise par une plasticité dite connée, c'est-à-dire très peu étendue et limitée au voisinage immédiat de la pointe ou du front de fissure [4]. Cette caractéristique a permis le développement d'une théorie élaborée dans le cadre de l'élasticité pure. Si l'on enregistre la courbe effort-déplacement d'une structure fissurée.

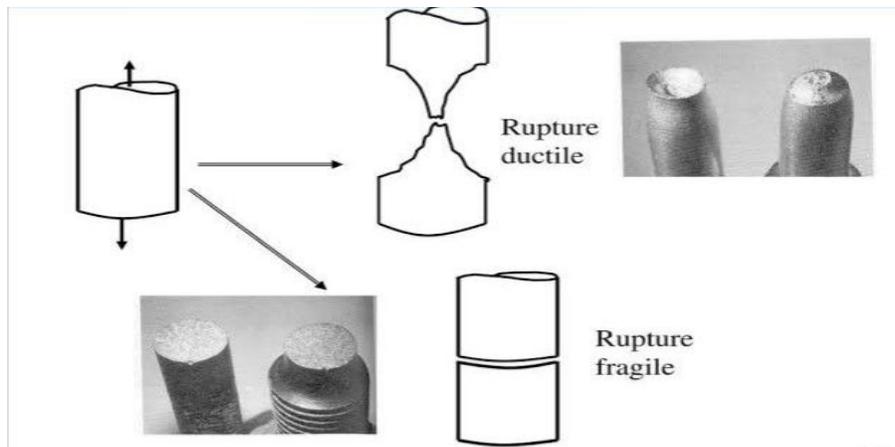


Figure 3 modes de rupture fragile et ductile

3.3 LA RUPTURE PAR FATIGUE

La rupture par fatigue se présente dans les structures soumises à des chargements cycliques (pièces tournantes). On constate qu'à chaque cycle de chargement, la fissure avance d'une petite longueur, ceci même pour des chargements largement inférieurs au seuil de rupture brutal. Il en résulte un aspect strié de la surface de rupture (chaque strie correspond à un cycle). La plasticité est généralement peu importante en fatigue. [4]

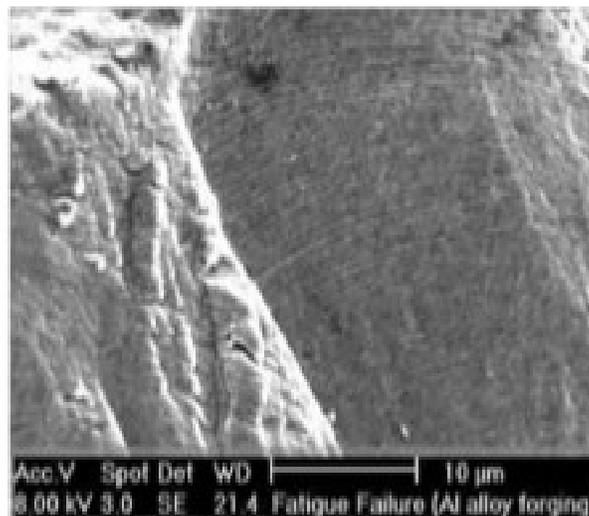


Figure 4 présentation d'une rupture par fatigue

4 LE CRITERE D'IRWIN

Le critère d'Irwin, également connu sous le nom de critère de contrainte-intensité de contrainte (SIF), est un critère utilisé en mécanique de la rupture pour prédire la propagation des fissures dans les matériaux. Il a été développé par le scientifique américain George Irwin dans les années 1950.

Le critère d'Irwin repose sur le concept de facteur d'intensité de contrainte (K), qui mesure la magnitude des contraintes à l'extrémité d'une fissure dans un matériau. Le facteur d'intensité de contrainte est lié à la taille et à la forme de la fissure, ainsi qu'aux conditions de chargement.

Selon le critère d'Irwin, la propagation d'une fissure se produit lorsque le facteur d'intensité de contrainte à l'extrémité de la fissure atteint une valeur critique, appelée facteur d'intensité de contrainte critique (K_c). Lorsque le facteur d'intensité de contrainte dépasse cette valeur critique, la fissure se propage de manière instable.

Le critère d'Irwin peut être exprimé mathématiquement comme suit :

$$K \geq K_c$$

Si le facteur d'intensité de contrainte (K) dépasse le facteur d'intensité de contrainte critique (K_c), la fissure se propagera. Sinon, la fissure restera stable.

Le critère d'Irwin a été utilisé pour étudier la propagation des fissures dans une variété de matériaux, y compris les métaux, les céramiques et les polymères. Il a permis de mieux comprendre les mécanismes de rupture et de développer des modèles de prédiction de la durée de vie en fatigue des structures.

Il convient de noter que le critère d'Irwin est basé sur des hypothèses simplifiées et ne prend pas en compte tous les aspects complexes de la propagation des fissures. Par conséquent, d'autres critères et modèles plus avancés ont été développés pour tenir compte de divers facteurs influençant la rupture, tels que la plasticité, la taille de la fissure, la présence d'environnement corrosif, etc.

5 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE-APPROCHE LOCALE

D'un point de vue macroscopique, on peut considérer trois modes fondamentaux de rupture [Rec-1995]. La fissure représente des discontinuités du champ de déplacement. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois mouvements appelés modes fondamentaux de rupture.

- Mode I: « mode par ouverture » ; Mode d'ouverture de la fissure ou le chargement est perpendiculaire au plan de la fissure.
- Mode II: « cisaillement plan » ; mode de cisaillement plan ou le chargement est parallèle au plan et perpendiculaire au front de la fissure.
- Mode III: « cisaillement anti-plan » mode de cisaillement anti plan ou le chargement est parallèle au plan et au front de la fissure.

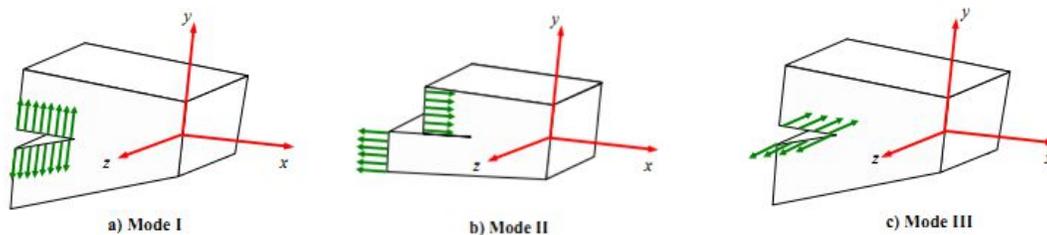


Figure 5 Modes fondamentaux de rupture

Le mode I est le mode principal de rupture. Il concerne les cas de chargement les plus importants et les plus dangereux.

5.1 ETAT DE CONTRAINTE EN FRONT DE FISSURE

On peut distinguer deux approches planes: l'état plan de contrainte et l'état plan de déformation (figure 3).

En état plan de contraintes nous avons :

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0 \quad (I.1)$$

L'état plan de déformation est défini lorsque :

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \quad (I.2)$$

L'état plan de déformation peut avoir lieu au centre d'une pièce épaisse, où l'axialité des contraintes est importante. Dans la suite de l'étude, nous supposons un état de déformation plan

d'après IRWIN [IRW-1949], les champs de contraintes et de déplacements au voisinage de la pointe de fissure s'expriment dans le cadre d'élasticité et en déformation plane par les relations suivantes pour les différents modes. Les facteurs K_I, K_{II} et K_{III} sont exprimés en $\text{MPa}\sqrt{m}$. Ils sont appelés facteurs d'intensités de contraintes. Ces paramètres dépendent uniquement des conditions de chargement et de géométrie.

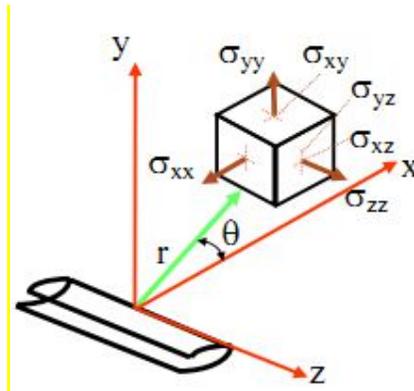


Figure 6 Elément de volume au voisinage d'un front de fissure rectiligne

En mode I :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{I. 3}) \\ u &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ w &= 0 \end{aligned}$$

En mode II :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x - \sigma_y), \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 v &= \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left[-1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \\
 w &= 0
 \end{aligned} \tag{I.4}$$

En mode III :

$$\begin{aligned}
 \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \tau_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\
 w &= \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_x &= \sigma_y = \sigma_z = u = v = 0
 \end{aligned} \tag{I.5}$$

ν est le coefficient de poisson et μ est le module de cisaillement avec : $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

5.2 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE (FIC)

Le facteur d'intensité de contrainte est un paramètre couramment utilisé pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la tête de la fissure. Il permet de déterminer complètement les champs de contraintes où de déplacement au voisinage de la fissure contenue dans une structure considérée élastique.

Il est possible de trouver le facteur d'intensité de contrainte pour le mode $\alpha = I, II, III$ par :

$$K_\alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{ij} \tag{I.6}$$

Une autre alternative permet de calculer ces facteurs.

Si nous connaissons les discontinuités des composantes des déplacements $[u]$, $[v]$, et $[w]$ des lèvres de la fissure (approche cinématique), on peut déterminer les FIC des différents modes en un point donné du front de fissure M par les expressions suivantes [LEM-2001]:

$$K_I(M) = \lim_{rx \rightarrow 0} (\sigma_y \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [\nu] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

$$K_{II}(M) = \lim_{rx \rightarrow 0} (\tau_{xy} \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [u] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right) \quad (I.7)$$

$$K_{III}(M) = \lim_{rx \rightarrow 0} (\tau_{yz} \sqrt{2\pi r}) = \left(\frac{E}{8(1-\nu^2)} [w] \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right)$$

Il faut

noter que les expressions restent toujours valables en déformation plane.

6 ASPECTS ENERGETIQUES- APPROCHE GLOBALE

Griffith (1920) a été le premier à étudier la rupture d'un point de vue énergétique GRIFFITH [GRI-1920] constata que, lorsqu'une fissure est introduite dans une plaque de matériaux élastique ou qu'une fissure se propage, deux phénomènes se produisent, en rapport avec la quantité d'énergie dans la plaque.

-Relaxation des contraintes autour de la fissure, provoquant une diminution de l'énergie potentielle.

-Création de nouvelles surfaces de rupture

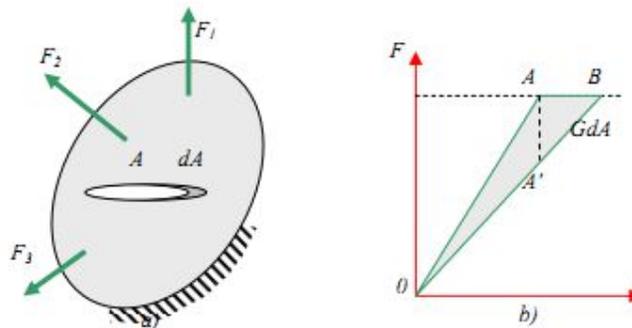


Figure 7 Définition du taux de restitution d'énergie G

La création des nouvelles surfaces de rupture est un processus qui absorbe de l'énergie. Il s'agit de quantifier ces processus énergétiques.

Griffith suppose l'existence d'une énergie de liaison positive par unité de surface γ , Griffith étudie alors l'éventualité de la propagation quasi statique, et sous chargement constant, d'une fissure et définit une énergie G . Le taux de restitution d'énergie G correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une autre où la fissure s'est propagée d'une longueur δa .

$$G = -\frac{\partial W_p}{\partial a} \quad (\text{I.8})$$

Avec : $W_p = W_e - \Phi_{ext}$

Où $\Phi_{ext} = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{u} dV + \int_{d\Omega} \vec{T} \cdot \vec{u} dS$: Le travail des forces extérieures.

$W_e = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\varepsilon}} dV$: L'énergie de déformation élastique du système.

Il existe une énergie critique $G_c = 2\gamma$ et le critère de propagation s'écrit comme suit :

$$G \geq G_c = 2\gamma \quad (\text{I.9})$$

Il faut relever que pour les problèmes en mécanique de la rupture linéaire, les hypothèses de Griffith sont suffisantes pour le traitement des problèmes. Pour les chargements dynamiques ou en présence de zones plastiques non négligeables en tête de fissure, il faut tenir en compte des dissipations d'énergie dans le bilan [Bui-1980].

6.1 RELATION ENTRE G ET K

Il est intuitif de penser que le taux de libération d'énergie, G, sera une grandeur très sensible à la singularité des contraintes.

On montre que Nous allons montrer qu'en fait les deux quantités K et G sont liés.

Quand la fissure se propage dans sa propre direction, le taux de restitution d'énergie est donné par :

$$\text{En déformation plane : } G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{I.10})$$

$$\text{En contrainte plane : } G = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (\text{I.11})$$

7 CONCLUSION :

La mécanique de la rupture, qu'elle soit appliquée aux matériaux ou aux relations, est un domaine complexe mais crucial. Elle offre un aperçu approfondi des limites et des processus qui peuvent conduire à la défaillance. En étudiant ces mécanismes, nous pouvons améliorer la conception des matériaux, anticiper les défaillances et renforcer les relations pour favoriser une résilience accrue. En somme, la compréhension de la mécanique de la rupture contribue à une gestion plus efficace des risques et à un développement durable, que ce soit dans le domaine de l'ingénierie ou des interactions humaines.

***CHAPITRE II : METHODE DES
ELEMENTS FINIS***

1 Introduction à la méthode des éléments finis :

. La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique utilisée pour résoudre certains des problèmes de la physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (descalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires.

Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème

2 L'historique de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est mise au point en 1953 chez BOEING (Seattle, USA, calcul des structures d'aile d'avion); on a développé le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement) Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, étaient développées de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle (Courant, 1943) ; Mais elles resteront sans suite.

L'expression élément fini date de 1960 (Clough). Les années soixante ont vu la méthode des éléments finis s'attaquer tous les domaines de calcul des solides et des structures, avant de s'étaler dans d'autres domaines : Ecoulements sous terrains, transfert de chaleur, les écoulements des fluides, ...etc. (Zienkiewicz, Cheung, 1965) ont généralisés la méthode à tous les domaines de l'ingénierie (aéronautique, génie civil, mécanique...).

Dès 1970, la méthode en application a tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Ceci est dû principalement au développement de l'outil informatique (ordinateur).

3 Présentation de la méthode des éléments finis :

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rendent facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes. Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

. Le maillage :

Le solide est décomposé en éléments de forme géométrique simple ayant des côtés communs et dont les sommets ou nœuds sont les points d'articulation de plusieurs éléments entre eux. Ces nœuds seront les points d'application des forces intérieures ou extérieures [Paul Rapin]
L'opération de décomposition est le **maillage**. Un bon maillage doit faciliter les opérations prévues par un programme d'ordinateur. Il faut donc adopter une méthode systématique de numérotation des éléments et des nœuds.

. Les méthodes :

Deux méthodes sont en usage. Il en existe d'autres mais celles-ci sont les plus répandues. On en donnera un exemple pour un problème à deux dimensions.

Les nœuds sont numérotés à la suite, de gauche à droite (ou de bas en haut) dans un système dextrogyre. Une numérotation distincte est utilisée pour les éléments. Elle est de même nature que la précédente [Paul Rapin].

On peut établir des tableaux donnant les numéros des nœuds appartenant à un élément (par exemple : élément 3 ; nœuds 3, 4, 8, 9). Ce système est le plus répandu.

. **La seconde méthode :**

Chaque nœud et chaque élément sont identifiés par une paire ordonnée de nombres entiers ou indices

. **Nœuds** : le premier nombre désigne la ligne, le second celui de la colonne.

. **Éléments** : l'affectation des numéros se fait de la même manière. Chaque numéro à la même valeur que son nœud *sud-ouest*, soit le plus près de l'origine.

Exemple : élément 12, nœud *sud-ouest* (1.2)

4 Principe de la méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales.

La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son

Contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

Etape 2 : Division du domaine en sous domaines.

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

Etape 3 : Approximation sur un élément.

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autre. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites :

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

Etape 5 : Résolution du système global :

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il peut définir soit un problème d'équilibre, de valeurs critiques ou de propagation. Le problème d'équilibre concerne les cas statiques et les cas stationnaires. Dans un problème de valeurs critiques, on s'intéresse aux fréquences et aux modes propres de vibrations du système physique étudié. Les problèmes de propagation, concernent les cas transitoires dans lesquels sont déterminées les variations dans le temps des variables physiques. Les méthodes d'intégration pas à pas conviennent mieux pour ce type de problème. Les plus utilisées sont : méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson

5 Formes classique des éléments :

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions. Chaque type d'élément est identifié par un nom précisant sa forme et par le nombre de nœuds géométrique qui le composent.

6 Principe de l'approximation par Élément fini bi dimensionnel (2D) :

On utilise avec une grande facilité la méthode des éléments finis pour résoudre des problèmes à deux dimensions pour différents matériaux et même pour des géométries et des contours complexes. Pour les problèmes à deux dimensions on utilise des éléments triangulaires ou rectangulaires.

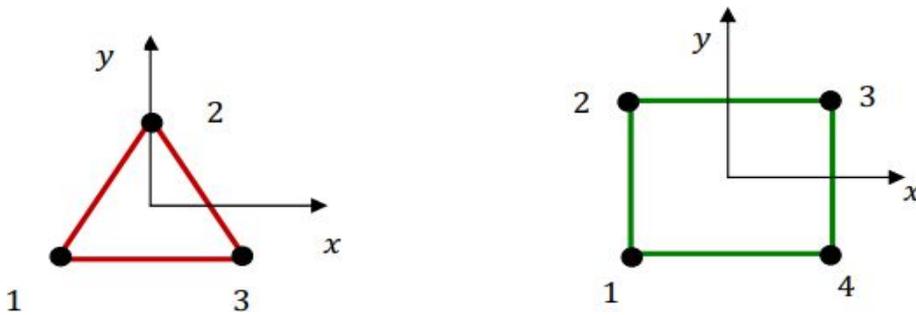


Figure 8 Exemples d'élément à deux dimensions

• Grille à deux dimensions

L'élément triangulaire linéaire est composé de cotés droits et possède un nœud à chaque coin. Ce type d'élément est généralement recommandé pour les contours irréguliers. La fonction d'interpolation d'un élément triangulaire est de la forme

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (I.1)$$

L'élément rectangulaire linéaire est composé de cotés droits et possède un nœud à chaque coin. On utilise l'élément rectangulaire dans le cas contours réguliers Sa fonction d'interpolation est de la forme :

$$\Phi = C_1 + C_2 x + C_3 x y + C_4 y \quad (I.2)$$

• Fonction d'interpolation d'un élément triangulaire à deux dimensions :

La fonction d'interpolation d'un élément à deux dimensions triangle est de la forme :

$$\Phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

ϕ_i , ϕ_j et ϕ_k représentent les valeurs nodales de la fonction (ϕ) aux nœuds (i), (j) et (k). Dans le plan (x,y) les coordonnées des nœuds (i), (j) et (k) sont respectivement :

$$i(x_i, y_i), j(x_j, y_j), k(x_k, y_k)$$

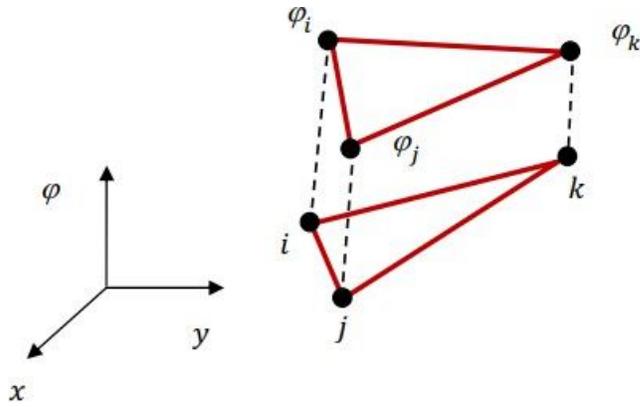


Figure 9 Exemples d'élément à deux dimensions

Pour $x = x_i$ et $y = y_i$ $\varphi = \varphi_i$ Pour $x = x_j$ et $y = y_j$ $\varphi = \varphi_j$ Pour $x = x_k$ et $y = y_k$ $\varphi = \varphi_k$

Si on remplace dans l'équation (I.1) on obtient le système d'équation suivant :

$$\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$\varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \quad (I.3)$$

$$\varphi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

La résolution de ce système permet de déterminer les coefficients de la fonction d'interpolation :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_j y_j - x_k y_j) \varphi_i + (x_k y_i - x_i y_k) \varphi_j + (x_i y_j - x_j y_i) \varphi_k] \quad (I.4)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_j - y_k) \varphi_i + (y_k - y_i) \varphi_j + (y_i - y_j) \varphi_k] \quad (I.5)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_j - x_k) \varphi_i + (x_k - x_i) \varphi_j + (x_i - x_j) \varphi_k] \quad (I.6)$$

La quantité $(2A)$ représente l'aire du triangle (de l'élément).

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_k & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (I.7)$$

La substitution de (I.4), (I.5) et (I.6) dans (I.1) et (I.3) nous conduit à l'expression de la fonction d'interpolation Φ :

$$\Phi = N_i \varphi_i + N_j \varphi_j + N_k \varphi_k \quad (I.8)$$

Avec :

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (I.9)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad (I.10)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad (I.11)$$

Et :

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$	$a_j = x_k y_i - x_i y_k$	$a_k = x_i y_j - x_j y_i$
$b_i = y_j - y_k$	$b_j = y_k - y_i$	$b_k = y_i - y_j$
$c_i = x_k - x_j$	$c_j = x_i - x_k$	$c_k = x_j - x_i$

7 Construction des fonctions d'interpolation :

La méthode des éléments finis est basée sur le principe de l'utilisation d'une approximation nodale par sous domaines. Sur chaque sous domaine on approche la fonction (x) par :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i = N(x) \cdot u_n \quad (\text{I. 12})$$

Selon le type d'élément et de son nombre de nœuds, les fonctions d'interpolation diffèrent. En général on choisit des fonctions d'interpolation sous forme de séries polynomiales. Pour le cas les problèmes bis dimensionnels elle est généralement

de la forme :

$$p(x) = \sum_i a_i x^j y^k \quad (\text{I. 13})$$

8 Élément de référence :

L'élément de référence est un élément de forme simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique (τ) comme montré sur la figure 10

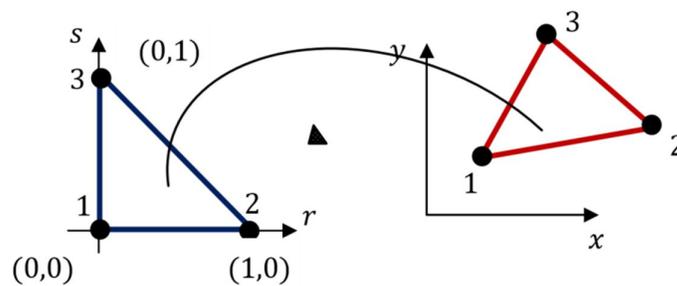


Figure 10 Élément de référence à deux dimensions

La transformation (τ) définit les coordonnées (x) d'un point de l'élément réel en fonction des coordonnées (r) de l'élément de référence :

$$\tau: r \rightarrow x = (r) \quad (I.14)$$

9 Construction des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence :

• Définitions :

Un élément est iso paramétrique si les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation.

2. Un élément est su paramétrique si le nombre de nœuds géométriques est inférieur au nombre de nœuds d'interpolation.

3. Un élément est su paramétrique si le nombre de nœuds géométriques est supérieur au nombre de nœuds d'interpolation.

• Méthode générale de construction des fonctions d'interpolation :

La fonction (r) est définie sur l'élément de référence par :

n

$$u(r) = \sum_{i=1}^n N_i u_i = N(r) u_n$$

$i=1$

Les fonctions (r) sont composées de sommes de termes polynomiaux

$$(r) = (r) = \sum_{j=1}^p \varphi(r) a_j \quad (I.16)$$

Dans la relation (I.16) $\varphi(w)$ est la base polynomiale de l'interpolation.

Pour un problème bidimensionnel (2 D), la fonction (w) est choisie comme suit :

$$(r) = a_0 + a_1 r + a_2 s + a_3 r s + a_4 r^2 + \dots \quad (I.17)$$

Le choix du nombre de terme (x) du polynôme d'interpolation dépend de plusieurs paramètres tels que le type de l'élément et son nombre de nœuds. Pour un triangle à 6 nœuds, le déplacement dépend de r , s , $1-r-s$, r^2 , s^2 et rs , soit 6 termes.

- Pour un élément de référence triangle à 6 nœuds, on choisit comme polynôme d'interpolation la fonction :

$$u(r, s) = a_0 + a_1r + a_2s + a_3rs + a_4r^2 + a_5s^2$$

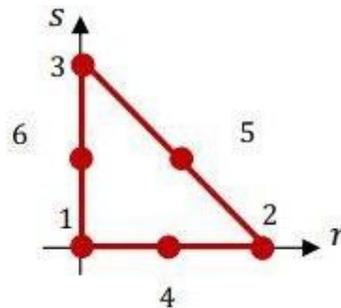


Figure 11 Eléments de référence triangulaire quadratique à 6 nœuds

Pour un élément de référence quadrangle à 8 nœuds, on choisit comme polynôme d'interpolation la fonction :

$$u(r, s) = a_0 + a_1r + a_2s + a_3rs + a_4r^2 + a_5s^2 + a_6s^2r + a_7r^2s$$

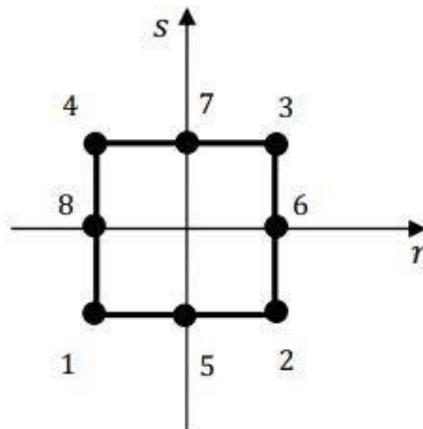


Figure 12 Eléments de référence rectangulaire quadratique à 8 nœuds

• **Construction de N** : Sachant que :

$$u(r) = \varphi(r)a = \sum_{j=1}^p \varphi_j(r)a_j$$

On peut écrire que :

$$u(r) = \varphi_1(r)a_1 + \varphi_2(r)a_2 + \dots + \varphi_p(r)a_p \quad (\text{I.18})$$

: Nombre de terme de la base polynômiale.

