

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

*Université de BLIDA 1*

*Institut d'Aéronautique et des Etudes spatiales*

Département de construction Aéronautique



*Mémoire*

*Pour l'Obtention du Diplôme*

*MASTER Aéronautique*

*Option: Avionique*

Commandes de vol longitudinal d'un avion flexible  
via LQR et OSMC

*Dirigé par :*

*Mr. DILMI Smain*

*Présenté par :*

*Mr. LAKHDARI Samir*

*Mr. MALLEK Smail*

**Promotion: 2013/2014**

# REMERCIEMENTS

*En préambule à ce mémoire, nous souhaitons adresser ici nos remerciements à : Notre créateur (DIEU) pour nous avoir donné la force d'accomplir ce travail ;*

*Nous tenons à remercier vivement notre Promoteur Mr DILMI SMAIN pour l'implication qu'il a pu avoir tout au long de ce travail, son suivi, ses conseils et ses orientations.*

*Nous tenons également à présenter nos sincères remerciements au président et aux membres de jury pour avoir accepté d'examiner et d'évaluer notre travail.*

# DÉDICACE

*Je dédie ce modeste travail, aux êtres les plus chers, et à qui je dois reconnaissance et dévouement et en qui je ne cesserai de remercier à savoir :*

*Mes parents, mes frères et mes sœurs.*

*A tous les Amis qui m'ont soutenu durant tout mon cursus universitaire et avec lesquels j'ai partagé des moments inoubliables, sans oublier MIMI*

*A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire de fin d'études.*

*Enfin à vous qui prenez la peine de lire ce mémoire.*

*S.LAKHDARI*



# DÉDICACE

*Je dédie ce modeste travail, aux êtres les plus chers, et à qui je dois reconnaissance et dévouement et en qui je ne cesserai de remercier à savoir :*

*Mes parents, mes frères et mes sœurs.*

*A tous les Amis qui m'ont soutenu durant tout mon cursus universitaire et avec lesquels j'ai partagé des moments inoubliables, sans oublier S.DOUDJEDID.*

*A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire de fin d'études.*

*Enfin à vous qui prenez la peine de lire ce mémoire.*

*S.MALLEK*



مهتمون ف وحساسة لتأثير الاهتزاز الهيكلي.  
تسارع بسبب اضطراب للطائرات التي هي بنية كبيرة  
توليفة من النماذج الديناميكية  
الطولية و  
ديناميد  
دراسة مستفيضة لبعض قوانين  
من أجل هدف وتزيد من  
النهاية، تطبيق على محاكاة -52

### **Résumé :**

Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à la commande de la vitesse de tangage et sur la réduction des accélérations due à une turbulence pour un avion dont la structure est large et sensible à l'effet de vibration structurelle.

Dans un premier lieu, on a envisagé une synthèse sur les modèles de la dynamique de l'avion flexible. Dans la dérivation des équations longitudinales de mouvement on a considéré que le mouvement de l'avion rigide a été représenté par une approximation du mode courte période. La dynamique de système est associée aux quatre modes de flexion structuraux.

Ensuite, une étude approfondie de quelques lois de commandes linéaires LQR et non-linéaire par mode glissant, qu'elles sont utilisées pour la poursuite d'une consigne et augmenter la robustesse par rapport aux perturbations externes, ou variation des paramètres du modèle longitudinale.

A la fin, une application sur un avion de type B-52 en simulation de la réponse du système en boucle ouverte et fermée avec la présence de perturbation.

### **Abstract :**

In our study, we are interesting on reduce the bending moments and the accelerations caused by the gusts for an aircraft of which the structure is broad and sensitive to an effect of structural vibration.

Firstly, we have considered a synthesis on dynamic model of the flexible aircraft. In deriving the longitudinal equations of motion it was assumed that the rigid body motion of the aircraft was represented by the short period approximation. Included in both sets of equations were the dynamics associated with five structural bending modes.

Then, a deepened study of some laws of linear control LQR and nonlinear control system with variable structure sliding mode, with are used for the continuation target and to increase the robustness to external disturbance in a gust, or change the parameters of the proposed model.

In finally, an application for an aircraft of the type B-52 in simulation of the response system in opened-loop and closed- loop with the presence of disturbance.

## Table des matières

<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1-3</b>
<b>CHAPITRE I : Modèle mathématique d'un avion flexible.....</b>	<b>4-20</b>
<b>I-1) Introduction sur la mécanique du vol.....</b>	<b>4-9</b>
<b>I-1-1) Trièdres de référence.....</b>	<b>4-6</b>
➤ <b>Trièdre avion.....</b>	<b>4</b>
➤ <b>Trièdre terrestre.....</b>	<b>5</b>
➤ <b>Trièdre aérodynamique.....</b>	<b>5</b>
<b>I-1-2) Positions relatives des trièdres et matrices de passage associées.....</b>	<b>6</b>
<b>I-1-3) Positions du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre porté par l'avion .....</b>	<b>7</b>
<b>I-1-4) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre.....</b>	<b>8</b>
<b>I-2) Les équations du mouvement d'un avion rigide.....</b>	<b>8-14</b>
<b>I-2-1) Calcul des forces.....</b>	<b>9</b>
<b>I-2-2) Calcul des moments.....</b>	<b>10</b>
<b>I-2-3) Forces gravitationnelles.....</b>	<b>12</b>
<b>I-2-4) Forces de propulsion .....</b>	<b>12</b>
<b>I-2-5) Théories des petites perturbations.....</b>	<b>12-14</b>
<b>I-3) Les équations du mouvement d'un avion flexible.....</b>	<b>15-20</b>
<b>I-3-1) Représentation mathématique de la dynamique flexible d'un avion.....</b>	<b>17-18</b>
<b>I-3-2) Application sur un avion de transport du type B-52.....</b>	<b>19-20</b>
<b>Chapitre II : Commande optimale linéaire et non-linéaire.....</b>	<b>21-39</b>



<b>II-1) Introduction</b> .....	21
<b>II-2) Commande optimale (LQR)</b> .....	22-29
<b>II-2-1) Loi de commande LQR</b> .....	22-26
➤ <b>Étapes pour trouver le gain optimal K</b> .....	23-26
<b>II-2-2) Système de commande optimale linéaire LQR avec action intégrale</b> .....	26
➤ <b>Détermination des gains K et Ki</b> .....	27
<b>II-2-3) Système de commande optimale linéaire LQR avec observateur de</b>	
<b>Luenberger</b> .....	27-29
<b>II-3) La commande par mode glissant</b> .....	29-39
<b>II-3-1) Système à structure variable</b> .....	30
<b>II-3-2) Conception de la commande par mode glissant</b> .....	31-34
<b>II-3-2-1) Choix de la surface de glissement</b> .....	32
<b>II-3-2-2) Conditions de convergence et d'existence</b> .....	33-35
➤ <b>Fonction discrète de commutation</b> .....	33
➤ <b>Fonction de Lyapunov</b> .....	33-34
<b>II-3-3) Calcul de la commande</b> .....	35-39
<b>II-3-3-1) Définition des grandeurs de la commande</b> .....	35-36
<b>II-3-3-2) Détermination de la commande</b> .....	36
<b>II-3-3-3) Phénomène réticence ou de chattering</b> .....	38
➤ <b>Fonction SAT</b> .....	38
➤ <b>Fonction SMOOTH</b> .....	39
<b>II-3-4) Robustesse de la loi de commande :</b> .....	39
<b>III) Simulation et interprétation des résultats</b> .....	40-57
<b>III-1) Simulation et interprétation des résultats en boucle ouverte</b> .....	40-42

<b>III-2) Simulation et interprétations des résultats en boucle fermée.....</b>	<b>42-57</b>
<b>III-2-1) Commande optimale LQR.....</b>	<b>43-47</b>
<b>III-2-1) Commande optimale LQR avec action intégrale.....</b>	<b>48-49</b>
<b>III-2-3) LQR avec observateur de Luenberger.....</b>	<b>49-51</b>
<b>III-2-4) Commande par mode glissant.....</b>	<b>52-55</b>
<b>III-3) Réduction d'accélération.....</b>	<b>56-57</b>
<b>Conclusion .....</b>	<b>58</b>

## Liste des figures

<b>Chapitre I : Modèle mathématique d'un avion flexible</b> .....	4-20
<b>Figure (I.1) : Le trièdre terrestre local et le trièdre avion</b> .....	5
<b>Figure (I.2) : Le trièdre aérodynamique et le trièdre avion</b> .....	6
<b>Figure (I.3) : Les rotations subies par l'avion par rapport à la terre</b> .....	7
<b>Chapitre II : Commande optimale linéaire et non-linéaire</b> .....	21-39
<b>Figure(II .1) : Schéma synoptique de commande par retour d'état</b> .....	23
<b>Figure (II.2) : Schéma synoptique de commande LQR avec action intégrale</b> .....	26
<b>Figure (II.3) : Schéma bloc d'un observateur de Luenberger</b> .....	28
<b>Figure (II.4) : Différentes modes pour la trajectoire dans le plan de phase</b> .....	31
<b>Figure (II.5) : Trajectoire de l'état envers la surface</b> .....	34
<b>Figure (II.6) : Valeur continue <math>u_{eq}</math> prise par la commande lors de la commutation</b> .....	36
<b>Figure (II.7) : Définition de la commande signe</b> .....	37
<b>Figure (II.8) : Démonstration du phénomène de réticence</b> .....	38
<b>Figure (II.9): Fonction « SAT » et « SMOOTH »</b> .....	39
<b>Chapitre III : Simulation et interprétation des résultats</b> .....	40-57
<b>Figure (III.1) : La réponse du système pour une boucle ouverte</b> .....	41
<b>Figure (III.2) : Les modes rigides et les modes flexible</b> .....	41-42
<b>Figure (III.3) : Implémentation du système dans MATLAB/SIMULINK</b> .....	43
<b>Figure (III.4) : La réponse du système et la commande LQR en absence des perturbations externes</b> .....	45
<b>Figure (III.5) : Réponse du système avec incertitudes internes</b> .....	46

<b>Figure (III.6) : Implémentation des perturbations dans MATLAB/SIMULINK.....</b>	<b>46</b>
<b>Figure (III.7) : Schéma de simulation des perturbations.....</b>	<b>47</b>
<b>Figure (III.8) : La réponse du système et la commande LQR avec perturbations externes .....</b>	<b>47</b>
<b>Figure (III.9) : LQR avec action intégrale en absence des perturbations externes.....</b>	<b>48</b>
<b>Figure (III.10) : LQR avec action intégrale en présence de perturbations.....</b>	<b>49</b>
<b>Figure (III.11) : LQR avec action intégrale avec observateur de Luenberger en absence de perturbation.....</b>	<b>50</b>
<b>Figure (III.12) : LQR avec observateur de Luenberger avec perturbations avec action intégrale.....</b>	<b>51</b>
<b>Figure (III.13) : LQR avec mode glissant en absence de perturbation.....</b>	<b>54</b>
<b>Figure (III.14) : LQR avec mode glissant en présence de perturbation.....</b>	<b>55</b>
<b>Figure (III.15) : L'accélération en boucle fermée.....</b>	<b>56</b>

## Symboles :

$a_{x_{cg}}, a_{y_{cg}}, a_{z_{cg}}$	Accélérations mesurées au centre de gravité de l'avion dans Les directions OX, OY, et OZ , $m/s^2$
$g$	Accélération de la gravité, $9.81 m/s^2$
$m$	Masse de l'avion, kg
$\psi$	Angle de Lacet, rad
$\theta$	Angle de Tangage, rad
$\phi$	Angle de Roulis, rad
$\chi$	Azimut aérodynamique, rad
$\gamma$	Pente aérodynamique, rad
$\mu$	angle de gite aérodynamique, rad
$p$	Vitesse de Roulis, rad/sec
$q$	Vitesse de Tangage, rad/sec
$r$	Vitesse de Lacet, rad/sec
$U$	Vitesse vers l'avant, m/sec
$V$	Vitesse latérale, m/sec
$W$	Vitesse verticale, m/sec
$V_T$	Vecteur de vitesse résultante, m/sec
$x_a$	Distance en avant de (c.g) de l'avion, m
$J$	Indice de performance
$\omega$	Pulsation de vitesse angulaire, rad/sec
$u$	Vitesse de la rafale suivant l'axe OX
$v$	Vitesse de la rafale suivant l'axe OY
$w$	Vitesse de la rafale suivant l'axe OZ
$w_g$	Vitesse de la rafale verticale, m/sec
$U_0$	Vitesse à l'équilibre de l'avion, m/sec
$\alpha$	Angle d'attaque, rad

$\beta$	Angle de glissade, rad
$\delta_{th}$	Déflexion de la gouverne de profondeur, rad
$\delta_E$	Déflexion du canard horizontal, rad
$\lambda_i$	Déplacement de $i^{ème}$ mode symétrique de flexion, m
$\Phi_{1,i}$	Coefficients des modes structuraux, $\lambda_i$
$\rho$	Densité de l'air, $kg/m^3$
$\eta_{i,x_i}$	Coefficient de moment de flexion
$F$	Vecteur des forces aérodynamiques, N
$F_X$	Forces aérodynamiques suivant l'axe OX, N
$F_Y$	Forces aérodynamiques suivant l'axe OY, N
$F_Z$	Forces aérodynamiques suivant l'axe OZ, N
$M$	Somme des moments externes appliqués sur l'avion
$L$	Moment de roulis, N m
$M$	Moment de tangage, N m
$N$	Moment de lacet, N m
$I$	Moment d'inertie total, $kg\ m^2$
$I_{ij}$	Composante du moment d'inertie, $kg\ m^2$
$C$	Corde aérodynamique moyenne de l'aile, m
$q_i$	Coordonnées généralisé
$Q_i$	Force aérodynamique généralisée
$c.g$	Centre de gravité

### Les vecteurs :

$u$	Vecteur longitudinal de commande
$x$	Vecteur d'état du mouvement longitudinal
$y$	Vecteur de sortie du mouvement longitudinal
$\hat{x}$	Estimé de $x$

**Les matrices :**

$A, B, C, D, E, G$

Matrices des équations d'état

$Q, R$

Matrices de pondération

$P$

Solution de l'équation de Riccati

$K$

Gain de retour d'état

$H$

Hamiltonien

**Sigle :**

LQR

Linear Quadratic Regulator

LTI

Linear Time Invariant

SMC

Sliding mode

### Historique:

Le 17 décembre 1903 à Patomac River, fut la date du premier vol réussi des frères Wright, quatre ans plutôt, l'essai de vol qu'ils ont effectué s'est terminé par un accident, qui a sévèrement endommagé leur appareil. Cet accident a eu lieu suite à un coup de rafale qui a complètement déstabilisé l'avion. C'est cette catastrophe qui a incité les frères Wright à étudier et analyser le comportement d'un avion en présence des perturbations en vue d'assurer une stabilité minimale.

En effet, il leur fallu quatre années de travaux et de recherche pour tester le modèle en soufflerie et aboutir à des résultats satisfaisantes. Depuis lors, apparaissait l'importance des études de stabilité dans le domaine Aéronautique.

De ce fait la conception aura pour critère essentiel de donner à l'aéronef une tendance inhérente qui lui permettra de s'opposer ou diminuer les déviations de mouvement dues à des perturbations. Cette qualité inhérente à résister à ces déviations dans le vol désiré peut être obtenue par sélection d'une configuration à travers des analyses de stabilité [6].

Historiquement, la conception des aéronefs a subi d'importantes modifications suite à des progrès significatifs dans l'efficacité structurale des avions, notamment dans le rapport de la résistance des nouveaux matériaux (composites) à leur poids, et dans l'utilisation des systèmes de commande de vol avec une réponse rapide. Les concepteurs d'avion, en essayant de réduire le poids structurel de chaque nouvel avion, ont augmenté la flexibilité de la structure [5].

Les principaux soucis en aéronautique sont liés à la stabilité et l'efficacité des avions. Ceux-ci vont introduire la nécessité des interactions aéroélastiques.

L'aéroélasticité ou la commande active de stabilité aéroélastique a été un des domaines de la recherche aéronautique les plus actifs pendant les vingt dernières années. L'aéroélasticité est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion, les forces aérodynamiques non-stationnaires qui résultent de mouvement de l'avion dans l'air et les systèmes de commande de vol, pour assurer à l'avion la stabilité vis-à-vis des perturbations ainsi que pour augmenter les performances des surfaces de contrôles [17].



D'un autre coté, les ingénieurs de la commande de vol ont développé des nouvelles fonctionnalités pour le système de commande automatique de vol qui ont amélioré la performance de l'avion, la stabilité, et les qualités du vol. Cependant, ces efforts ont été généralement indépendants les uns des autres, jusqu'à ce que les premières analyses aéroélastiques aient été effectuées.

### **Revue de la littérature :**

Depuis une trentaine d'années, de nouvelles techniques de synthèse de lois de commande multi-variables ont été proposées. Toutefois, les premières applications significatives des méthodes multi-variables pour la conception de lois de commande d'un avion de transport remontent à 1978 chez Boeing : la loi de pilotage automatique latérale du Boeing 767 a ainsi été intégralement synthétisée avec succès par une approche LQ (Linear Quadratic) afin d'éliminer un phénomène d'oscillation latérale résiduelle constaté en vol [18].

En 1993, Shirai, Arakawa, Toda, Taneda et Sakura, ont considéré à Mitsubishi Heavy Industries, au Japon, le modèle aéroélastique d'une aile équipée avec un bord de fuite activement commandé. Cette aile a été soumise aux tests dans une soufflerie aux basses vitesses d'une longueur de 2 m de Nagoya Aerospace Systems Works. Un code des éléments finis d'analyse aéroélastique a été développé [5].

L'idée d'appliquer la commande moderne et robuste afin de répondre au problème d'allègement du aux rafales est intéressante, et s'est avéré très convaincant comme dans J.H.vincent qui a essayé d'appliquer ce genre de commande pour optimiser le mouvement latéral d'un avion à des perturbations externes [2].

Steaman, Powers, Schwartz et Yurkovich ont investigué et modélisé les phénomènes aéroélastiques non linéaires sur des avions équipés avec des technologies avancées qui ne pouvaient pas être étudiés par les méthodes classique d'analyse et modélisation [19].

Un type de lois de commande robuste simple à calculer et à mettre en œuvre, même pour des systèmes non linéaires, est la commande par modes glissants. Elle est apparue en union soviétique pendant les années 60 à partir des travaux sur les commandes à structure variable [9].

B.A.White et A.R.Daniel ont étudié la conception d'un système de contrôle à structure variable pour l'autopilote du roulis d'un véhicule aérien. La structure VSCS est comparée avec un système de contrôle à gain fixe désigné, pour achever la même performance dynamique à la vitesse de croisière nominale [6].

### **Contenu :**

Cependant, notre travail consiste à concevoir un système de contrôle pour satisfaire les qualités d'un vol stable et performant. Cet objectif sera achevé, en appliquant à notre système physique deux types de commande optimale : linéaire et non-linéaire (LQR et mode glissant).

Ce travail comporte trois chapitres.

- Le premier chapitre décrit le modèle mathématique représentant notre système d'avion flexible sous forme d'équation d'état. Un modèle mathématique est alors toujours une représentation approximative de la réalité physique.
- Le deuxième chapitre explique la technique de la commande Linéaire Quadratique régulateur et l'utilité de l'observateur, et aussi est consacré aux étapes de recherche de gain optimal pour un régulateur à retour d'état dans le but de minimiser l'indice de performance, ainsi que décrit la commande par retour avec action intégrale, aussi nous présentons la synthèse de commande par mode glissant.
- Les résultats de la simulation, et les interprétations de ces résultats sont traités dans le troisième chapitre, où l'avion B-52 a été considéré pour la simulation afin de commander la vitesse de tangage et la réduction des accélérations ont un programme de simulation a été réalisé à l'aide du logiciel MATLAB/SIMULINK.
- Une conclusion est présentée à la fin.

La modélisation mathématique générale du vol d'un avion a été développée depuis de nombreuses années à partir des équations de la mécanique du vol. Certains auteurs se sont intéressés en particulier au cas des effets d'aérodynamique. Ils ont travaillé sur les transitoires de portance et de moment, montrant ainsi que ceux-ci pouvaient être incorporés dans des modèles paramétriques par le biais de certaines fonctions. Cette incorporation avait pour l'objet d'améliorer la précision des modèles par rapport à la réalité du vol dans la turbulence atmosphérique [4].

Ce chapitre se décompose comme suit. L'étude porte sur le mouvement longitudinal uniquement. Une première section est dédiée aux fondamentaux de la mécanique du vol, la deuxième section se base sur les équations du mouvement d'un avion rigide. La section (I-3), est dédiée aux équations du mouvement dans le cas d'un avion flexible.

### **I-1) Introduction sur la mécanique du vol :**

Avant d'aborder la modélisation proprement dite du vol de l'avion flexible, il paraît souhaitable de décrire, dans un premier temps, quelques notions fondamentales de la mécanique du vol, à pour objectif de présenter trois trièdres utilisés en mécanique de vol, les matrices nécessaires pour passer d'un repère à l'autre, et les équations de la dynamique du vol.

#### **I-1-1) Trièdres de référence :**

Les forces et les moments qui s'exercent sur un appareil doivent être exprimés dans un repère convenablement défini. L'aérodynamique et la mécanique du vol font parfois appel à des repères différents et il convient d'y accorder une attention particulière. Des conventions en matière d'orientation et de notation ont été établies [4].

##### **➤ Trièdre avion ( $OX_B Y_B Z_B$ ) :**

Ce trièdre est rigidement lié à l'appareil (considéré lui-même comme rigide).

- $O$  est l'origine conventionnelle des axes, située dans le plan de symétrie de l'avion et qui peut être le centre de gravité,
- Les axes  $OX_B$  et  $OZ_B$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan de symétrie de l'avion.
- $OX_B$  est orienté positivement de l'arrière vers l'avant de l'avion,
- L'axe  $OZ_B$  normal à  $OX_B$  est orienté positivement vers le ventre de l'avion,

- L'axe  $OY_B$  complète le trièdre positif

➤ **Trièdre terrestre ( $OX_E Y_E Z_E$ ) :**

La position dans l'espace d'un objet mobile est a priori définie dans un repère "fixe", c'est-à-dire lié à la terre.

- L'origine  $O$  est fixe par rapport à la terre,

-  $OZ_E$  est orienté suivant la verticale descendante,

-  $OX_E$  et  $OY_E$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisies dans le plan horizontal.

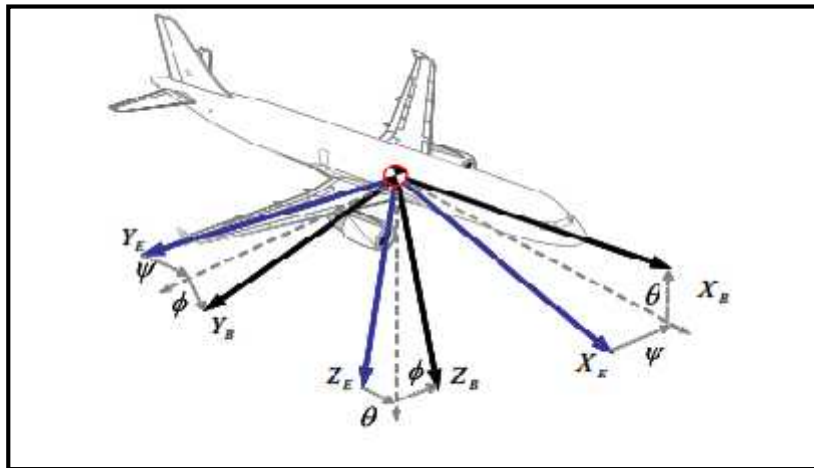


Figure (I.1) : Le trièdre terrestre local et le trièdre avion [4]

➤ **Trièdre aérodynamique ( $OX_a Y_a Z_a$ ) :**

Ce trièdre est lié à la vitesse de l'avion (c'est le repère soufflerie).