En écriture matricielle (I.18) devient :

$$u(r) = [\varphi_1(r) \varphi_2(r) \dots \varphi_p(r)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} = (r) \quad (\text{I.19})$$

En chaque nœud la condition suivante est vérifiée :

$$u(r_i) = u_i \quad (\text{I.20})$$

Alors :

$$u_i = [\varphi_1(r_i) \varphi_2(r_i) \dots \varphi_p(r_i)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} \quad (\text{I.21})$$

Soit sous forme développée :

$$\begin{matrix} u_1 & \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_1) & \cdots & \varphi_p(r_1) & a_1 \\ u_2 & \vdots & & & & a_2 \\ \vdots & & & & & \\ u_n & \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \cdots & \varphi_p(r_n) & a_n \end{matrix} \quad (I.22)$$

On note :

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_1) & \cdots & \varphi_p(r_1) \\ \vdots & & & \\ \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \cdots & \varphi_p(r_n) \end{bmatrix}$$

Alors :

$$u_n = \varphi_n \cdot a \quad (I.23)$$

φ_n Représente la matrice de valeurs de la base polynomiale aux nœuds

L'inversion du système (I.22) donne :

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}_n^{-1} \mathbf{u}_n \quad (\text{I.24})$$

Si on remplace (I.24) dans (I.16) on obtient :

$$\mathbf{u}_r(\mathbf{r}) \mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\varphi}_n^{-1} \mathbf{u}_n \quad (\text{I.25})$$

On remplace (I.15) dans (I.25) pour obtenir :

$$\mathbf{u}_n = (\mathbf{r})^{-1} \mathbf{u}_n = \mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{u}_n \quad (\text{I.26})$$

Finalement, on trouve l'expression de la fonction d'interpolation :

$$(\mathbf{r}) = (\mathbf{r})^{-1} \mathbf{u}_n \quad (\text{I.27})$$

. Etapes de la construction de \mathbf{N} :

1. Choix du polynôme (le nombre de terme dépend selon le cas du type de l'élément et de son nombre de nœuds).
2. Détermination de la matrice $\boldsymbol{\varphi}_n$ des valeurs de la base polynomiale aux nœuds.
3. Inversion de $\boldsymbol{\varphi}_n$ pour l'obtention de $\boldsymbol{\varphi}_n^{-1}$
4. Calcul de $(\mathbf{r}) = (\mathbf{r})^{-1} \mathbf{u}_n$

10 Mise en œuvre de la méthode des éléments finis :

L'analyse des contraintes est l'un des domaines les plus importants de l'application de la méthode des éléments finis. Généralement on applique cette méthode pour déterminer des forces et des déplacements qui sont dues suite à l'application de ces forces.

Egalement on fait recours à la méthode des éléments finis pour déterminer des contraintes et des déformations.

. Élément treillis (2D) :

Soit un élément barre (i, j) qui forme un angle (α) avec l'axe (x) du repère (x, y) choisis (figure). On veut exprimer le déplacement axial (u) en fonction des composantes globales (u, v)

:

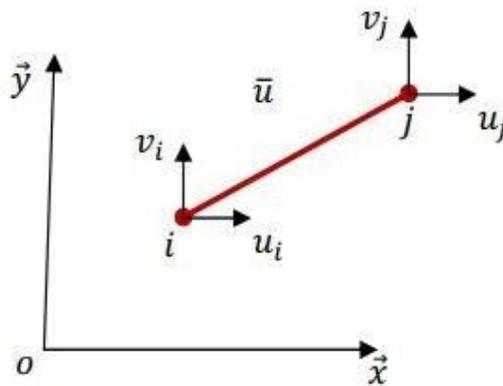


Figure 13 Élément treillis (2D)

$$\vec{t} = \begin{matrix} u \\ \end{matrix} \langle \cos a \sin a \rangle \begin{matrix} \{v\} \\ \end{matrix} = \begin{matrix} u \\ \end{matrix} \langle c_a s_a \rangle \begin{matrix} \{v\} \\ \end{matrix} \quad (\text{I.28})$$

Appliquons ce changement de base aux nœuds (i) et (j) de l'élément considéré :

$$\begin{matrix} u_i \\ \bar{u}c_a \\ \end{matrix} \begin{matrix} s_a & 0 & 0 \\ 0 & c_a & s_a \end{matrix} \begin{matrix} v_i \\ \{ \} \\ v_j \end{matrix} \quad (\text{I.29})$$

Reportons ce changement de base dans l'expression de l'énergie de déformation :

$$2E_d = \{\bar{u}\} ES \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ L_e - 1 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{u}\} \quad (\text{I.30})$$

Le développement de cette expression conduit au résultat suivant :

$$2E_d = \{\bar{u}\} [k_e] \{\bar{u}\} \quad (\text{I.31}) \text{ On en déduit la matrice de}$$

rigidité élémentaire :

$$[k] = \frac{ES}{L_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \quad (\text{I.32})$$

. Etat de contraintes :

L'effort normal est déterminé en fonction des déplacements nodaux :

$$V = ES \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = ES \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{L} (u_j - u_i) \right] \right) \quad (I.33)$$

On remplace (I.29) dans (I.33) :

$$V = \frac{ES}{L} \left(c_s \right) \left\{ \frac{1}{L} (u_j - u_i) \right\} \quad (I.34)$$
$$L \quad a \quad a \quad v_j \quad - \quad v_i$$

11 Utilisation d'un logiciel élément fini :

Un programme général de type industriel doit être capable de résoudre des problèmes variés de grandes tailles (de mille à quelques centaines de milliers de variables). Ces programmes complexes nécessitent un travail d'approche non négligeable avant d'espérer pouvoir traiter un problème réel de façon correcte. Citons à titre d'exemple quelques noms de logiciels : NASTRAN, ANSYS, ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, CESAR, SAMCEF, etc. Les possibilités offertes par de tels programmes sont nombreuses :

- Analyse linéaire ou non d'un système physique continu.
- Analyse statique ou dynamique.
- Prise en compte de lois de comportement complexes.
- Prise en compte de phénomènes divers (élasticité, thermiques, électromagnétiques, de plasticité, d'écoulement. . .) pouvant être couplés.
- Problèmes d'optimisation, etc.

12 COCCLUSION :

Nous avons présenté dans ce chapitre la méthode des éléments finis. Cette dernière est considérée parmi les méthodes les plus puissantes et les plus utiles dans le calcul numérique, elle peut faciliter la résolution des problèmes assez complexes. Dans le but d'exploiter cette technique pour résoudre le problème de la structure fissurée.

***CHAPITRE III : TORSION
AXISYMETRIQUE D'UN
MILIEU ELASTIQUE FISSURE
PAR UN DISQUE RIGIDE SUR
ANSYS WORKBENCH***

1 Introduction

Dans cette partie, nous traitons numériquement l'exemple proposé en mécanique des solides de torsion axisymétrique d'un disque attaché à la surface d'un demi-espace isotrope et homogène. Le milieu ayant une fissure circulaire interne parallèle au plan du disque.

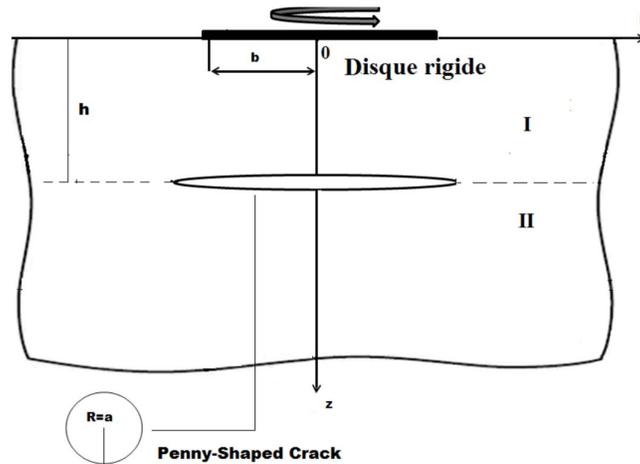


Figure 14 Géométrie et coordonnées de système

2 Les étapes de simulation numérique sur Ansys workbench

2.1 Création du projet

Pour cela, on commence par démarrer Workbench.

Un nouveau projet s'ouvre automatiquement.

Choisissez dans la **Boîte à outils**⇒**systèmes d'analyse**⇒**structure statique**, cliquez-glissez jusque dans l'espace de travail.

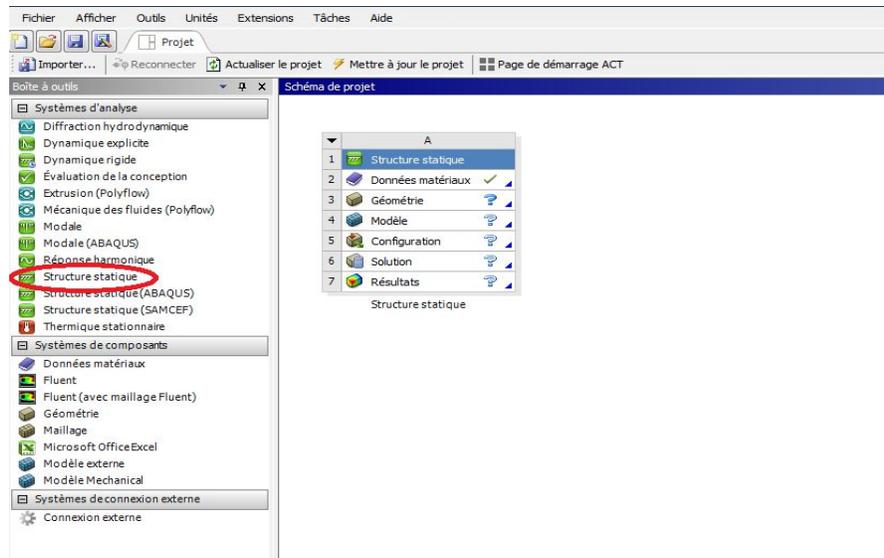


Figure 15 interface de la création d'un projet

Dans schéma de projet ont fait un clic droit sur la cellule **Géométrie** dans le système d'analyse qu'on a créé et on choisit Nouvelle géométrie, **Design Modeler**.

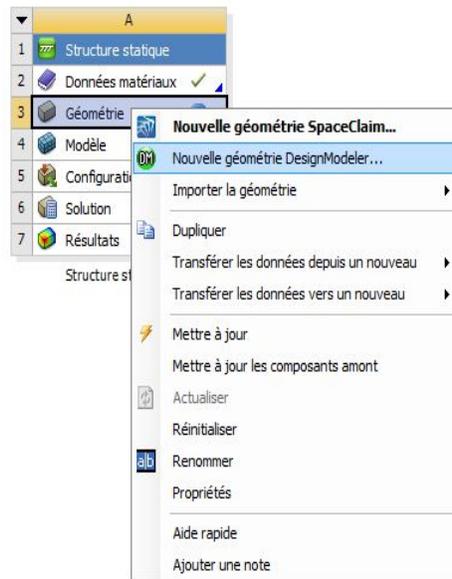


Figure 16 Module de création géométrique

Nous pouvons passer à l'étape suivante, on trace de la géométrie.

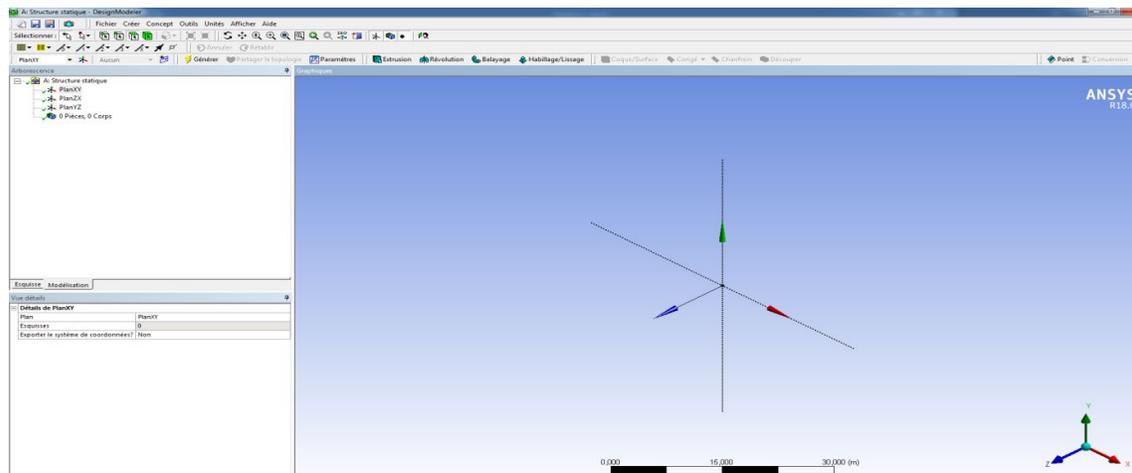


Figure 17 interface du Design Modeler

Nous choisissons l'unité que nous voulons

Barre de menu ⇒ unités

2.1.1 Création de la demi espace

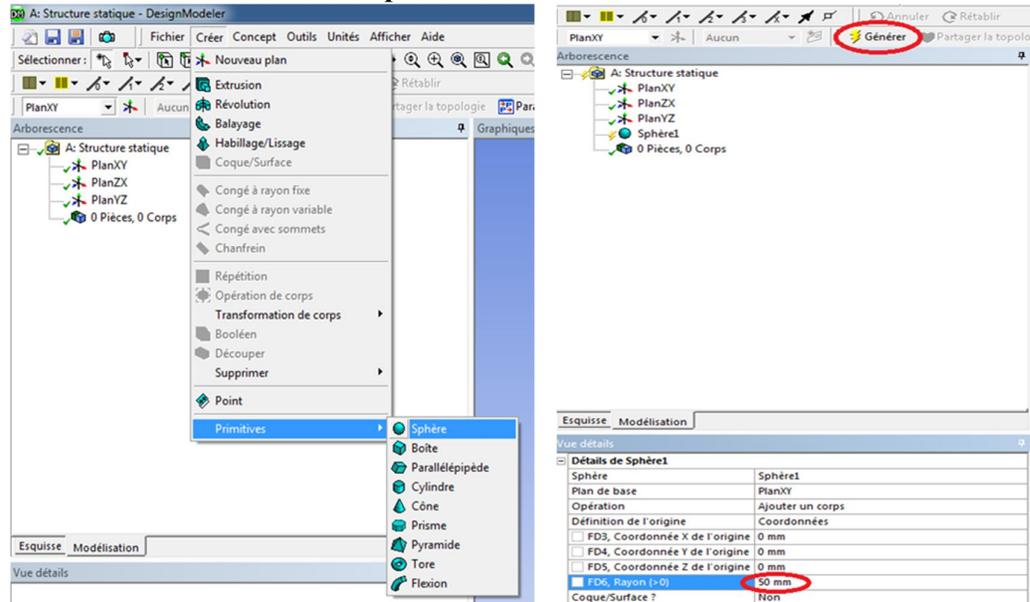


Figure 18 les étapes de Création de demi espace.

Choisissez dans la barre de menu ⇒ outils ⇒ symétrie ⇒ on choisit le plan de symétrie ⇒ Appliquer ⇒ Générer

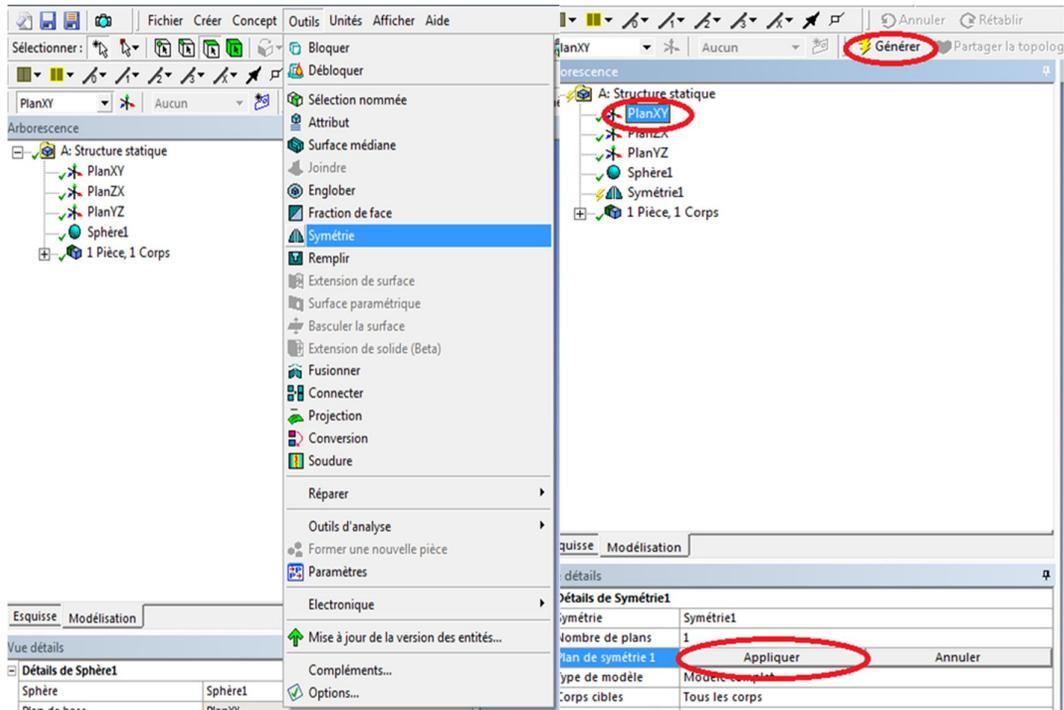


Figure 19 les étapes de Création de demi-espace

Ensuite cliquez sur **Créer** ⇒ **Découper** ⇒ choisit le plan YZ ⇒ **Appliquer** ⇒ **Générer** (figure .6)

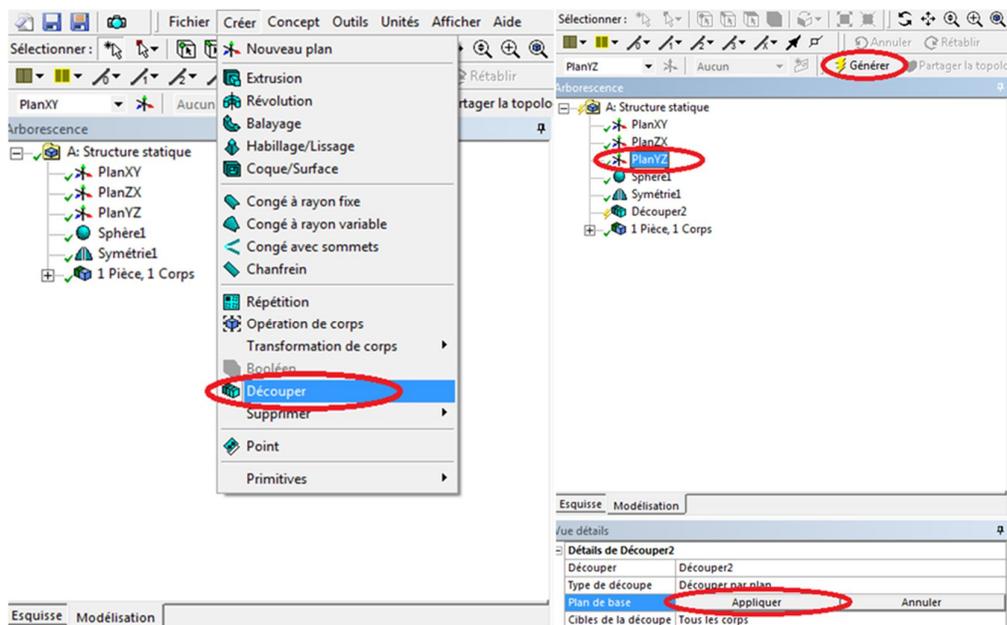


Figure 20 les étapes de Création de demi-espace

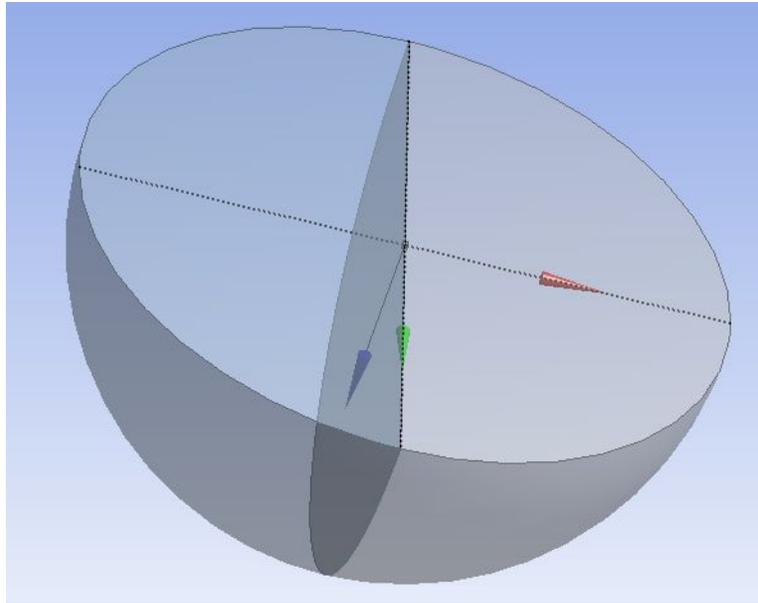


Figure 21 géométrie de demi espace

2.1.2 Création de disque

On choisit le plan XY pour dessiner le disque et cliquer sur **Esquisse**

Dessiner un cercle \Rightarrow insérer les cotes \Rightarrow cliquer sur **Extrusion**(Figure IV.8)

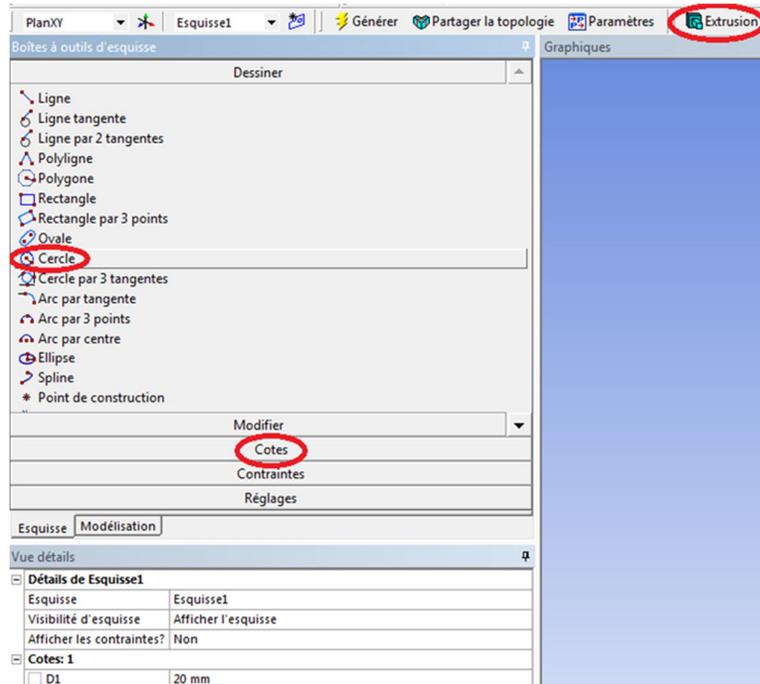


Figure 22 les étapes de Création de disque

Ensuite **Appliquer Esquisse 1** ⇒ **inversée la direction** ⇒ donner l'épaisseur de disque ⇒ cliquer sur **Générer**(Figure.9)

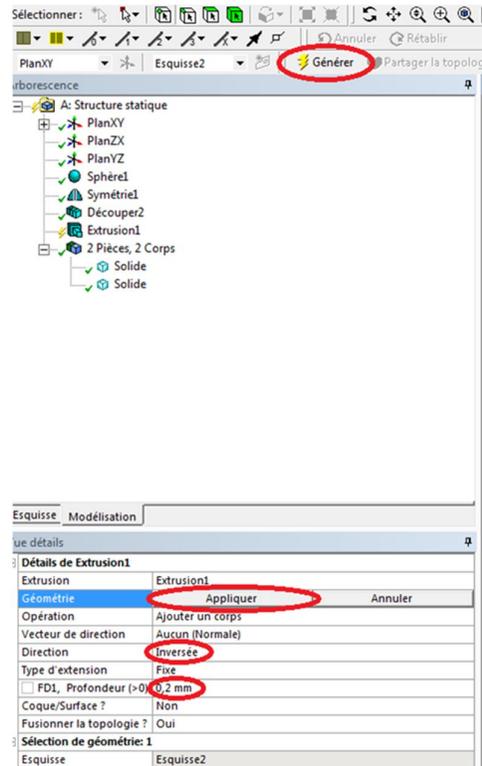


Figure 23 les étapes de Création de disque

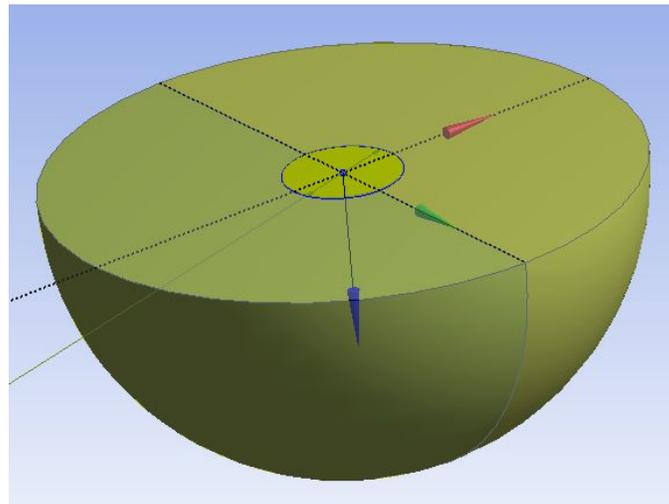


Figure 24 Définition de la géométrie

Ensuite on sort de Design Modeler et entrer dans le module de simulation

2.1.3 Le maillage du modèle

L'objectif de maillage dans ANSYS Workbench est de fournir des outils de maillage robustes et faciles à utiliser qui simplifieront le processus de génération de maillage. Ces outils ont l'avantage d'être hautement automatisés et d'avoir un degré de contrôle modéré à élevé. Le maillage est le processus dans lequel la géométrie est discrétisée spatialement en éléments et nœuds.

Dans ce module on définit la nature des éléments choisis et leurs tailles, car dans une simulation numérique par la méthode des éléments finis, la qualité en forme et en taille des éléments de maillage est très importante.