-  $O$  est un point fixe de l'avion (généralement le centre de gravité de l'avion),

- L'axe  $OX_a$  est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de la vitesse,

- L'axe  $OZ_a$  est perpendiculaire à  $OX_a$ , situé dans le plan de symétrie de l'avion, et orienté positivement vers le ventre de l'avion,

- L'axe  $OY_a$  complète le trièdre positif.

Notons que ce trièdre, figure (I.2) est utilisé pour exploiter

comparativement des résultats de mesure en soufflerie. Le repère aérodynamique est souvent utilisé pour exprimer les forces aérodynamiques. Les coefficients aérodynamiques sont pratiquement toujours exprimés dans ce repère. L'orientation des axes de ce trièdre aérodynamique n'est pas liée "rigidement" à l'avion mais à la vitesse [4].

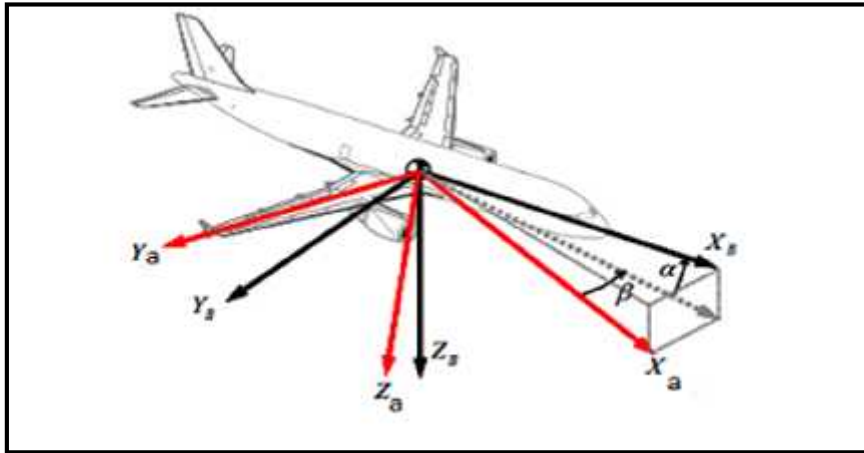


Figure (I.2) : Le trièdre aérodynamique et le trièdre avion [4]

### I-1-2) Positions relatives des trièdres et matrices de passage associées :

Il faut en général trois angles pour définir l'orientation d'un trièdre par rapport à un autre.

Dans le cas qui nous intéresse (voir figure I.2), deux angles suffisent, l'axe  $OZ_\alpha$  étant situé par définition dans le plan  $OX_B Z_B$  (plan de symétrie de l'avion).

- L'angle d'incidence  $\alpha$  est l'angle de l'axe  $OX_B$  (référence fuselage) avec le plan du  $OX_\alpha Y_\alpha$  trièdre aérodynamique. L'incidence est positive si la projection de vecteur vitesse sur l'axe  $OZ_B$  Est positive.

- L'angle de dérapage  $\beta$  est l'angle de  $O X_\alpha$  avec le plan de symétrie  $O X_B Z_B$  de l'avion. Cet angle est positif si la projection de vecteur vitesse sur l'axe  $OY_B$  est positive.

La matrice de passage du trièdre aérodynamique est notée :

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \\ Z_\alpha \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$[T]^{-1}$  est la symétrique de  $[T]$  et représente la matrice de passage du trièdre avion au trièdre aérodynamique.

### I-1-3) Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre porté par l'avion :

Les composantes des forces et des moments agissant sur l'avion sont composées par des contributions aérodynamiques, gravitationnelles et propulsives. Les équations de mouvement ont été par rapport à un système d'axes fixé à l'avion [1]. Alors les rotations sont réalisées à travers les angles d'Euler  $\Psi$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  comme suit :

- La rotation des axes  $X_E, Y_E$  et  $Z_E$  par un certain Azimut  $\Psi$ , autour de l'axe  $Z_E$  pour atteindre quelques axes d'intermédiaires  $X_1, Y_1$  et  $Z_1$ .
- Après, la rotation des axes  $X_1, Y_1$  et  $Z_1$  par une certaine élévation  $\theta$ , autour de l'axe  $Y_1$  pour atteindre les axes  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$ .
- En fin, la rotation des axes  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$  par un certain angle de gîte  $\phi$ , autour de l'axe  $X_2$ , pour atteindre un system d'axe d'avion  $X_B, Y_B$  et  $Z_B$ .

La figure (I.3) nous montre les trois rotations angulaires subies par l'avion par rapport à la terre.

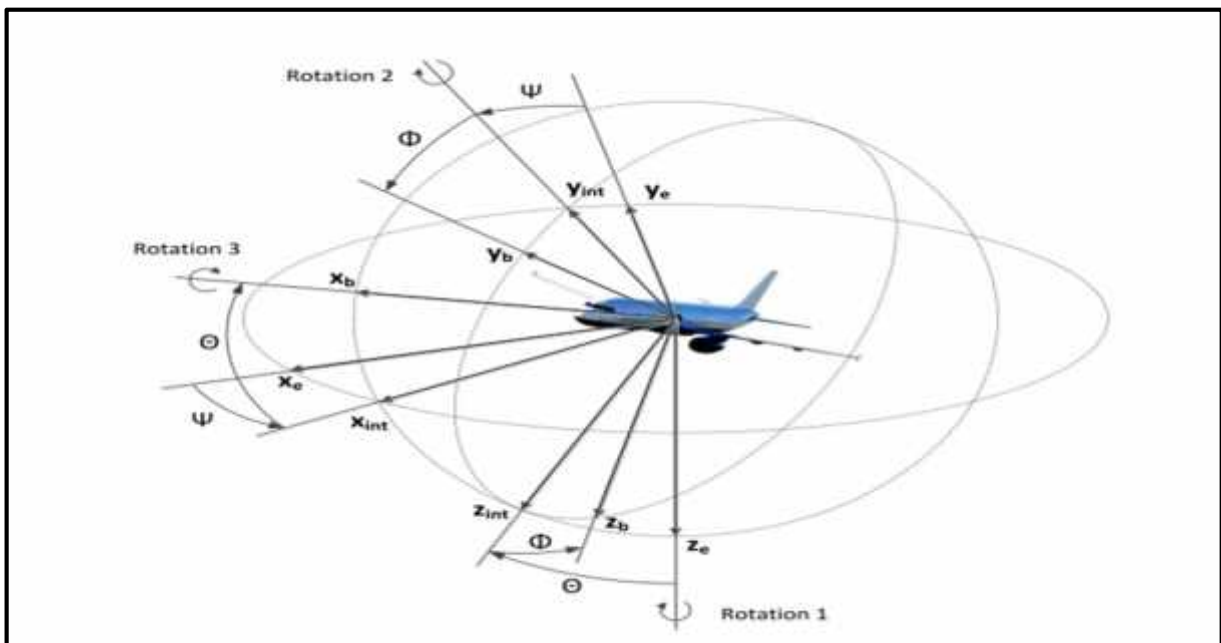


Figure (I.3) : les rotations subies par l'avion par rapport à la terre [4]

En outre, les forces et les moments aérodynamiques dépendent seulement des angles  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qu'elles orientent tout le vecteur de vitesse  $V_T$ , par rapport à l'axe  $X_B$  [4].

La matrice de passage du trièdre normal terrestre au trièdre avion se traduit par :

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta & -\sin \theta \\ R_1 & R_3 & \cos \theta \sin \phi \\ R_2 & R_4 & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}$$

Avec :

$$R_1 = -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi$$

$$R_2 = \sin \psi \sin \phi + \cos \psi \sin \theta \cos \phi$$

$$R_3 = \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi$$

$$R_4 = -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi$$

$[R]^{-1}$  est la symétrique de  $[R]$  et représente la matrice de passage du trièdre avion au trièdre normal terrestre.

#### **I-1-4) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre :**

La position du trièdre aérodynamique  $OX_aY_aZ_a$  par rapport au trièdre normal terrestre est repérée habituellement par un système de trois angles [3].

- La rotation des axes  $X_E, Y_E$  et  $Z_E$  par un certain azimut aérodynamique  $\chi$ , autour de l'axe  $X_E$  pour atteindre les axes intermédiaires  $X_1, Y_1$  et  $Z_1$ .
- Après, la rotation des axes  $X_1, Y_1$  et  $Z_1$  par une certaine élévation  $\gamma$ , autour de l'axe  $Y_1$  pour atteindre les axes  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$ .
- En fin, la rotation des axes  $X_2, Y_2$  et  $Z_2$  par un certain angle de gite  $\mu$ , autour de l'axe  $X_2$ , pour atteindre le système d'axe avion  $X_a, Y_a$  et  $Z_a$ .

La matrice de passage du trièdre normal terrestre au trièdre aérodynamique se note :

$$\begin{bmatrix} X_a \\ Y_a \\ Z_a \end{bmatrix} = [R'] \begin{bmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \chi \cos \gamma & \sin \chi \cos \gamma & -\sin \gamma \\ R'_1 & R'_3 & \cos \gamma \sin \mu \\ R'_2 & R'_4 & \cos \gamma \cos \mu \end{bmatrix}$$

$$R_1 = -\sin \chi \cos \mu + \cos \chi \sin \mu$$

$$R_2 = \sin \chi \sin \mu + \cos \chi \cos \mu$$

$$R'_3 = \cos \chi \cos \mu + \sin \chi \sin \mu$$

$$R'_4 = -\cos \chi \sin \mu + \sin \chi \cos \mu$$

$[R]^{-1}$  est la symétrique de  $[R]$  et représente la matrice de passage du trièdre aérodynamique au trièdre normal terrestre.

**I-2) Les équations du mouvement d'un avion rigide :**

On suppose dans un premier temps que l'avion soit rigide, en s'appliquant la deuxième loi du Newton à ce fuselage rigide les équations du mouvement peuvent être établies en termes d'accélération de translation et angulaires qui se produisent par suite des forces et moments étant appliqués à l'avion [1].

Le calcul des forces est présenté dans la section (I-2-1) et le calcul des moments est présenté dans la section (I-2-2).

**I-2-1) Calcul des forces :**

Par la deuxième loi du Newton on obtient les équations différentielles suivantes :

$$F = \frac{d}{dt} \{mV_t\} \dots \dots \dots (I-1)$$

Où  $F$  représente la somme des forces, qui a trois composantes aérodynamiques, gravitationnelles et propulsives ;  $m$  est la masse de l'avion et  $V_t$  est la vitesse de l'avion.

Puisque le système d'axe étant utilisé pour un système de référence à inertie est le système d'axe terrestre on a [2] :



$$\Delta F = m \frac{d}{dt} \{V_t\}_E \dots\dots\dots (I-2)$$

Le taux de changement de  $V_t$  relativement à l'axe de la terre le système est donné par:

$$\frac{d}{dt} \{V_t\}_E = \frac{d}{dt} \{V_t\}_B + \omega \times V_t \dots\dots\dots (I-3)$$

Où (B) est le système de référence lié à l'avion et  $\omega$  la vitesse angulaire de l'avion dans un système d'axe fixé à l'avion par rapport au système d'axes fixés à la terre. Les vitesses sont calculées comme une somme de leurs composantes suivant les axes  $X_B, Y_B$  et  $Z_B$ .

Les composantes de la force  $F$  (aérodynamique, gravitationnelle et propulsive) suivant les axes  $X_B, Y_B$  et  $Z_B$  [2] sont :

$$\Delta F = i\Delta F_x + j\Delta F_y + k\Delta F_z$$

Avec :

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_z &= m(\dot{W} + UP - UQ) \\ \Delta F_y &= m(\dot{V} + UR + PW) \\ \Delta F_x &= m(\dot{U} + QW - VR) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-4)$$

Où,

$$\left. \begin{aligned} V_t &= iU + jV + kW \\ \omega &= iP + jQ + kR \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I-5)$$

**I-2-2) Calcul des moments :**

La deuxième loi de Newton donne l'équation suivante pour le calcul des moments  $L, M$  et  $N$  autour des axes de  $X$  (roulis),  $Y$  (tangage), et  $Z$  (lacet), dans l'analyse de commande actif de vol on peut démontrer le moment totale externe comme suite :

$$M = \frac{d}{dt} H + \omega \times H \dots\dots\dots (I-6)$$

$\times$  est l'operateur du produit vectoriel

Pour un fuselage rigide le moment angulaire est :

$$H = I\omega \dots\dots\dots (I-7)$$

La matrice d'inertie  $I$  est défini comme suit :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (I-8)$$

Où  $I_{ii}$  le moment d'inertie,  $I_{ij}$  le produit d'inertie ( $j \neq i$ ).

En général, l'avion sont symétrique au plan XZ, et par conséquent c'est généralement le cas où  $I_{xy} = I_{yz} = 0$ , on obtient alors les composantes de moments suivant les axes  $X_B, Y_B$  et  $Z_B$ , donc,  $\Delta L, \Delta M$  et  $\Delta N$  sont comme suit :

$$\begin{aligned} \Delta L &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) + QR(I_{zz} - I_{yy}) \\ \Delta M &= I_{yy}\dot{Q} - I_{xz}(P^2 - R^2) + PR(I_{xx} - I_{zz}) \dots\dots\dots (I-9) \\ \Delta N &= I_{xz}(\dot{P}) + I_{zz}(\dot{R} + QR) + PQ(I_{yy} - I_{xx}) \end{aligned}$$

Pour les grands avions de transports, les troisièmes termes des équations précédentes sont souvent négligés et les équations des moments deviennent :

$$\begin{aligned} \Delta L &= I_{xx}\dot{P} - I_{xz}(\dot{R} + PQ) \\ \Delta M &= I_{yy}\dot{Q} - I_{xz}(P^2 - R^2) \dots\dots\dots (I-10) \\ \Delta N &= I_{zz}\dot{R} - I_{xz}(\dot{P} + QR) \end{aligned}$$

Les hypothèses suivantes sont prises dans ces équations : Le produit d'inertie  $I_{xz}$  est assez petit pour qu'il soit négligé. Ceci arrive lorsque les axes liés à l'avion rigide  $X_B, Y_B$ , et  $Z_B$  sont choisis de façon à coïncider avec les axes principaux. Pour un avion pour lequel les vitesses angulaires maximales sont basses, les termes  $PQ, QR$  et  $P^2 - R^2$  peuvent être négligés. Comme  $R^2$ , est plus petit que  $P^2$ , on le négliger [2].

**I-2-3) Forces gravitationnelles :**

Les forces dues à la pesanteur sont toujours présentes dans un avion; cependant, en négligeant toute considération des gradients dans le domaine de pesanteur, qui sont importants seulement dans le vol supplémentaire-atmosphérique si toutes autres forces externes sont essentiellement inexistantes, il peut correctement supposer que la pesanteur agit au centre de la gravité de l'aéronef. Par conséquent, pour le système d'axe de fuselage, la pesanteur contribue seulement au vecteur externe de force  $F$ . La force de la gravité agissant sur un avion est exprimée selon l'axe terrestre. Ce qui concerne le vecteur gravitationnel  $mg$ , il est dirigé vers l'axe  $Z_E$ . [1]

Résolution directe du vecteur  $mg$ , dans les composantes  $X, Y, Z$  produit :

$$\begin{aligned} \delta X &= -mg \sin \theta \\ \delta Y &= mg \cos \theta \sin \phi \dots\dots\dots(I-11) \\ \delta Z &= mg \cos \theta \cos \phi \end{aligned}$$

**I-2-4) Les forces de propulsion :**

La force de propulsion a des composantes  $F_{Tx}, 0$ , et  $F_{Tz}$  qui agissent selon les axes liées à l'avion.

Les forces de propulsion peuvent créer des moments dans le cas où la force de propulsion n'agit pas dans le centre de gravité.

- Equation de propulsion sur l'axe  $X_B$  :

$$X = F_{aeroXB} + T_{XB} = m(\dot{U} + QW + g \sin \theta) \dots\dots\dots(I-12)$$

Où :  $T_{XB}$  représente la force de propulsion

et  $F_{aeroXB}$  représente la force aérodynamique.

**I-2-5) Théories des petites perturbations :**

Dans la théorie des perturbations, on présume que le mouvement de l'avion consiste en de petites déviations autour d'une condition de vol stationnaire. Cette théorie ne peut pas s'appliquer pour des problèmes où les mouvements des larges amplitudes sont considérés (par

exemple, le décrochage dynamique). Toutes les variables dans les équations de mouvement sont remplacées par une valeur de référence plus une perturbation. [1]

Ainsi, chaque variable de mouvement est considérée comme avoir deux composants. Par exemple:

$$U \triangleq U_0 + u \quad Q \triangleq Q_0 + q \quad R \triangleq R_0 + r \quad M \triangleq M_0 + m \dots \dots \dots (I-13)$$

A l'état d'équilibre il ne peut y avoir aucune accélération de translation ou de rotation. Par conséquent, les équations qui représentent les conditions d'équilibre peuvent être exprimées comme :

$$\begin{aligned} X_0 &= m(Q_0 W_0 - R_0 V_0 + g \sin \theta_0) \\ Y_0 &= m(V_0 R_0 - P_0 W_0 - g \cos \theta_0 \sin \phi_0) \\ Z_0 &= m(P_0 V_0 - Q_0 V_0 - g \cos \theta_0 \cos \phi_0) \dots \dots \dots (I-14) \\ L_0 &= Q_0 R_0 (I_{zz} - I_{yy}) - P_0 Q_0 I_{xz} \\ M_0 &= (P_0^2 - R_0^2) I_{xz} + (I_{xx} - I_{zz}) P_0 R_0 \\ N_0 &= I_{xz} Q_0 R_0 + (I_{yy} - I_{xx}) P_0 Q_0 \end{aligned}$$

Les valeurs des composantes des forces et moments de perturbation sont désignés par 'Δ'. Les valeurs des forces et des moments de perturbation d'un avion deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_x &= m[\dot{u} + W_0 q + Q_0 w - V_0 r - R_0 v + g \cos \theta_0 \theta] \\ \Delta F_y &= m[\dot{v} + U_0 r + R_0 u - W_0 p - P_0 w - (g \cos \theta_0 \cos \phi_0) \phi + (g \sin \theta_0 \sin \phi_0) \theta] \\ \Delta F_z &= m[\dot{w} + V_0 p + P_0 v - U_0 q - Q_0 u + (g \cos \theta_0 \sin \phi_0) \phi + (g \sin \theta_0 \cos \phi_0) \theta] \\ \Delta L &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} + (I_{zz} - I_{yy})(Q_0 r + R_0 q) - I_{xz}(P_0 q + Q_0 p) \\ \Delta M &= I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz})(P_0 r + R_0 p) - I_{xz}(2R_0 r - 2P_0 p) \\ \Delta N &= I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (I_{yy} - I_{xx})(P_0 q + Q_0 p) + I_{xz}(Q_0 r + R_0 q) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-15)$$

Les composantes de la vitesse angulaire qui représentent la rotation des axes fixés à l'avion  $X_B, Y_B$  et  $Z_B$  par rapport aux axes fixés à la terre  $X_E, Y_E$  et  $Z_E$ , sont les suivantes:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma} &= \dot{\phi} - \frac{u_0}{\psi} \sin \theta_0 - \dot{\theta}_0 \cos \theta_0 \\ \dot{q} &= \dot{\phi} \cos \theta_0 - (\dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \sin \phi_0 + \dot{\phi}_0 (\dot{\psi}_0 \cos \theta_0 \cos \phi_0 - \dot{\theta}_0 \sin \theta_0) + \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \Psi_0 \cos \Theta \\ \dot{r} &= \dot{\psi} \cos \theta_0 \cos \phi_0 - (\dot{\psi}_0 \cos \theta_0 \sin \phi_0 + \dot{\psi}_0 \cos \phi_0 - \dot{\theta}_0 \sin \phi_0 - \dot{\psi}_0 \sin \theta_0 \cos \phi_0) \end{aligned} \right\} \dots (I-16)$$

Pour un vol symétrique  $\psi_0 = \dot{\psi}_0 = 0$  et  $\phi_0 = 0$ , les équations qui représentent un mouvement de translation dans l'équation (I-14) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_x &= m[\dot{u} + W_0 q + Q_0 w - R_0 v + g \cos \theta_0 \Theta] \\ \Delta F_y &= m[\dot{v} + U_0 r + R_0 u - W_0 p - P_0 w - g \cos \theta_0 \Phi] \\ \Delta F_z &= m[\dot{w} + P_0 v - U_0 q - Q_0 u + g \sin \theta_0 \Theta] \end{aligned} \right\} \dots (I-17)$$

Les équations (I-15) qui représentent le mouvement de rotation ne sont pas affectées.

Les équations (I-16) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta_0 \\ \dot{q} &= \dot{\phi} \\ \dot{r} &= \dot{\psi} \cos \theta_0 \end{aligned} \right\} \dots (I-18)$$

Pour un vol à l'équilibre, on présume que :

$$\left. \begin{aligned} Q_0 &= P_0 = R_0 = 0 \\ \Delta F_x &= m[\dot{u} + W_0 q + g \cos \theta_0 \Theta] \\ \Delta F_y &= m[\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g \cos \theta_0 \Phi] \\ \Delta F_z &= m[\dot{w} - U_0 q + g \sin \theta_0 \Theta] \\ \Delta L &= I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ \Delta M &= I_{yy} \dot{q} \\ \Delta N &= I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{aligned} \right\} \dots (I-19)$$

**I-3) Les équations du mouvement d'un avion flexible :**

Lorsque les effets aéroélastiques pour un avion flexible sont pris en considération il devient nécessaire d'augmenter les équations de mouvement pour un avion rigide, en ajoutant aux variables d'état un ensemble de coordonnées généralisées. Ces variables d'état sont associées aux modes flexibles. Ces modes flexibles sont calculés en supposant que le comportement de la structure de l'avion est linéaire et que le déplacement de la structure est petit par rapport aux dimensions totales de l'avion. Avec ces suppositions, chaque mode est caractérisé par une fréquence naturelle distincte [1].

La démarche pour obtenir le modèle aéroélastique débute par une analyse de vibration de la structure. Habituellement la structure de l'avion est modélisée par des éléments-finis, constitués de N nœuds.

Nous prenons en considération que chaque nœud  $i$  de la structure est défini par un vecteur position-orientation  $\xi_i$ , composé de trois positions et de trois orientations, par rapport à un repère lié aux axes de l'avion, et est muni de masse  $m_i$  et d'une inertie  $I_i$ . Le vecteur position-orientation  $\xi_i$  s'exprime sous la forme suivante :

$$\xi_i = [x_i \ y_i \ z_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi}]_a^T \dots\dots\dots(I-20)$$

Lorsque la structure est au repos, c'est-à-dire quand les forces structurelles s'équilibrent, le nœud  $i$  est défini par un vecteur position-orientation nominale  $\xi_{i_0}$ . Nous allons nommer déplacement du nœud  $i$ , qui a la forme suivante :

$$q_i = \xi_i - \xi_{i_0} \dots\dots\dots(I-21)$$

Soit  $q$  le vecteur déplacement de l'avion défini par les déplacements de ses  $N$  nœuds :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-22)$$

La dérivée de la quantité de mouvement de l'ensemble de l'avion est représentée par :

$$\frac{d(M_{N,N}\dot{q})}{dt} = M_{N,N}\ddot{q} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{bmatrix} \dots\dots\dots(I-23)$$

Nous considérons que les seules forces appliquées à la structure, ou autrement dit les interactions entre les nœuds sont les forces dues à l'élasticité. Nous pouvons définir ainsi une matrice de rigidité  $K$  et une matrice d'amortissement  $D$ , décrivant les forces appliquées sur l'avion [5].

$$F_{elas} = -D \dot{q} - K q \dots \dots \dots (I-24)$$

En appliquant les lois de la dynamique de Newton à l'ensemble de l'avion, le mouvement d'un avion flexible sous l'influence des charges aérodynamiques non stationnaire est défini comme suite:

$$A_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i + C_i q_i = Q_i \dots \dots \dots (I-25)$$

Où  $Q_i$  représente la force généralisée,  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  sont des coefficients des coordonnées généralisées  $q_i$  et de ses taux associés.