Cliquer droit sur **Maillage**⇒**Insertion**⇒**Méthode**

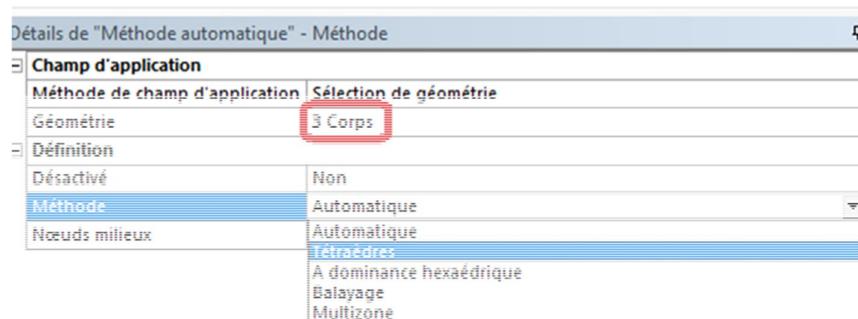


Figure 25 choix la méthode de maillage

Ensuite on choisit la taille des éléments

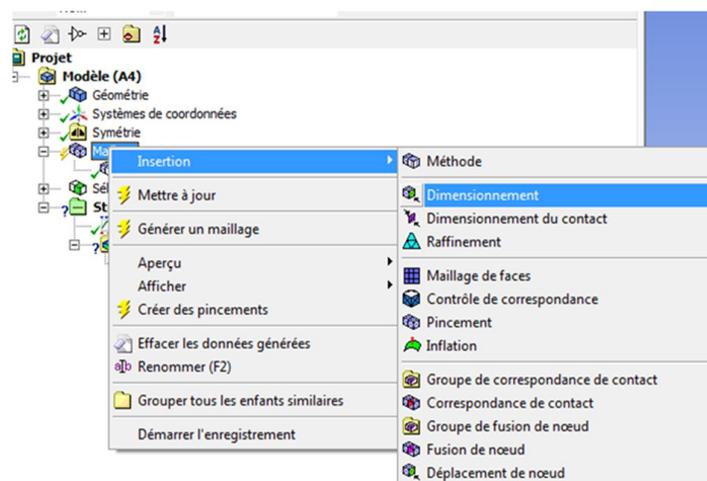


Figure 26 création le dimensionnement de maillage

Détails de "Taille de corps" - Dimensionnement	
Champ d'application	
Méthode de champ d'application	Sélection de géométrie
Géométrie	3 Corps
Définition	
Désactivé	Non
Type	Taille des éléments
<input checked="" type="checkbox"/> Taille des éléments	2, mm
Avancés	
<input type="checkbox"/> Taille de simplification	Par défaut
Comportement	Dirigé

Figure 27 choix la taille des éléments

Un Clic sur **Générer un maillage**

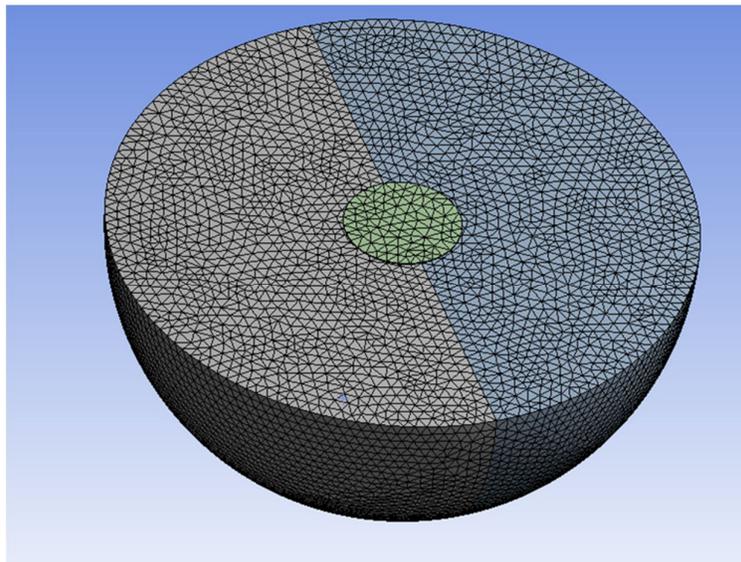


Figure 28 choix la taille des éléments

2.1.4 Création de la fissure

Cliquer sur **Modèle**⇒ **Rupture**

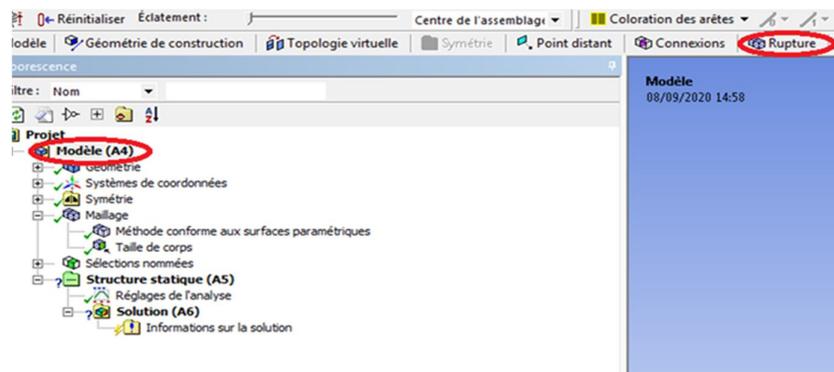


Figure 29 création de la fissure

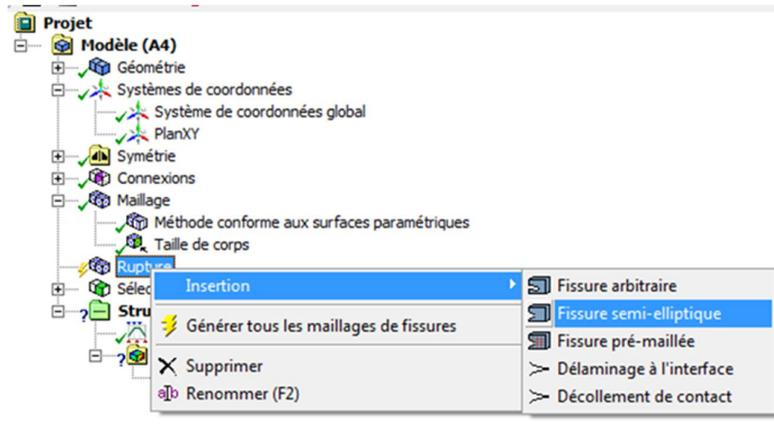


Figure 30 choix type de fissure

Maintenant on va créer la position de la fissure

Clic droit sur **systèmes de coordonnées** ⇒ **Insertion** ⇒ **système de coordonnées**

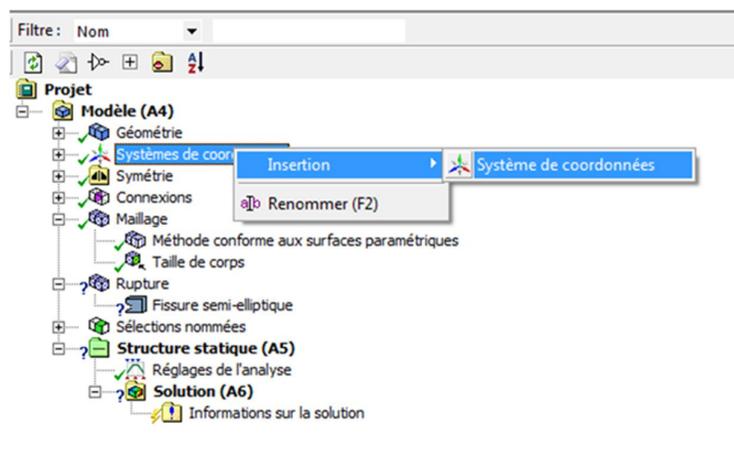


Figure 31 créer le plan de fissure

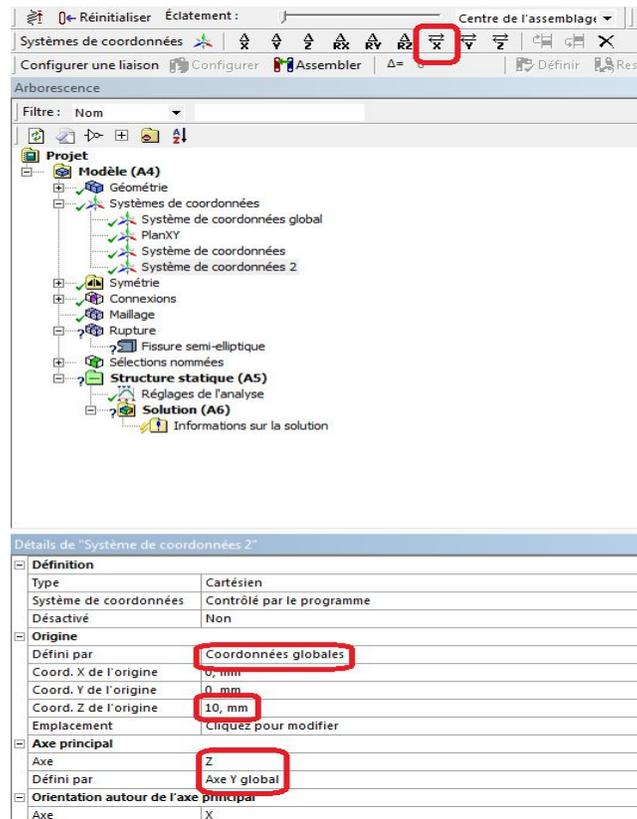
Les détails de système coordonnées

1. L'origine est définie par **coordonnées globales**
2. Coordonnée Z de l'origine est la distance entre la fissure et le disque (h)
3. Pour l'Axe principale ont défini par **Axe Y global** et pour **Axe** ne choisissez pas directement on choisit Y après Z (Figure IV.19)

Détails de "Système de coordonnées"	
Définition	
Type	Cartésien
Système de coordonnées	Contrôlé par le programme
Désactivé	Non
Origine	
Défini par	Coordonnées globales
Coord. X de l'origine	0, mm
Coord. Y de l'origine	0, mm
Coord. Z de l'origine	10, mm
Emplacement	Cliquez pour modifier
Axe principal	
Axe	Z
Défini par	Axe Y global
Orientation autour de l'axe principal	
Axe	X

Figure 32 Les détails de système coordonnées

Même étapes pour créer système coordonnées 2 de la deuxième fissure mais à la fin cliquer sur \vec{x} pour inversé le plan



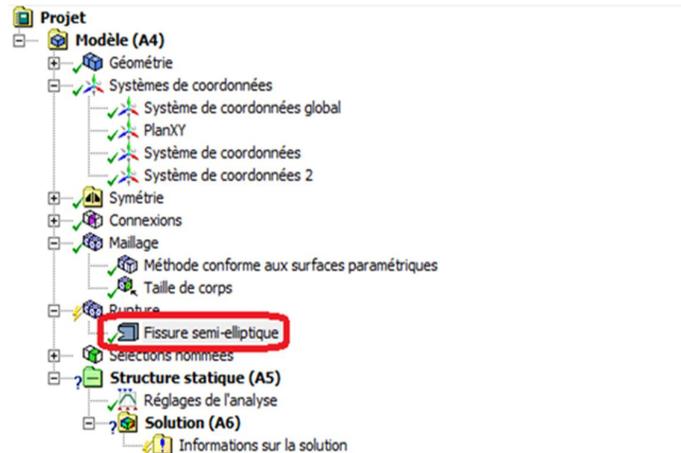
The screenshot shows the software interface with the 'Détails de "Système de coordonnées 2"' dialog box open. The 'Origine' section is highlighted, showing 'Défini par' set to 'Coordonnées globales', 'Coord. X de l'origine' as '0, mm', 'Coord. Y de l'origine' as '0, mm', and 'Coord. Z de l'origine' as '10, mm'. The 'Axe principal' section shows 'Axe' set to 'Z' and 'Défini par' set to 'Axe Y global'. The 'Orientation autour de l'axe principal' section shows 'Axe' set to 'X'. The background shows the 'Arborescence' (tree view) with 'Système de coordonnées 2' selected under 'Modèle (A4)'. The toolbar at the top has a button with a red box around it, likely the 'Inverser le plan' button mentioned in the text.

Détails de "Système de coordonnées 2"	
Définition	
Type	Cartésien
Système de coordonnées	Contrôlé par le programme
Désactivé	Non
Origine	
Défini par	Coordonnées globales
Coord. X de l'origine	0, mm
Coord. Y de l'origine	0, mm
Coord. Z de l'origine	10, mm
Emplacement	Cliquez pour modifier
Axe principal	
Axe	Z
Défini par	Axe Y global
Orientation autour de l'axe principal	
Axe	X

Figure 33 Les détails de système coordonnées 2

Les détails de fissure semi elliptique

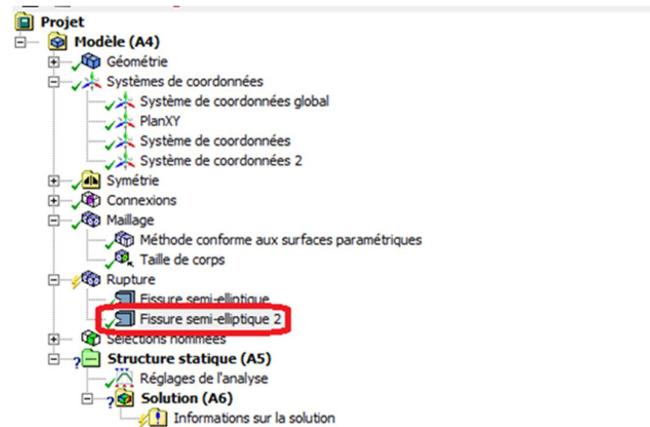
1. Géométrie \Rightarrow 1 Corps
2. Système coordonnées \Rightarrow Système coordonnée
3. Demi grand axe = Demi petit axe
4. Et choisit le rayon maximal du maillage radial



Détails de "Fissure semi-elliptique"	
Champ d'application	
Source	Fissure analytique
Méthode de champ d'application	Sélection de géométrie
Géométrie	1 Corps (highlighted with a red box)
Définition	
Système de coordonnées	Système de coordonnées (highlighted with a red box)
Aligner avec la normale à la face	Oui
Projeter sur la surface la plus proche	Oui
Forme de fissure	Semi-elliptique
<input type="checkbox"/> --Demi grand axe	10, mm (highlighted with a red box)
<input type="checkbox"/> --Demi petit axe	10, mm (highlighted with a red box)
Méthode de maillage	Prédominance hexaédrique
<input checked="" type="checkbox"/> Rayon maximal du maillage radial	0,5 mm
<input type="checkbox"/> Nombre de divisions du front de fissure	15
Zone affectée par la rupture	Contrôlé par le programme

Figure 34 Les détails de fissure semi elliptique

Ensuite créer une deuxième fissure même étapes de première fissure



Détails de "Fissure semi-elliptique 2"

Champ d'application	
Source	Fissure analytique
Méthode de champ d'application	Sélection de géométrie
Géométrie	1 Corps
Définition	
Système de coordonnées	Système de coordonnées 2
Aligner avec la normale à la face	Oui
Projeter sur la surface la plus proche	Oui
Forme de fissure	Semi-elliptique
<input type="checkbox"/> --Demi grand axe	10, mm
<input type="checkbox"/> --Demi petit axe	10, mm
Méthode de maillage	A dominance hexaédrique
<input checked="" type="checkbox"/> Rayon maximal du maillage radial	0,5 mm
<input type="checkbox"/> Nombre de divisions du front de fissure	15
Zone affectée par la rupture	Contrôlé par le programme

Figure 35 Les détails de fissure semi elliptique 2

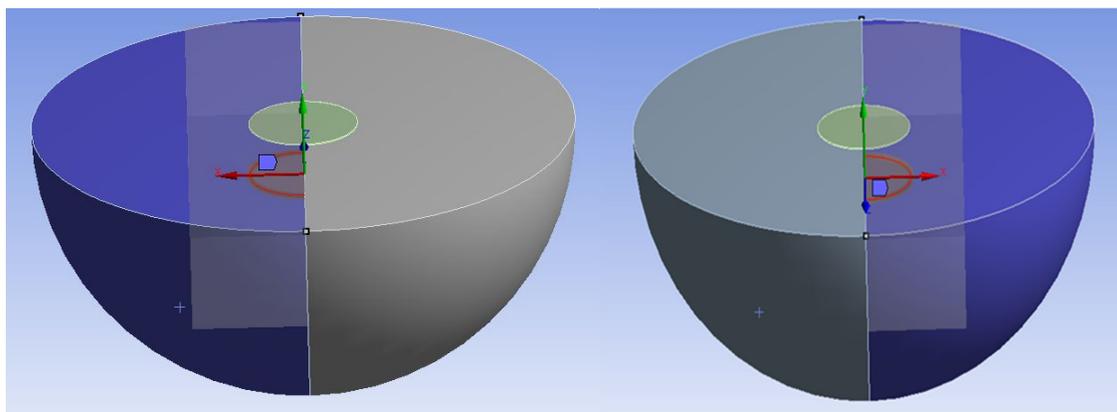


Figure 36 Modèle des fissures

Cliquer droit sur **Maillage**⇒**Insertion**⇒**Dimensionnement** (Figure IV.12)

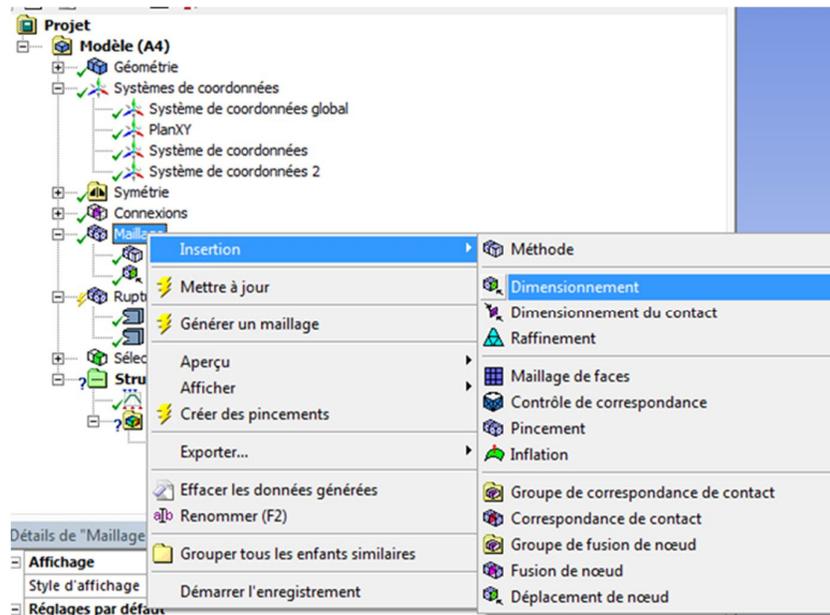


Figure 37 création le dimensionnement de maillage

Détails de dimensionnement

1. Sélectionné demi espace ⇒ Appliquer dans la géométrie
2. Choix le type ⇒ sphère d'influence
3. Choix le centre de la sphère ⇒ Système coordonnées
4. Choix le Rayon de la sphère et taille des élément

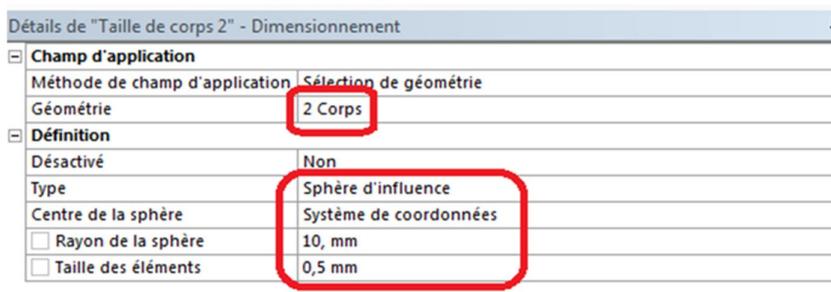


Figure 38 Détails de dimensionnement

1. Générer le maillage

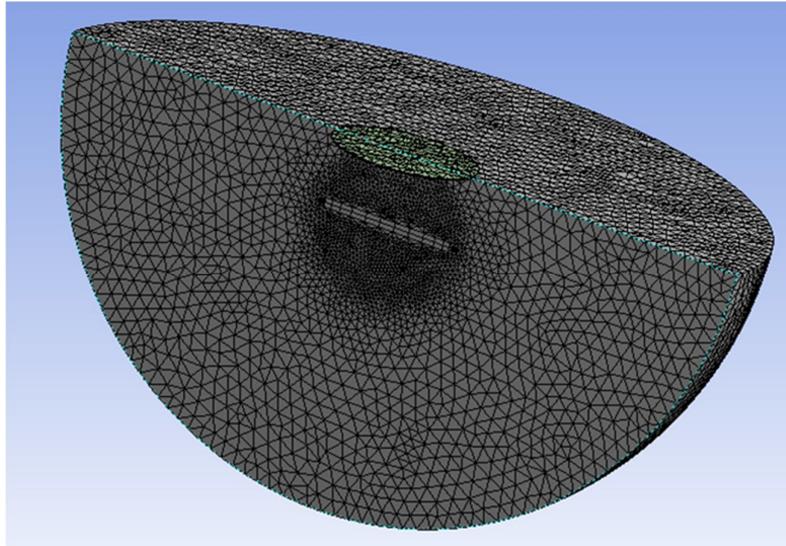


Figure 39 Nouveau maillage du modèle

2.1.5 Établir les paramètres d'analyse

- Sélection de l'encastrement

On doit fixer la surface extérieure du demi espace, pour faire cela, on fait un clic droit sur

Réglage de l'analyse ⇒ **Insertion** ⇒ **Support fixe**, on sélectionne les faces , puis Appliquer dans le groupe Géométrie

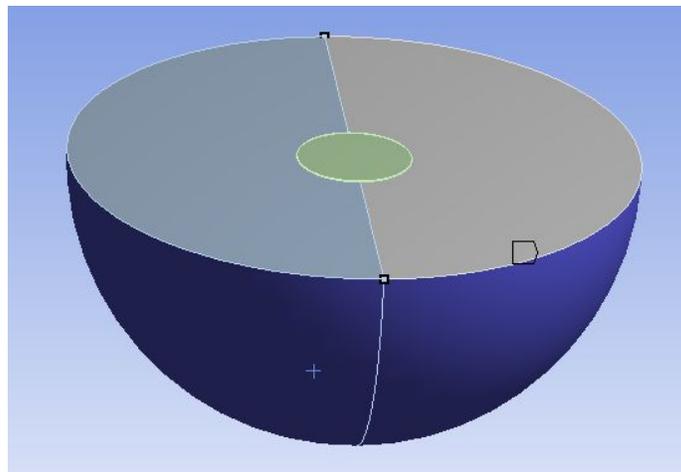


Figure 40 Définir le support fixe

- Insérai la rotation du disque

On fait un clic droit sur **Réglage de l'analyse** ⇒ **Insertion** ⇒ **Déplacement distant**

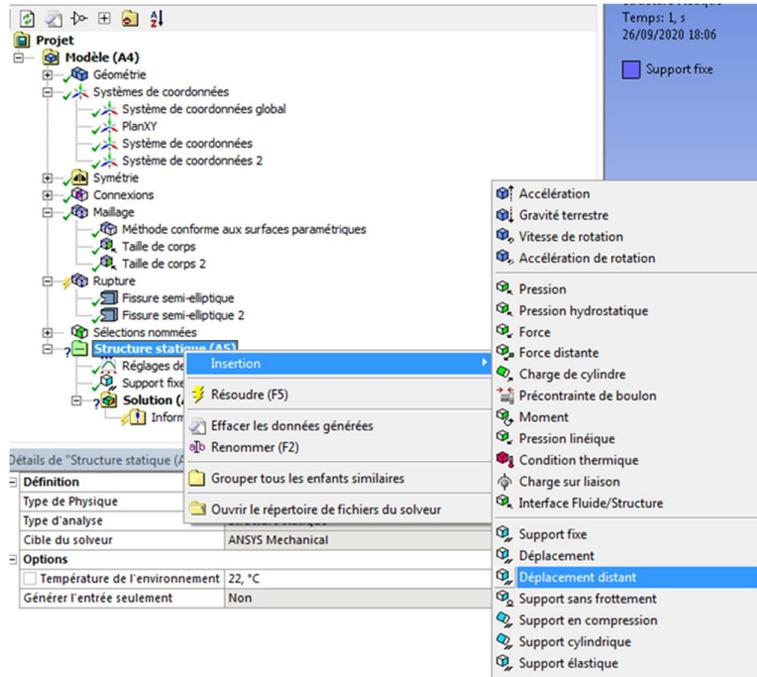


Figure 41 Insertion la rotation du disque

- Sélectionné les trois faces du disque puis Appliquer dans le groupe Géométrie
- Choix du système de coordonnées global
- Donner la valeur de l'angle de rotation

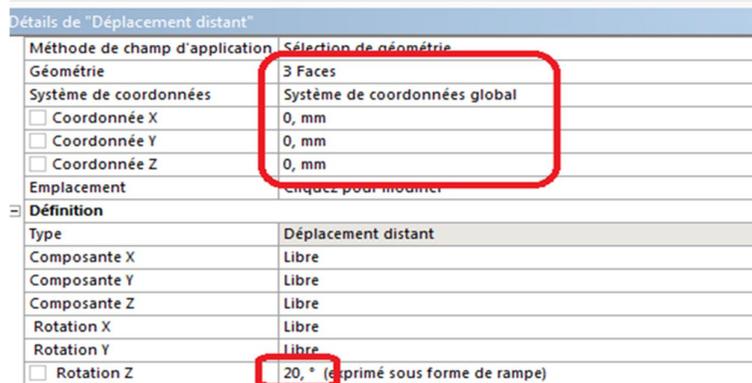


Figure 42 Détails de déplacement distant

2.1.6 Résolution

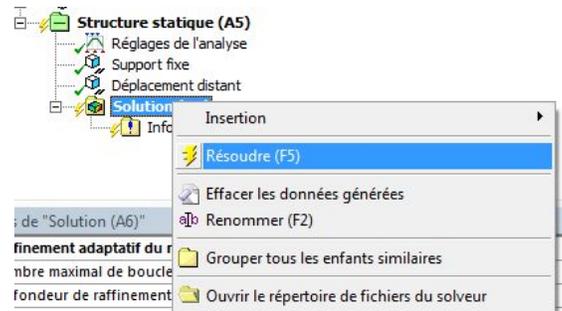


Figure 43 Résolution

• Déplacement

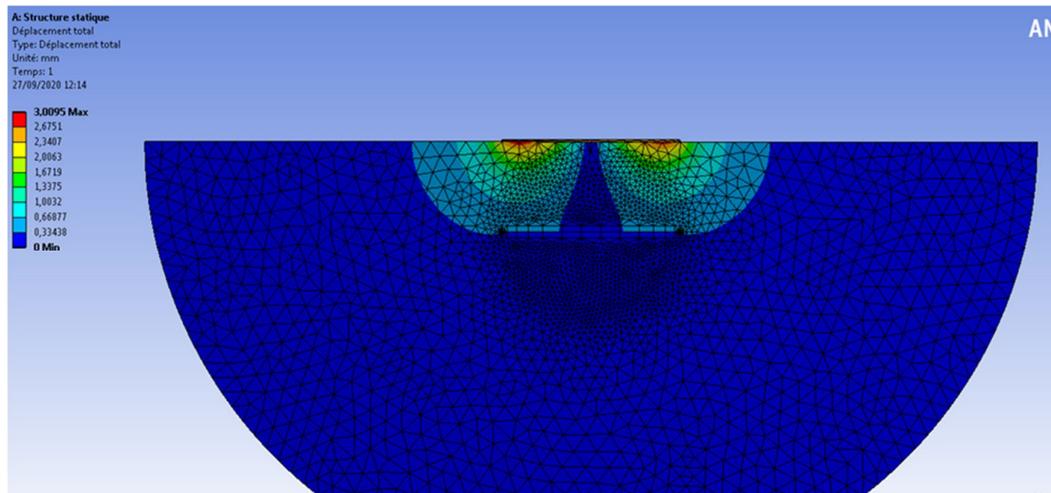
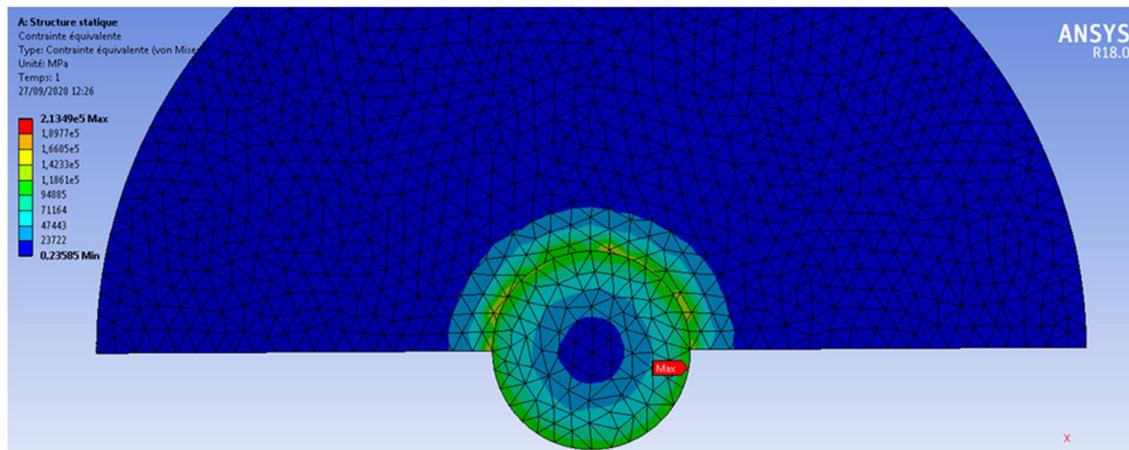


Figure 44 Contour de déplacement



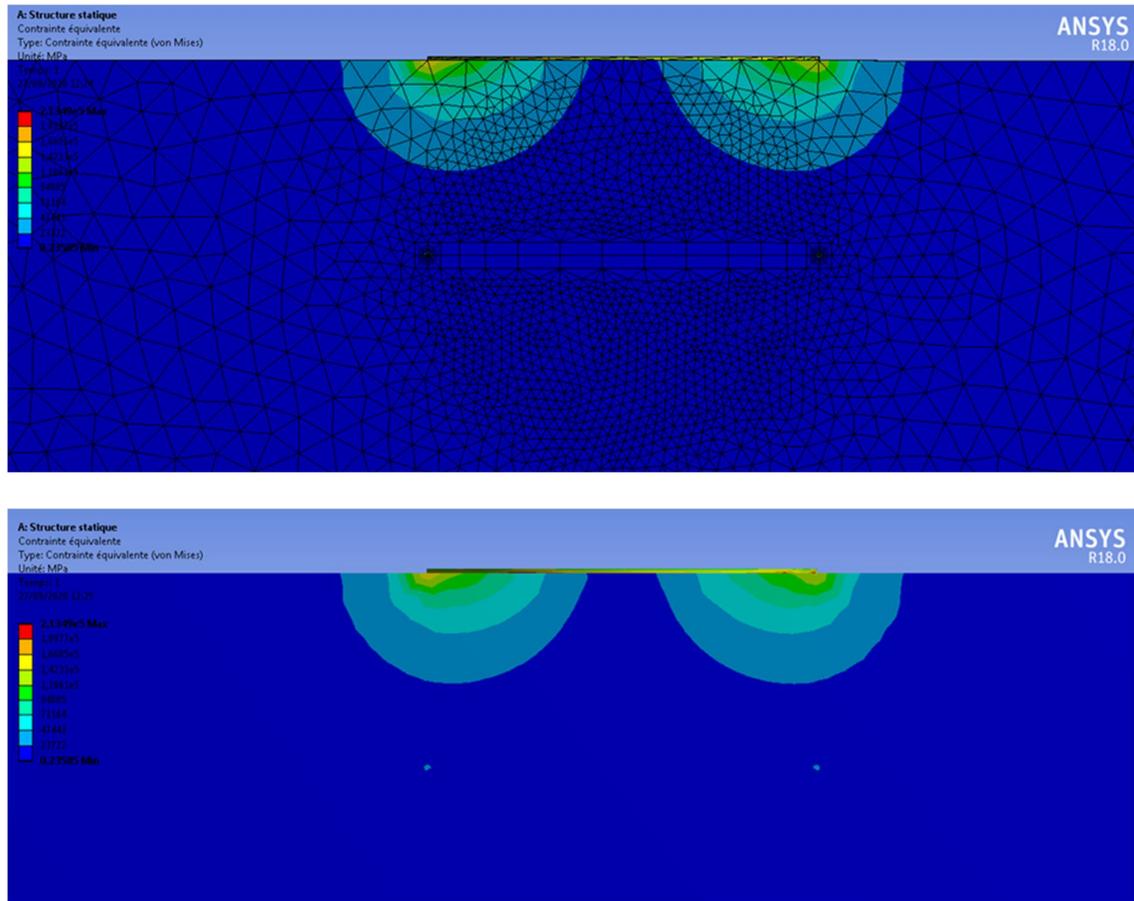


Figure 45 Contour de la contrainte équivalente

3 Résultats et interprétations

La figure 9 montre la variation de la contrainte normalisée facteur d'intensité au bord de la fissure définie par l'Eq. (3.35) En fonction de c pour différentes valeurs de l'épaisseur de couche $H = 1, 0.75, 0.5$. On observe que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmenter et atteindre ses valeurs maximales à $c = 1$, et avec l'augmentation de la valeur de c , le facteur d'intensité de contrainte diminue. De plus, l'effet de la distance axiale entre la fissure et le disque H sur l'intensité de la contrainte facteur est également indiqué sur cette figure. L'augmentation de la la distance H induit la diminution du facteur d'intensité de contrainte pour toutes les valeurs du paramètre c .

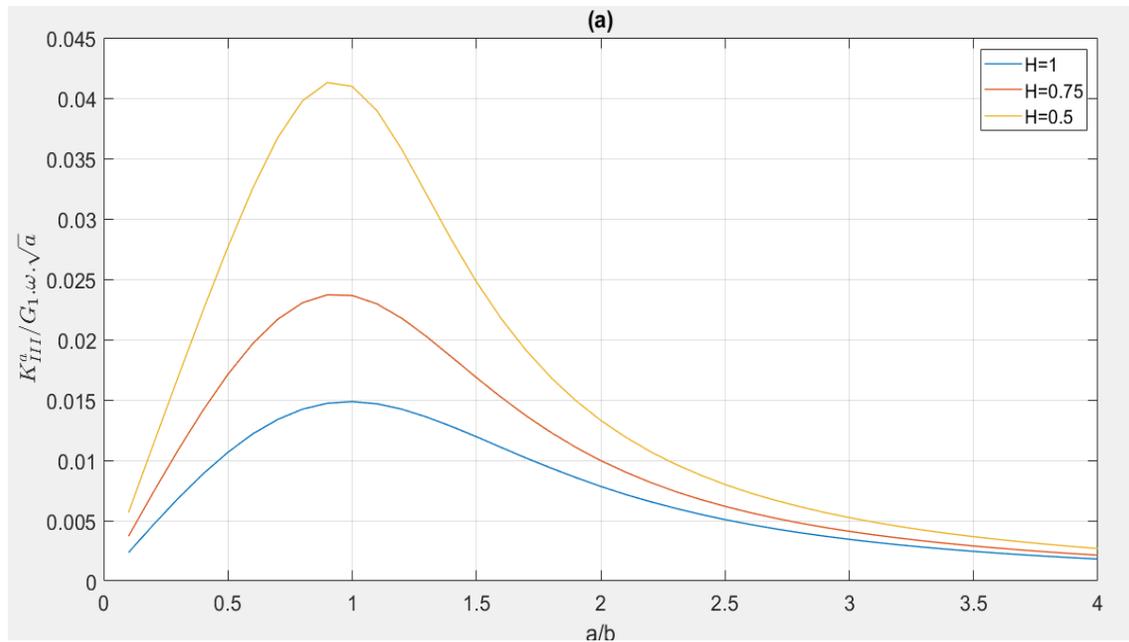


Figure 46 Variation du facteur d'intensité de contrainte normalisé

La variation des déplacements normalisés est représentée sur la figure 17 et. On remarque que les déplacements dans les deux régions augmentent d'abord, atteignent des valeurs maximales à $\rho = 1$ puis diminuent hors de la bande du disque avec l'augmentation de r/b . C'est parce que la charge statique agit sur la zone circulaire du disque avec le rayon $\rho = 1$, le déplacement tangentiel est linéaire avec, et la plus grande valeur qu'elle peut prendre est à $\rho = 1$. Aussi, nous pouvons voir que dans la direction verticale, à mesure que la distance par rapport à la surface de chargement augmente, le déplacement diminue progressivement jusqu'à ce qu'il ne soit plus évident.

La distribution des contraintes de cisaillement dans le milieu élastique est également discutée et représentée sur la figure 21. Les contraintes augmentent initialement, atteignent ses valeurs maximales et avec l'augmentation de la valeur de ρ , les contraintes continuent à diminuer.

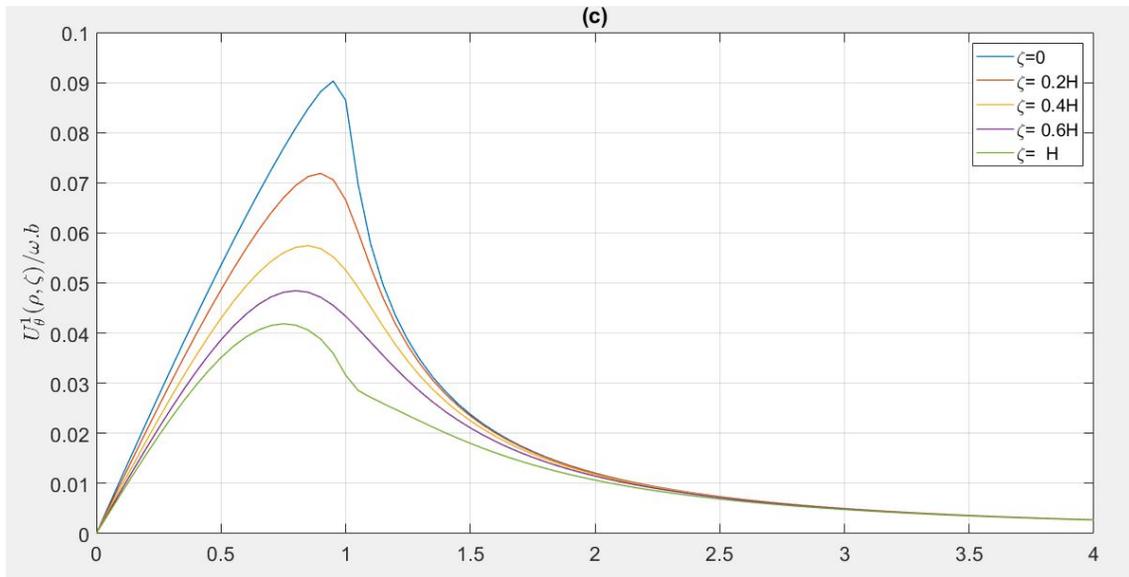


Figure 47 Déplacement tangentiel u_{θ}^1 versus $\rho=r/b$ pour divers $\zeta=z/b$, $0 \leq z \leq h$

La figure représente la variation du déplacement U en fonction du rapport r/b pour différentes valeurs de z variant de 0 à H

On observe sur la figure que les déplacements dans les deux régions augmentent d'abord, atteignent des valeurs maximales à $\rho = 1$ puis diminuent hors de la bande du disque avec l'augmentation de r/b .

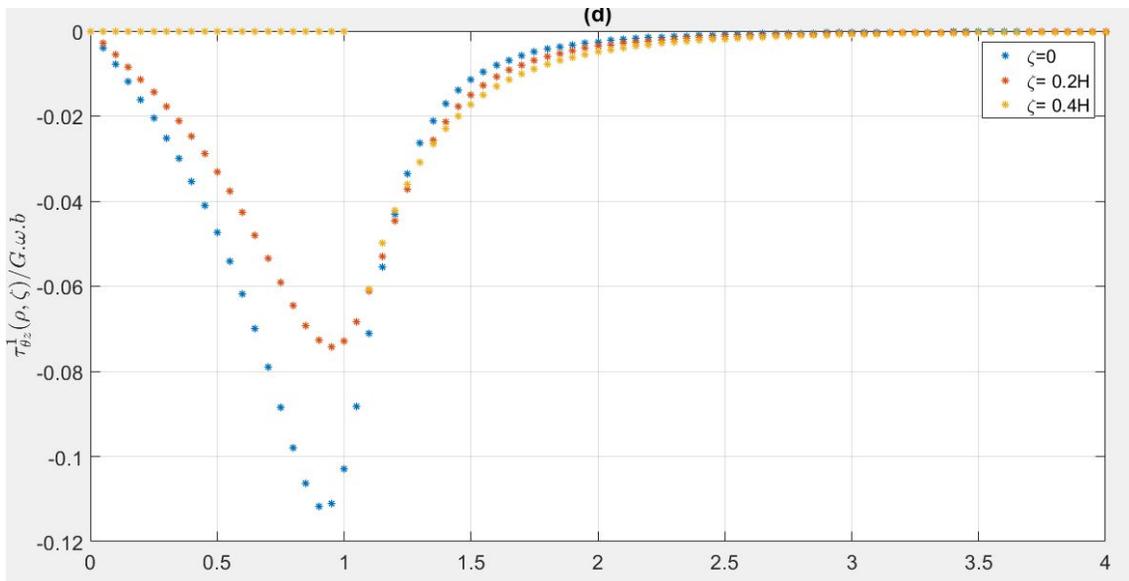


Figure 48 Contrainte de cisaillement τ_{θ}^1 versus $\rho=r/b$ pour divers z/b , $z \leq h$

La figure représente la variation du facteur d'intensité de contrainte K_3 en fonction du rapport a/b pour différentes valeurs de l'épaisseur de couche noté H

La figure représente La distribution des contraintes de cisaillement

"Les contraintes augmentent initialement jusqu'à atteindre leurs valeurs maximales, puis diminuent progressivement avec l'augmentation de la valeur de p "

***CHAPITRE VI : PROCESSUS
DE MODELISATION SUR
ANSYS***

1 INTRODUCTION

ANSYS est un code éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment : analyse structurale en statique et en dynamique (linéaire et non linéaire), transfert de chaleur, dynamique des fluides, acoustique, électromagnétique.

Dans ce chapitre on va présenter la Procédure modélisation sur ANSYS une interaction entre deux fissures.

2 PROCEDURE SUR ANSYS POUR MODELISER UNE INTERACTION ENTRE FISSURE ET INCLUSION

Une section carrée avec deux fissures.

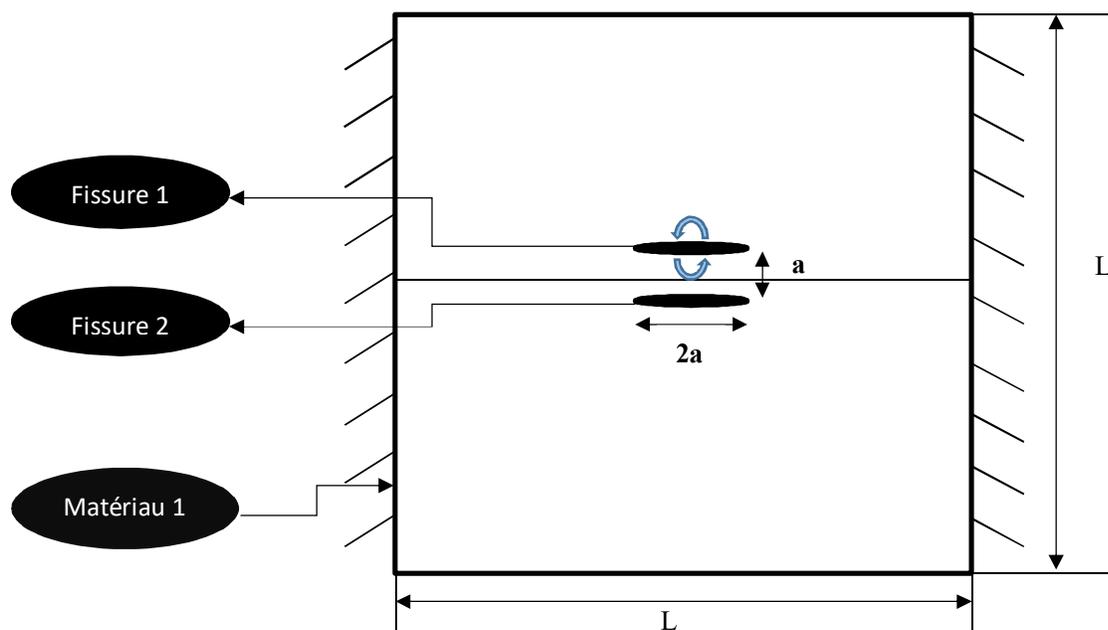


Figure 49 une plaque contenant deux fissures

Les caractéristiques mécaniques du matériau 1 sont $E1 = 200000\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$.
, $L= 100\text{mm}$, $2a=12\text{mm}$, $a=6\text{mm}$, $\theta= 0.0872$.

Les étapes à suivre sont :

2.1 DEFINE LE TYPE D'ANALYSE

Preferences >structural >ok

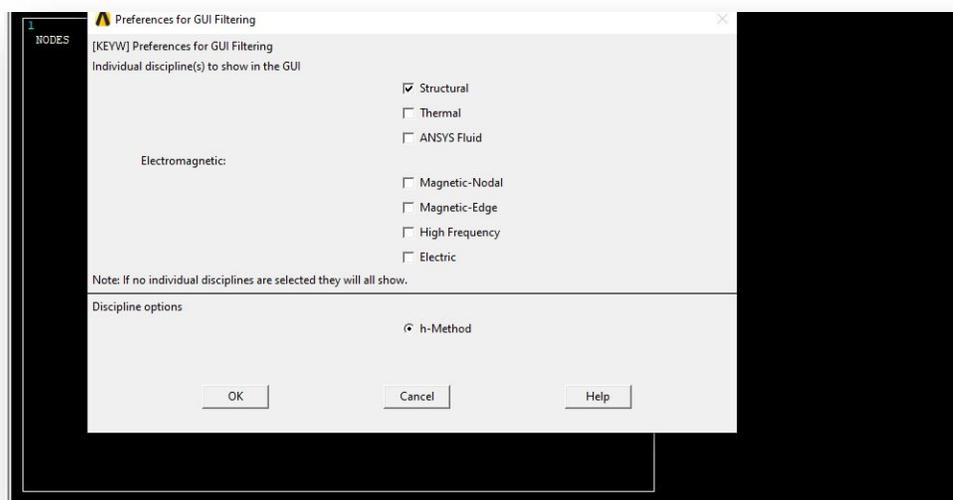


Figure 50 Define le type d'analyse

2.2 DEFINE ELEMENT TYPE

Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete

Cela ouvre la fenêtre 'Types d'éléments'. Cliquez Add

La fenêtre 'Bibliothèque de types d'éléments' apparaît. Mettez en surbrillance

et "3D 4 node 181", comme illustré. Cliquez sur OK

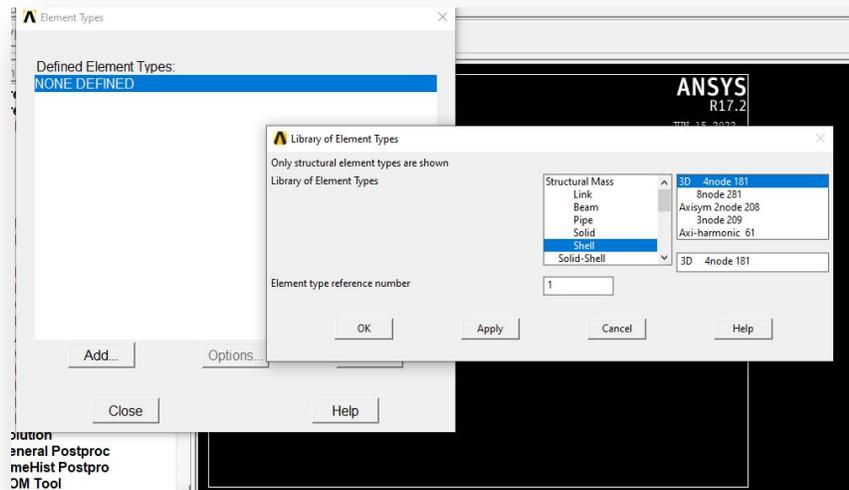


Figure 51 Définir l'élément Type

2.3 DÉFINIR LES PROPRIÉTÉS DES MATERIAUX

Preprocessor > Material Props > Material Models

1. Material mode number > Structural > Linear > Elastic > Isotropic

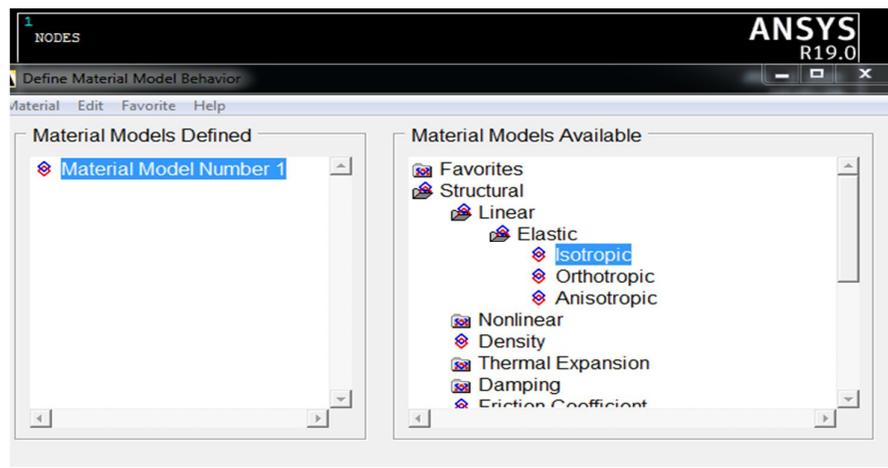


Figure 52 Définir les propriétés de section

Material Model Number > Structural > Linear > Elastic > Isotropic

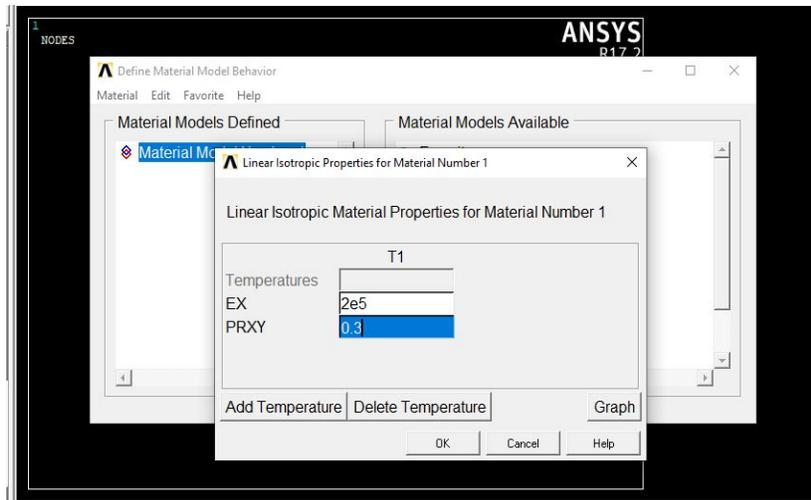


Figure 53 Définir les propriétés de section

2.4 CREATION DE LA GEOMETRIE :

2.4.1 DEFINIR EPAISSEUR DE CETTE PLAQUE :

Preprocessor>Section>Shell>Lay-up>Add/Edit

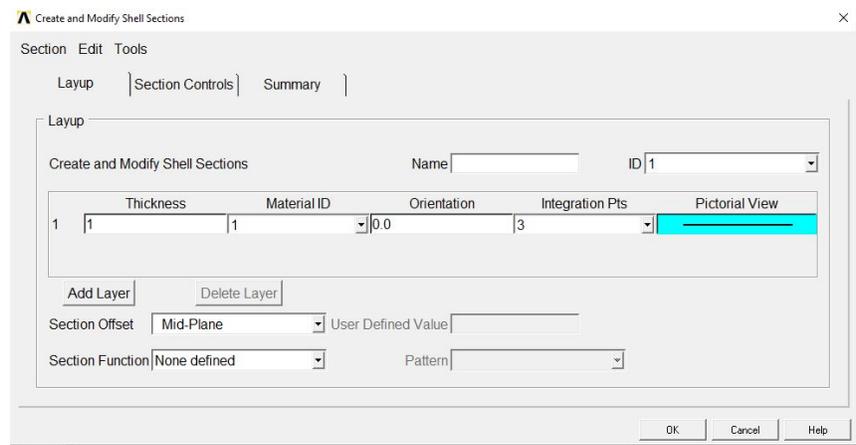


Figure 54 Création de la géométrie

2.4.2 CREER LA SECTION :

Modiling>Create>Areas>Rectangle>By2corners

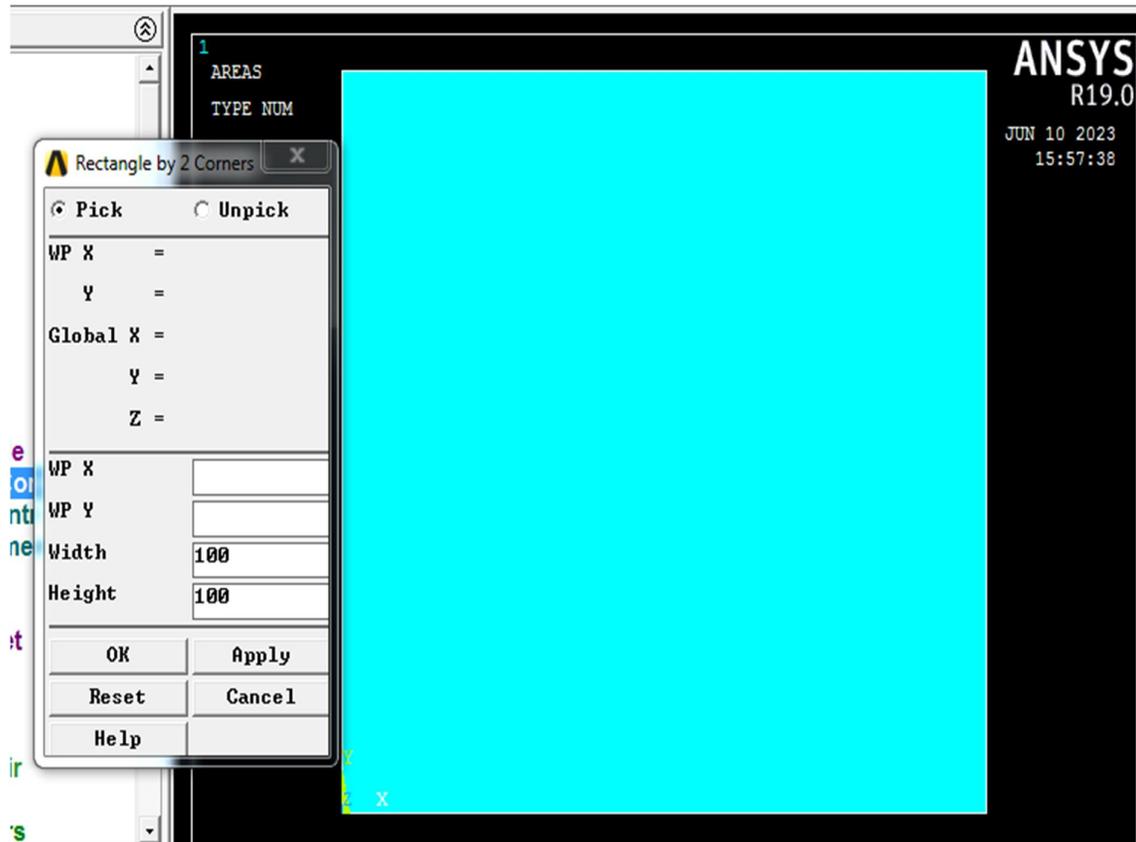


Figure 55 Créer section

2.4.3 CREER LES DEUX FISSURES :

2.4.3.1 DEFINIR DES POINTS CLES :

Preprocessor > Modeling > Create >Key points> In Active CS

La distance entre fissure (1 et 2) : **a**

FISSURE 1 :

POINTS	X	Y
10	44	55
11	45.5	55.05
12	45.5	54.95
13	54.5	55.05
14	54.5	54.95
15	56	55

*Table 1 des points fissure 1***FISSURE 2 :**

POINTS	X	Y
16	44	49
17	45.5	49.05
18	45.5	48.95
19	54.5	49.05
20	54.5	48.95
21	56	49

*Table 2 des points fissure 2***2.4.3.2 DEFINIR DES SEGMENTS DE LIGNE :**

Preprocessor > Modeling > Create > Lines > Lines > straight Line

Nous allons créer les 6 segments de ligne suivants (figure).