On a:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\triangleq q_i \\ x_2 &\triangleq \dot{q}_i = \dot{x}_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-26)$$

D'après les équations (I-26) on aura :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B_i}{A_i} x_2 - \frac{C_i}{A_i} x_1 + \frac{1}{A_i} Q_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I-27)$$

Le mode flexible a été représenté par les deux équations différentielles, linéaires, de premier ordre (I-27). De cette manière, il est possible d'augmenter les équations dynamiques de l'avion rigide avec des paires d'équations différentielles de premier ordre qui correspondent à chaque mode flexible considéré. Le vecteur d'état est augmenté jusqu'à un degré qui dépend du nombre des modes flexibles considéré. Si certains modes flexibles sont considérés comme étant significatifs et sont inclus dans le modèle mathématique, il est conventionnel que le premier mode être considéré comme mode avec la plus basse fréquence. Le nombre de mode va dans l'ordre croissant, car la fréquence avec chaque mode augmente [1].

**I-3-1) Représentation mathématique de la dynamique flexible d'un avion :**

**I-3-1-1) Les équations d'état pour le mouvement longitudinal :**

La dynamique du mouvement longitudinal de l'avion flexible considéré est :

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha} &= Z_{\alpha} \alpha + q + \sum_{j=1}^m Z_{\delta_j} \delta_j + Z_{\lambda_1} \lambda_1 + Z_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1 \\
 \dot{q} &= \alpha (M_{\alpha} + Z_{\alpha} M_{\dot{\alpha}}) + q (1 + M_q) + \sum_{j=1}^m Z_{\delta_j} \delta_j + Z_{\lambda_1} \lambda_1 + Z_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1 + \sum_{j=1}^m M_{\delta_j} \delta_j + M_{\lambda_1} \lambda_1 + M_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1 \\
 \ddot{\lambda}_1 &= - (2\xi_1 \omega_1 + \eta_{1\lambda_1}) \dot{\lambda}_1 + (-\omega_1^2 + \eta_{1\lambda_1}) \lambda_1 + \eta_{1\alpha} \alpha + \eta_{1q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{1\delta_j} \delta_j \\
 \ddot{\lambda}_5 &= - (2\xi_5 \omega_5 + \eta_{5\lambda_5}) \dot{\lambda}_5 + (-\omega_5^2 + \eta_{5\lambda_5}) \lambda_5 + \eta_{5\alpha} \alpha + \eta_{5q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{5\delta_j} \delta_j \dots \dots \dots (I-28) \\
 \ddot{\lambda}_7 &= - (2\xi_7 \omega_7 + \eta_{7\lambda_7}) \dot{\lambda}_7 + (-\omega_7^2 + \eta_{7\lambda_7}) \lambda_7 + \eta_{7\lambda_8} \lambda_8 + \eta_{7\dot{\lambda}_8} \dot{\lambda}_8 + \eta_{7\alpha} \alpha + \eta_{7q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{7\delta_j} \delta_j \\
 \ddot{\lambda}_8 &= - (2\xi_8 \omega_8 + \eta_{8\lambda_8}) \dot{\lambda}_8 + (-\omega_8^2 + \eta_{8\lambda_8}) \lambda_8 + \eta_{8\lambda_7} \lambda_7 + \eta_{8\dot{\lambda}_7} \dot{\lambda}_7 + \eta_{8\alpha} \alpha + \eta_{8q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{8\delta_j} \delta_j \\
 \ddot{\lambda}_{12} &= - (2\xi_{12} \omega_{12}) \dot{\lambda}_{12} - \omega_{12}^2 \lambda_{12} + \eta_{12\alpha} \alpha + \eta_{12q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{12\delta_j} \delta_j
 \end{aligned}$$

**I-3-1-2) Equation de vecteur d'état :**

L'expression générale de l'équation de vecteur d'état du premier ordre est :

$$\dot{x} = Ax + Bu \dots \dots \dots (I-29)$$

Où le vecteur d'état  $x$  est défini tel que :

$$x = [\alpha \ q \ \lambda_1 \ \dot{\lambda}_1 \ \lambda_5 \ \dot{\lambda}_5 \ \lambda_7 \ \dot{\lambda}_7 \ \lambda_8 \ \dot{\lambda}_8]^T \dots \dots \dots (I-30)$$

Et si l'avion est commandée par la déflection de la gouverne de profondeur et par le canard horizontal, le vecteur de commande  $u$  est défini de la manière :

$$u = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix} \dots \dots \dots (I-31)$$

Les éléments du vecteur  $x$  sont les variables d'état et les éléments du vecteur  $u$  sont les variables d'entrée de la commande. La matrice  $A$  est de l'ordre  $(n \times n)$  et  $B$  est de l'ordre  $(n \times m)$ .



Donc à partir de l'équation (I-28), on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} Z_{\dot{z}} & 1 & \Sigma_{\dot{z}_1} & \Sigma_{\dot{z}_2} & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{\ddot{z}} - (M_{\dot{z}} Z_{\dot{z}}) & (M_{\ddot{z}} - M_{\dot{z}}) & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{1\dot{z}} & \eta_{1\ddot{z}} & -\omega_1^2 + \eta_{1\dot{z}_1} & -(2\xi_1 \omega_1 + \eta_{1\dot{z}_2}) & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{5\dot{z}} & \eta_{5\ddot{z}} & 0 & 0 & (-\omega_5^2 + \eta_{5\dot{z}_1}) - (2\xi_5 \omega_5 + \eta_{5\dot{z}_2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \eta_{7\dot{z}} & \eta_{7\ddot{z}} & 0 & 0 & 0 & c & (-\omega_7^2 + \eta_{7\dot{z}_1}) & -(2\xi_7 \omega_7 + \eta_{7\dot{z}_2}) & \eta_{7\dot{z}_3} & \eta_{7\dot{z}_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \eta_{8\dot{z}} & \eta_{8\ddot{z}} & 0 & 0 & 0 & c & \eta_{8\dot{z}_1} & \eta_{8\dot{z}_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(I-32)

$$B = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} & Z_{\delta_c} \\ M_{\delta_e} & M_{\delta_c} \\ 0 & 0 \\ \eta_{1\delta_e} & \eta_{1\delta_c} \\ 0 & 0 \\ \eta_{5\delta_e} & \eta_{5\delta_c} \\ 0 & 0 \\ \eta_{7\delta_e} & \eta_{7\delta_c} \\ 0 & 0 \\ \eta_{8\delta_e} & \eta_{8\delta_c} \end{bmatrix}$$

(I-33)

$y = Cx + Du$  .....(I-34)

Pour les matrices *C* et *D* (voir l'annexe D)

Où  $\delta_e$  est la déflexion de la surface de commande de profondeur et  $\delta_c$  est la déflexion de canard horizontal.

Le vecteur de vitesse de la rafale  $w$  (voir Annexe A) est défini comme suite :

$$w^T = [w_{g1} \quad w_{g2} \quad w_{g3}] \dots \dots \dots (I-35)$$

Où les trois rafales  $w_{g1}, w_{g2}$  et  $w_{g3}$  ont été considérées pour trois différentes distances par rapport au centre de gravité de l'avion.

### I-3-2) Application sur un avion de transport du type B-52 :

Le bombardier Boeing B-52 Stratofortress effectua son premier vol le 15 avril 1952 et fut mis en service au sein du Strategic Air Command (SAC) en 1955.

Conçus d'après un cahier des charges datant de l'immédiat après-guerre, l'avion était destiné à remplacer les B-36 dans le rôle de bombardier nucléaire stratégique. Cependant, même si durant la période de la guerre froide des B-52 munis de bombes nucléaires sillonnèrent en permanence le ciel, ce bombardier ne remplira heureusement toutes ses missions opérationnelles qu'en lançant des bombes conventionnelles [22].

#### ➤ Caractéristiques techniques :

Moteur : 8 réacteurs Pratt & Whitney de 7,7 tonnes de poussée

Envergure : 56,40 m

Longueur : 48,03 m

Masse : 83 tonnes à vide, jusqu'à 221 tonnes

Vitesses : mach 0,95 maximum

Plafond : 15000 km

Autonomie : 16000 m

➤ **Matrices du système longitudinal :**

Dans la partie simulation l'expression du modèle d'équation de vecteur d'état considéré est écrite sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gw$$

$$y = Cx + Du$$

Les valeurs des matrices utilisées dans notre étude sont comme suite [8] :

$$A \in R^{10 \times 10}, B \in R^{10 \times 2}, \text{ et } C \in R^{1 \times 10}, D \in R^{1 \times 2}.$$

$G$  est de l'ordre  $(10 \times 3)$ .

$$A = \begin{bmatrix} -1.6 & 1 & -1.1811 & -0.1181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.57 & -2.4460 & -1.8130 & 1.1805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.1960 & -0.4450 & -56.8200 & -5.5300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3490 & 0.2466 & 0 & 0 & -231.52 & -1.7120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.0930 & 0.2420 & 0 & 0 & 0 & 0 & -408.86 & -2.6790 & -10.71 & -0.5180 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3073 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2400 & -0.1760 & -390.10 & -0.4740 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.07 & -0.006 \\ 3.726 & -0.28 \\ 0 & 0 \\ 0.572 & 0.019 \\ 0 & 0 \\ -0.465 & -0.054 \\ 0 & 0 \\ -0.582 & -0.0532 \\ 0 & 0 \\ -0.112 & -0.035 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.0042 & 0.0037 & 0.0012 \\ 0.06 & -0.0417 & -0.056 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0105 & 0.0393 & -0.0086 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.0065 & 0.0039 & 0.0059 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0045 & 0.0101 & 0.0064 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0021 & -0.0009 & 0.0012 \end{bmatrix}$$

Dans notre étude on a pris une distance de 4,4 m par rapport au centre de gravité de l'avion.

$$C = [-32.65 \quad -28.04 \quad 49.93 \quad 2.37 \quad -1405.41 \quad -10.39 \quad -1707.61 \quad -13.09 \quad -4472.18 \quad -7.53]$$

$$D = [-12.55 \quad -1.02]$$

Où les états  $x = [\alpha \ q \ \lambda_1 \ \dot{\lambda}_1 \ \lambda_5 \ \dot{\lambda}_5 \ \lambda_7 \ \dot{\lambda}_7 \ \lambda_8 \ \dot{\lambda}_8]^T$ .



**II-1) Introduction :**

Mclean [1] a démontré que les amplitudes des réponses provoquées par les rafales induites sur la structure flexible de l'avion peuvent être réduites dans les deux cas suivants : soit l'énergie transférée par la perturbation de rafale sur les modes structuraux de flexion de l'avion est réduite, soit l'énergie absorbée par des perturbations de rafale sur les modes structuraux est dispersée rapidement. Ceci nécessite une charge obtenue par le battement d'une certaine surface portante afin de réduire la qualité d'énergie transférée. Mais cette méthode exige une connaissance précise des dérivés de stabilité de l'avion. Ces dérivés se modifient considérablement, car les changements se produisent dans des quantités et des propriétés telles que la masse de l'avion, la distribution de cette atmosphérique. Ainsi, à tout moment, la dynamique de l'avion n'est pas assez bien connue pour permettre l'annulation des forces et des moments créés par une rafale. Une fois que l'énergie de la rafale a été transférée, sa dissipation dans la structure peut être contrôlée en augmentant dynamiquement la stabilité des modes flexibles. Il est souvent difficile de réaliser une augmentation dans l'amortissement structural par de telles méthodes car dans le cas où les fréquences de deux modes flexibles sont proches, elles deviennent étroitement couplées [2].

La méthode utilisée dans ce projet pour l'étude de la stabilité des modes flexibles de l'avion et pour la réduction des accélérations aux quelles ces modes contribuent, est basée sur la loi de commande optimale, qu'est à été étudiée dès le XIX<sup>ème</sup> siècle, une des grandes applications de cette commande à été l'application au lanceur Apollo dans les années 1960. Pour un système dynamique donné et dont les équations sont connues, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné. Notons néanmoins que les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité [10].

L'étude se portera sur deux commandes qui sont :

- La commande optimale LQR
- La commande non-linéaire par mode glissant

**II-2) Commande optimale (LQR) :**

LQR « Linear Quadratic Regulator », est l'une des méthodes de conception la plus largement répondues pour le contrôle. Des études ont été réalisées comparant des propriétés des contrôleurs (exécution, robustesse, utilisation de contrôle) dans des différentes applications. On parle de commande linéaire quadratique lorsque le système est linéaire et la commande est quadratique, cette commande est définie comme étant une commande optimale par retour d'état [10].

Ce régulateur est encore connu sous le nom de « Gain de Kalman ». il consiste à trouver une loi de commande optimale  $u(t)$  en boucle fermée qui permet d'assurer les performances désirées [11].

La commande LQR possède les propriétés suivantes :

- moins robuste par rapport aux perturbations et à l'incertitude sur les paramètres.
- Méthode autorégulée.
- Performante.

**II-2-1) Loi de commande LQR :**

On suppose que l'état complet  $x(t)$  du système peut être exactement mesuré à tout moment et il est aussi disponible pour effectuer la chaîne de retour.

Soit le système physique donné par les équations d'états suivantes :

$$\dot{x} = Ax + Bu \dots\dots\dots(\text{II-1})$$

$$y = Cx + Du \dots\dots\dots(\text{II-2})$$

Si on suppose que l'état complet  $x(t)$  peut être mesuré à tout moment, il est possible de mettre en application la loi linéaire de commande :

$$u = -Kx + K_r r \dots\dots\dots(\text{II-3})$$

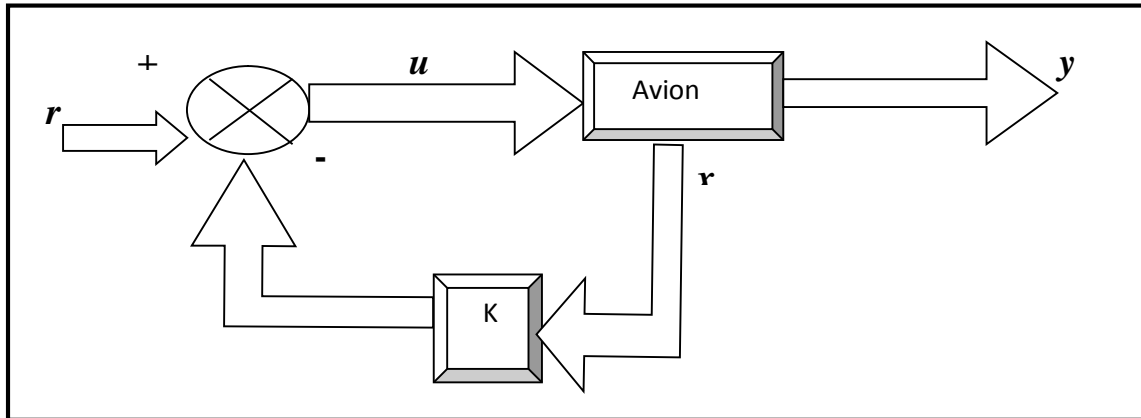


Figure (II .1) : Schéma synoptique de la commande par retour d'état

$K$  est la matrice de gain de la chaîne de retour

$r$  est l'entrée commandée par le pilote

Pour ce type de système, on souligne l'existence d'un théorème sur la stabilisation du système comme suit : Il est possible de trouver une matrice constante  $K$  tel que le système de commande en boucle fermée est asymptotiquement stable. Ceci est vrai si et seulement si le système (II.1) est stabilisé, qui à son tour est vrai si toutes les valeurs propres du système ont des parties réelles négatives.

Si la loi de commande (II-3) est appliquée au système représenté par les équations (II-1) et (II-2), et on obtient la fonction de transfert  $H(s)$  entre la sortie  $y$  et l'entrée  $r$  sous la forme suivante :

$$H(s) = \frac{y}{r} = (C - DK)[sI - (A - BK)]^{-1}B + D \dots \dots \dots (II-4)$$

➤ **Etapes pour trouver le gain optimal  $K$  :**

Un problème fondamental de conception est le problème du régulateur, où il est nécessaire de réguler les sorties du système à zéro, tout en s'assurant qu'elles démontrent les caractéristiques souhaitables de la réponse dans le temps [2].

On considère le system linéaire suivant :

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \dots \dots \dots (II-5a)$$

$$x(t_0) = x_0 \dots \dots \dots (II-5b)$$

Dans un premier lieu il faut que le système soit contrôlable pour que la stabilisation et l'exécution aura lieu. (Voir l'Annexe B).

L'objectif de cette commande est de minimiser une fonction de coût quadratique basée sur les énergies de commande et énergie de sortie [11]. Cette fonction de coût est définie selon l'expression suivante:

$$J = \int_{t_0}^T (x^T Qx + u^T Ru) d\tau + x^T(T)Q_T x(T) \dots \dots \dots (II-6)$$

Sachant que :

- $x^T(T)Q_T x(T)$  : Vitesse de rejet de perturbation.
- $Q$  : Matrice de pondération symétrique positive semi-définie.
- $Q_T$  : Matrice positive semi-définie.
- $R$ : Matrice de pondération positive définie.
- $u^T Ru$  : Energie de commande.

Ainsi que :

$$Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T \geq 0, \quad Q_T = Q_T^T \geq 0 \dots \dots \dots (II-7)$$

Dans le but de minimiser la fonction de coût quadratique (II-2), on définit le Hamiltonien (voir Annexe C) de cette fonction J comme étant de la forme suivante :

$$H = x^T Qx + u^T Ru + \frac{\partial J^*}{\partial x} (A(t)x + B(t)u) \dots \dots \dots (II-8)$$

Les conditions d'optimalité se présentent alors comme suit :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2Ru + B^T \nabla_x J^*(x, t) = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (II-9)$$



On a le control optimal suivant :

$$u^* = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \nabla_x J^*(x, t) \dots \dots \dots (II-10)$$

Et l'équation Hamiltonienne suivante :

$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = x^T Q x + \frac{1}{4} \frac{\partial J^*}{\partial x} B R^{-1} B^T \nabla_x J^* + \frac{\partial J^*}{\partial x} A x - \frac{1}{2} \frac{\partial J^*}{\partial x} B R^{-1} B^T \nabla_x J^* \dots \dots \dots (II-11)$$

Puisque il est difficile de résoudre une équation comme celle de l'équation (2-11), alors on pose :

$$J^* = J^*(x(t), t) = x(t)^T P(t) x(t) \dots \dots \dots (II-12)$$

Où  $P(t) = P^T(t) > 0$  , on remplace l'équation (II-12) dans l'équation (II-11) on aura les deux équations suivantes:

$$\frac{\partial J^*(x,t)}{\partial t} = x^T \dot{P}(t) x \quad ; \quad \nabla_x J^*(x, t) = 2P(t)x \dots \dots \dots (II-13)$$

On remplace de nouveau (2-13) dans (2-11) et on prend x comme facteur on aura :

$$x^T [-\dot{P}(t) - P(t)A - A^T P(t) - Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t)]x = 0 \dots \dots \dots (II-14)$$

Par la résolution de l'équation précédente ( $x = 0$ , ou bien  $x^T = 0$ ), avec la condition  $P(t) = Q_T$  et puisque ceci doit être satisfait pour n'importe quel état  $x$ , on aura l'équation suivante :

$$-\dot{P}(t) = P(T)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t) \dots \dots \dots (II-15)$$

Celle-ci est l'équation de Riccati.

Si  $A, B, Q$  et  $R$  sont constantes, alors  $P$  est une constante, ce qui entraîne  $\dot{P} = 0$  et l'équation algébrique de Riccati est ensuite obtenue à partir de la dernière équation :

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \dots\dots\dots (II-16)$$

En remplaçant l'équation (II-13) dans l'équation (II-10), on obtient :

$$u^*(x, t) = -\frac{1}{2}R^{-1}B^T \frac{\partial J^*(x,t)}{\partial x} = R^{-1}B^T P(t)x = -K(t)x \dots\dots\dots (II-17)$$

Donc, on peut résumer la commande comme suit :

La commande :  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$  ;  $x(t_0) = x_0$

L'indice de performance :  $J = \int_{t_0}^T (x^T Qx + u^T Ru) d\tau + x^T(T)Q_T x(T)$

L'équation algébrique de Riccati :  $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

La commande optimale :  $u(t) = -K(t)x$

Le système en boucle fermée :  $\dot{x} = [A(t) - B(t)K(t)] \dots\dots\dots (II-18)$

**II-2-2) Système de commande optimale LQR avec action intégrale :**

Le problème de la commande avec retour d'état c'est que les erreurs (au repos) peuvent avoir lieu. Pour cela, on combine une action intégrale pour résoudre ce problème. Le terme de l'action intégrale n'est que l'intégrale de l'erreur définie par :

$$e = r - y = r - Cx \dots\dots\dots (II-19)$$

La figure (II.2) suivante nous présente le schéma synoptique de commande par retour d'état avec action intégrale.

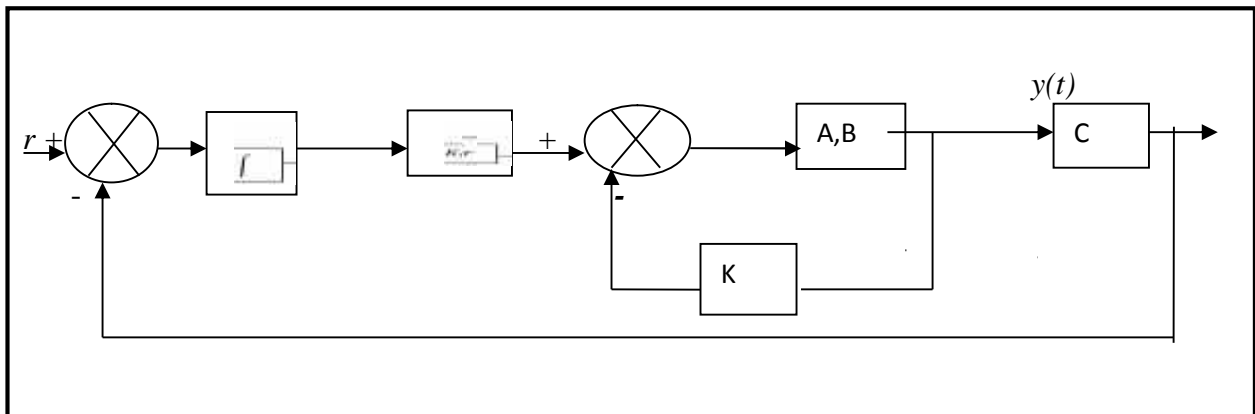


Figure (II.2) : schéma synoptique de la commande par retour d'état avec action intégrale

$$x_i = \int_0^t e(\tau) d\tau \dots\dots\dots (II-20)$$

$$\dot{x}_i = r - Cx \dots\dots\dots (II-21)$$

La commande est :

$$u = -Kx + K_i x_i \dots\dots\dots (II-22)$$

Où  $K_i$  : matrice des gains intégrales

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + BK_i x_i \dots\dots\dots (II-23)$$

$$\dot{x}_i = r - Cx \dots\dots\dots (II-24)$$

L'action intégrale permet de ramener la mesure à sa valeur de consigne et donc de supprimer l'écart résiduel ou l'erreur statique.

➤ **Détermination des gains  $K$  et  $K_i$  :**

Le choix de  $K$  et  $K_i$  est dicté par l'utilisation du nouveau système augmenté qui est de la forme :

$$X'^* = A^* X'^* + B^* U \dots\dots\dots (II-25)$$

Avec  $U(t) = -K^* X'^* \dots\dots\dots (II-26)$

Où  $K^* = [K \ -K_i] \dots\dots\dots (II-27)$

On définit un vecteur augmenté  $(x \ x_i)^T$  de tel sorte que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r \dots\dots\dots (II-28)$$

Etant donné le modèle utilisé et les matrice de pondérations  $Q$  et  $R$  une fonction simple à l'aide du logiciel Matlab calcule le gain optimal  $K^*$ .

**II-2-3) Système de commande linéaire LQR avec observateur de Luenberger :**

Les premiers observateurs utilisés pour la commande des systèmes ont été les observateurs de Luenberger et de Kalman . Ces observateurs ont donné de bons résultats pour l'estimation des paramètres non-mesurables. Le filtre de Kalman est utilisé dans le cas des systèmes stochastiques, et l'observateur de Luenberger est utilisé pour les systèmes linéaires déterministes. La structure de l'observateur de Luenberger est donnée par la figure (II.3). Elle fait intervenir, un estimateur fonctionnant en boucle ouverte qui est caractérisé par la même dynamique du système. La structure complète inclut une boucle de contre-réaction permettant de corriger l'erreur entre la sortie du système et celle de l'estimateur. L'observateur fonctionne donc en boucle fermée [7].

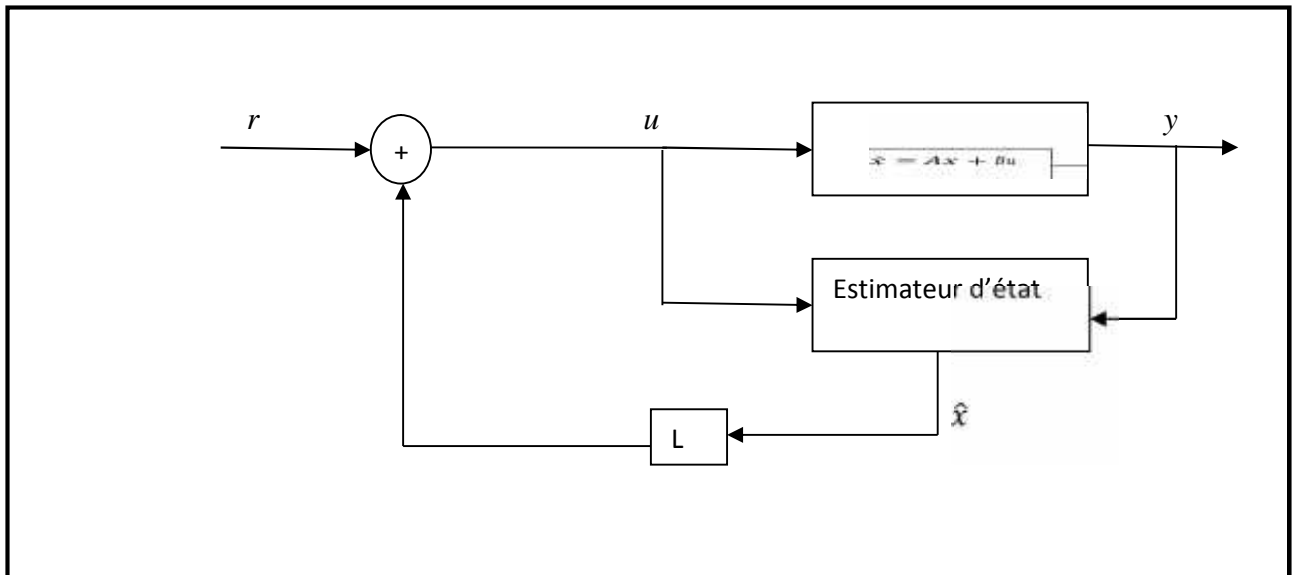


Figure (II.3) : schéma bloc d'un observateur de Luenberger

L'observateur de Luenberger est une copie du système réel plus un terme de gain dans le retour de la correction de l'erreur d'estimation.

Le système linéaire pour lequel on veut réaliser un observateur qu'est décrit par les équations (II-1) et (II-2).

L'idée principale de l'observateur de Luenberger consiste à désigner au système défini dans les équations (II-1) et (II-2) un autre système **LTI**, dont l'objectif est de donner une estimation d'état  $\hat{x}(t)$  de  $x(t)$  à partir des entrées  $u(t)$  et  $y(t)$ .

L'équation d'état de l'estimateur est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{x} = F\hat{x} + Ju + Ly \\ y = Cx \end{cases} \dots\dots\dots(\text{II-29})$$

Où les matrices  $F \in R^{n \times n}$ ,  $J \in R^{n \times p}$ , et  $L \in R^{n \times p}$ .

Soit l'erreur d'estimation défini par :

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \dots\dots\dots(\text{II-30})$$

$\hat{x}$  est une bonne estimation de  $x$  si  $\tilde{x} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - F\hat{x} - Ju - Ly = F\tilde{x} + (A - F - LC)x + (B - J)u \dots\dots\dots(\text{II-31})$$

Le but est d'obtenir  $\tilde{x} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , quelque soit  $x$  et  $u$ , donc on peut choisir  $B=J$ , et déterminer  $F$  et  $L$  de tel sorte que :  $A - F - LC = 0$ .

L'équation (II-31) devienne :  $\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} \dots\dots\dots(\text{II-32})$

Donc,  $\tilde{x} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  si les valeurs propres de  $F$  sont à partie réel négative.

Le système en boucle fermée avec présence de l'observateur :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BC \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

On peut classer les performances d'un observateur de la façon suivante :

- ✓ Stabilité de l'observateur définie par les gains de la matrice des gains.
- ✓ La dynamique de l'observateur : vitesse de convergence de l'observateur.
- ✓ La robustesse de l'observateur vis-à-vis des perturbations.

L'observateur étant en boucle fermée, la dynamique va donc s'ajouter a celle du système à commander. Donc elle va influencer la commande du système. Le rôle d'un observateur robuste sera donc d'adapter ces paramètres (les paramètres de la matrice d'état) de telle manière à ce qu'il ne devient pas une source d'instabilité pour la commande [7].

Un des inconvénients du contrôle optimal est qu'il conduit à des calculs matricielles relativement lourds dès que le système à contrôler est grand et moins robuste, pour cela on passe à une commande non-linéaire VSS par mode glissant qu'elle est décrite dans la section (II-3) suivante.

**II-3) La Commande par mode glissant (SMC) :**

La commande par mode glissant est une commande à structure variable VSS (variable structure system dans la littérature anglo-saxonne). Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés dans l'ancienne U.R.S.S à partir des années soixante. Elle est basée essentiellement sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu, initiée par le mathématicien soviétique A.G.Filipov [12].

Le véritable essor de l'utilisation de cette technique date de la parution des livres d'Itkis [13] et d'Utkin [21].

Par la suite, ces travaux ont été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications. Aux Etats-Unis, cette théorie est introduite par Slotine et au Japon par Young, Harasma et Hashimoto. Il a fallu attendre les années 80, pour que le concept de cette théorie trouve ses applications dans plusieurs domaines notamment dans les systèmes de commande et serait parmi les techniques de contrôle non linéaire les plus efficaces et les plus robustes.

La technique des modes glissants consiste à emmener la trajectoire d'état d'un système vers la surface de glissement et de la faire commuter à l'aide d'une commutation appropriée autour de celle-ci jusqu'au point d'équilibre, d'où le phénomène de glissement, et d'y rester par la suite sur cette surface malgré d'éventuelle perturbations [15].

La commande par mode glissant a été largement appliquée dans le cas des systèmes linéaires et non linéaires et a été étendue et étudiée avec un certain succès sur les systèmes d'ordre entier à retards [12].

### **II-3-1) Système à structure variable :**

Un système à structure variable (VSS) est un système dont la structure change pendant son fonctionnement. Il est caractérisé par le choix d'une structure et d'une logique de commutation. Ce choix permet aux systèmes de commuter d'une structure à une autre à tout instant. Dans les systèmes à structures variables avec mode de glissement, la trajectoire d'état est amenée vers une surface (Hyperplan) dans le cas MIMO, puis à l'aide de la loi de commutation, elle est obligée de rester au voisinage de cette surface. Cette dernière est dite surface de glissement et le mouvement le long de laquelle se produit, est dit mouvement de glissement [16].

Afin de faciliter les transferts de technologie et le développement du savoir-faire en milieu industriel (les régimes glissants ont à se comparer aux algorithmes classiques de type PID et variantes reposant sur plus de cinquante années de savoir-faire), envisageons la commande d'un système mono-variable dont l'évolution de la sortie  $y(t)$  résulte d'un actionneur à entrée de commande  $u(t)$ .

La trajectoire des états dans le plan de phase est constituée de trois parties distinctes représentées dans la figure (II.4):

- ❖ **Le mode de convergence (MC) :** durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point du plan de phase et tend vers la surface de commutation  $S(x) = 0$ , et l'atteint dans un temps fini. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- ❖ **Le mode de glissement (MG) :** durant lequel la variable d'état atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique en ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x) = x + cx$ .
- ❖ **Le mode régime permanent (MRP) :** il est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (l'origine du plan de phase). Il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande.

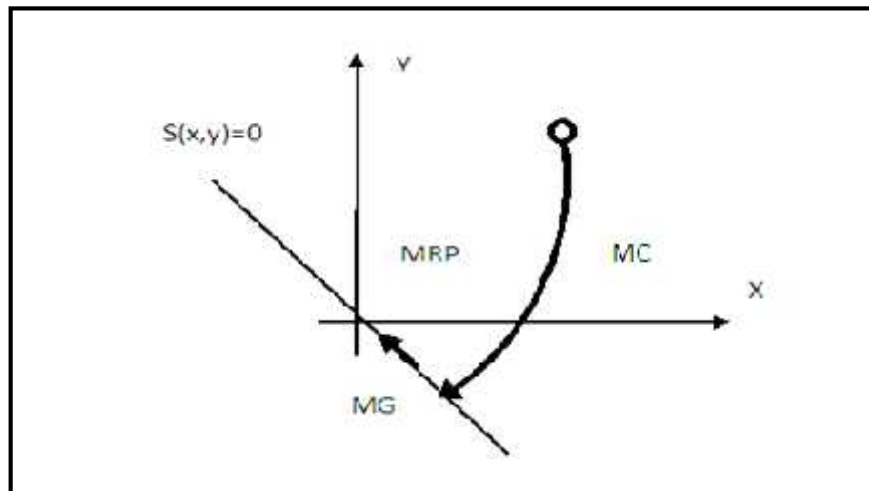


Figure (II.4) : Différentes modes pour la trajectoire dans le plan de phase [15]

### II-3-2) Conception de la commande par mode glissant :

Les avantages de la commande par mode glissant sont importants et multiples: la haute précision, la bonne stabilité, la simplicité, l'invariance, la robustesse...etc,. Ceci lui permet d'être particulièrement adapté pour les systèmes ayant un modèle imprécis [15].

Ce type de commande peut être utilisé d'une manière tout à fait analogue, non seulement en régulation, mais dans les problèmes de poursuite de trajectoire ou de poursuite de modèle.

La conception de la commande par mode de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et de bonnes performances de façon systématique dans son approche. En général, pour réaliser ce type de commande trois étapes doivent être effectuées [16]:

- ✓ Le choix des surfaces.
- ✓ Détermination des conditions d'existence et de convergence.
- ✓ Synthèse des lois de commande du régime glissant.

### II-3-2-1) Choix de la surface de glissement :

Le choix de la surface de glissement concerne non seulement le nombre nécessaire de ces surfaces, mais également leurs formes en fonction de l'application et de l'objectif visé. Généralement, pour un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = f(x, t)x + g(x, t)u$$

Le nombre des surfaces de glissement est choisi égal à la dimension du vecteur de commande  $u$ .

La surface de glissement est une fonction scalaire telle que la variable à régler glisse sur cette surface et tend vers l'origine du plan de phase, chacune présente des meilleures performances pour une application donnée.

La surface la plus utilisée pour obtenir le régime de glissement est donnée par J.J.Slotine qui permet de garantir la convergence de l'état vers sa référence, est défini par :

$$S(x) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_x \right)^{r-1} e(x) \dots \dots \dots (II-33)$$

$x$  : Variable à réguler.

$e(x)$  : L'écart de poursuite de la variable à réguler  $e(x) = x^* - x$



$\lambda_x$  : Une constante positive qui interprétera la bande passante du contrôleur désire.

$r$  : degré relative égal au nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître la commande.

Pour un système défini par une représentation d'état, surface de glissement prend la forme  $S(x)=Sx$

### II-3-2-2) Conditions de convergence et d'existence :

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence :

#### ➤ La fonction discrète de commutation :

C'est la première condition de convergence, elle est proposée et étudiée par EMILYANOV et UTKIN. Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. [16]

$$\dot{S}(x) > 0 \text{ si } S(x) < 0 \dots\dots\dots(\text{II-34a})$$

$$\dot{S}(x) < 0 \text{ si } S(x) > 0 \dots\dots\dots(\text{II-34b})$$

Cette condition peut être formulée comme suit:

$$\dot{S}(x)S(x) < 0 \dots\dots\dots(\text{II-35})$$

#### ➤ La fonction de Lyapunov :

Face à un ensemble d'équations différentielles, la méthode directe de Lyapunov consiste à choisir une fonction scalaire, qui prend la forme d'une fonction d'énergie, dite fonction candidate de Lyapunov, relative à la dynamique du système, puis examiner la variation temporelle de cette fonction scalaire dans le but de vérifier la stabilité du système ainsi défini par ces équations différentielles.

La fonction candidate de Lyapunov  $V(x)$  est en fonction de l'état du système considéré  $x$  et sa dérivée temporelle  $\dot{x}$ , et doit vérifier deux propriétés. La première est une propriété de la fonction elle-même : cette dernière doit-être une fonction définie positive, donc pour  $x$  et  $\dot{x}$  non nulles la fonction candidate de Lyapunov doit-être positive. L'autre propriété est associée à la dynamique du système considéré : la fonction candidate est une fonction décroissante de façon monotone lors de la variation de l'état du système et de sa dérivée. En d'autres termes, la dérivée temporelle de cette fonction reste négative pour toute variation de  $x$  et  $\dot{x}$  [11].

La stabilité locale est définie autour d'un point d'équilibre et implique l'usage d'une fonction candidate définie positive localement. Alors dans ce cas les conditions de stabilité locale deviennent :

- $V(x)$  est définie positive autour du point d'équilibre étudié.
- $\dot{V}(x)$  est semi-définie négative au voisinage du point d'équilibre.

Si de plus la dérivée est localement définie négative, alors la stabilité est dite asymptotique.

Dans le but de généraliser la stabilité locale déjà définie, il n'est pas suffisant d'étendre le domaine d'étude au voisinage du point d'équilibre à l'espace d'état tout entier. En effet, une condition additionnelle s'ajoute à celles énoncées ci-haut, et la stabilité est alors déterminée par les conditions suivantes :

- $V(x)$  est définie positive
- $\dot{V}(x)$  est définie négative
- $V(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\| \rightarrow \infty$ , c.à.d. lorsque  $x$  tend vers l'infini dans n'importe quelle direction.

La stabilité ainsi définie est dite stabilité asymptotique globale.

En définissant la fonction de LYAPUNOV par :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \dots \dots \dots (II-36)$$

$V(x)$  est en fonction de l'état du système considéré  $x$ , et sa dérivée temporelle  $\dot{x}$ .

Pour que la fonction  $V(x)$  puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée soit négative. Ceci n'est vérifiée que si la condition (II-35) est vérifiée. L'équation (II-36) montre

que le carré de la distance vers la surface, mesurée par  $S^2(x)$ , diminue tout le temps, contraignant ainsi la trajectoire du système à se diriger vers la surface des deux cotés [16].

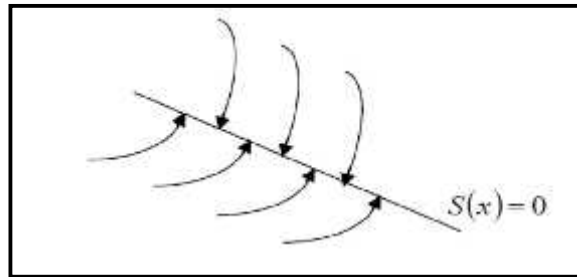


Figure (II.5) : trajectoire de l'état envers la surface [15]

### II-3-3) Calcul de la commande :

#### II-3-3-1) Définition des grandeurs de la commande :

Lorsque le régime glissant est atteint, la dynamique du système est indépendante de la loi de commande qui n'a pour but de maintenir les conditions de glissement, c'est pour cette raison que la surface est déterminée indépendamment de la commande. Maintenant, il reste à déterminer la commande nécessaire pour attirer la trajectoire d'état vers la surface et ensuite vers son point d'équilibre en maintenant les conditions d'existence du mode de glissement.

L'obtention d'un régime de glissement suppose une commande discontinue. La surface de glissement devrait être attractive des deux côtés. De ce fait, si cette commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée.

La partie continue en effet amener à réduire autant que nous voulons l'amplitude de la partie discontinue. En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour but de vérifier les conditions d'attractivité.

Dans ce cas, la structure d'un contrôleur par mode de glissement est constituée de deux parties, une concernant la linéarisation exacte  $u_{eq}$  et l'autre stabilisante  $u_n$ .

$$u(t) = u_{eq}(t) + u_n \dots\dots\dots(II-37)$$

$u_{eq}$  Correspond donc à la commande proposée par FILIPOV, elle sert à maintenir la variable à contrôler sur la surface de glissement  $S(x) = 0$ . La commande équivalente est déduite en considérant que la surface  $\dot{S}(x)$ . Elle peut être interprétée comme étant un retour d'état particulier jouant le rôle d'un signal de commande appliqué sur le système à commander.

Ainsi, la commande est discontinue et est commutée à fréquence élevée entre  $u_{max}$  et  $u_{min}$  et que  $u_{eq}$  est la valeur moyenne de ce signal continu modulé en largeur comme le montre la figure (II.6) :

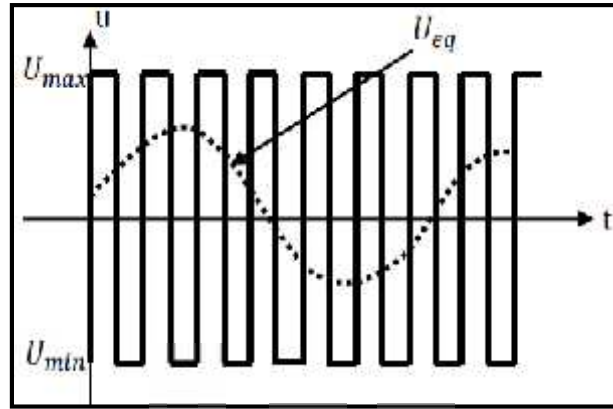


Figure (II.6) : valeur continu  $u_{eq}$  prise par la commande lors de la commutation [15]  
entre  $u_{max}$  et  $u_{min}$

La commande  $u_n$  est déterminée pour garantir l’attractivité de la variable à contrôler vers la surface et pour satisfaire la condition de stabilité au sens de Lyapunov.

**II-3-3-2) Détermination de la commande :**

Pour mettre en évidence le développement précédent, nous considérons un système défini dans l’espace d’état par l’équation (II-1). Il s’agit de trouver l’expression analogique de la commande  $u$ .

Soit la dérivée de la surface de glissement :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \dots\dots\dots(II-38)$$

En remplaçant (II-1) et (II-35) dans (II-38), nous trouvons :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} [A(x, t) + B(x, t)u_{eq}(t)] + \frac{\partial S}{\partial x} [B(x, t)u_n] \dots\dots\dots(II-39)$$

Durant le mode de glissement et le régime permanent, la surface est nulle, et par conséquent, sa dérivée et la partie discontinue sont aussi nulles. D’où nous déduisons l’expression de la commande équivalente :

$$u_{eq} = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial x} A(x, t) \right] \dots\dots\dots (II-40)$$

Pour que la commande équivalente puisse prendre une valeur finie, il faut que :

$$\frac{\partial S}{\partial x} [B(x, t)] \neq 0 \dots\dots\dots (II-41)$$

Durant le mode de convergence, et en remplaçant la commande équivalente par son expression dans (II-39), nous trouvons la nouvelle expression de la dérivée de la surface :

$$\dot{S}(x) = \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) u_n \dots\dots\dots (II-42)$$

Et la condition d'attractivité exprimée par (II-35) devient :

$$\dot{S}(x) S(x) = S(x) \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) u_n < 0 \dots\dots\dots (II-43)$$

Afin de satisfaire cette condition, le signe de  $u_n$  doit être opposé à celui de  $S(x) \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t)$  dans ce cas la commande  $u_n$  s'écrit comme suit :

$$u_n = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B(x, t) \right]^{-1} k \cdot \text{signe}(s(x)) \dots\dots\dots (II-44)$$

En remplaçant l'expression de  $u_n$  dans (II-43) on obtient :

$$\dot{S}(x) S(x) = -k \text{signe}(S(x)) \dots\dots\dots (II-45)$$

Le gain  $k$  est choisi positif pour satisfaire la condition (II-45). Si  $k$  est très petit, le temps de réponse sera trop long, et s'il est choisi très grand nous aurons des fortes sollicitations de l'organe de commande qui peuvent exciter les dynamiques négligées.

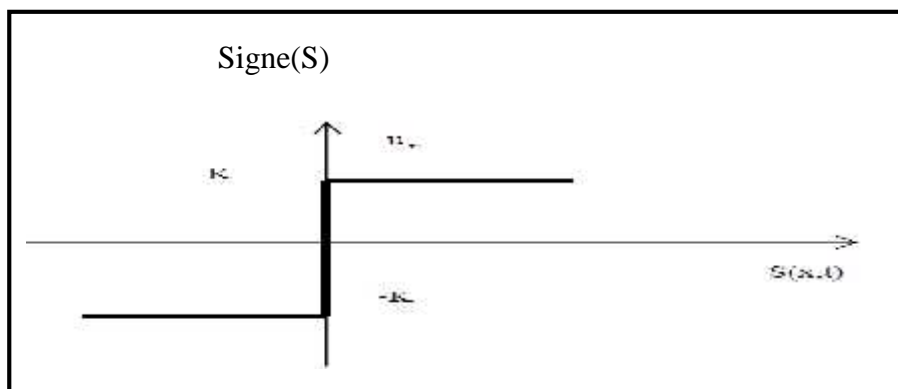


Figure (II.7) : Définition de fonction signe [15]

Dans ce cas, le signal de référence et le modèle de référence n'interviennent pas explicitement. Il n'est donc pas indispensable pour l'utilisateur de faire intervenir un signal de référence dans la commande sauf s'il cherche à caractériser les performances du système [20].