2.4.3.3 CREER LA FORME :

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Arbitrary > By Lines

Sélectionnez toutes les lignes en sélectionnant «Loop» dans la fenêtre de sélection, puis en sélectionnant l'une de ces lignes. Cliquez sur **OK**

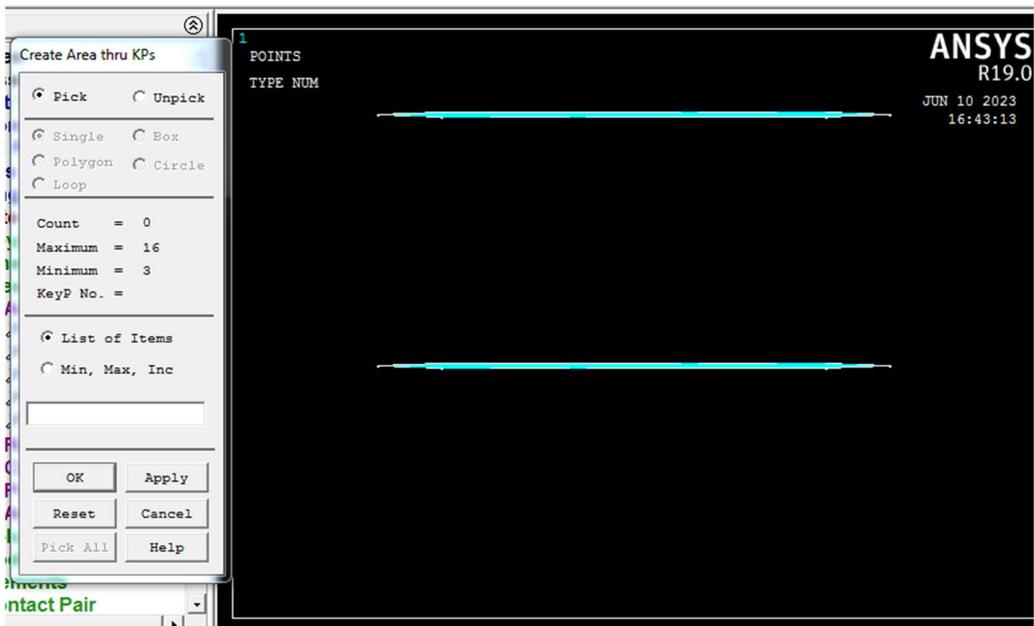
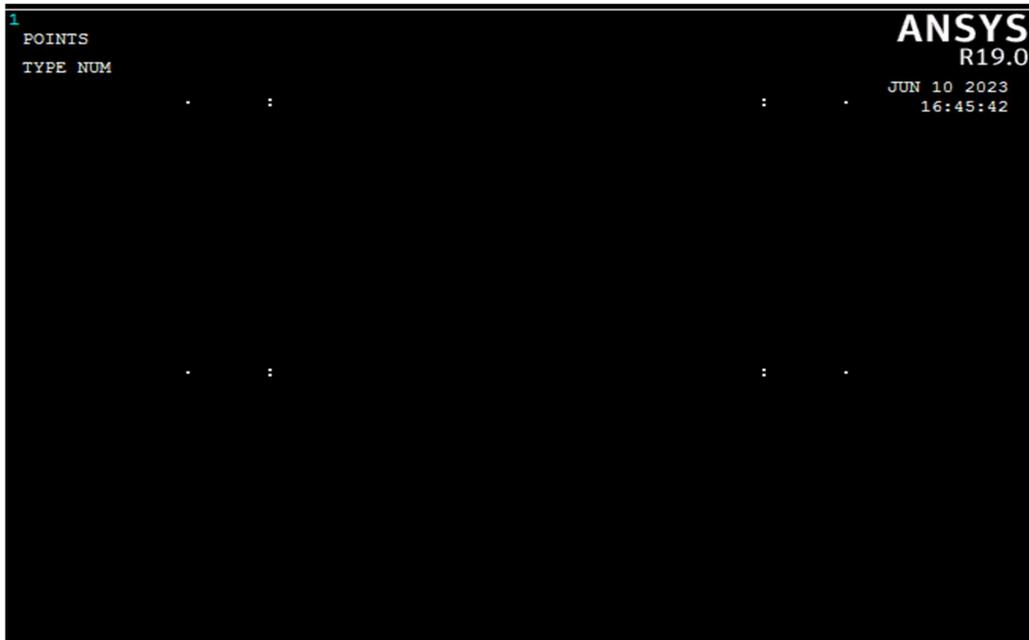


Figure 56 Créer une fissure

2.4.3.4 SOUSTRAIRE LES FISSURES DE LA FORME :

Les fissures est soustrait selon le chemin suivant indiqué sur la (figure.).

Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Subtract > Area

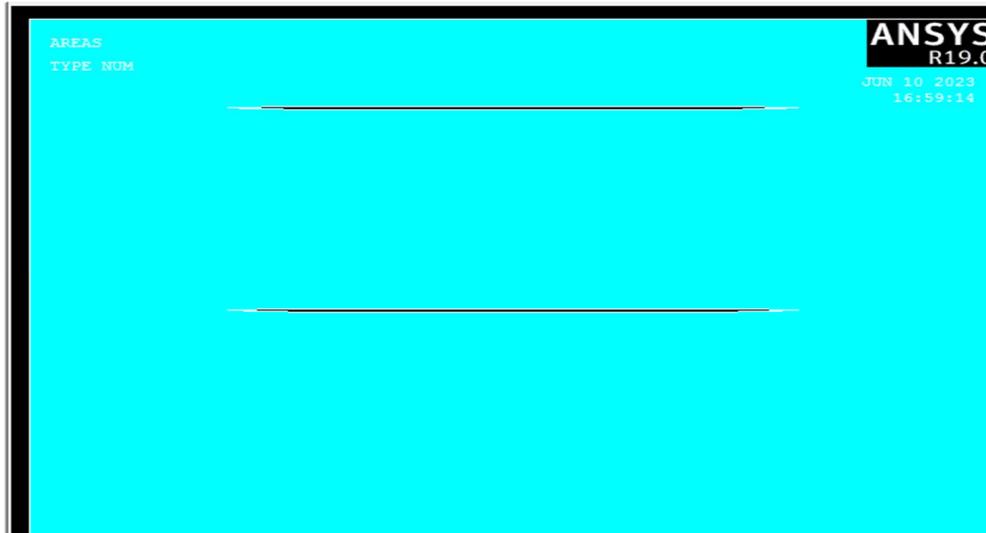
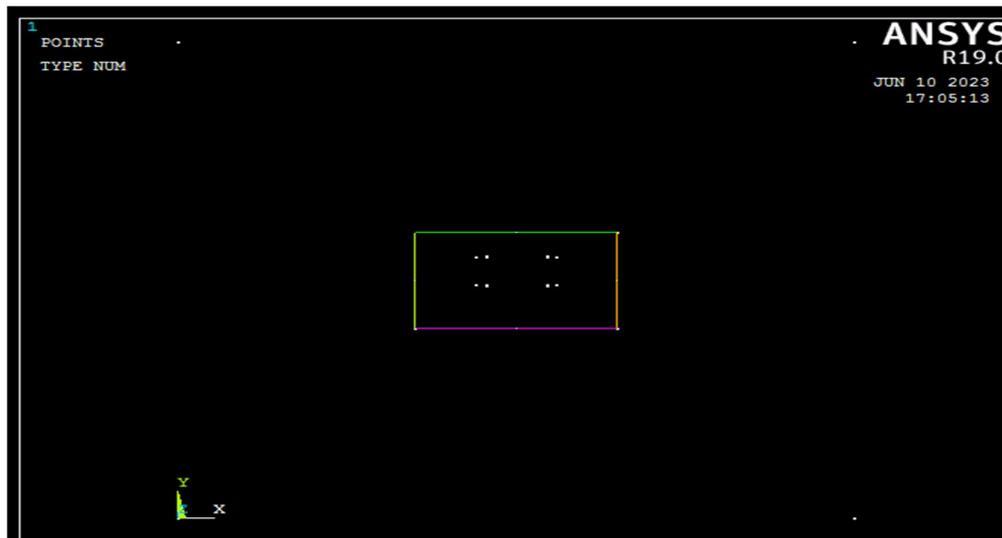


Figure 57 Soustraire les fissures de la forme

2.4.4 CREER UN RECTANGLE :

Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle > By Center & Corners



Modling>Operation>Booleans>Divide>areas by Line

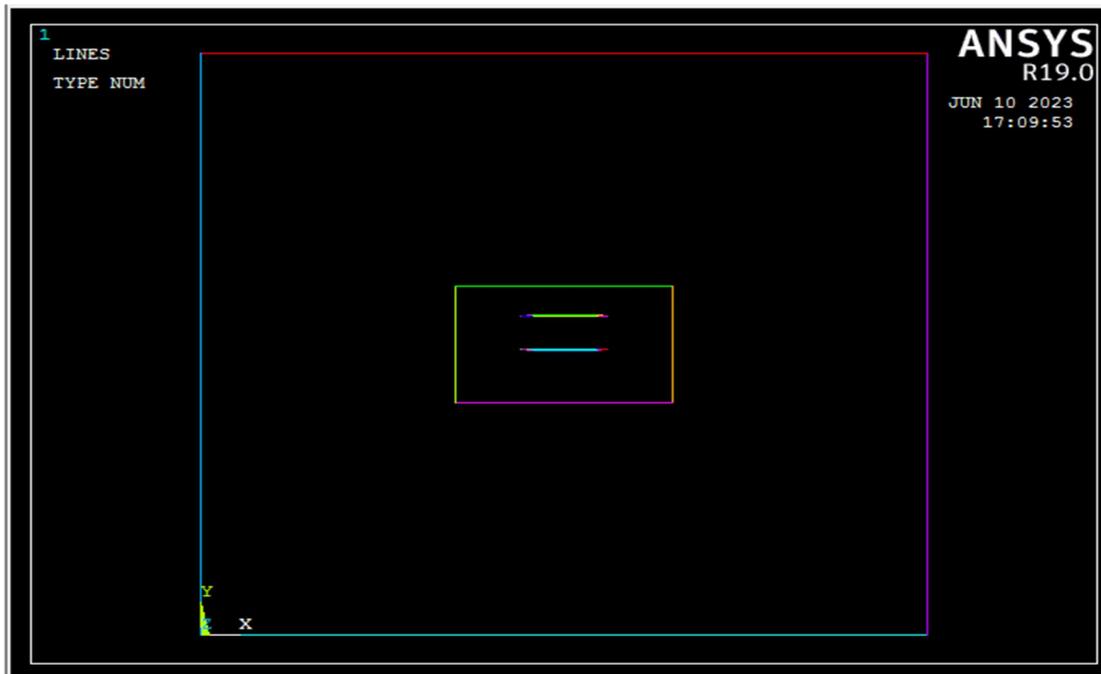
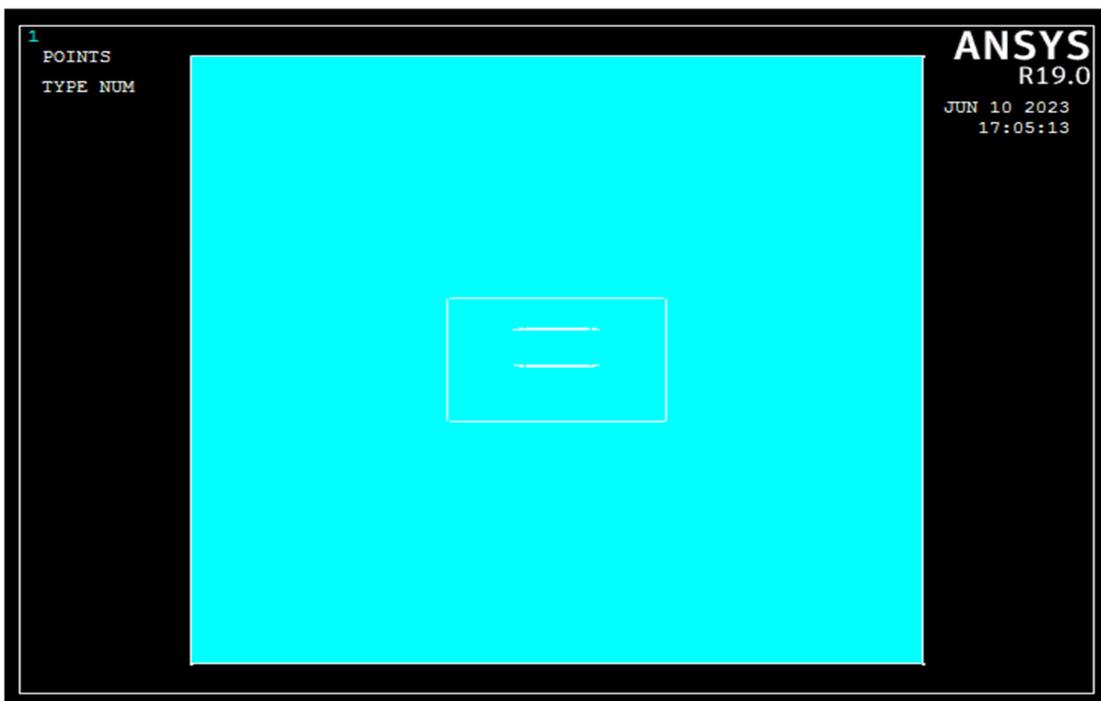


Figure 58 Créer un rectangle

Main Menu > Preprocessor > Modeling > Operate > Booleans > Glue > Area



2.5 DIVISION DE LA FORME :

2.5.1 CREER LE POINT CLE DE CONCENTRATION (POINT FISSURE 1) :

Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > Concentrat KPs > Create

Choisissez le point 15, cliquez OK.

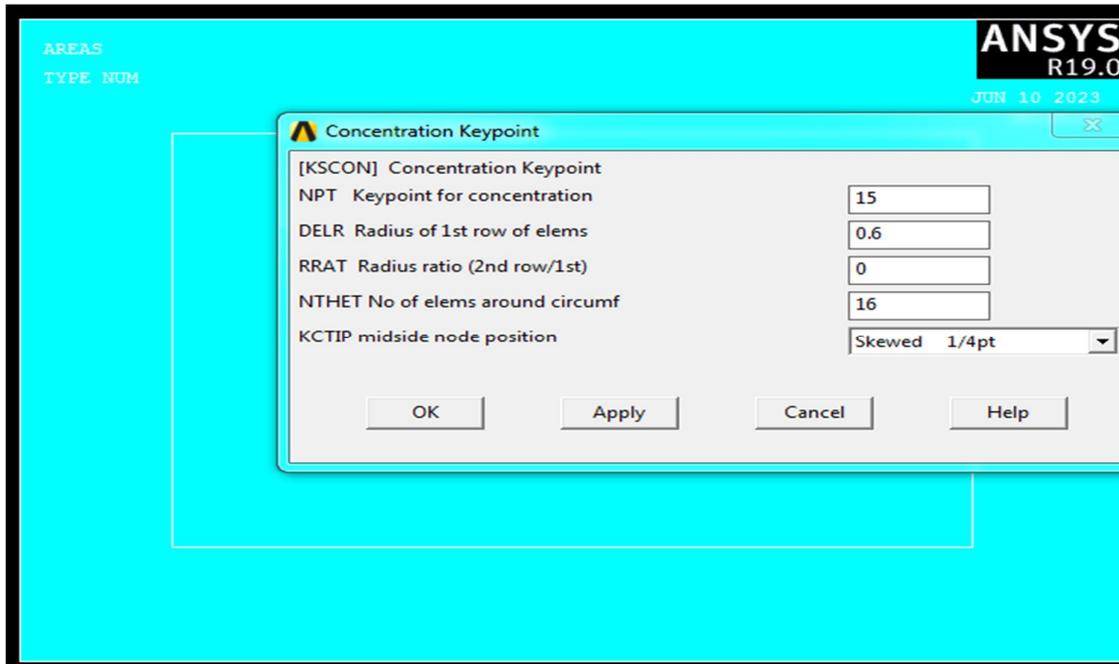


Figure 59 Créer le point clé de concentration (point fissure)

2.5.2 IDENTIFIER LE MATERIAU :

Preprocessor > Meshing > Mesh Attributes > Picked areas

2.5.2.1 IDENTIFIER PLAQUE :

Sélectionner plaque .cliquez OK

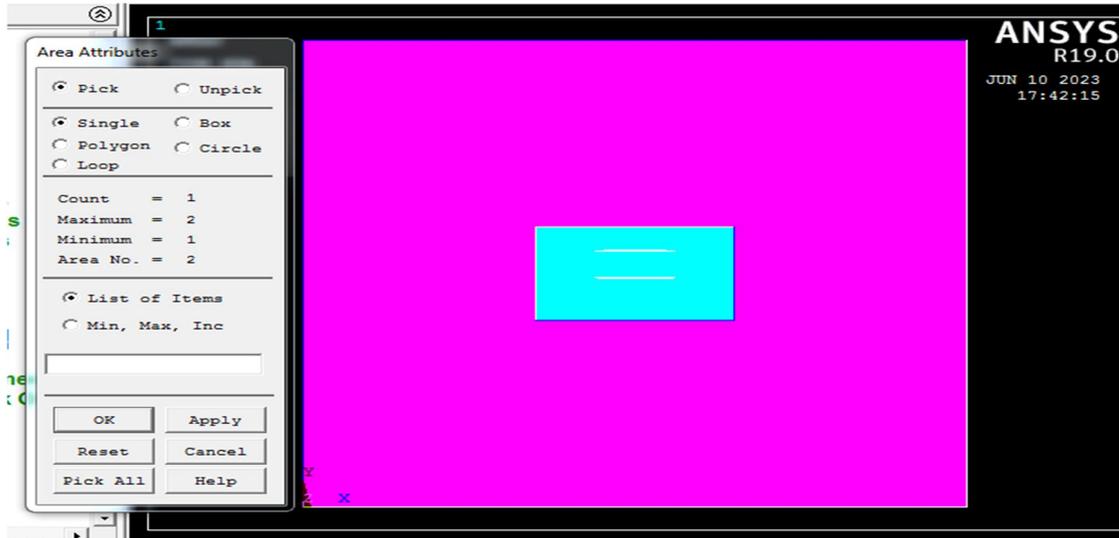
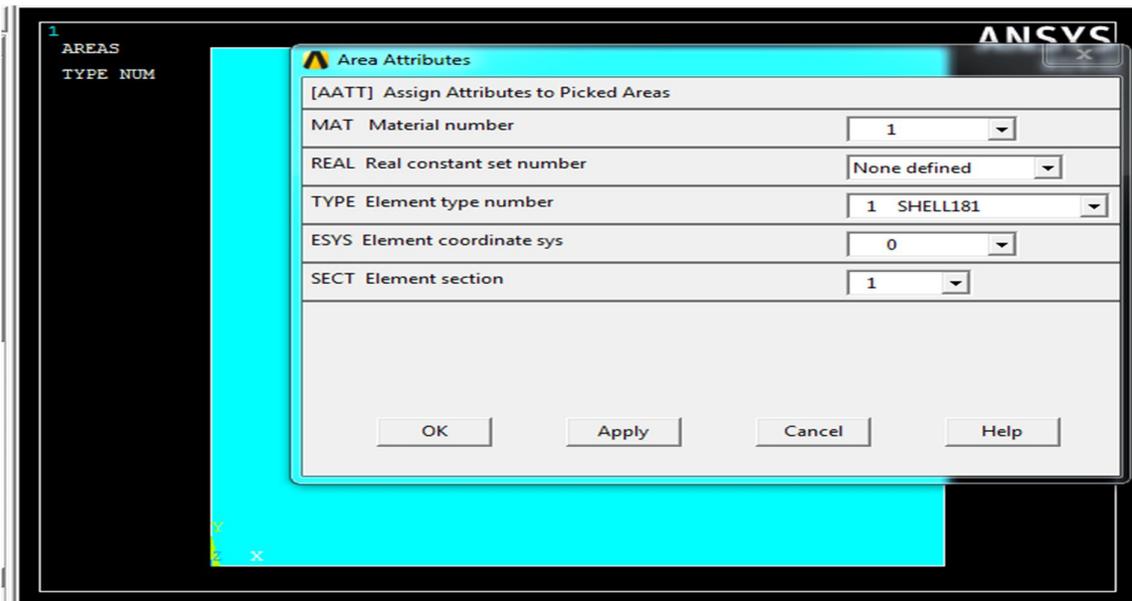


Figure 60 Identifier plaque

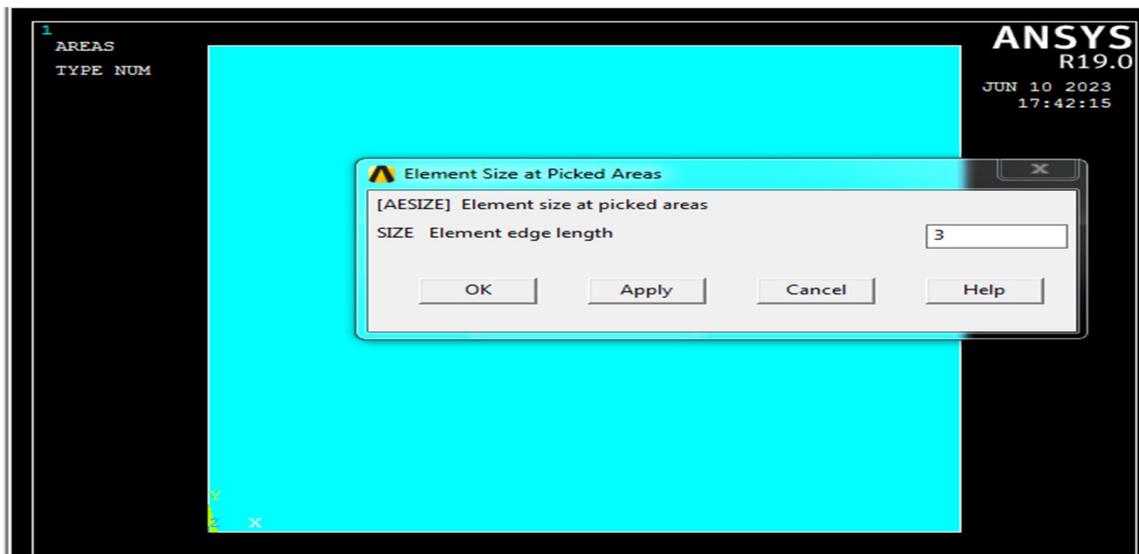
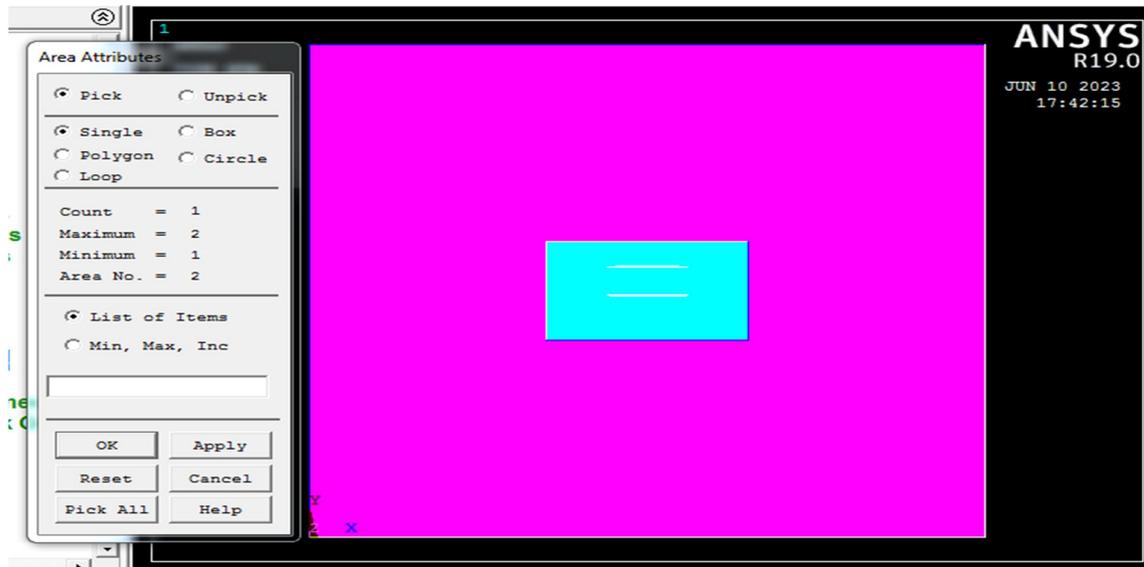


2.5.3 DIVISION DE LA FORME :

Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > ManualSize > areas > Picked areas

Sélectionne une plaque .cliquez ok et la plaque2 ok. 'Element edge length' 03 cliquez OK

Sélectionne ptit rectengle .cliquez ok. 'Element edge length' 0.6 cliquez OK



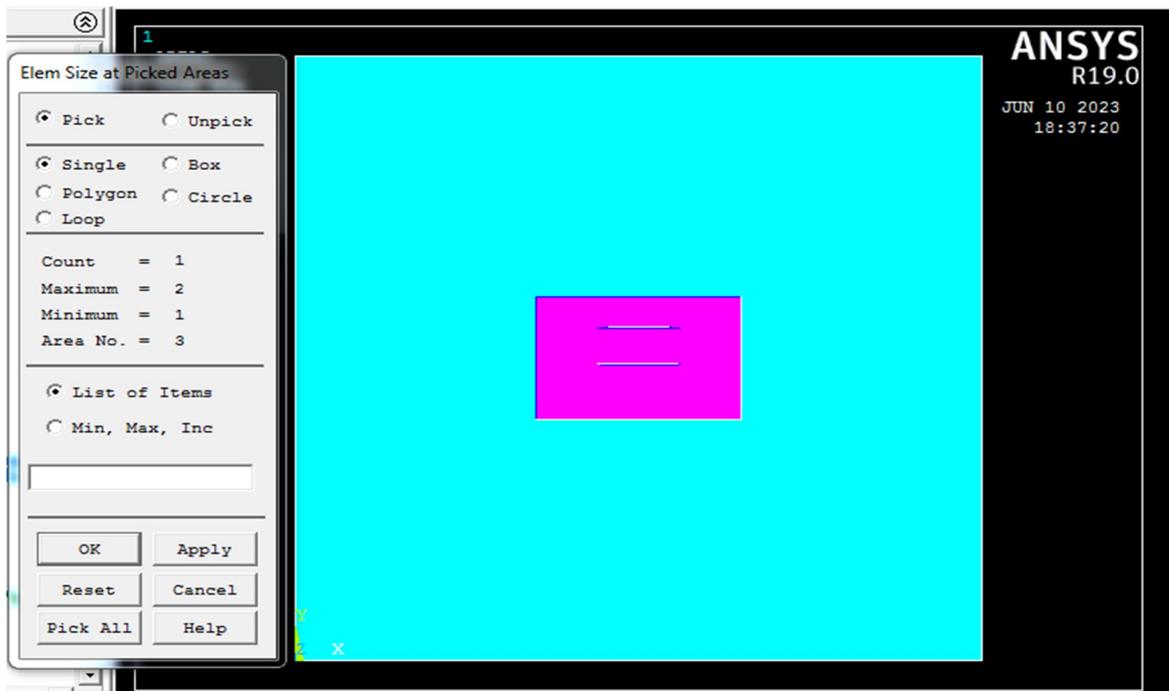
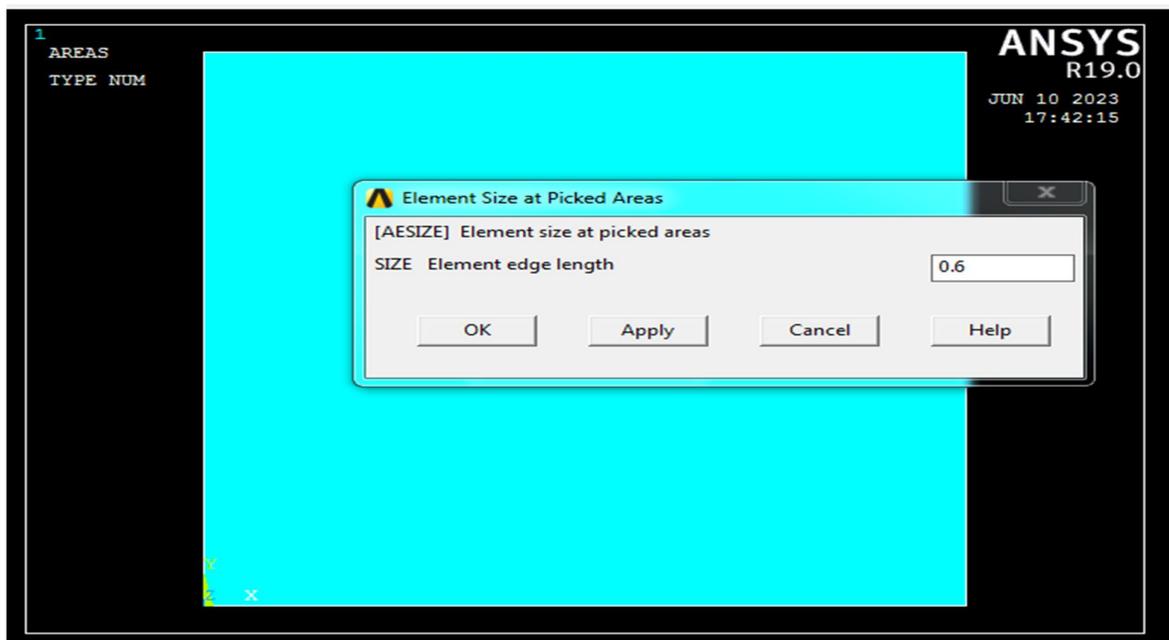


Figure 61 Identifier rectangle



Preprocessor > Meshing > Mesh >Mesh Tool> Mesh>pick all

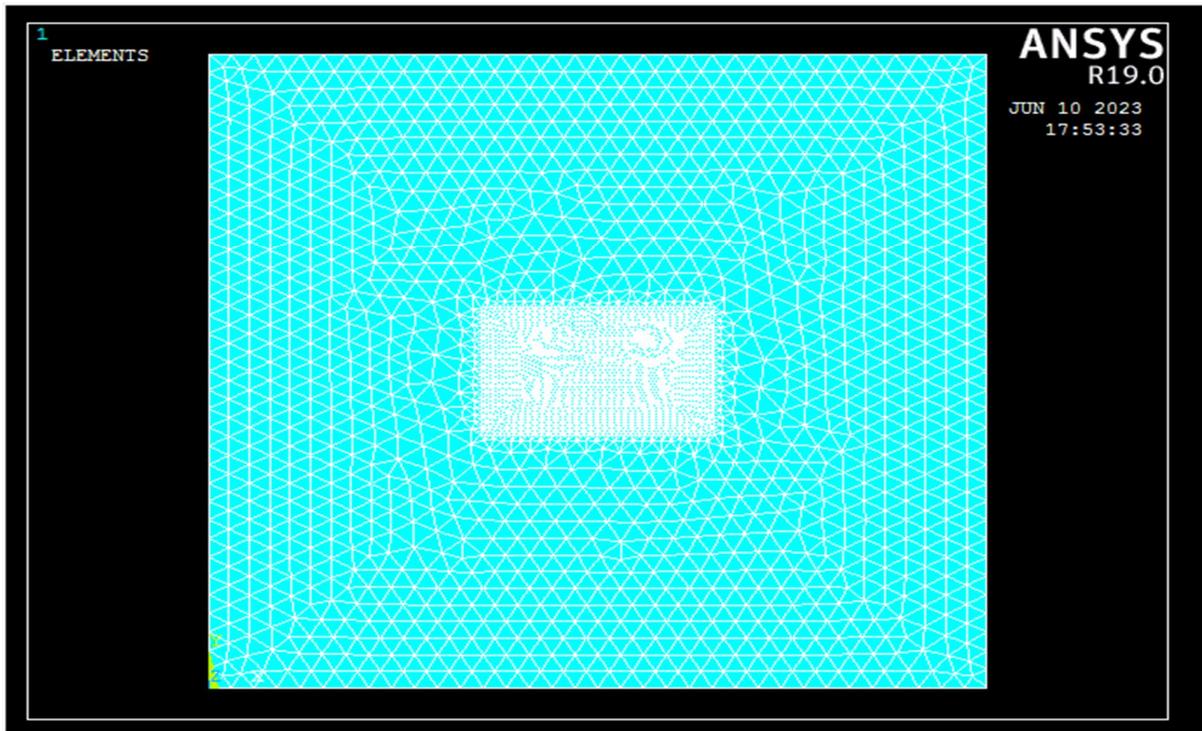


Figure 62 Meshing

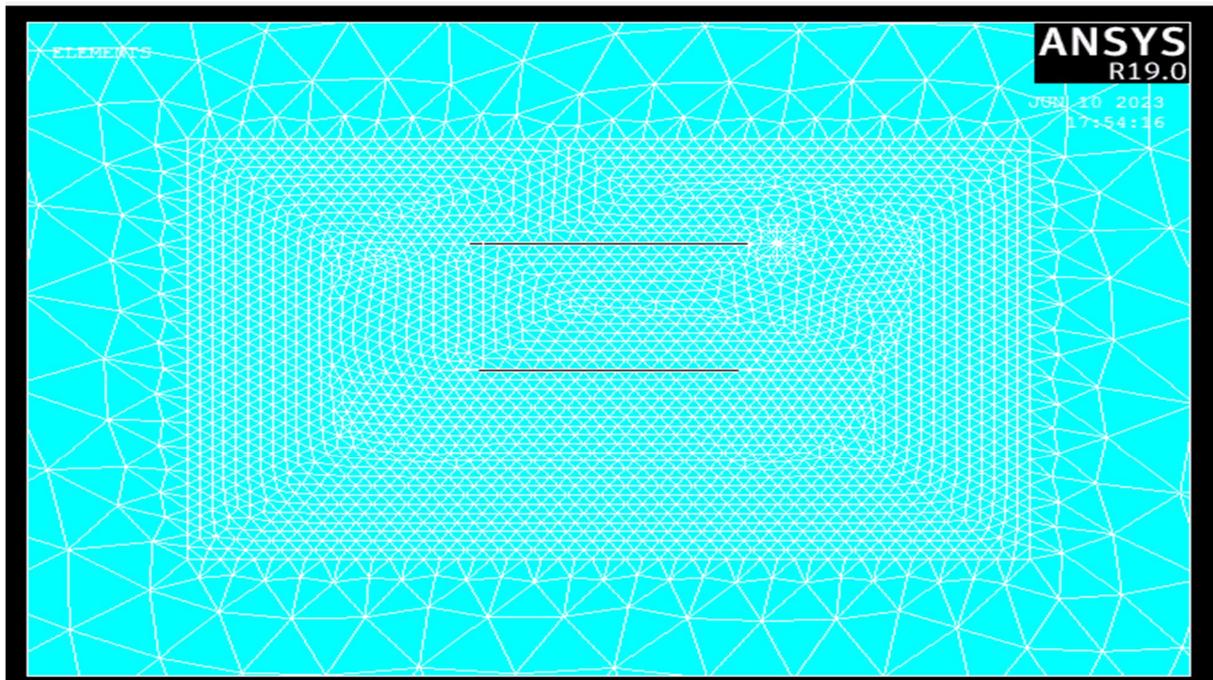


Figure 63 Division la forme

3 APPLIQUER DES CHARGES

Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Lines

Sélectionnez Les lines longitudinal du grand rectangle cliquez OK

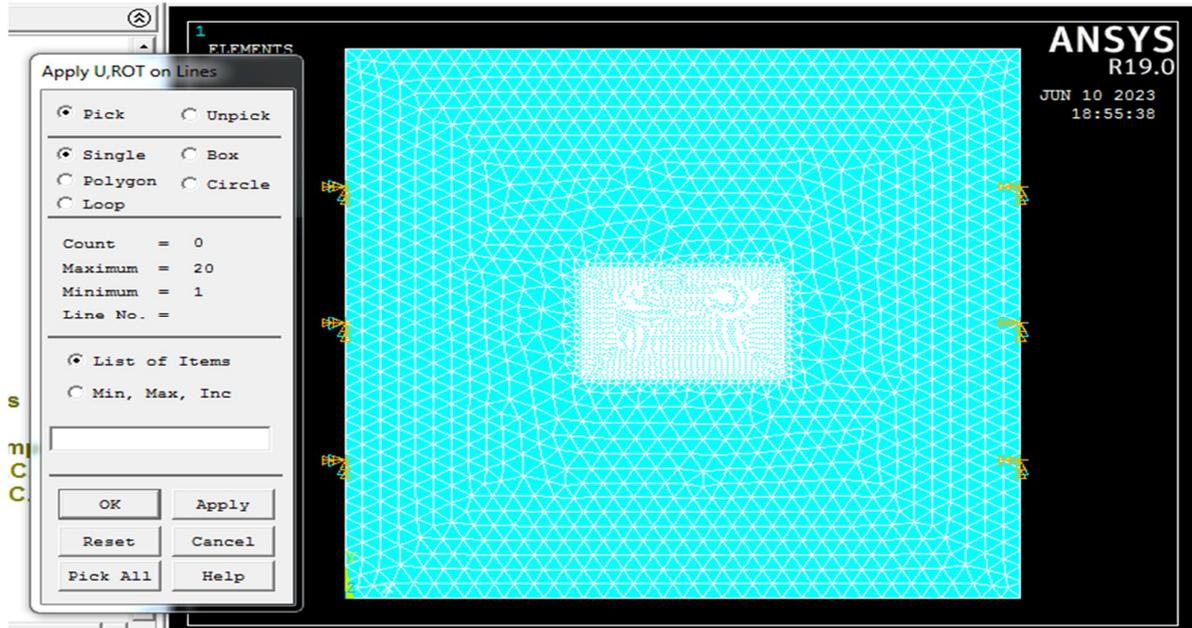
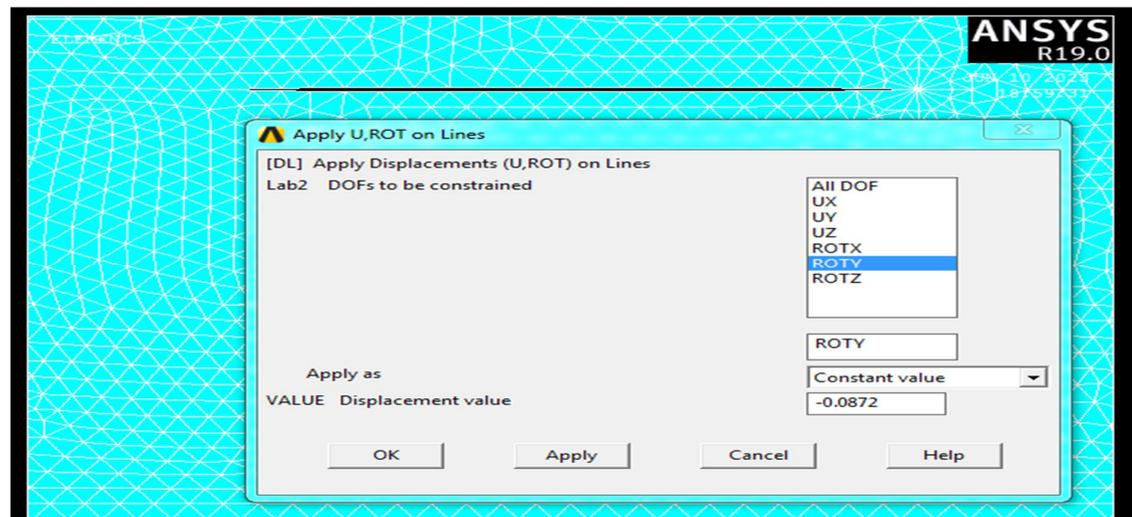


Figure 64 Appliquer des charges (déplacement)

Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Lines

Sélectionnez la line supérieure de la fissure .cliqué OK



Preprocessor > Loads > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Lines

Sélectionnez la ligne inférieure de la fissure .cliqué OK

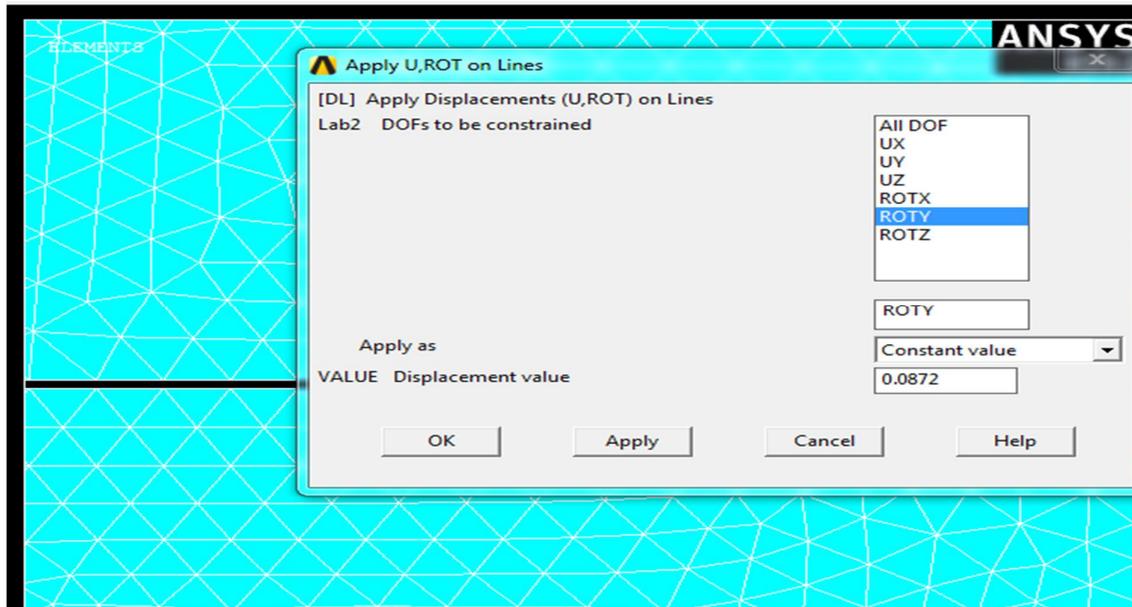


Figure 65 Appliquer des charges (Rot y)

4 L'ANALYSE A COMMENCE

Solution > Solve > Current LS

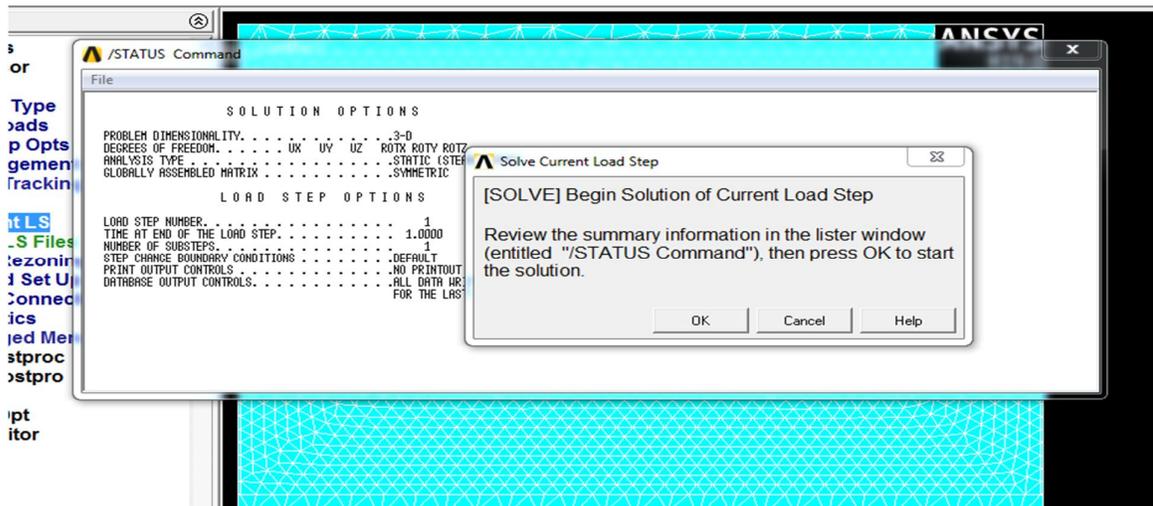
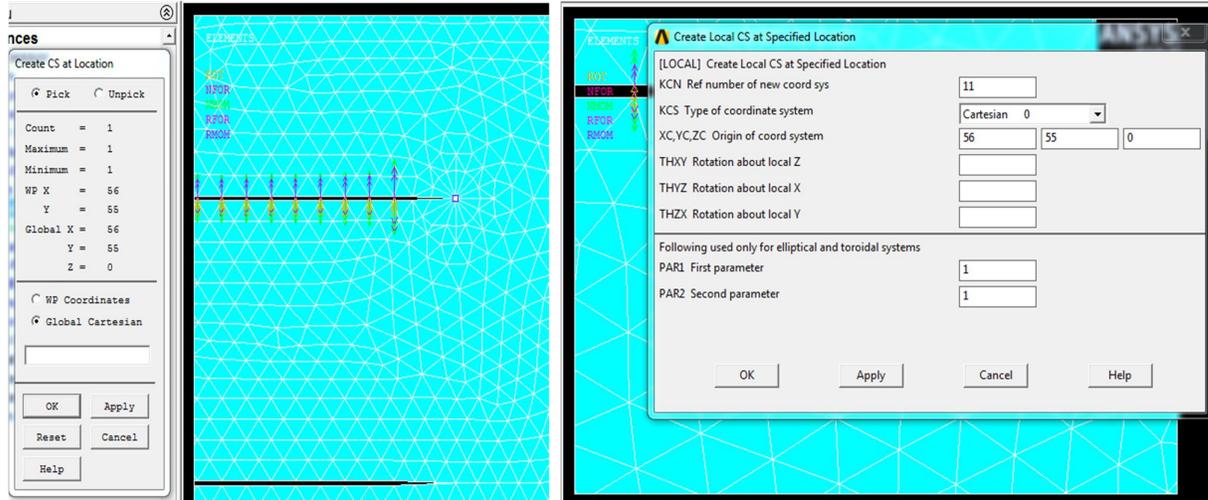


Figure 66 L'analyse a commencé

5 ANALYSE DIMENSIONNELLE

5.1 ZOOEZ SUR LA ZONE DU FOND DE FISSURE :

WorkPlane > Local Coordinate Systems > Create Local CS > By 3 Nod



5.1.1 ACTIVER LE SYSTEME DE COORDONNEES :

Pour activer le système de coordonnées du fond de fissure en fonction des résultats du

Système de coordonnées. Sélectionner **General Postproc > Options for Outp.**

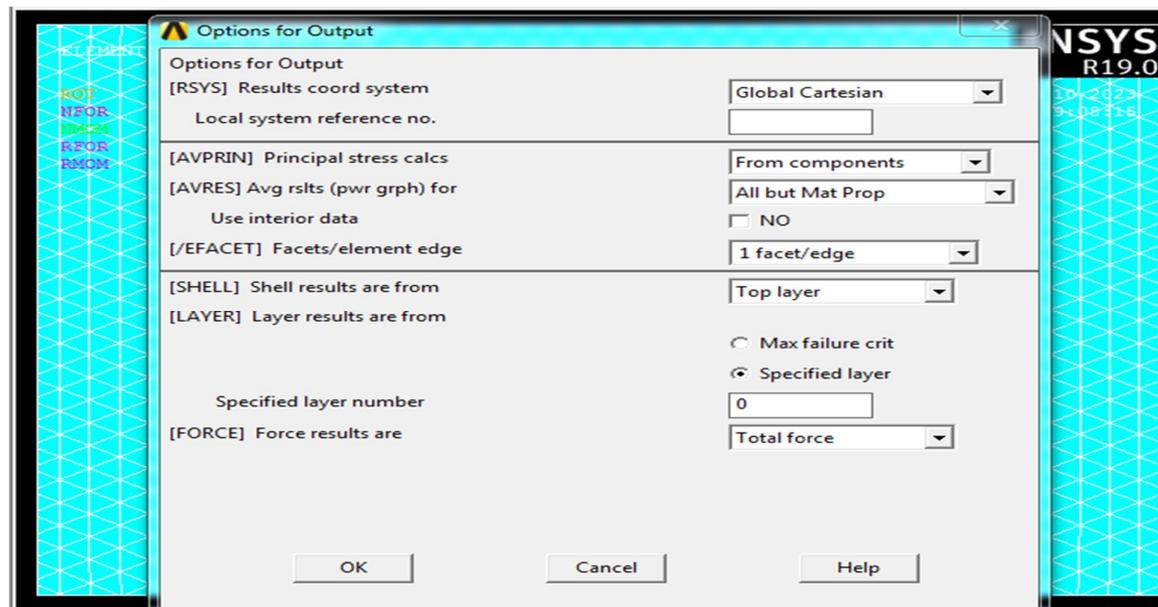


Figure 67 Activer le système de coordonnées

5.1.2 DETERMINER LE CHEMIN DE FISSURE :

General Postproc > Path Operations > Define Path > By Nodes

Choisissez le nœud de fissure (nœud 1496), puis 2 nœuds sur les faces de fissure. Cliquez **OK**.

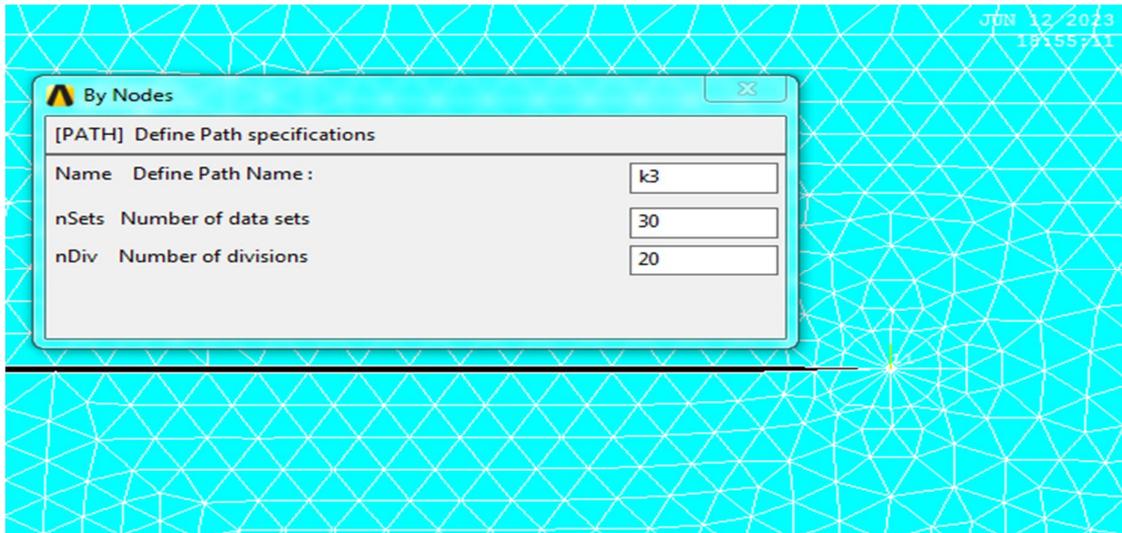


Figure 68 définir le nom du chemin

5.1.3 DETERMINER LE FACTEUR DE CONTRAINTE MODE I AL'AIDE DE KCALC

General Postproc > Nodal Calcs > Stress Int Factor

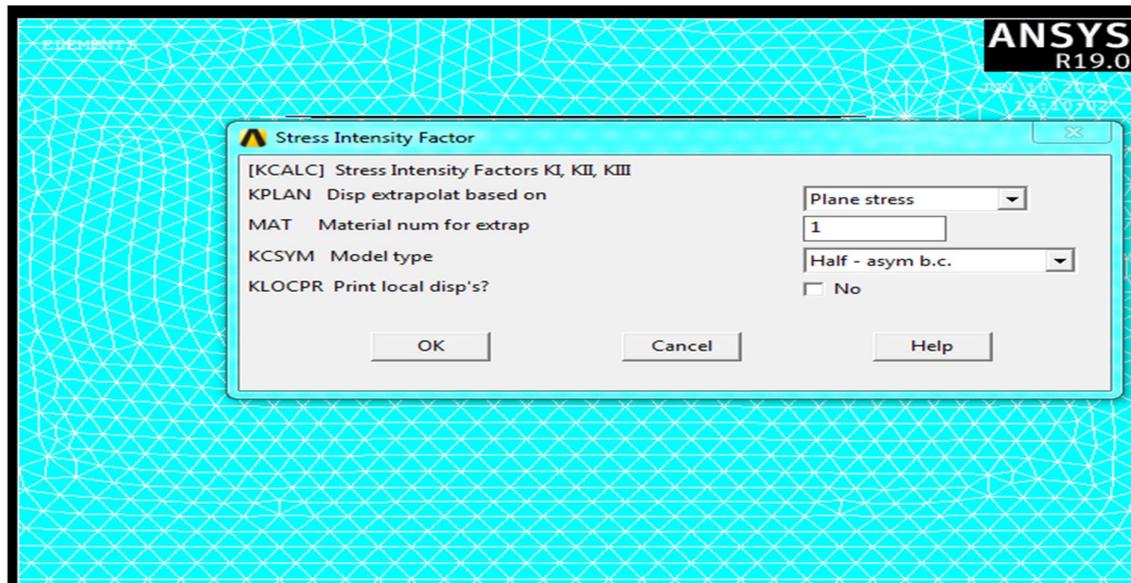


Figure 69 Déterminer le facteur de contrainte

Cliquez sur OK. La fenêtre apparaît

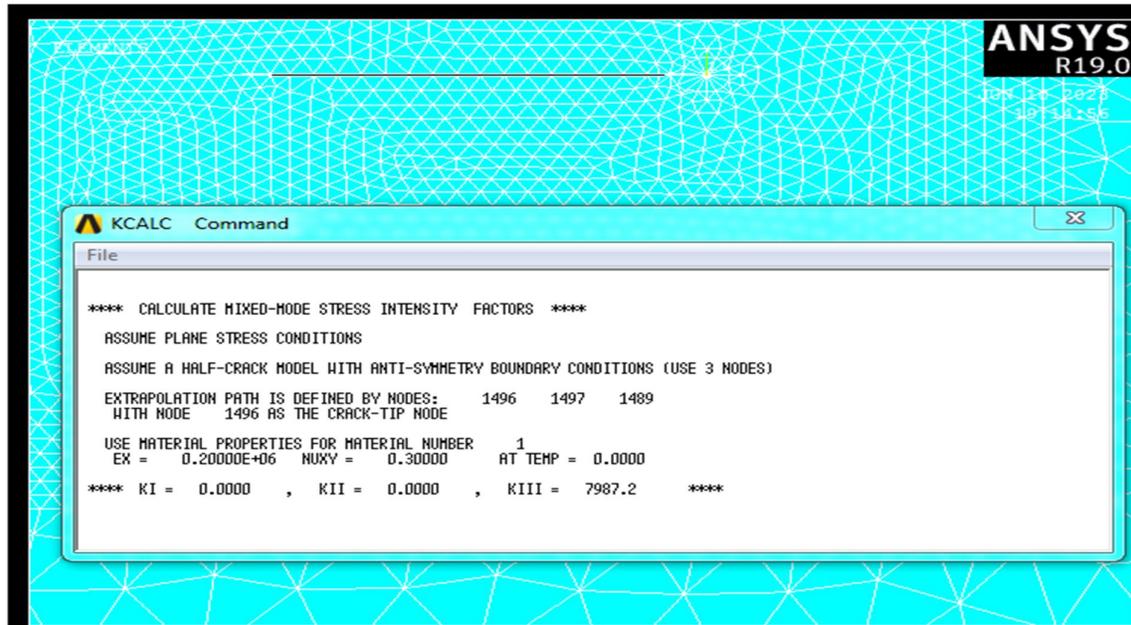


Figure 70 Affiche les valeurs KI, KII, KIII

5.1.4 CREER LE POINT CLE DE CONCENTRATION (POINT FISSURE 2) :

Preprocessor > Meshing > Size Cntrl > Concentrat KPs > Create.

choisissez le point 21, cliquez OK.