**II-3-3-3) Phénomène réticence ou de chattering :**

Le problème des régimes glissants est que la commande est discontinue sur la surface de glissement et par conséquent, elle va commuter régulièrement et ceci à chaque traversé de cette surface, ceci à une fréquence théoriquement infinie. La figure (II.8) montre l'effet de la réticence dans la convergence du système.

L'évolution du point de fonctionnement de part et l'autre de la surface de glissement correspond à des variations de signe pour la fonction  $S$  et par suite une commande de type discontinue.

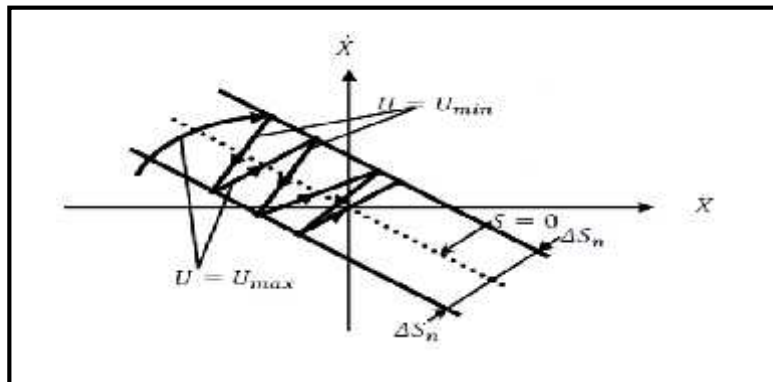


Figure (II.8) : démonstration du phénomène de réticence [15]

Pour remédier ce problème, plusieurs solutions ont été proposées jusqu'à ce jour (problème de recherche ouvert), parmi les solutions classique, est de remplacer la fonction discontinue « signe » par une fonction continue ou souple, comme la fonction SAT et SMOOTH.

On donne ci-dessous un exemple de fonction de saturation que la figure (II.9) le montre :

➤ **Fonction SAT**

$$\left\{ \begin{array}{l} Sat(S) = 1 \quad si \ S > \mu \\ Sat(S) = -1 \quad si \ S < -\mu \\ Sat(S) = \frac{S}{\mu} \quad si \ |S| < \mu \end{array} \right. \dots\dots\dots(II-46)$$

Avec  $\mu$  est un paramètre petit et positif.

➤ **Fonction SMOOTH**

$$\text{Smooth}(S) = \frac{S}{|S| + \mu} \dots\dots\dots(\text{II-47})$$

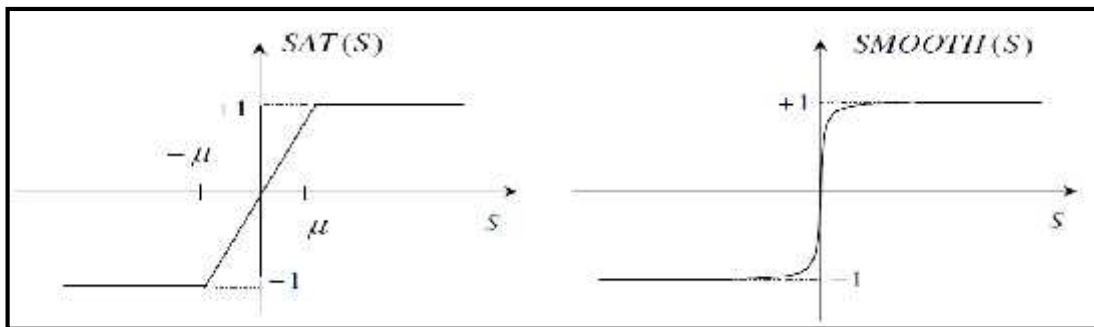


Figure (II.9): fonction « SAT » et « SMOOTH » [15]

**II-3-4) Robustesse de la loi de commande :**

Une commande est dite robuste si elle est insensible à la différence entre le système à commander et le modèle du système utilisé pour le calcul de la commande. L'incertitude sur le modèle a plusieurs origines :

- Les paramètres du modèle linéaire ne sont pas connus avec certitude ;
- L'imperfection des instruments de mesure ;
- A haute fréquence, l'ordre et la structure du système sont généralement inconnus ;
- Les paramètres du modèle linéaire peuvent varier à cause de la présence des non linéarités ou le changement des conditions de vol ;

Dans ce chapitre on s'est intéressé aux systèmes linéaires avec une commande LQR et non-linéaire par mode glissant(SMC).

Une étude en simulation sur notre type d'avion par une application de ces lois de commande sera consacrée dans le chapitre suivant.

Cette partie a pour objectif de faire une analyse en boucle ouverte et en boucle fermée pour un modèle d'avion qui sera considéré, puis une étude en simulation par MATLAB/SIMULINK sera abordée pour motiver nos résultats de calcul.

### III-1) simulation et interprétation des résultats en boucle ouverte :

Considérons le modèle numérique de l'avion présenté dans le chapitre I, ce modèle longitudinal est composé du mode short period et cinq modes flexibles.

Maintenant on va étudier la stabilité du système, pour cela nous allons chercher les valeurs propres de la matrice A on utilise l'équation suivante :

$$|\lambda I - A| = 0$$

Puisque la matrice A est de l'ordre  $10 \times 10$ , il est difficile de tirer l'équation caractéristique. Pour cela une fonction (eig) de MATLAB nous permet de définir ces valeurs propres.

L'analyse des valeurs propres de la matrice d'état donne les valeurs qui sont indiquées dans le tableau suivant :

<i>V.P</i>	0.6990	-4.7432	-2.7659±7.0362i	-0.8560 ±15.1917i	-1.3606±20.1933i	-0.2159±19.7306i
<i>amortis</i>	-1	1	0.366	0.0563	0.0672	0.0109
<i>f( rad/s)</i>	0.699	4.74	7.56	15.2	20.02	19.7

Puisque se trouve une valeur propre à partie réel positive, donc le système est instable.

$\lambda_2 = 0.6990$  caractérise le mode short period dont la pulsation propre  $w_n = 0.699$  rad/s, le coefficient d'amortissement  $|\xi|=1$ .



La figure (III.1) suivante nous montre la réponse du système en boucle ouverte.

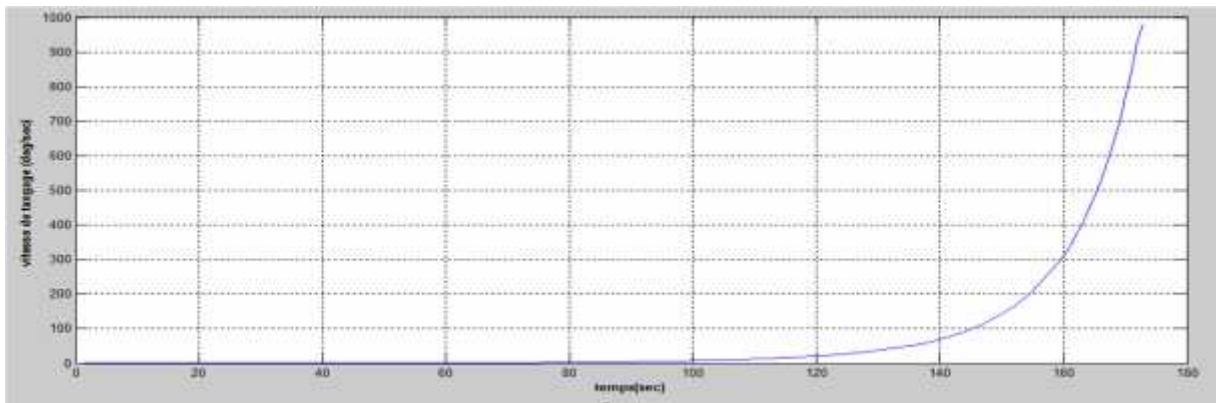
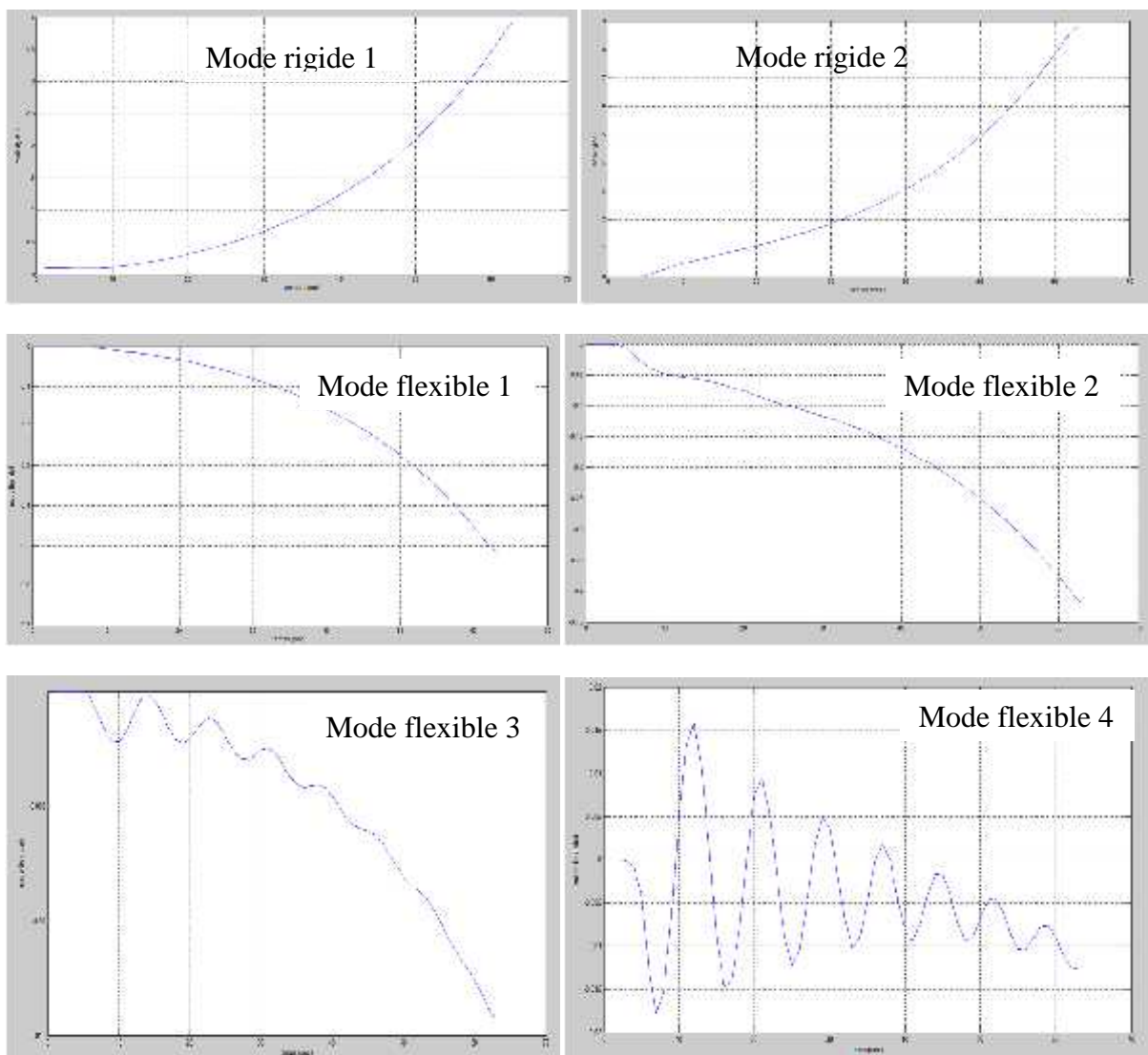


Figure (III.1) : La réponse du système pour une boucle ouverte

D'après la figure, on remarque que la réponse du système se diverge, car n'est pas instable.

La figure (III.2) regroupe les modes flexibles et les modes rigides en boucle ouverte.



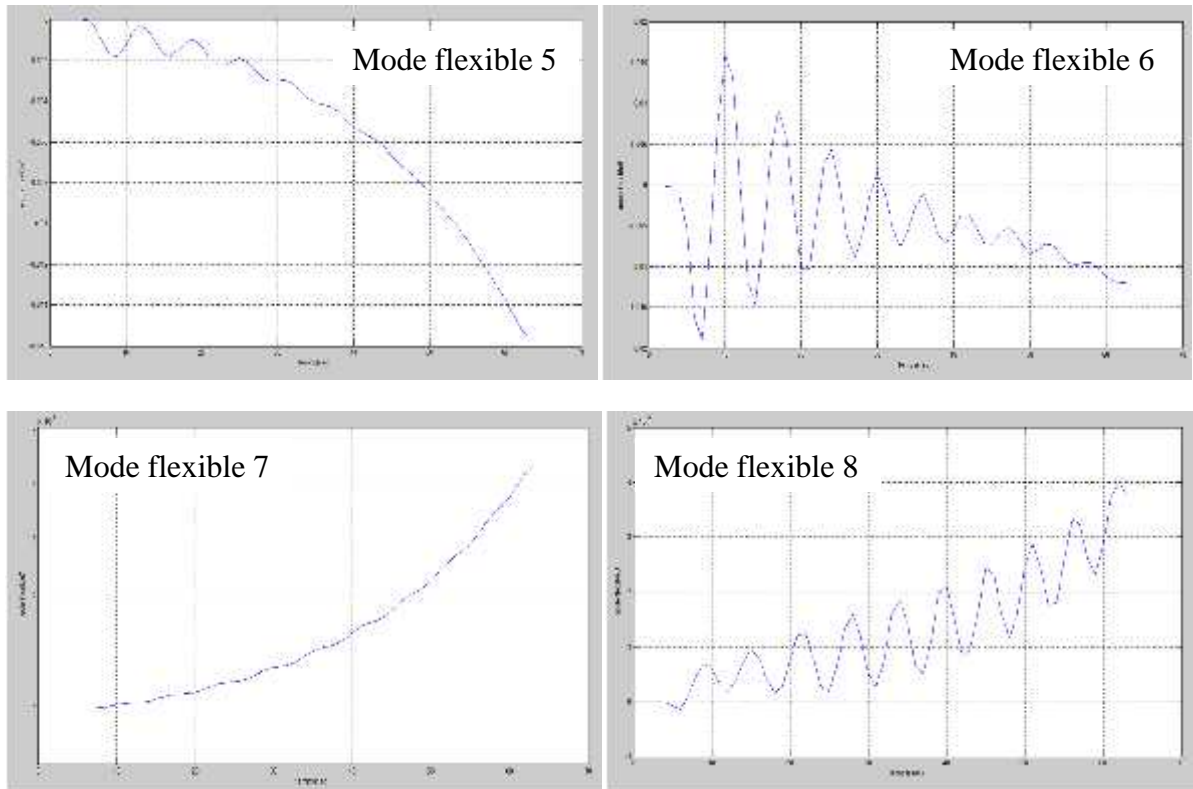


Figure (III.2) : Les modes flexibles et les modes rigides.

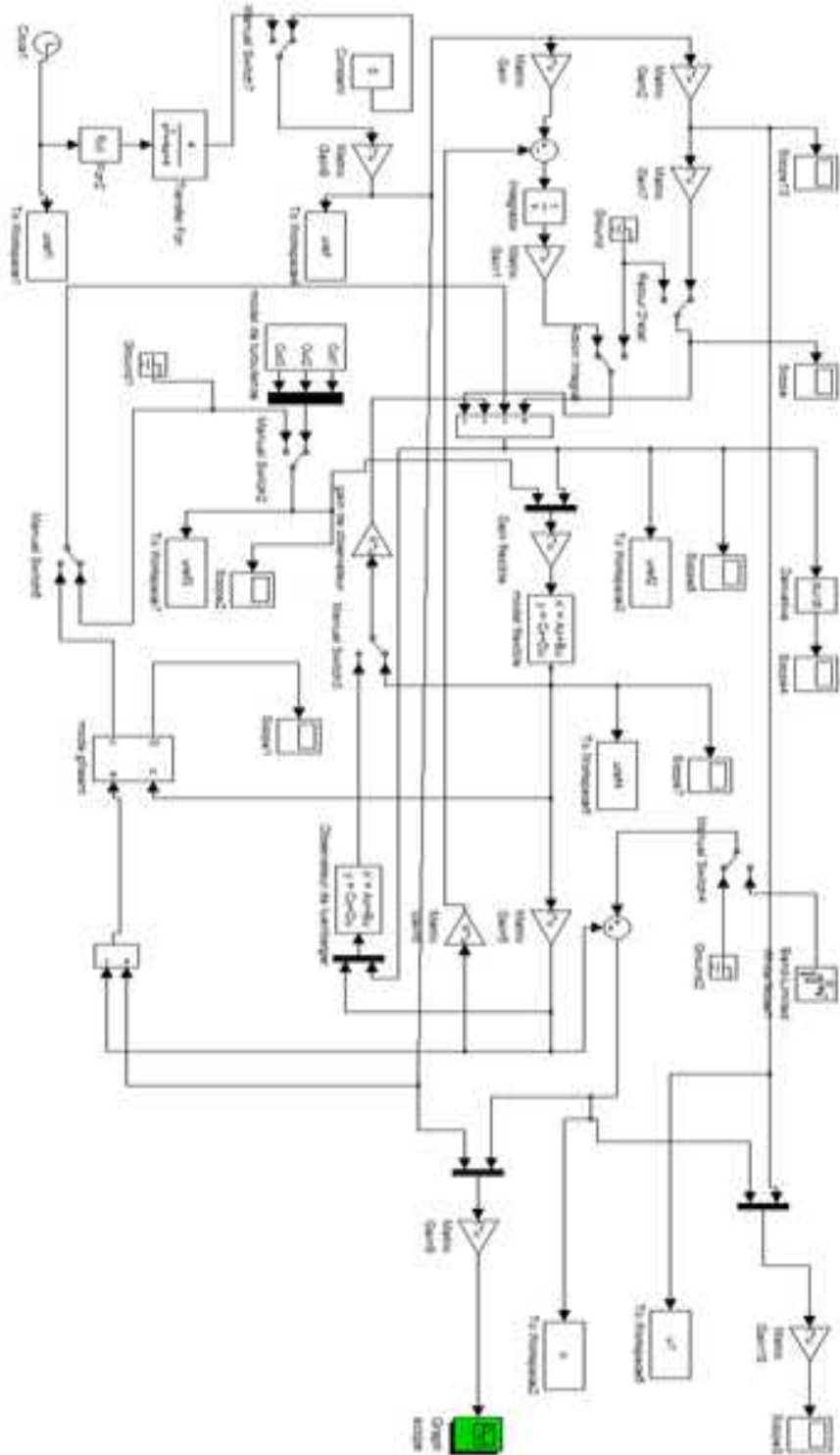
On constate qu'en boucle ouverte, on a un amortissement des oscillations des modes flexibles 1 et 2 et 7 par rapport aux autres modes flexibles. Et une forte oscillation par rapport aux modes flexibles 4 et 6 où la fréquence égale à 19,6 rad/sec.

Pour cela il est nécessaire d'exiger une commande pour avoir une réponse adéquate, et une stabilisation du système, et l'amortissement des modes flexibles ce qui va élaborer dans la section suivante.

### III-2) Simulation et interprétations des résultats en boucle fermée:

Dans le but de pouvoir comparer les performances des contrôleurs optimaux linéaire et non linéaire et de s'assurer de leur performances, on effectue tout d'abord les simulations convenables jusqu'à obtenir les résultats désirée, la figure (III.3) montre la conception du contrôleur par les différentes commandes utilisées dans notre étude sous Matlab/Simulink.

Figure (III.3) implémentation du système dans MATLAB/SIMULINK



**III-2-1) commande optimale LQR :**

Avant de passer à la simulation et l'interprétation des résultats, on doit vérifier l'une des conditions de la commande optimale LQR soit satisfaite, qu'il fallait étudier la contrôlabilité et l'observabilité du système.

A l'aide de la fonction `ctrb` du MATLAB, on peut vérifier que le système si il est contrôlable.

$\text{rank}[\text{Ctrb}(A,B)]=10$ , alors le système est contrôlable puisque  $n=10$ .

$\text{rank}[\text{obsv}(A,C)]=10$ , alors le système est observable.

On présente les différents résultats obtenus par simulation des systèmes contrôlés par la méthode de la commande optimale LQR par retour d'état.

Pour le calcul et la simulation de cette commande, suivant les matrices caractérisant l'indice de performance  $Q$  et  $R$  sont choisies comme suit :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

Nous avons deux surfaces de commande l'élévateur et le canard horizontal.

Afin de commandé la vitesse de tangage  $q$ , il faut mélanger les deux surfaces de commande, l'élévateur et le canard horizontal, comme suite :

$u = \frac{1}{2}(\delta_e - \delta_{can})$ , une telle commande est standard dans les systèmes aérospatiales. Cette dernière est appelée « control allocation ».

A cette effet, la matrice de pondération  $R=1$ .

La matrice de sortie :  $C=[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

Le gain de la commande LQR calculé est donné par :

$$K=[2.3109 \ 0.7432 \ -0.9765 \ -0.0597 \ -0.0000 \ -0.0000 \ 0.0168 \ 0.0028 \ -0.2739 \ -0.0551]$$

Les valeurs propres de la matrice d'état en boucle fermée sont les suivantes :

$$\{-1.3608 \pm 20.1933i, -0.2164 \pm 19.7306i, -0.8560 \pm 15.1917i, -2.7659 \pm 7.0361i, -4.7432, -0.6990\}$$

Nous remarquons les parties réelles des valeurs propres sont négatives, alors le système est stable.

La réponse du système en boucle fermée commandé par LQR, ainsi que le braquage de la surface de commande sont présentées par la figure (III.4).

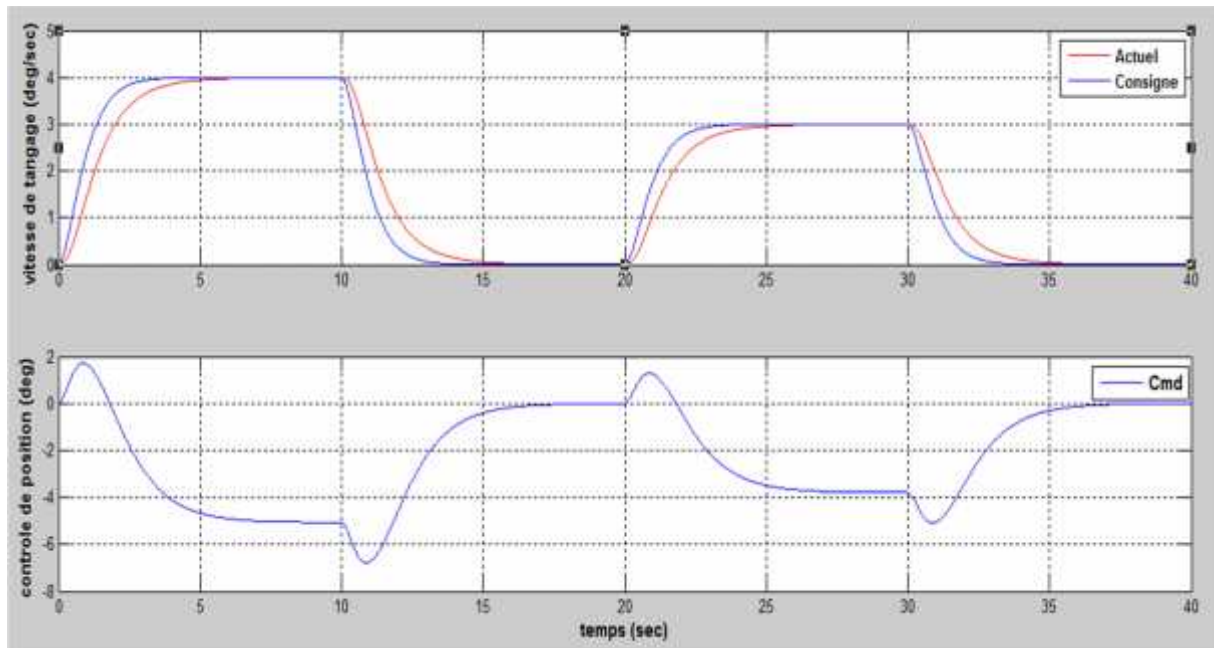


Figure (III.4) : la réponse du système et la commande LQR en absence des perturbations externes

On constate une bonne suite de la réponse par rapport à la consigne avec une commande acceptable en amplitude et souple pour le braquage de la gouverne.