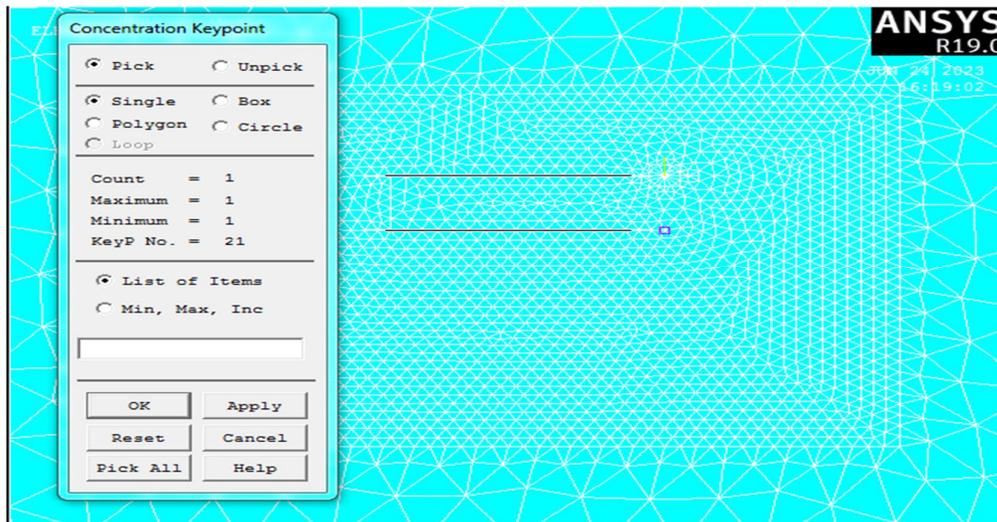


Figure 71 Créer le point clé de concentration (fissure 2)

5.1.5 DETERMINER LE FACTEUR DE CONTRAINTE MODE I AL'AIDE DE KCALC

General Postproc > Nodal Calcs > Stress Int Factr

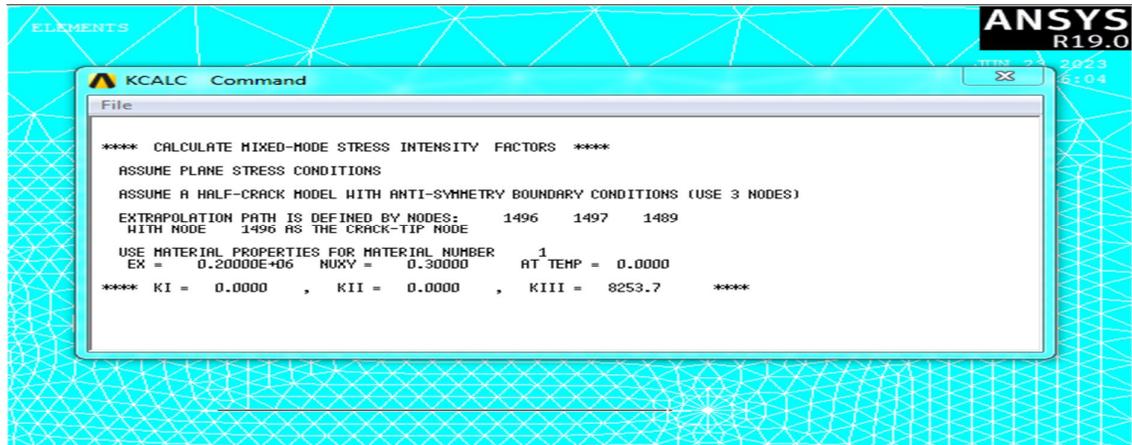


Figure 72 Affiche les valeurs KI, KII, KIII

6 SOLUTION

General Postproc > Contour plot > Nodal solu > DOF Solution > Displacement vector sum

Cliquez sur OK

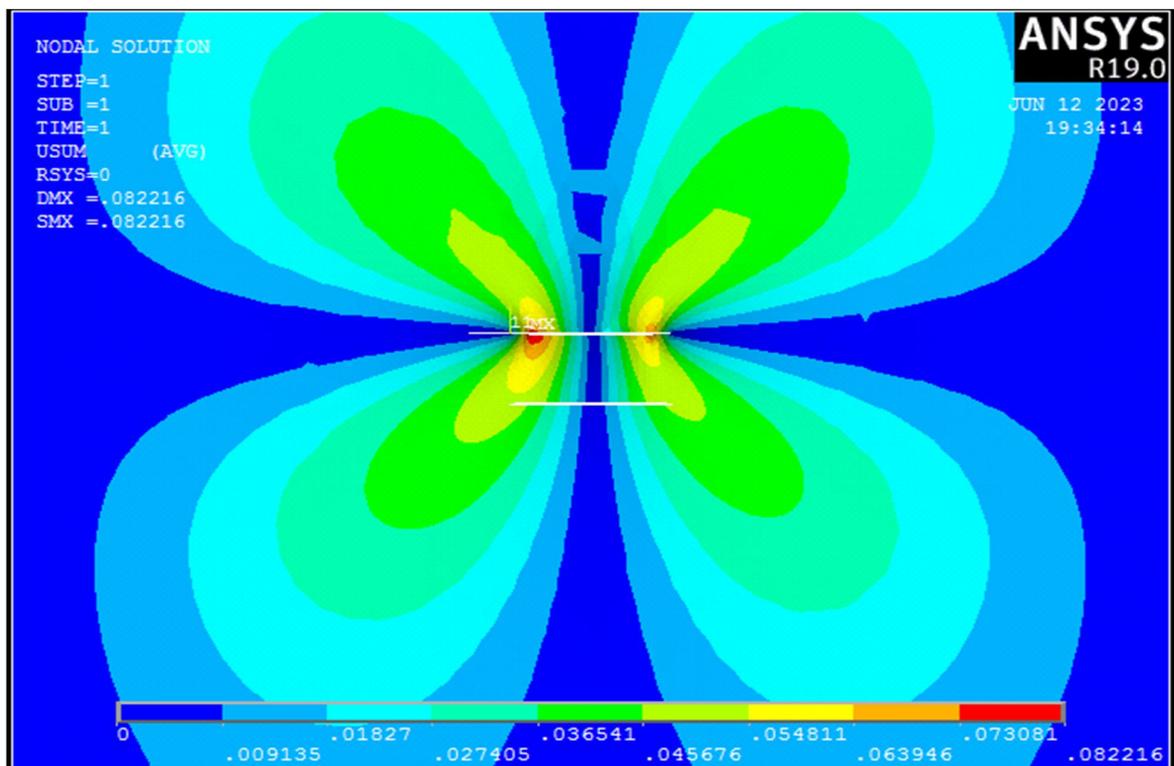


Figure 73 Nodal solu

7 CONVERGENCE

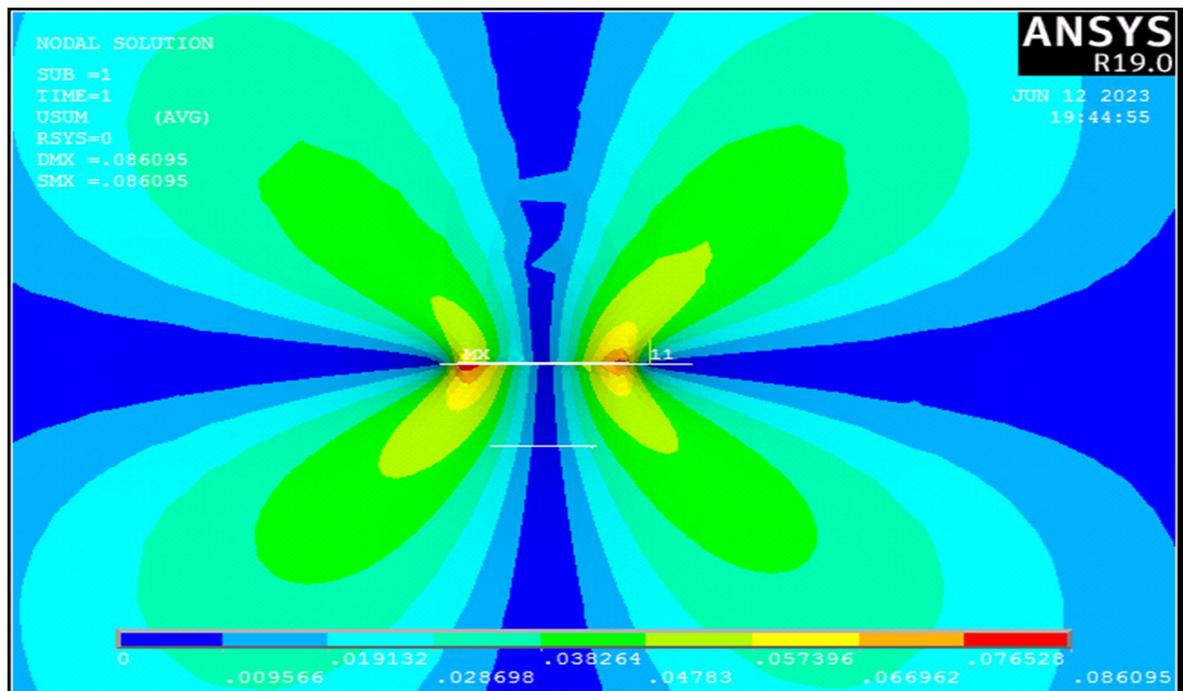
Dans cette partie, afin de montrer l'efficacité et la précision de la présente étude, nous donnons quelques résultats de calcul du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la taille de la fissure inférieur (2) (nous l'appelons b) sur la fissure supérieur (1) (b/a) .

b/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K3	7790.4	7864.2	7900.4	7901.4	7914.3	7927.9	7935.5	7940.3	7946.0	7987.2
b/a	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
K3	7948.5	7950.3	7955.4	7957.2	7961.9	7963.6	7965.1	7966.5	7994.5	8053.8

Tableau FIC en fonction de la taille de la fissure 2 sur la fissure 1 (b/a).

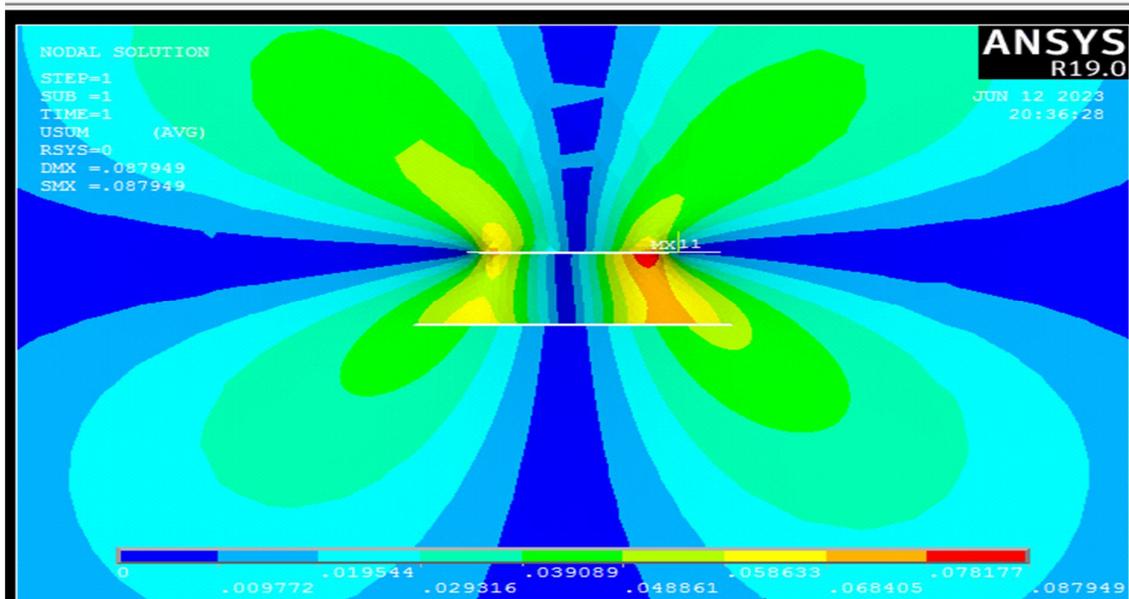
General Postproc>Contour plot>Nodal solu>DOF Solution>Displacement vector sum

Cliquez sur OK. Pour b/a=0.5



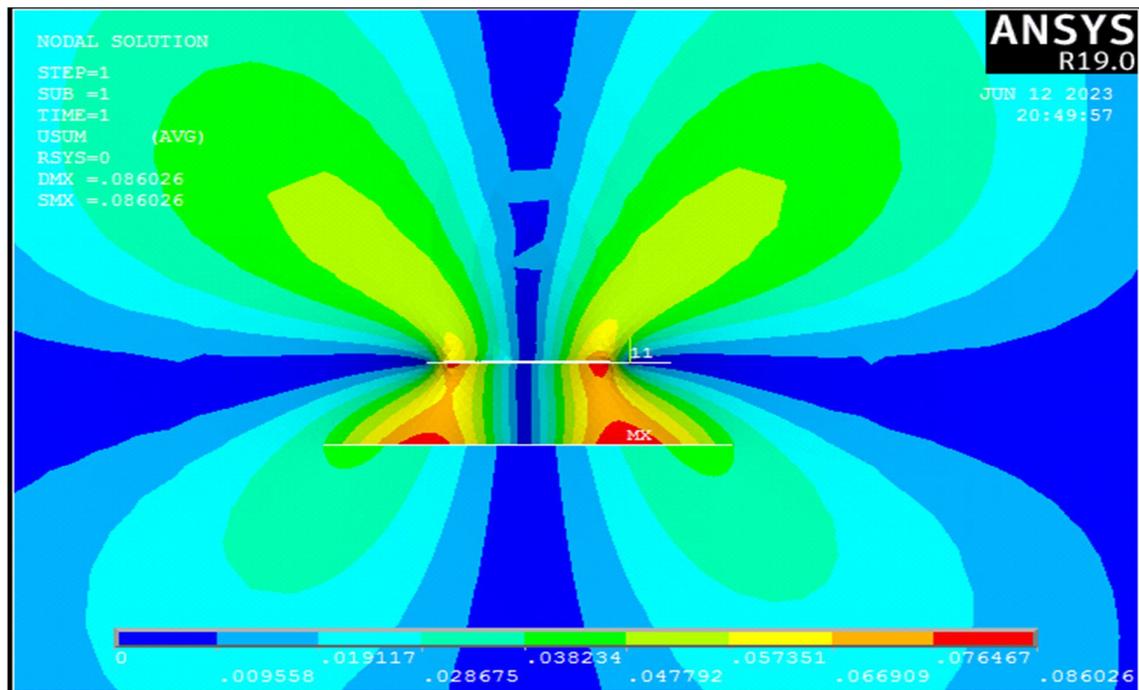
General Postproc>Contour plot>Nodal solu>DOF Solution>Displacement vector sum

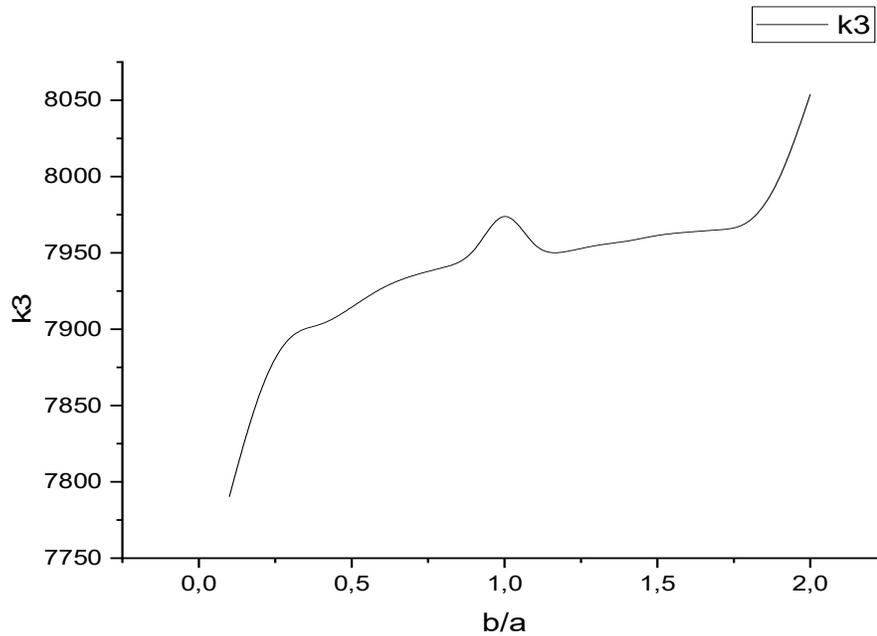
Cliquez sur OK. Pour $b/a = 1.5$



General Postproc>Contour plot>Nodal solu>DOF Solution>Displacement vector sum

Cliquez sur OK. Pour $b/a = 2$





Le tableau et la figure représente le FIC en fonction du rapport b/a ,

b représente la longueur de la fissure inférieure et a la fissure supérieure.

On observe d'après le tableau que le facteur d'intensité de contrainte augmente en fonction du rapport b/a sur l'intervalle de 0,1 à 1 après il diminue sur l'intervalle de 1,1 à 1,8 finalement il augmente sur l'intervalle de 1,9 à 2.

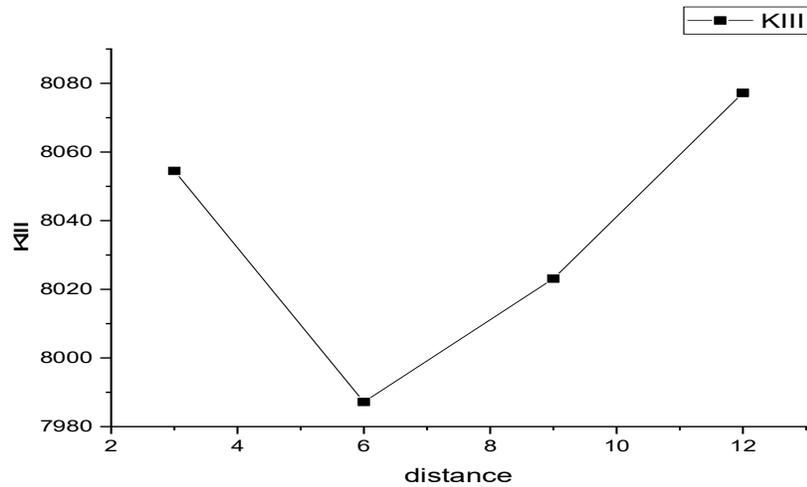
On remarque que $K3$ est maximale lorsque le rapport b/a est égale a 2 cela est logique car le fissure inférieure est 2 fois plus grande que la fissure supérieure donc elle engendre une concentration de contrainte plus grande

EFFET DE LA DISTANCE ENTRE LA FISSURE (1) et (2) :

Nous nous intéressons à la variation du Facteur d'intensité en fonction de la distance entre la fissure (1) et (2) .

Distance	3	6	9	12
KIII	8054.5	7987.2	8023.1	8077.2

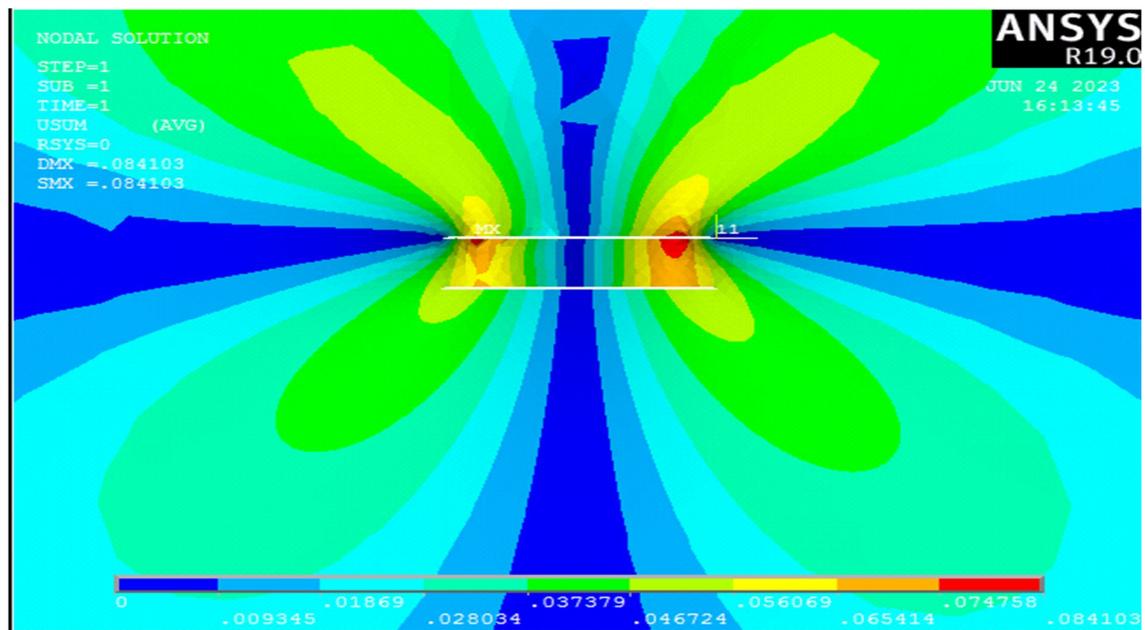
Table 3 FIC en fonction de la distance entre fissure 1 et fissure 2



Dans ce cas on a étudié l'influence de la distance entre les deux fissures sur le facteur d'intensité de contrainte.

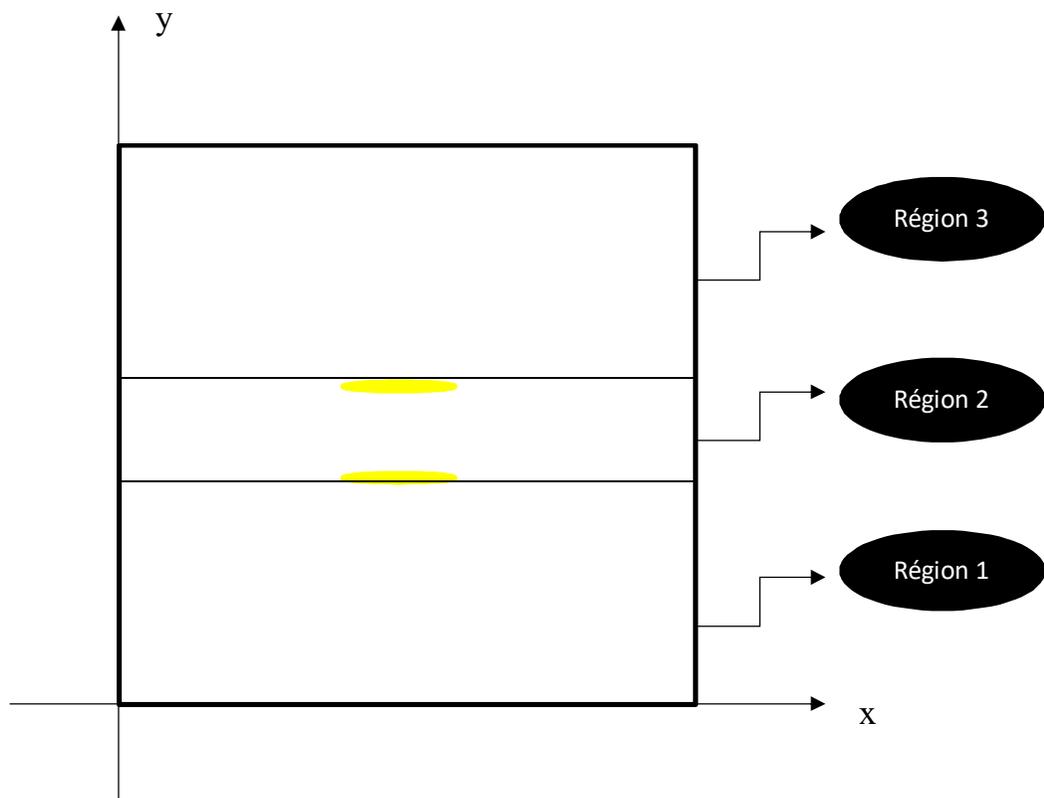
Le tableau est la figure représente le Facteur d'intensité de contrainte KIII en fonction de la distance entre les deux fissure.

L'effet de la distance 3.



Dans cette étape, nous étudierons les changements de déplacement sur l'axe Z dans chaque région de la plaque.

Dans Les régions (1) et (3) on a fait 5 chemin, et la région (2) on a fait 4 chemin , pour voir le changement de déplacement et de contrainte.



DETERMINER LE CHEMIN :

Nous sélectionnons deux points pour déterminer un chemin.

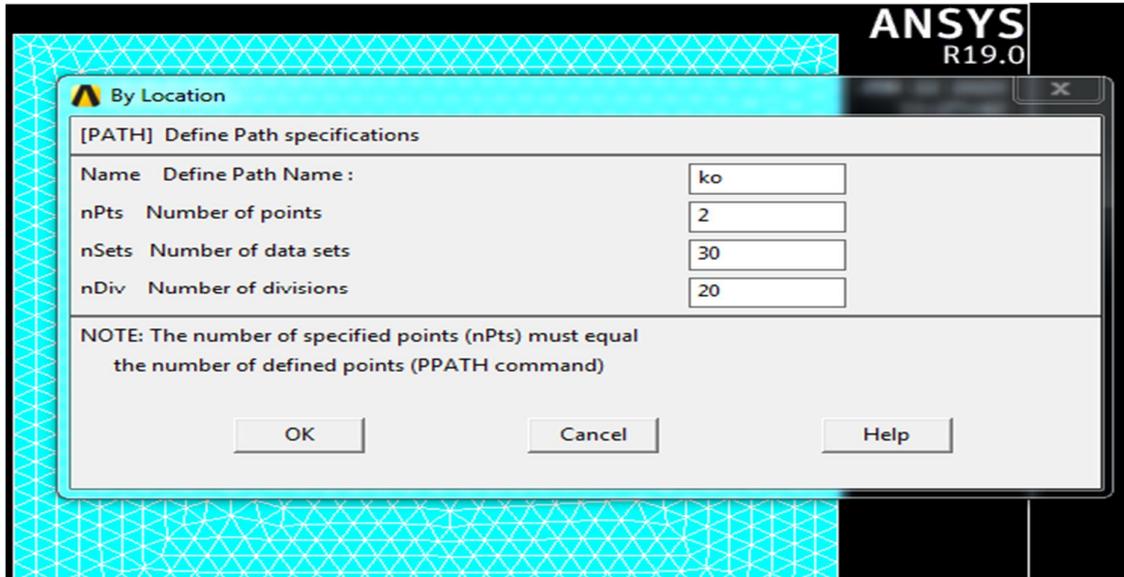
	Point 1		Point 2	
	x	y	x	y
Ch 1	50	13	70	13
Ch 2	50	22	70	22
Ch 3	50	31	70	31
Ch 4	50	40	70	40
Ch 5	50	49	70	49
Ch 6	50	50.5	70	50.5
Ch 7	50	52	70	52
Ch 8	50	53	70	53
Ch 9	50	54.5	70	54.5
Ch 10	50	55.5	70	55.5
Ch 11	50	64	70	64
Ch 12	50	73	70	73
Ch 13	50	82	70	82
Ch 14	50	91	70	91

Table 4 des chemins

Les étapes à suivre Pour déterminer un chemin :

General Postproc > Path Operations > Define Path > By Location

On à divise le chemin sur 20



Nous entrons les deux points.