Afin de tester la robustesse de la commande LQR, on peut faire la simulation on introduit des incertitudes sur l'état du système. Dans ce cas, en introduisant une incertitude de 20% dans la matrice d'état  $A(A=A+0.2 \text{ eye}(10))$

La figure (III.5) représente la réponse du système, ainsi que le braquage de la surface de commande avec la présence des incertitudes internes.

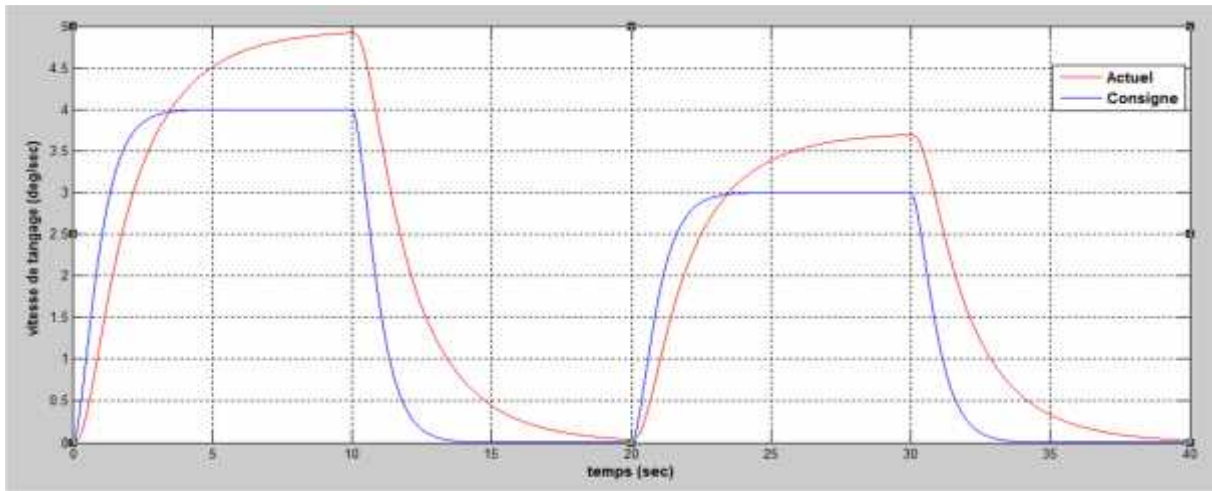


Figure (III.5) : réponse du système avec incertitudes internes

On constate une dégradation de la poursuite du système due à l'effet de l'incertitude introduite précédemment.

Afin de simuler le réponse du système en boucle fermée avec présence de perturbation atmosphérique, nous avons utilisé le modèle de Dryden pour ce dernier avec le schéma fonctionnel présenté dans la figure (III.6) .

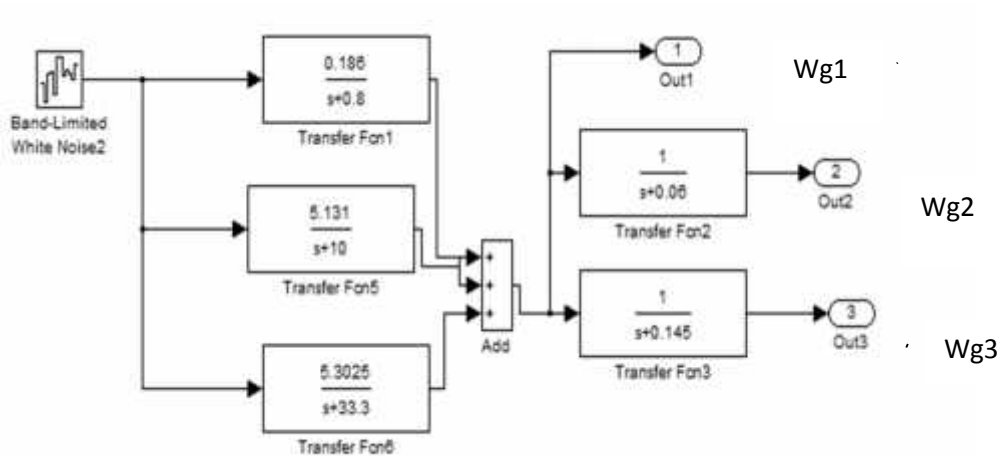


Figure (III.6) : implémentation des perturbations dans MATLAB/SIMULINK

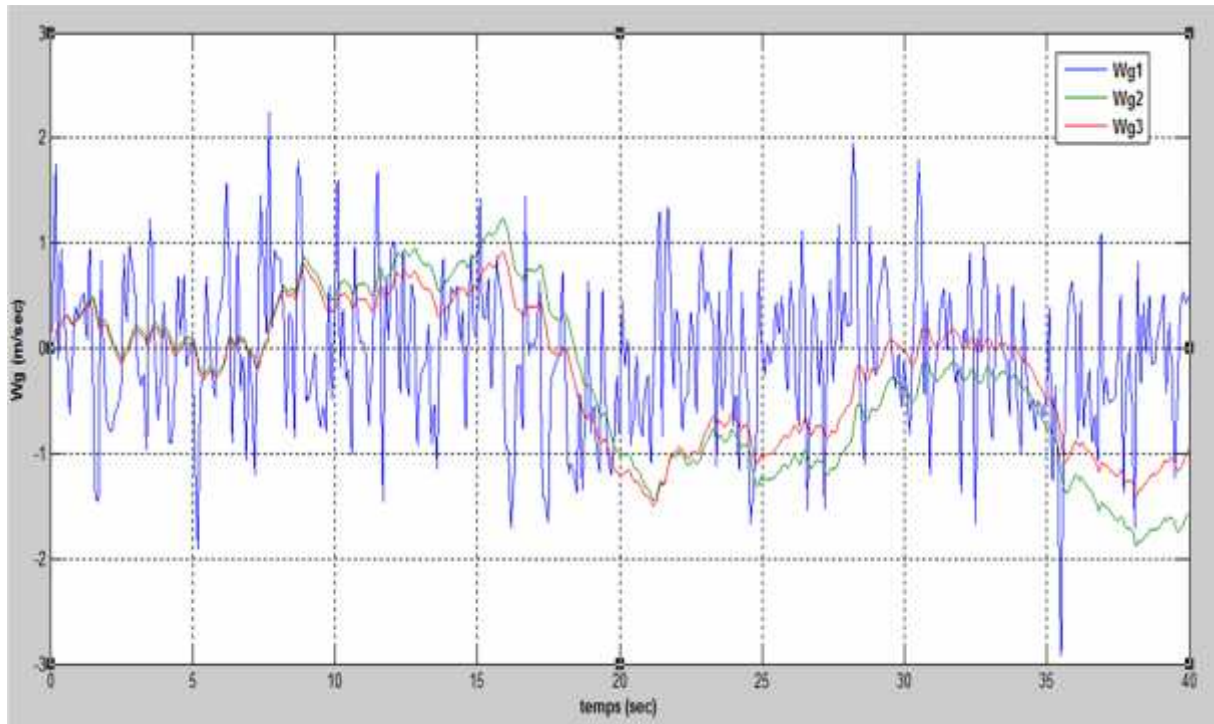


Figure (III.7) : simulation temporelle des perturbations atmosphérique type Dryden

Nous aurons les résultats qui sont présentées dans la figure (III.8).

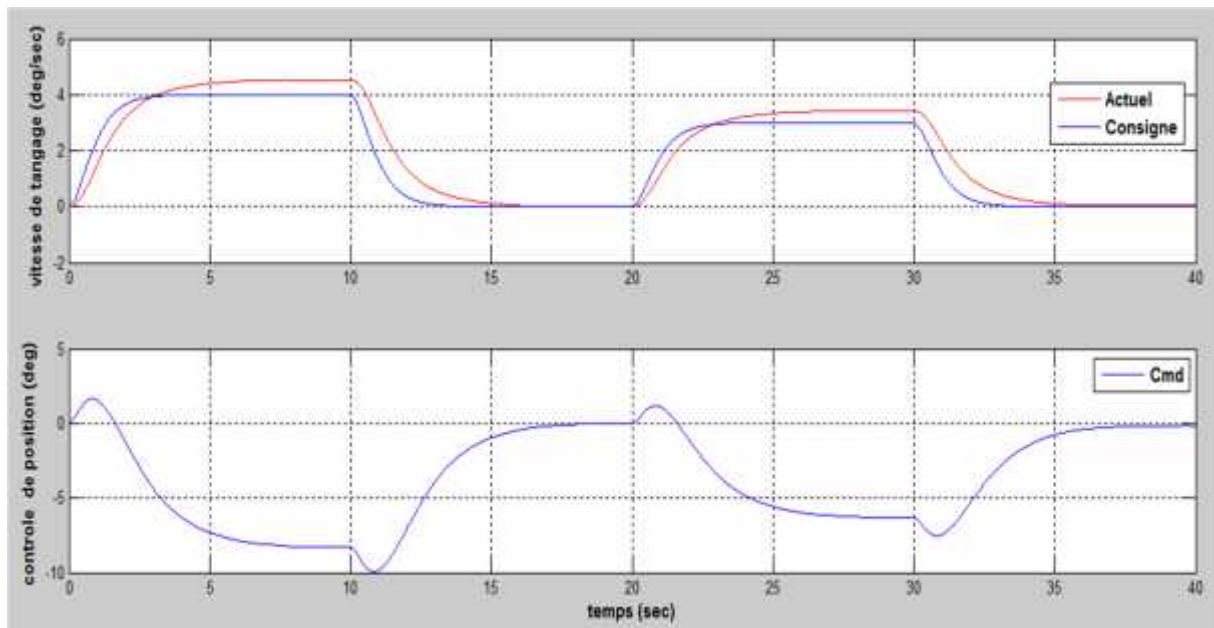


Figure (III.8) : la réponse du système et la commande LQR avec perturbations externes

On constate une dégradation de poursuite et signal de commande.

On remarque que le signal de commande devient de plus en plus excité, chaque fois qu'on fait augmenter le niveau de bruit.

On peut conclure que la commande LQR ne permet pas d'éliminer les erreurs de poursuite et elle est sensible aux incertitudes et les perturbations externes.

Afin d'enlever l'erreur statique constaté dans la simulation, on utilise une action intégral.

**III-2-2) LQR avec action intégral :**

La simulation est basée sur le choix des matrices de pondération suivantes :

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0001 \end{bmatrix}; R=I$$

Les résultats de calcul de la commande de l'équation (II.23) sont données par :

$$K=[3.0203 \ 1.0030 \ -1.3316 \ -0.0822 \ -0.0028 \ 0.0607 \ 0.0000 \ 0.0414 \ -0.0043 \ 0.1130]$$

$$K_i = [0.0100]$$

Dans ce cas les valeurs propres sont les suivants :

$$\{-1.3607 \pm 20.1933i, -0.8560 \pm 15.1917i, -0.2159 \pm 19.7306i, -2.7660 \pm 7.0362i, -4.7070, -0.3576, -0.8414\}$$

La réponse du système commandé par le régulateur LQR, et de la commande est présentée par la figure (III.9).

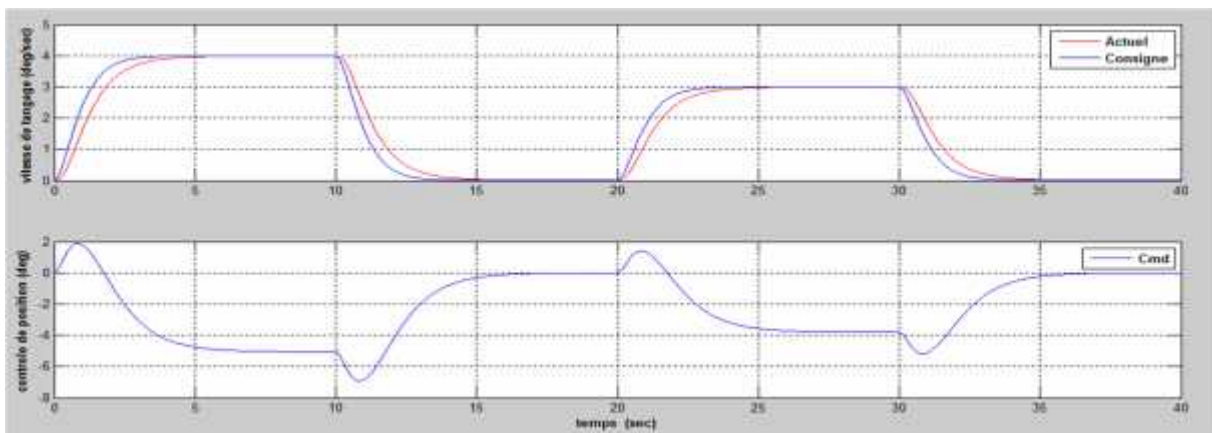




Figure (III.9) : LQR avec action intégrale en absence des perturbations externes

Si on compare la figure ci-dessus avec celle de la commande LQR sans perturbations, on remarque l'annulation de l'erreur statique. Et évidemment une bonne poursuite de la réponse par rapport à la consigne.

A la présence de perturbations, la réponse du système ainsi que la commande sont présentées dans la figure (III.10).

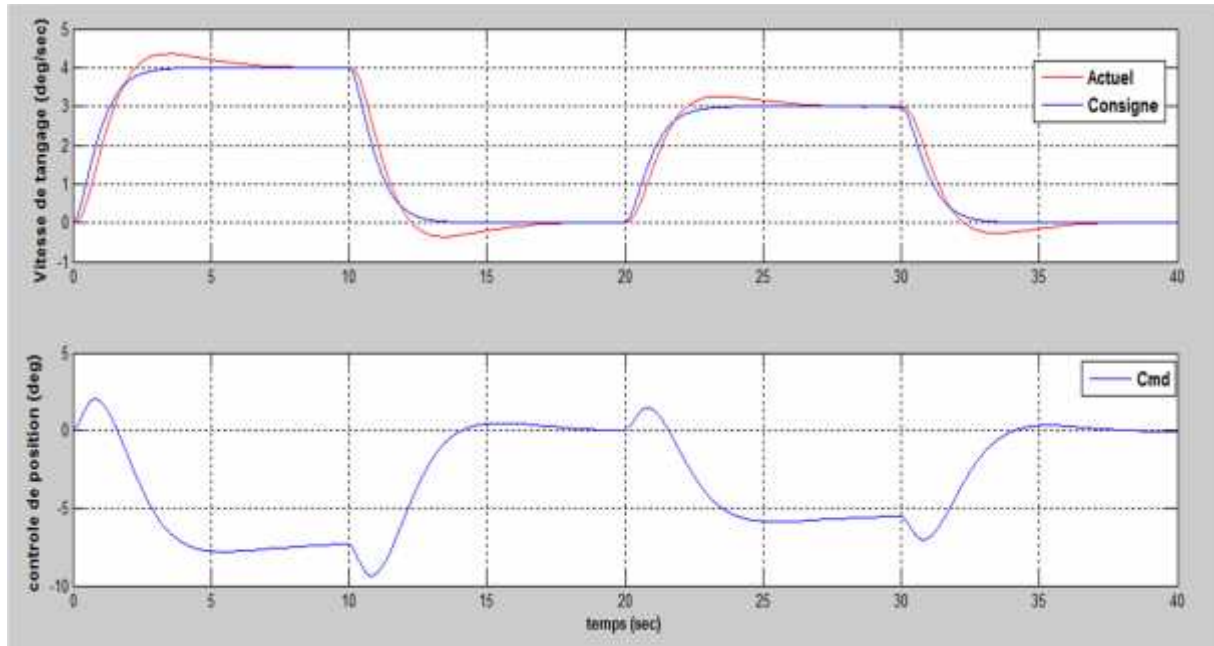


Figure (III.10) : LQR avec action intégrale en présence de perturbations

On remarque que l'erreur statique est nulle avec une légère dégradation des performances, et un bon comportement en rejet de perturbation. Le transfert entre la perturbation et l'erreur est plus faible.

Mais on observe un dépassement pour la réponse par rapport à la consigne dû à l'action intégrale introduite dans le système.

L'inconvénient de la commande LQR, elle est moins robuste et nécessite la mesure de toutes les différentes variables d'état du système. Pour remédier cette commande, on utilise un observateur de Luenberger ou bien de Kalman qui estime les états non accessibles.

Dans notre travail nous allons utiliser l'Observateur de Luenberger.

### III-2-3) LQR avec observateur de Luenberger :

Le contrôle par retour d'état et la commande optimale supposent que toutes les variables d'état du système sont connues. En pratique cette supposition n'est pas évidente puisque les différentes variables d'état du système ne sont pas toutes accessibles et mesurables. Pour cela, on cherche à concevoir un estimateur qui procure les informations nécessaire pour l'approximation du vecteur d'état.

Les résultats de calcul des matrices d'état défini de l'estimateur par l'équation (II.29) sont comme suit :

La matrice de commande :

$$J = [-0.0320 \ 2.0030 \ 0 \ 0.2765 \ 0 \ -0.2055 \ 0 \ -0.2644 \ 0 \ -0.0385]^T$$

La matrice de gain d'observateur :

$$L = [0.6562 \ 1.3983 \ -0.0874 \ -0.0610 \ -0.0023 \ -0.0016 \ -0.0025 \ -0.0018 \ 0.0007 \ 0.0005]^T$$

La matrice d'état de l'observateur :

$$F = \begin{bmatrix} -1.6 & 0.3438 & -1.1811 & -0.1181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.57 & -3.8443 & -1.8130 & 1.1805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0874 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.1960 & -0.3840 & -56.8200 & -5.5300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3490 & 0.2482 & 0 & 0 & -231.52 & -1.7120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.0930 & 0.2438 & 0 & 0 & 0 & 0 & -408.86 & -2.6790 & -10.71 & -0.5180 \\ 0 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3073 & 0.0554 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2400 & -0.1760 & -390.10 & -0.4740 \end{bmatrix}$$

La figure (III.11) présente la réponse commandée par LQR en action intégrale avec observateur de Luenberger, ainsi que le braquage de la surface de commande.

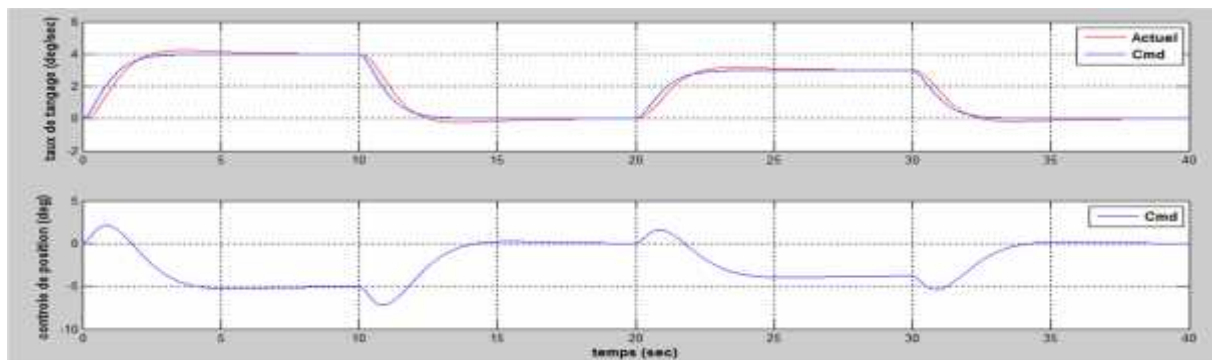


Figure (III.11) : LQR avec action intégrale et observateur de Luenberger sans perturbation

Lorsqu'on ajoute les perturbations on aura les résultats figurants dans (III.12).

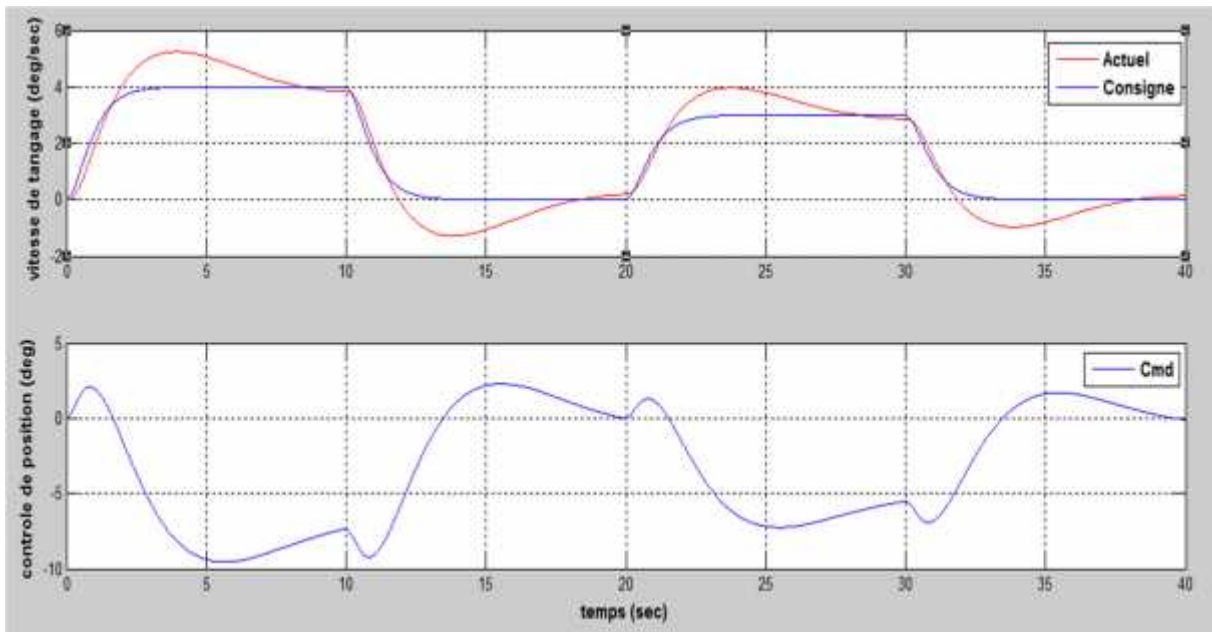


Figure (III.12) : LQR avec observateur et action intégrale en présence de perturbation

On remarque une dégradation de poursuite de la réponse mais toujours il ya la présence d'un dépassement due à l'action intégrale.

La commande avec l'observateur de Luenberger permettre d'avoir une poursuite, mais une dégradation de point de vue performance alors elle est moins robuste et moin performante par rapport à la commande LQR..

On n'a constaté que l'implémentation d'algorithmes de commande classique pour notre système présente des inconvénients qu'on peut résumer :

Les paramètres du système doivent être connus et supposes constants tout le long du domaine d'opération de la commande, autrement dit, une variation de ces paramètres entrainera notre système a l'instabilité. D'où la nécessité de faire appel à des lois de commandes non-linéaire plus avancées qui permettront une meilleur adaptation de la commande au système pour avoir une meilleur poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence choisi.

**III-2-4) Commande optimale par mode glissant(SMC):**

La section précédente montre l'importance de disposer d'un gain dans la chaîne de retour du système à contrôler et étudie son effet sur la réponse de ce dernier. Les résultats obtenus ont montré qu'une erreur en régime permanent subsiste toujours et la position désirée n'est pas atteinte. Afin d'améliorer la réponse du système la commande SMC est recommandée.

Pour établir la commande par mode glissant donnée dans l'équation (II.40) et (II.44), on va choisir la surface la surface de glissement comme suit :

$$S = B^T P x \dots\dots\dots(III.1)$$

Démonstration de la stabilité

$$V = \frac{1}{2} S^T S \dots\dots\dots(III.2)$$

$$\dot{V} = S^T \dot{S}$$

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + Bu) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + B(u + w_g)) = \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + B(u_{eq} + u_n) + Bw_g) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} (Ax + Bu_{eq}) + \frac{\partial S}{\partial x} (Bu_n + Bw_g) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} \left( Ax - B \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} Ax \right) + \frac{\partial S}{\partial x} (Bu_n + Bw_g) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} (Ax) - \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right) \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial x} Ax + \frac{\partial S}{\partial x} (Bu_n + Bw_g) \\ &= \frac{\partial S}{\partial x} (Bu_n + Bw_g) \dots\dots\dots(III.3) \end{aligned}$$

$$\text{avec : } u_n = - \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B \right]^{-1} k^* \text{sign}(s)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial S}{\partial x} \left( -B \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B \right]^{-1} k^* \text{sign}(s) + Bw_g \right) \\ &= - \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right) \left[ \frac{\partial S}{\partial x} B \right]^{-1} k^* \text{sign}(s) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right) w_g \\ &= -k^* \text{sign}(s) + \left( \frac{\partial S}{\partial x} B \right) w_g \end{aligned}$$

Si  $K > \max(w_g)$  la  $\dot{V} < 0$ , alors la stabilité au sens de Lyapunov.

Une autre astuce peut être utilisée,  $U_n = -\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{-1} \left( \left| \frac{\partial S}{\partial x} B \right| \xi + k \right) \text{sing}(S)$  où  $\xi = \max(w_g)$

Si on remplace  $U_n$  dans (III.3) on a :

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial x} (B) \left[ -\left(\frac{\partial S}{\partial x} B\right)^{-1} \left( \left| \frac{\partial S}{\partial x} B \right| \xi + k \right) \text{sing}(S) + w_g \right]$$

$$= -\left( \left| \frac{\partial S}{\partial x} B \right| \xi + k \right) \text{sing}(S) + \frac{\partial S}{\partial x} (B) w_g$$

$$\dot{V} = S^T \dot{S} = -\left( \left| \frac{\partial S}{\partial x} B \right| \xi + k \right) |S| + \frac{\partial S}{\partial x} (B) w_g < -K|S|, \text{ d'où la stabilité au sens de Lyapunov.}$$

Après simulation, nous aurons la réponse de système ainsi que le braquage de la surface de commande, qui se présente dans la figure (III.13) à l'absence de perturbations.

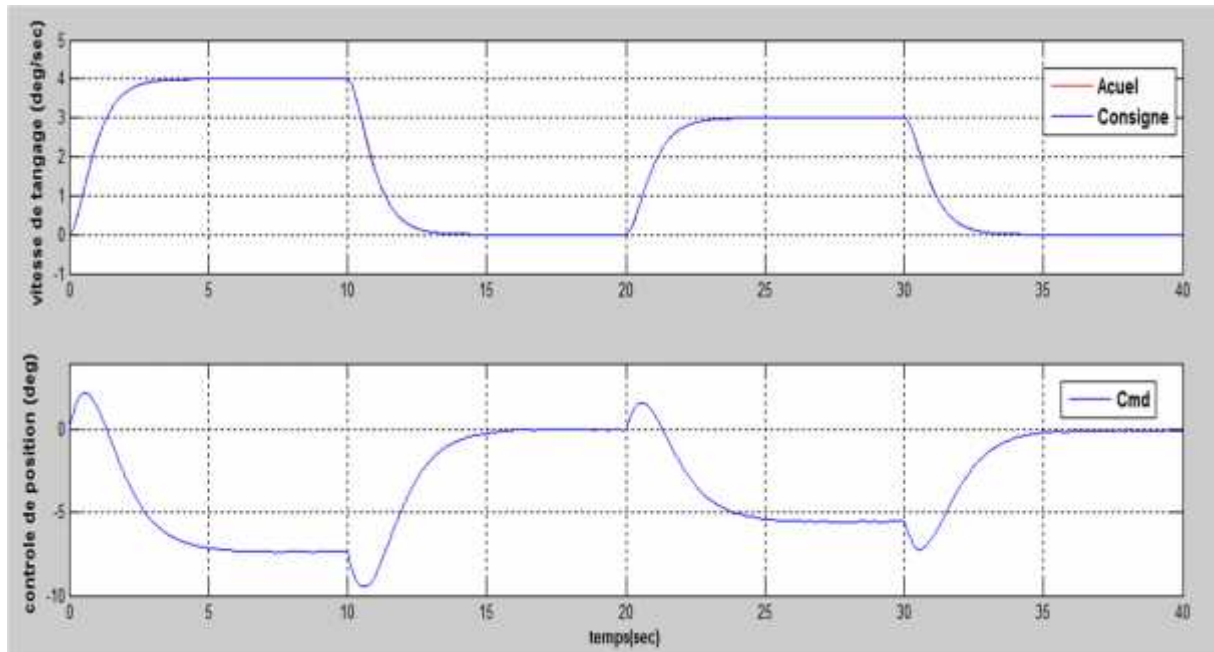


Figure (III.13) : Réponse du système par LQR avec action intégrale et mode glissant en absence de perturbation

On observe une excellente poursuite de la réponse par rapport à la consigne, avec une commande très acceptable.

La figure (III.14) suivante montre la réponse lorsqu'on injecte les perturbations dû au rafale.

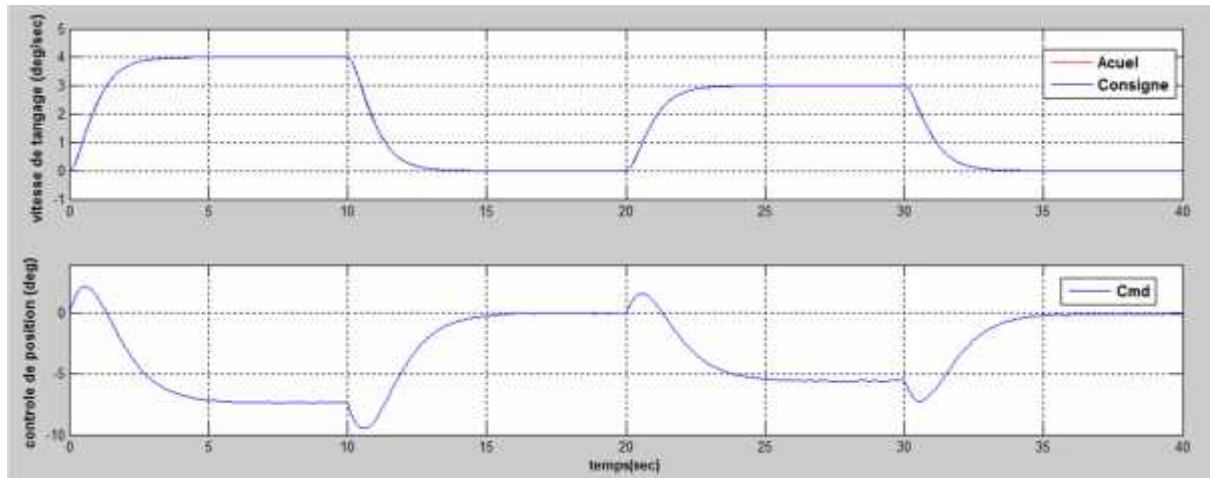


Figure (III.14) : Réponse du système par LQR avec mode glissant en présence de perturbation

On constata une excellente poursuite malgré la présence de perturbations.

On peut conclure que la commande optimale par mode glissant améliore nettement la réponse du système et elle est insensible au perturbation.

Les résultats de simulations montrent que cette technique présente des avantages majeurs par rapport aux commandes linéaires utilisées.

### III-3) Réduction des accélérations par LQR :

Quand les effets de la flexibilité sont inclus dans la dynamique de l'avion, les accélérations dues au mouvement structural sont ajoutées.

Afin d'alléger l'effet des rafales sur l'accélération de l'avion, on va choisir les matrices de pondération comme suit :

$$Q = C^T * C \quad ; \quad R=I$$

L'accélération alors est présentée dans la figure (III.15).

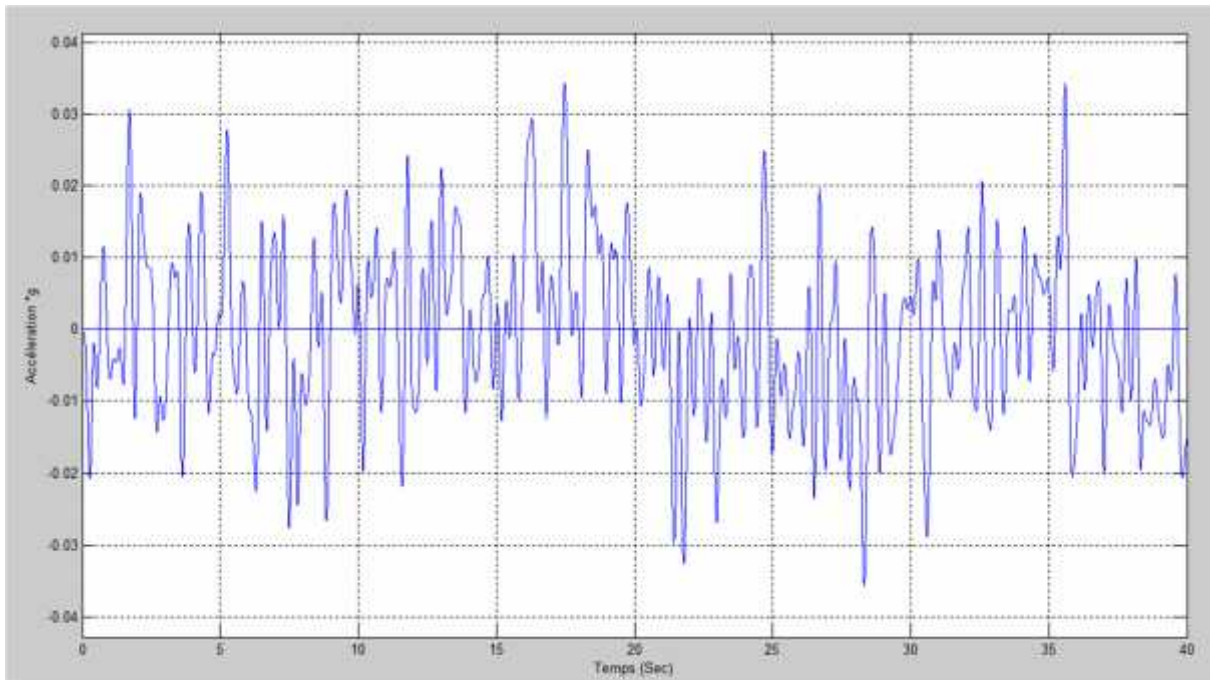


Figure (III.15) : Réduction de l'accélération en boucle fermée

La figure (III.15) montre l'effet contrôleur conçu pour alléger l'accélération de l'avion. Dans cette figure, la variation de l'accélération dans le temps a montré que dans le cas où le contrôleur LQR avec un observateur de Luenberger. En agissant sur la surface de commande du mouvement longitudinal, on obtient la réduction correspondant en boucle fermée avec LQR. Effectivement, on a pu diminuer l'accélération jusqu'à une valeur acceptable pour le confort.

A partir des résultats obtenus, on remarque que la commande en mode glissant plus robuste à celle de la commande linéaire LQR, et cette dernière fait objet d'amortir la variation de l'accélération vers zéro.



Ce projet d'application visait à concevoir un contrôleur pour la réduction et la suppression des accélérations dues à une turbulence ainsi que contrôler la vitesse de tangage sur l'avion B-52. Cet objectif a été atteint et les résultats de simulation pour le mouvement longitudinal de B-52, dans le chapitre 3, confirment la fonctionnalité de ce dernier. Ainsi, on peut constater que si on applique la théorie de LQR sur le modèle d'aéronef qu'on a, l'avion sera stable malgré les perturbations, ainsi un tel système contribue au confort des passagers dans l'avion.

L'inconvénient de la théorie de LQR avec retour d'état est que très souvent il est impossible de mesurer toutes les variables d'état, bien qu'elle soit performante et efficace en termes de stabilité et peu sensible aux perturbations extérieures. Pour cela on a fait appel à la commande non-linéaire optimale par mode glissant afin d'améliorer les performances du système en boucle fermée et augmenter sa robustesse.

Toutes ces propriétés peuvent être réalisées dans la mesure désirée en choisissant convenablement la variable commandée du système et en choisissant correctement les matrices de pondération  $Q$  et  $R$ .

Ces résultats ont montrés que les performances de ces contrôleurs sont satisfaisants tend dans le cas du mode glissant, que le cas par commande linéaire LQR.

### **Introduction :**

Lorsqu'un avion vole, ses mouvements peuvent être affectés par plusieurs facteurs comme les commandes des manœuvres, les perturbations atmosphériques et autres.

Les commandes des manœuvres sont appliquées par un pilote ou sont fournies par un système de navigation ou de guidage. Ces commandes sont des entrées aux systèmes actifs de commande, et elles devraient changer la trajectoire de vol de l'avion. D'autres effets sont des perturbations non désirées pour le mouvement de l'avion. Une des fonctions principales des systèmes actifs de commande est la suppression ou la minimisation le plus possible des effets indésirables de telles perturbations non désirées.

L'air par lequel un avion vole ne reste jamais fixe. Par conséquent, toutes les fois que l'avion vole, le mouvement de l'air autour de l'avion est erratique, perturbé, donc turbulent. La nature des perturbations de l'air est influencée par beaucoup de facteurs externes. Habituellement on considère la turbulence qui apparaît au-dessus de la région où l'atmosphère se comporte comme une couche limite. Ainsi, les sources de la turbulence, les caractéristiques des rafales discrètes et continues, la théorie de la densité spectrale de puissance ainsi que le facteur de chargement sont décrites dans les sections suivantes.

### **Sources des turbulences :**

Les sources de la turbulence sont les suivantes :

- L'orage, la source la plus commune de turbulence grave.
- Le nuage accumulé qui a le mécanisme que l'orage, mais il est moins grave.
- La turbulence claire d'air, habituellement beaucoup moins grave que les deux premières sources, qui par définition n'est pas visible, peut être produite par des vents qui coulent au dessus et entre les montagnes, et par convection due au chauffage de l'air près de la terre, particulièrement au dessus du désert.

### Caractéristiques des rafales discrètes :

Le phénomène de turbulence étant varié, les meilleures méthodes pour l'analyse des problèmes dynamiques dans les quelles la turbulence est impliquée sont les méthodes statiques. Car même, des rafales de large amplitude, qui sont modélisées par une fonction déterministe peuvent apparaître, mais à des temps aléatoires.

Dans le but de voir, l'effet des rafales sur la structure de l'avion, on peut utiliser une rafale discrète comme fonction de test pour le calcul des charges. Prochainement, on va analyser les caractéristiques des rafales discrètes.

Une rafale se compose de plus ou moins d'impulsion isolée, où l'impulsion isolée est référée comme rafale discrète. La turbulence se compose d'une série de rafales discrètes.

L'équation algébrique de la rafale de la forme (1-cos) est donnée par :

$$w_g(t) = \frac{k}{T} [1 - \cos(\frac{2\pi}{T})t]$$

Où  $T$  est la durée de la rafale (sec) tel que  $T = L/U_0$  est la vitesse de l'avion à l'équilibre (m/sec),  $c$  est la corde aérodynamique moyenne de l'aile de l'avion (m),  $L$  est la longueur d'onde de la rafale (m), donc  $L=25\text{cm}$  et enfin  $k$  est un facteur choisi pour réaliser l'intensité exigée de la rafale.

### Théorie de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) :

La densité spectrale de puissance DSP de n'importe quelle fonction,  $y(t)$ , est une fonction réelle, qui montre comment la valeur moyenne de carré de  $y(t)$ , donc  $\overline{y^2(t)}$  est distribuée avec la fréquence  $\omega$ .

Dans le but de définir la densité spectrale de puissance DSP ( $\omega$ ) d'une fonction aléatoire dans le temps  $y(t)$  on a :

$$y_T(t) = y(t) \rightarrow -T \leq t \leq T$$

$$y_T(t) = 0 \rightarrow \text{ailleurs}$$

La transformée de Fourier de  $y_T(t)$  existe toujours et donnée par :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

Dans le but d'enlever l'influence de la vitesse de l'air, en comparant une analyse avec une autre, selon McLEAN, les fonctions DSP d'une rafale sont calculées en fonction de la fréquence spatiale  $= \omega/U_0$ ,  $U_0$  est la vitesse à l'équilibre de l'avion (m/s),  $\omega$  est la fréquence angulaire observée (rad/s).

### Rafales continues :

Il y a deux représentations pour la turbulence atmosphérique qui sont utilisées dans les études des systèmes actifs de commande de vol.

Le premier est le spectre de Von Karman, il s'agit de la meilleure approximation, pour le spectre, obtenue à partir des enregistrements de la turbulence atmosphérique.

Cependant, c'est la représentation la moins utilisée dans les études analytique car elle a une forme plus compliquée que de Dryden [1], [2].

Von de Karman

$$\Phi_i(\Omega) = \frac{\sigma_i L_i [1 + \frac{8}{3} (1.33 L_i \Omega)^2]}{\pi [1 + (1.33 L_i \Omega)^2]^{11/6}}$$

Dryden :

$$\Phi_i(\Omega) = \frac{(\sigma_i)^2 L_i [1 + (1.33 L_i \Omega)^2]}{\pi [1 + (1 + L_i \Omega)^2]^2}$$

Notions de contrôlabilité et d'observabilité :

Les concepts de contrôlabilité et d'observabilité jouent un rôle très important dans l'étude des problèmes de contrôle. Le concept de la contrôlabilité étudie la possibilité de régler le comportement du système considéré dans le but de forcer l'état à prendre les valeurs désirées pendant un temps fini. Par contre, l'observabilité d'un système peut être définie comme étant la possibilité de prédire l'état du système à tout instant compris dans l'intervalle du temps de fonctionnement.

Dans la suite, les conditions nécessaires et suffisantes sont introduites dans le but de s'assurer de la contrôlabilité d'un système dont le mouvement est décrit par des équations dynamiques linéaires. D'une façon duale, on définit les conditions nécessaires et suffisantes pour l'étude de l'observabilité.

Contrôlabilité des systèmes linéaires :

Dans cette partie, on étudie la contrôlabilité du système linéaire de dimension  $n$  défini dans l'espace d'état par le système d'équations de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (B-1)$$

Où  $u$  est le vecteur correspondant aux entrées du système qu'on considère dans le cas général de dimension  $(p \times 1)$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont des matrices constantes à paramètres réels et indépendants du temps. L'intervalle de temps allant de  $t=0$  et tendant vers l'infini est alors l'intervalle d'intérêt sur lequel est étudiée la contrôlabilité du système.

Le système (B-1) est défini comme étant contrôlable si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite :

- Tous les vecteurs lignes formant la matrice  $(sI - A)^{-1}B$  sont linéairement indépendants dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ .

- La matrice définie positive dite grammien de contrôlabilité et définie par :

$$W_{ct} = \int_0^t e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau \quad (B - 2)$$

Est une matrice non-singulière pour tout  $t > 0$ .

L'indice (\*) désigne le complexe conjugué transposé de la matrice considérée.

- La matrice de contrôlabilité de dimension  $n \times (np)$  définie par :

$$U \triangleq [B|AB|A^2B \dots |A^{n-1}B] \quad (B - 3)$$

Est de rang  $n$ .

- Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  (et par conséquent pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ ), la matrice complexe  $[\lambda I - A|B]$  est de rang  $n$ .

Observabilité des systèmes linéaires :

Le concept d'observabilité est défini de façon dual à celle du cas de la contrôlabilité. En gros, la contrôlabilité étudie la possibilité de diriger l'état du système à partir des entrées. Cependant, l'observabilité étudie la possibilité d'estimer l'état connaissant la sortie. En d'autres termes, lorsqu'une équation dynamique est observable, alors tous ses modes peuvent être excités à partir de l'entrée du système correspondant. D'autre part, lorsqu'une équation dynamique est observable, alors tous ses modes peuvent être observés à partir de la sortie du système. Donc, on considère que les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont connues à l'avance. Ces matrices définissent le modèle du système dans l'espace d'état sous la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (B-4a)$$

$$y = Cx + Du \quad (B-4b)$$

Où,  $y$  est la sortie du système.

Toutefois, le problème d'observabilité est différent de celui de réalisation et d'identification. En effet, l'identification consiste à estimer les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  à partir des informations récupérées à la fois de l'entrée et à la sortie du système.

Alors par dualité avec le concept de contrôlabilité, le système linéaire invariant défini dans (2-4) est observable si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- Toutes les colonnes de la matrice  $C(sI - A)^{-1}$  sont linéairement indépendantes dans le plan complexe  $\mathbb{C}$ .
- La matrice définie positive dite grammien d'observabilité et définie par :

$$W_{ob} = \int_0^t e^{A^* \tau} C^* C e^{A \tau} d\tau \quad (B - 5)$$

Est une matrice non-singulière pour tout  $t > 0$

- La matrice observabilité de dimension  $(nq) \times n$  définie par :

$$V \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (B - 6)$$

Est de rang  $n$ . Avec,  $q$  la dimension du vecteur de sortie.

- Pour chaque valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  (et pare conséquent pour tout  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$ ), la matrice complexe  $[(\lambda I - A)C]^T$  est de rang  $n$ .

**Equation d'Hamilton-Jacobi en commande optimale :****Démonstration :**

Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe  $y \in E$  et  $\varepsilon > 0$  tel que :

$$f(y) + \lambda d(y, C) < f(x_0) - \lambda \varepsilon$$

Soit alors  $z \in E$  tel que  $d(y, z) \leq d(y, C) + \varepsilon$ .

On a :  $f(z) \leq f(y) + kd(y, z) \leq f(y) + \lambda d(y, C) + \lambda \varepsilon < f(x_0)$ , ce qui est une contradiction.

Pour la réciproque, supposons que  $\lambda > k$  et que  $C$  est fermé. Soit  $x_0 \in C$  un point où  $f + \lambda g$  atteint son minimum sur  $C$ , et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $z \in C$  tel que  $d(x_0, z) < d(x_0, C) + \varepsilon/\lambda$ .

On a :

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(x_0) + kd(x_0, z) \\ &\leq f(x_0) + kd(x_0, C) + \frac{k}{\lambda} \varepsilon \\ &< f(x_0) + \lambda d(x_0, C) - (\lambda - k)d(x_0, C) + \varepsilon \\ &< f(z) - (\lambda - k)d(x_0, C) + \varepsilon \end{aligned}$$

Et donc  $(\lambda - k)d(x_0, C) < \varepsilon$ .