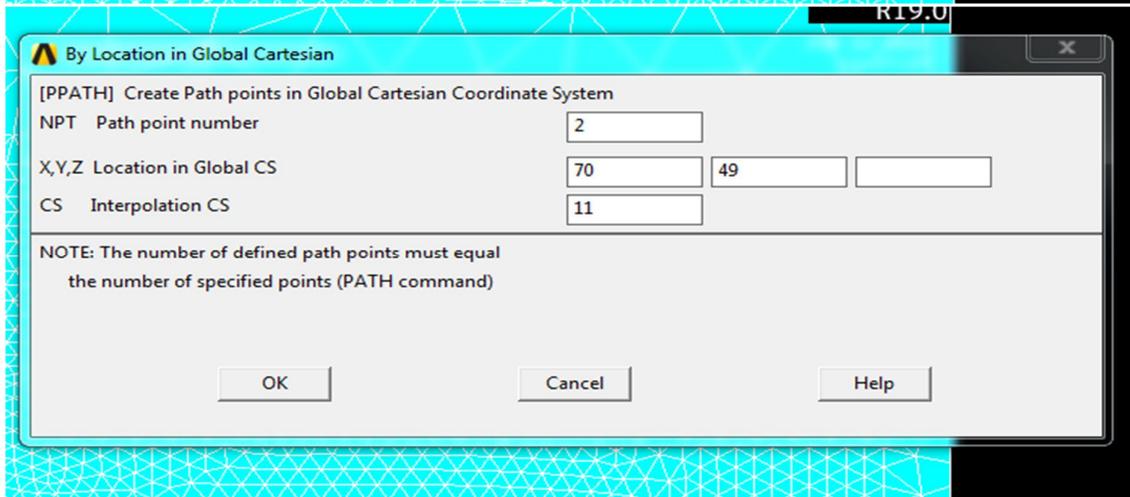
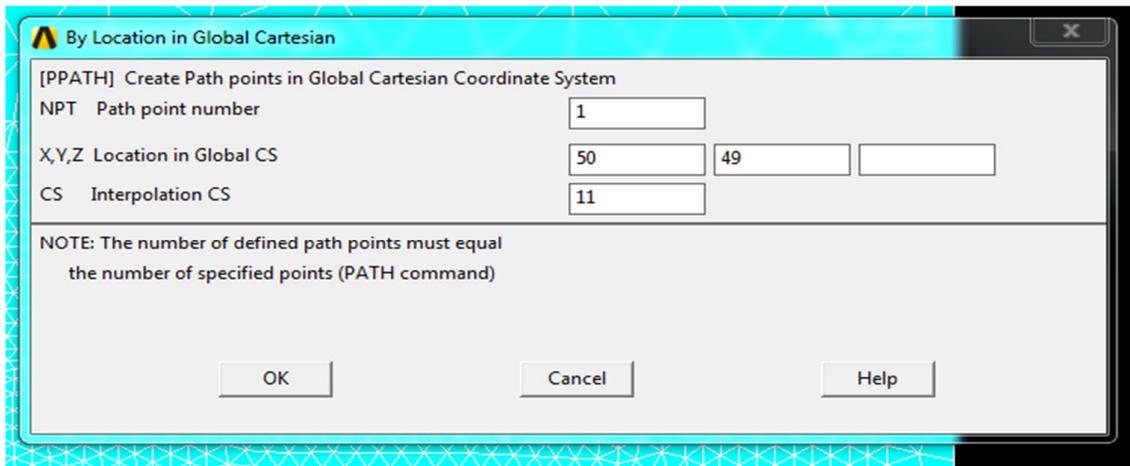
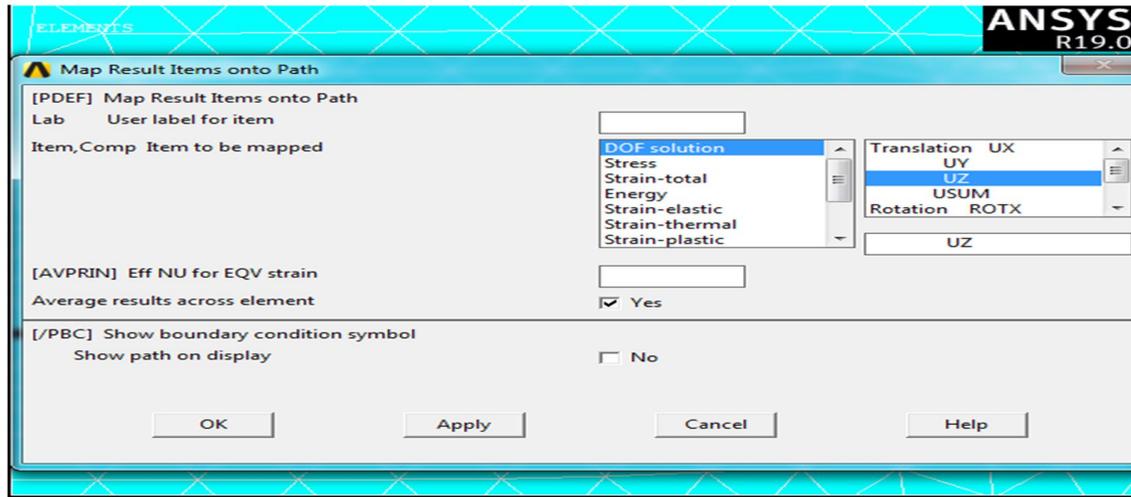
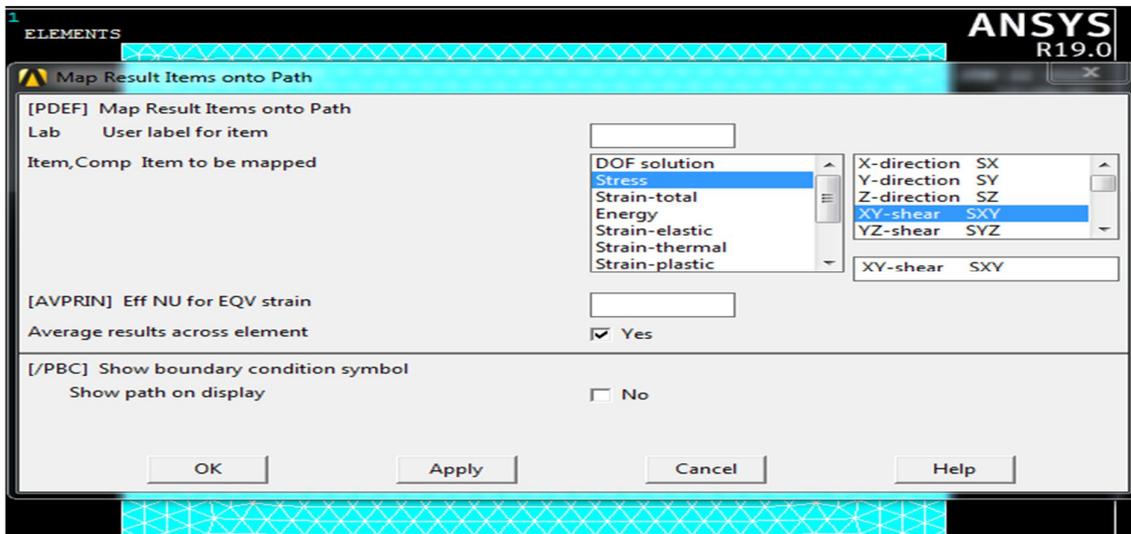


Figure 74 Définie le chemin

Pour les résultats de déplacement.



Pour les résultats de contrainte .



Pour voir les résultats on graphe :

General Postproc > Path Operations > Define Path > Plot Path Item > On graph > Liste Path Item

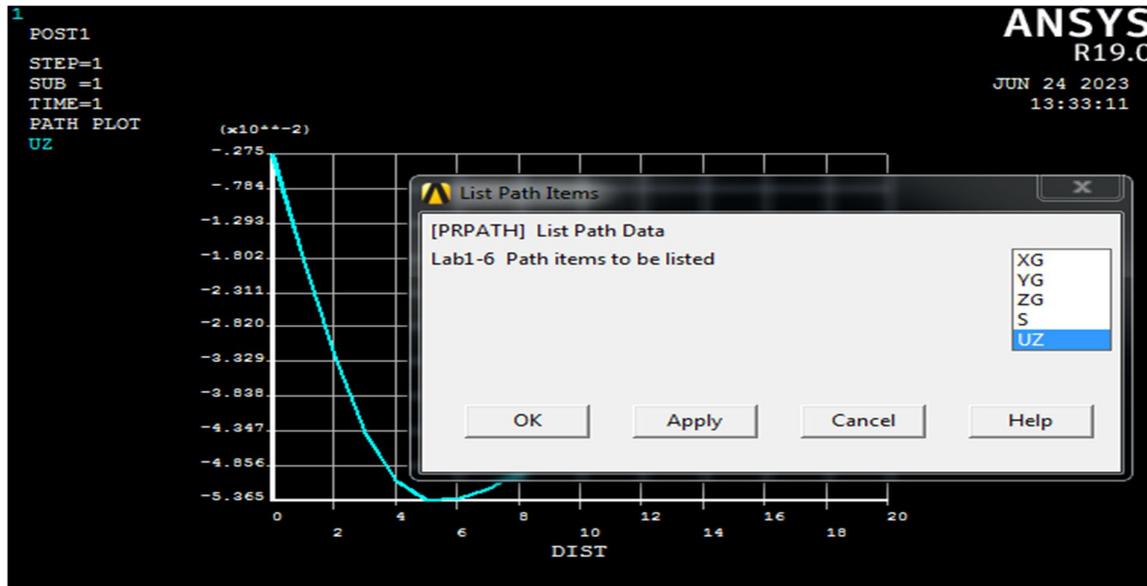


Figure 75 Plot Path on graph

Le résultat pour chaque 20 point de chemin. (Exemple d'un seul chemin).

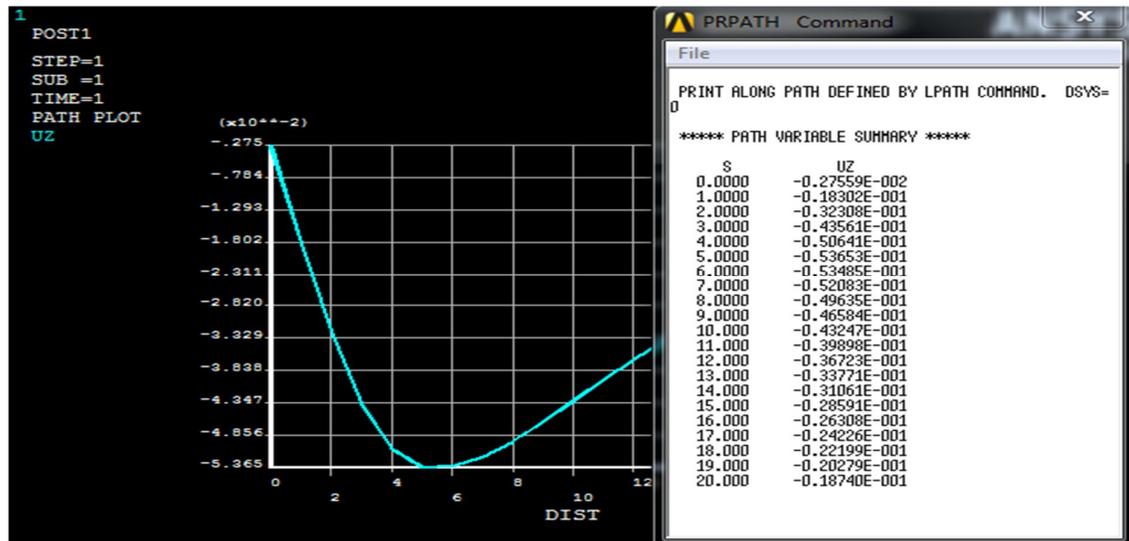


Figure 76 Liste Path Item

Les trois graphes de déplacement.

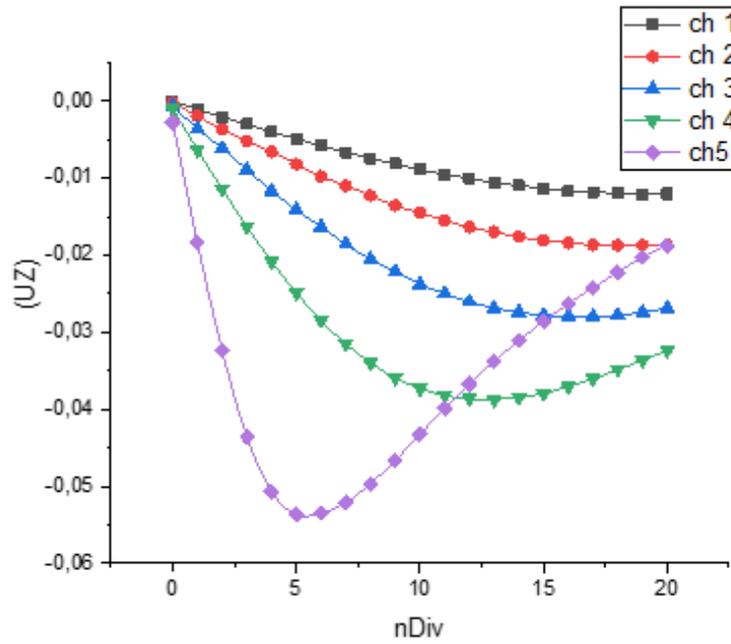


Figure 77 Graphe de déplacement de la 1ère région

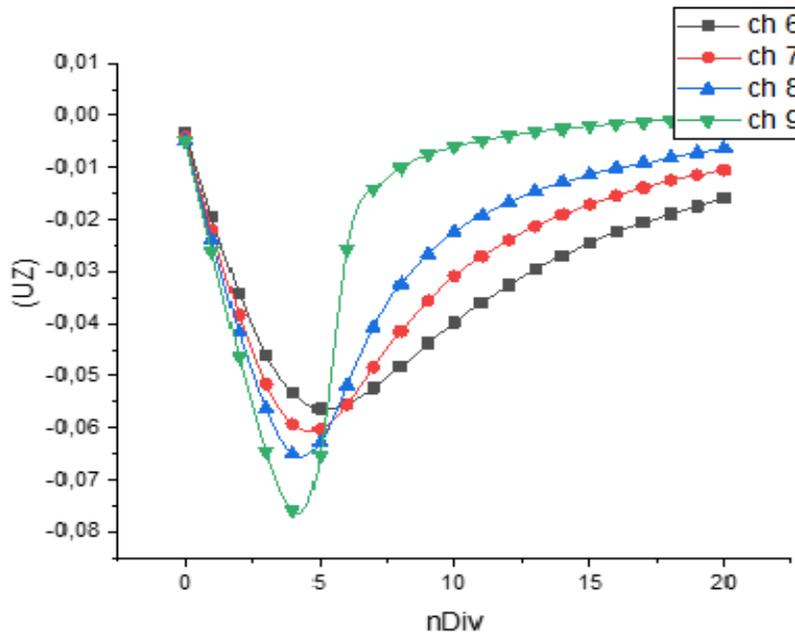


Figure 78 Graphe de déplacement de la 2ème région

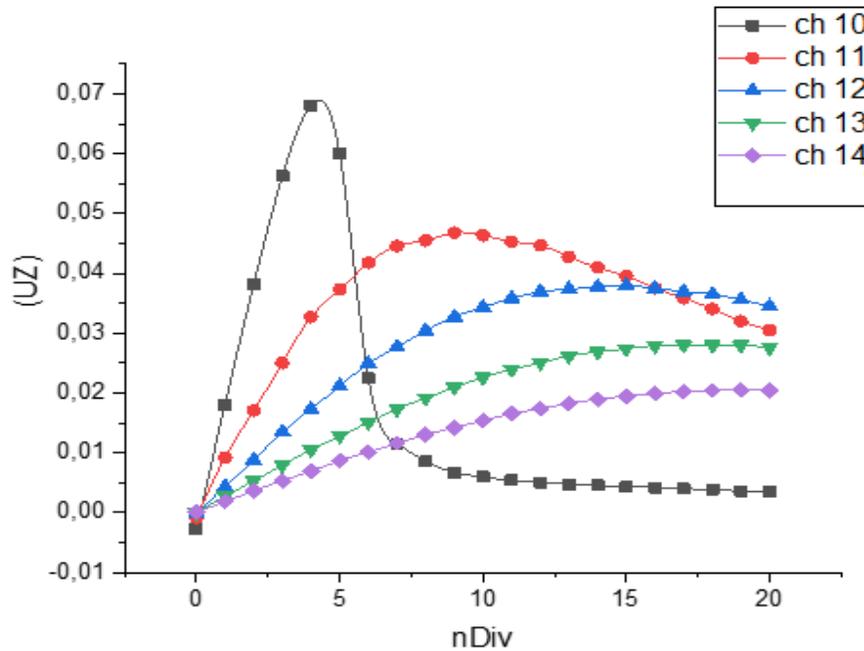


Figure 79 Graphe de déplacement de la 3ème région

Les trois graphes de contrainte.

Les figures représentent l'évolution du déplacement Uz en fonction du nombre de divisions pour chaque régions.

La région 1 compte 5 chemin la 2eme 4 chemin la 3eme 5 chemin.

On observe que le déplacement atteint la valeur de -0,08 car dans cette région on a la présence des deux fissures.

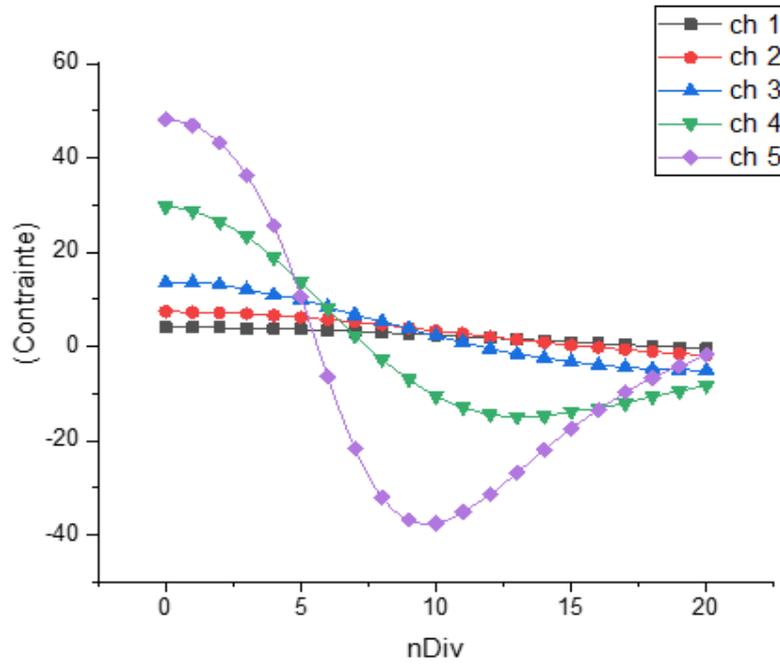


Figure 80 Graphe de contrainte de la 1ère région

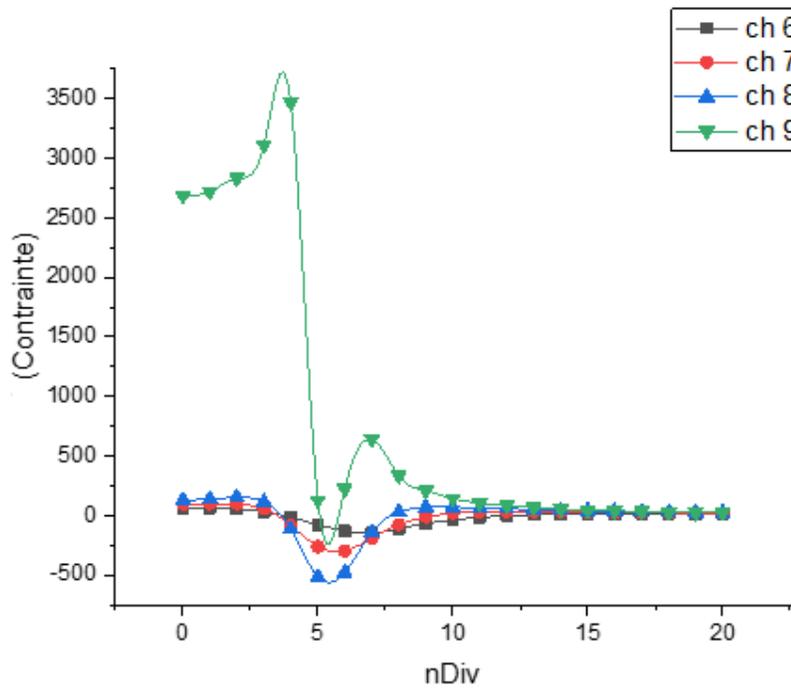


Figure 81 Graphe de contrainte de la 2ème région

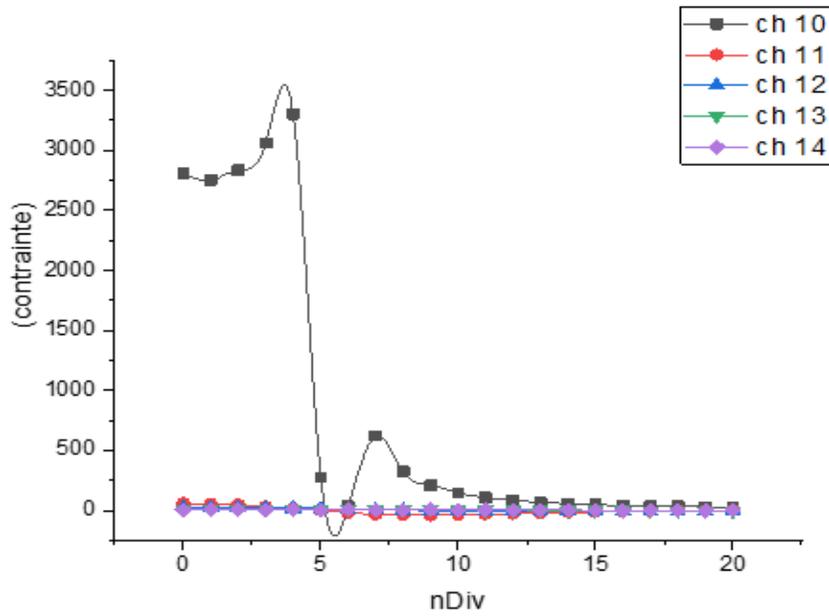


Figure 82 Graphe de contrainte de la 3eme région

Les figures représentent l'évolution de la contrainte en fonction du nombre de divisions pour chaque régions.

On observe que la contrainte atteint son pique dans la région 2 cela est logique puisque c'est dans cette région qu'on a une grande concentration de contrainte qui est du aux fissures.

CONCLUSION GENERALE

Nous avons utilisé l'Ansys APDL Workbench pour trouver la solution au problème de torsion axisymétrique d'un milieu élastique fissuré. L'objectif principal était d'empêcher la propagation de la fissure lorsque la charge augmente, en calculant le facteur d'intensité de contrainte au bord de la fissure et en déterminant les cas où il diminue selon différents critères.

En utilisant la symétrie du problème et les propriétés d'élasticité des matériaux transversalement isotropes, nous avons utilisé l'Ansys APDL et Workbench pour résoudre numériquement le problème. Cette méthode nous a permis d'obtenir des résultats précis pour les déplacements, les contraintes et les facteurs d'intensité de contrainte dans le milieu élastique fissuré.

L'utilisation de l'Ansys APDL et Workbench offre de nombreux avantages, notamment la possibilité de modéliser des géométries complexes, de définir des conditions aux limites appropriées et d'effectuer des analyses numériques avancées pour résoudre le problème de torsion axisymétrique. Les résultats obtenus à partir de cette approche peuvent fournir des informations essentielles pour comprendre le comportement de la fissure et prendre des décisions éclairées concernant la prévention de la propagation de la fissure.

Les conclusions suivantes ont été tirées de la formulation et des résultats présentés :

- Les déplacements tangentiels et les contraintes de cisaillement varient de la même manière, augmentant d'abord puis diminuant avec l'augmentation du paramètre r . Cela est dû au fait que la charge statique agit sur la zone circulaire du disque et que l'axe de torsion axisymétrique appliqué au disque est linéaire avec r . La valeur maximale de la charge est obtenue lorsque $r = b$.
- Une singularité est observée au bord de la fissure.
- Les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmentent et atteignent leur valeur maximale lorsque $c = 1$, puis diminuent avec l'augmentation de la valeur de c .
- L'augmentation de la distance H entraîne une diminution du facteur d'intensité de contrainte pour toutes les valeurs du paramètre c .

Perspectives :

Nous envisageons d'appliquer la méthode développée dans cette étude à la résolution des problèmes de torsion axisymétrique triplement mixtes suivants :

- La torsion d'un milieu élastique fissuré par deux disques rigides, où la fissure se trouve en dehors des disques.
- La torsion par un seul disque rigide d'un cas où le milieu élastique est affaibli par deux fissures externes.

Références bibliographiques

- [1]. Menshykov, O.V., Menshykov, V.A. and Guz, I.A.: The contact problem for an open penny-shaped crack under normally incident tension-compression wave. *Eng. Fract. Mech.* 75(5), 1114-1126 (2008).
- [2]. Selvadurai, A.P.S.: Asymmetric displacements of a rigid disc inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium of infinite extent. *Int. J. Sci.* 18, 979-686 (1980).
- [3]. Selvadurai, A.P.S.: Rotary oscillations of a rigid disc inclusion embedded in an isotropic elastic infinite space. *Int. J. Solids. Struct.* 17, 493-498 (1981).
- [4]. Reissner E., Sagoci H.F.: Forced torsion oscillation of an half-space I, *Int. J. Appl. Phys.*, 15, (1944), 652–654.
- [5]. Sneddon I.N.: Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci, *Int. J. Appl. Phys.*, 18, (1947), 130–132.
- [6]. Collins W.D.: The forced torsional oscillations of an elastic halfspace and an elastic stratum, *Pro. London. Math. Society*, 12, (1962), 226–244.
- [7]. Gladwell G.M.L.: The forced torsional vibration of an elastic stratum, *Int. J. Eng. Sci.*, 7, (1969), 1011–1024.
- [8]. Pak R.Y.S., Saphores J.D.M.: Torsion of a rigid disc in a half-space, *Int. J. Engng Sci.*, 29, (1991), 1–12.
- [9]. Bacci A., Bennati, S.: An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic layer, *Mech. Struct. Mach.*, 24, (1996), 21–38.
- [10]. Singh B.M., Danyluk H.T., Vrbik J., Rokne J., Dhaliwal R.S.: The Reissner-Sagoci Problem for a Non-homogeneous Half-space with a Surface Constraint, *Meccanica*, 38, (2003), 453–465.
- [11]. Guo-cai W., Long-zhu C.J.: Torsional oscillations of a rigid disc bonded to multilayered poroelastic medium, *Int. Zheijang. Univ.Sci.*, 6(3), (2005), 213–221.
- [12]. Yu H.Y.: Forced torsional oscillations of multilayered solids, *Int. J. Eng. Sci.*, 46, (2008), 250–259.
- [13]. Pal P.C., Mandal D., Sen B.: Torsional Oscillations of a Rigid Disc Embedded in a Transversely Isotropic Elastic Half-Space, *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 4, (2011), 177–188. [14]. Ahmadi S.F.; Eskandari M.: Rocking rotation of a rigid disk embedded in a transversely isotropic half-space, *Civil Eng. Infra. J.*, 47, (2014), 125–138.
- [15]. Sih G.C., Chen E.P.: Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped area, *J. Franklin Inst.*, 293, (1972), 251–261.
- [16]. Low R. D.: On the torsion of elastic half space with embedded penny-shaped flaws, *J. Appl. Mech.*, 39, (1972), 786–790.
- [17]. Dhawan G. K.: On the torsion of elastic half-space with penny-shaped crack, *Defense. Sci. J.*, 24, (1974), 15–22.
- [18]. Basu S.; Mandal S.C.: Impact of Torsional Load on a Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Sandwiched Between Two Elastic Half-Space, *Int. J. Appl. Comput. Math*, 2, (2016), 533–543.
- [19]. Madani, F., Kebli, B.: Axisymmetric Torsion of an Internally Cracked Elastic Medium by Two Embedded Rigid Discs, *Mechanics and Mechanical Engineering* , 21, (2017), 363–377.