Le réel  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, on en déduit que  $d(x_0, C) = 0$ , et donc  $x_0 \in C$  puisque  $C$  est fermé. On conduit que pour tout  $z \in C$

On a :  $f(z) \geq f(x_0)$ .



**Equation d'Hamilton-Jacobi d'évolution :****Définition de la fonction valeur :**

Soit  $T > 0$  fixé et  $U \in R^m$  un compact non vide. Pour tout  $t \in ]0, T]$  et tout  $x \in R^n$ , considérons le problème de contrôle optimal général suivant : déterminer une trajectoire solution sur  $[0, t]$  du système de contrôle qui minimise le cout .

$$\dot{x}_u(s) = f(x_u(s), u(s)), \quad u(s) \in U, \quad (C - 1)$$

$$x_u(t) = x,$$

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(x_u(s), u(s)) ds + g(x_u(0)), \quad (C - 2)$$

Le point initial  $x(0)$  étant libre, et le temps final  $t$  étant fixé.

**Définition de l'équation d'Hamilton-Jacobi :**

Soit  $x \in R^n$ , définissons la fonction valeur  $S$  sur  $[0, T] \times R^n$  par :

$$S(t, x) = \inf\{C(t, u) | x_u(\cdot) \text{ solution de } (C - 1)\}.$$

**Remarque :**

Il est bien clair que  $S(0, x) = g(x)$ .

On a :  $x_u(t) = x$ , et donc  $S(t, x) = S(t, x_u(t)) = C(t, u) = \int_0^t f^0(x_u(s), u(s)) ds + g(x_u(0))$ .

En dérivant formellement par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x_u(t)) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x_u(t)) f(x_u(t), u(t)) = f^0(x_u(t), u(t))$$

Et donc

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x) f(x, u(t)) - f^0(x, u(t)) = 0$$

Introduisons par ailleurs le Hamiltonien du problème de contrôle optimal :

$$H(x, p, p^0, u) = (p, f(x, u)) + p^0 f^0(x, u).$$

D'après le principe du maximum, le contrôle optimal  $u(\cdot)$  doit vérifier :

$$H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p^0, v).$$

On obtient par conséquent

$$-p^0 \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \max_{v \in U} H\left(x, -p^0 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x), p^0, v\right) = 0. \quad (C-3)$$

L'équation (B-3) est l'équation générale dite de Hamilton-Jacobi en contrôle optimal.

**Remarque :**

Si il n'y a pas d'extrémale anormale, on peut supposer dans le calcul formel précédent que  $p^0 = -1$ , et on obtient alors l'équation usuelle suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H_1\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0,$$

Où  $H_1(x, p) = \max_{v \in U} H(x, p, -1, v)$ .

Le calcul précédent est formel. La théorie mathématique rigoureuse des équations d'Hamilton-Jacobi repose sur la notion de solution de viscosité, qui conduit à des résultats d'existence et d'unicité. Typiquement, on obtient des résultats du type suivant.

On suppose qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tous  $x, y \in R^n$  et tout  $u \in U$ , on ait :

$$\|f(x, u)\| \leq C, \|f^0(x, u)\| \leq C, \|g(x)\| \leq C,$$

$$\|f(x, u) - f(y, u)\| \leq C\|x - y\|,$$

$$\|f^0(x, u) - f^0(y, u)\| \leq C\|x - y\|,$$

$$\|g(x) - g(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

En contrôle optimal, si on est capable de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi alors on est capable d'exprimer les contrôles optimaux comme des feedbacks. En effet, rappelons

que le principe du maximum permet d'exprimer les contrôles optimaux comme fonctions de  $(x,p)$ . Or on vient de voir précédemment  $p(t) = -p^0 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t))$  (au moins si donc beaucoup plus que le principe du maximum, mais bien entendu cette équation d'Hamilton-Jacobi est aussi beaucoup plus difficile à résoudre.

**Les équations de sortie :**

Pour s'assurer de la mesure correcte des variables de mouvement de l'avion rigide, il serait nécessaire de placer les capteurs de mouvement au centre de la gravité (c.g) de l'avion. Cependant, dans la pratique, il est impossible de localiser avec précision tous les capteurs au (c.g). Une certaine correction est nécessaire. Un autre réglage exigé quand le mouvement de flexion est présent. Pour illustrer ceci, il faut mesurer l'accélération dans un avion rigide avec un accéléromètre situé à une certaine distance  $l_x$  du c.g. ( $l_x$  est positif quand l'accéléromètre est situé en avant de c.g de l'avion). L'accélération normale  $a_{z_x}$  mesurée par les capteurs est alors :

$$a_{z_x} = a_{z_{cg}} - l_x \dot{q}$$

Où  $\dot{q}$  est l'accélération de tangage.

L'accélération normale  $a_{z_{cg}}$  est donnée par :

$$a_{z_{cg}} = \dot{w} - U_0 \dot{q}$$

Cependant, pour des angles petits et le système d'axe utilisé, l'angle d'attaque  $\alpha$  peut être exprimé par :

$$\alpha = \frac{w}{U_0}$$

Ainsi :

$$a_{z_x} = U_0(\dot{\alpha} - \dot{q}) - l_x \dot{q}$$

Si l'accélération normale mesurée est prise comme la sortie  $y \triangleq a_{z_x}$ , l'équation de sortie devient :

$$y = Cx + Du$$

Lorsque les effets de flexibilité sont inclus dans la dynamique d'avion, cependant, l'accélération, se produisant en raison du mouvement structural, doit être ajoutée, de sorte que l'accélération normale devienne [2]:

$$a_{z_x} = U_0(\dot{\alpha} - \dot{q}) - l_x \dot{q} + \phi_{x,1} \ddot{\lambda}_1 + \phi_{x,5} \ddot{\lambda}_5 + \phi_{x,7} \ddot{\lambda}_7 + \phi_{x,8} \ddot{\lambda}_8 + \phi_{x,12} \ddot{\lambda}_{12}$$

Où :

C =

$$[C_{11}C_{12}C_{13}C_{14}C_{15}C_{16}C_{17}C_{18}C_{19}C_{110}C_{111}C_{112}]$$

Dans les quelles sont présentées (1-27) :

$$C_{11} = \{U_0 Z_\alpha - l_x(M_\alpha + M_{\dot{\alpha}} Z_\alpha) + \phi_{x,1}\eta_{1\alpha} + \phi_{x,5}\eta_{5\alpha} + \phi_{x,7}\eta_{7\alpha} + \phi_{x,8}\eta_{8\alpha} + \phi_{x,12}\eta_{12\alpha}\}$$

$$C_{12} = \{-l_x(M_q + M_{\dot{q}}) + \phi_{x,1}\eta_{1q} + \phi_{x,5}\eta_{5q} + \phi_{x,7}\eta_{7q} + \phi_{x,8}\eta_{8q} + \phi_{x,12}\eta_{12q}\}$$

$$C_{13} = \{\phi_{x,1}(\eta_{1\lambda_1} - 2\xi_1\omega_1)\}$$

$$C_{14} = \{\phi_{x,1}(\eta_{1\lambda_1} - \omega_1^2)\}$$

$$C_{15} = \phi_{x,5}(\eta_{5\lambda_5} - 2\xi_5\omega_5)$$

$$C_{16} = \phi_{x,5}(\eta_{5\lambda_5} - \omega_5^2)$$

$$C_{17} = \phi_{x,7}(\eta_{7\lambda_7} - 2\xi_7\omega_7) + \phi_{x,8}\eta_{8\lambda_7}$$

$$C_{18} = \phi_{x,7}(\eta_{7\lambda_7} - \omega_7^2) + \phi_{x,8}\eta_{8\lambda_7}$$

$$C_{19} = \phi_{x,8}(\eta_{8\lambda_8} - 2\xi_8\omega_8) + \phi_{x,7}\eta_{7\lambda_8}$$

$$C_{110} = \phi_{x,8}(\eta_{8\lambda_8} - \omega_8^2) + \phi_{x,7}\eta_{7\lambda_8}$$

$$C_{111} = -\phi_{x,12}2\xi_{12}\omega_{12}$$

$$C_{112} = -\phi_{x,12}\omega_{12}^2$$

On a :

$$D = [(U_0 - l_x M_{\dot{\alpha}})Z_{\delta E} - l_x M_{\delta E} + \phi_{x,1}\eta_{1\delta E} + \phi_{x,5}\eta_{5\delta E} + \phi_{x,7}\eta_{7\delta E} + \phi_{x,8}\eta_{8\delta E} + \phi_{x,12}\eta_{12\delta E}]$$

[1] DONALD. McLEAN « **Automatic Flight Control System** » Séries  
édition :M.J.GRIMBLE 1990

[2] IMAD BOUSTANI “ **Analyse d’un système de commande d’allègement à une rafale sur un avion à commande électrique** ” , thèse comme exigence partielle à l’obtention de la maîtrise en technologie des systèmes.

Montréal, SEPTEMBRE 1999

[3] M.Y.KARNIB “ **calcul des dérivées de stabilité pour les interactions aéroservoélastiques** ”, thèse comme exigence partielle à l’obtention de la maîtrise en génie de la production automatisée.

Univ de Québec ,avril 2004

[4] F.VEYSSET “ **modélisation et identification de comportements de l’avion en vol turbulent par modèles à retards** ” thèse présenté en vue d’obtention d’un grade doctorat.

Soutenue le 17 novembre 2006

Univ de lille .france

[5] L.CONSTANTIN CIOCAN “ **validation d’une méthode pour l’étude des interactions aéroservoélastiques des modes rigides, élastiques et de commande** ” , comme exigence partielle à l’obtention de la maîtrise en génie.

Univ de Québec ,septembre 2006

[7] Mr.TAREK BENMILOUD.” **commande du moteur asynchrone avec compensation des effets des variables paramétriques** ” thèse présenté comme exigence partielle à la maîtrise en génie.

[8] engine lauvre tsky ,kevin ,wise” **Robust control with aero space applications** ” ;part 1

Huntington Beach,California,USA

[9] “ **Quelque contribution à la théorie de mode glissant** ” cour présenté à l’école nants  
France Année 2010

[10] EDOUARD. LAROCHE “ **cours de commande optimale ENSPS** ”

Univ de Strasbourg

[11] MARIAM BAROUDI .” **contrôle d’un bras robotique flexible** ”, mémoire présenté comme exigence partielle de la maîtrise en ingénierie.

Québec août 2010

[12] AMAR SI AMMOUR “**contribution à la commande par mode glissant d’ordre fractionnaire**” univ de tizi ouzou juillet 2011 thème présentée en vue d’obtention d’un master.

[13] JEAN DUPREZ “**automatisation du pilotage au sol pour la navigation aéroportuaire**” thèse pour obtenir le grade de docteur de l’univ toulouse III

[14] O.AIDH ET W.AINA “**synthèse de lois de commande non-linéaire pour entraînement électrique à vitesse variable basé sur un moteur synchrone à aimants permanents**” cours .

Univ de tlemcen 2012/2013

[15] S.ARDJOUN “**commande en vitesse par mode glissant d’une machine asynchrone à double alimentation**”

Univ de sidi-bel-abbes 2010

[16] F.SALMI ET N.HALLMI “*commandes linéaire et non linéaire dédiées au pilotage d’un avion en présence de perturbations*” thèse master avionique.

Institut d’aéronautique de Blida 2012/2013

[17] DJ.BISKRI “**méthodes de calcul des forces aérodynamiques pour les études des interactions aéroservoélastiques**”, comme exigence partielle à l’obtention du doctorat en génie ph.D.

Univ de Québec, juillet 2007

[18] “**conception de lois de pilotage robuste et séquençement de gain pour l’approche des systèmes linéaire pour les paramètres variants**” école de technologie

[19] I. HERZBERG .M,KARPEL “**flutter sensitivity analysis using rezidualisation for actively controlled flight vehicles**”

structural optimization vol (12(4),pp 228,238)

[20] “**Principaux concepts dans la commande des systèmes à l’aide de régimes glissants**”

P. Lopez, S.Nouri, théorie élémentaire et pratique de la commande par régime glissant chapitre1, ISBN 10 35 4-3100-3-7 Springer, New York 2006

[21]V.UTKIN “**chattering problem in sliding mode control systems’VSS**” Alghero Italy

[22] Wikipedia (l’avion B-52)

# **Chapitre I :**

Modèle mathématique d'un avion flexible



# **Chapitre II :**

La Commande optimale linéaire et non linéaire

# **Chapitre III :**

Simulation et interprétation des résultats

# **Annexes**

# **Bibliographie**

# **Introduction générale**

# **Conclusion générale**

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de Blida 1

**Institut D'Aéronautique et des Etudes Spatiales**

**Projet de fin d'étude**

En vue d'obtention d'un diplôme Master en Aéronautique

**Option : Avionique**

Présenté par : Mr. LAKHDARI Samir

Mr. MALLEK Smail

Dirigé par : Mr. DILMI Smain

*Promotion : 2013/2014*



Thème

Commande de vol d'un  
avion de transport flexible





## Plan de travail

- Introduction.
- Commande de vol d'un avion flexible.
- Commande optimale linéaire et non-linéaire.
- Simulation et interprétation des résultats.
- Conclusion.



## Introduction

Les principaux soucis en aéronautique sont liés à la stabilité et l'efficacité du vol d'un avion. De ce fait la conception aura pour critère essentiel de donner à l'avion une tendance inhérente qui lui permettra de diminuer les déviations de mouvement dues à des perturbations, ceux-ci va introduire la nécessité des interactions aéroservoélastiques, qu'est une technologie multidisciplinaire issue de l'interaction entre la structure flexible de l'avion et les forces aérodynamiques.



# Modèle mathématique d'un avion flexible

Synthèse du modèle mathématique du vol d'un avion.

Représenter du modèle par une équation d'état sous forme:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

La modélisation mathématique du vol a été développée depuis de nombreuses années à partir des équations de la mécanique du vol. On suppose dans un premier temps que l'avion soit rigide, en appliquant la deuxième loi de Newton, les équations du mouvement peuvent être calculées en fonction des accélérations qui se produisent par suite des forces et moments étant appliqués à l'avion.

➤ **Calcul des forces:**

Par la deuxième loi de Newton on obtient l'équation suivante:

$$F = \frac{d}{dt} \{mV_T\}$$

L'accélération mesurée dans un système d'axe fixe est donnée par:

$$\left. \frac{d}{dt} V_T \right|_E = \left. \frac{d}{dt} V_T \right|_B + \omega \times V_T$$

L'expression de la résultante des forces extérieures:

$$F_x = m(\dot{U} + QW - VR)$$

$$F_y = m(\dot{V} + UR - PW)$$

$$F_z = m(\dot{W} + VP - UQ)$$

➤ Calcul des moments:

La deuxième loi de Newton donne l'équation suivante pour le calcul de moments L, M, N autour des axes X, Y, Z.

$$M = \frac{d}{dt} H + \omega \times H$$

Les composants des moments suivant les axes X, Y, Z:

$$\Delta L = I_{xx} \dot{P} - I_{zz} (\dot{R} + PQ) + (I_{zz} - I_{yy}) QR$$

$$\Delta M = I_{yy} \dot{Q} + I_{zz} (P^2 - R^2) + (I_{xx} - I_{zz}) PR$$

$$\Delta N = I_{zz} \dot{R} - I_{xx} \dot{P} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{zz} QR$$

Par hypothèses :

$$\begin{aligned}\Delta L &= I_{xx} \dot{P} - I_{xz} (\dot{R} + PQ) \\ \Delta M &= I_{yy} \dot{Q} + I_{xz} (P^2 - R^2) \\ \Delta N &= I_{zz} \dot{R} - I_{xz} (\dot{P} - QR)\end{aligned}$$

Lorsque les effets aéroélastique sont pris en considération il devient nécessaire d'augmenter les équations de mouvement pour un avion rigide par l'intermédiaire d'un ensemble de coordonnées généralisées introduites dans les variables d'état.

En appliquant les lois de la dynamique de Newton à l'ensemble de l'avion, nous obtenons:

$$A_l \ddot{q}_l + B_l \dot{q}_l + C_l q_l = Q_l$$

la dynamique du mouvement longitudinal de l'avion flexible considéré est :

$$\dot{\alpha} = Z_{\alpha} \alpha + q + \sum_{j=1}^m Z_{\delta_j} \delta_j - Z_{\lambda_1} \lambda_1 + Z_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1$$

$$\dot{q} = M_{\alpha} \alpha + M_{\dot{\alpha}} (Z_{\alpha} \alpha + q + \sum_{j=1}^m Z_{\delta_j} \delta_j + Z_{\lambda_1} \lambda_1 - Z_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1) + M_q q + \sum_{j=1}^m M_{\delta_j} \delta_j + M_{\lambda_1} \lambda_1 + M_{\dot{\lambda}_1} \dot{\lambda}_1$$

$$\ddot{\lambda}_1 = - (2\xi_1 \omega_1 - \eta_{1\dot{\lambda}_1}) \dot{\lambda}_1 + (-\omega_1^2 - \eta_{1\lambda_1}) \lambda_1 + \eta_{1\alpha} \alpha + \eta_{1q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{1\delta_j} \delta_j$$

$$\ddot{\lambda}_5 = - (2\xi_5 \omega_5 - \eta_{5\dot{\lambda}_5}) \dot{\lambda}_5 + (-\omega_5^2 - \eta_{5\lambda_5}) \lambda_5 + \eta_{5\alpha} \alpha + \eta_{5q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{5\delta_j} \delta_j$$

$$\ddot{\lambda}_7 = - (2\xi_7 \omega_7 - \eta_{7\dot{\lambda}_7}) \dot{\lambda}_7 + (-\omega_7^2 - \eta_{7\lambda_7}) \lambda_7 + \eta_{7\lambda_8} \lambda_8 + \eta_{7\dot{\lambda}_8} \dot{\lambda}_8 + \eta_{7\alpha} \alpha + \eta_{7q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{7\delta_j} \delta_j$$

$$\ddot{\lambda}_8 = - (2\xi_8 \omega_8 - \eta_{8\dot{\lambda}_8}) \dot{\lambda}_8 + (-\omega_8^2 - \eta_{8\lambda_8}) \lambda_8 + \eta_{8\lambda_7} \lambda_7 + \eta_{8\dot{\lambda}_7} \dot{\lambda}_7 + \eta_{8\alpha} \alpha + \eta_{8q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{8\delta_j} \delta_j$$

$$\ddot{\lambda}_{12} = - (2\xi_{12} \omega_{12} - \eta_{12\dot{\lambda}_{12}}) \dot{\lambda}_{12} + (-\omega_{12}^2 - \eta_{12\lambda_{12}}) \lambda_{12} + \eta_{12\alpha} \alpha + \eta_{12q} q + \sum_{j=1}^m \eta_{12\delta_j} \delta_j$$

Équation de vecteur d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$



- Le vecteur d'état  $x$  est défini par:

$$x = [\alpha \ q \ \lambda_1 \dot{\lambda}_1 \ \lambda_5 \dot{\lambda}_5 \ \lambda_7 \dot{\lambda}_7 \ \lambda_8 \dot{\lambda}_8 \ \lambda_{12} \dot{\lambda}_{12}]^T$$

Le vecteur de commande  $u$  est défini par:

$$u = \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_c \end{bmatrix}$$



# commande optimale linéaire et non-linéaire

# Commande optimale linéaire et non-linéaire

Commande optimale LQR

Commande optimale non-linéaire

LQR avec action intégrale

LQR avec observateur de Luenberger

Commande optimale par mode glissant

## Commande optimale LQR

Est l'une des méthodes de conception la plus largement répondues pour le contrôle, elle possède les propriétés suivantes:

- Moins robuste par rapport aux perturbations
- Méthode autorégulée
- Performante

La commande linéaire quadratique est définie comme étant une commande optimale par retour d'état, est de minimiser une fonction de cout quadratique qu'elle est définie comme suit:

$$J = \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x^T(T) Q_T x(T)$$

Détermination de la commande:  $u(t) = -K(t)x$

Matrice du gain de retour:

$$K = -R^{-1}B^T P$$

Où  $P$  solution de l'équation algébrique du Riccati suivante:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

Avec  $Q$ : matrice symétrique semi-définie positive

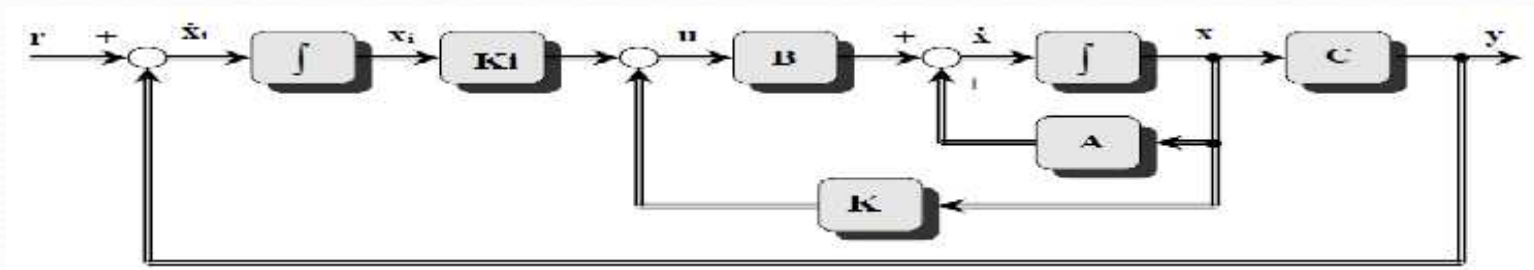
$R$ : matrice symétrique définie positive

- LQR avec action intégrale :

Le problème de la commande LQR, c'est que les erreurs peuvent avoir lieu. Pour cela il nécessite d'ajouter une action intégrale pour le résoudre.

Détermination de la commande:  $u = -Kx + K_i x_i$ .

avec  $\dot{x}_i = r - Cx$ .



On obtient:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + BK_i x_i$$

Détermination des matrices  $K$  et  $K_i$ :  
le système augmenté est donné par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

C'est de la forme:  $X'^* = A^* X^* + B^* U$

Avec:  $U(t) = -K^* X^*$

Où  $K^* = [K; -K_i]$

- LQR avec observateur de Luenberger:

L'idée principale de l'observateur de Luenberger consiste à désigner au système un autre système LTI, dont l'objectif est de donner une estimation d'état  $\hat{x}(t)$  de  $x(t)$  à partir des entrées  $u(t)$ .

On considère le système linéaire suivant:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

L'équation d'état de l'estimateur est donnée par:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{x} = F\hat{x} + Ju + Ly \\ y = Cx \end{cases}$$


Soit l'erreur d'estimation définie par:  $\tilde{x} = x - \hat{x}$

Alors :  $\dot{\tilde{x}} = F\tilde{x} + (A - F - LC)x + (B - J)u$ .

On peut classer les performances d'un observateur de la façon suivante:

- stabilité de l'observateur définie par les gains de la matrice .
- vitesse de convergence de l'observateur.
- la robustesse de l'observateur vis-vis des perturbations.





Un des inconvénients du contrôle optimal est qu'il conduit à des calculs matricielles relativement lourds dès que le système à contrôler est grand et moins robuste, pour cela on passe à une commande non-linéaire VSS par mode glissant .

### La commande par mode glissant:

La commande par mode glissant est une commande à structure variable. Les premiers travaux sur ce type de commande ont été menés dans l'ancien U.R.S.S à partir des années soixante. Elle est basée sur la résolution des équations différentielles à second membre discontinu, initiée par le mathématicien soviétique Filipov.

```
graph TD; A[Choix de la surface de glissement] --> B[Conditions d'existence et de convergence]; B --> C[Calcul de la commande];
```

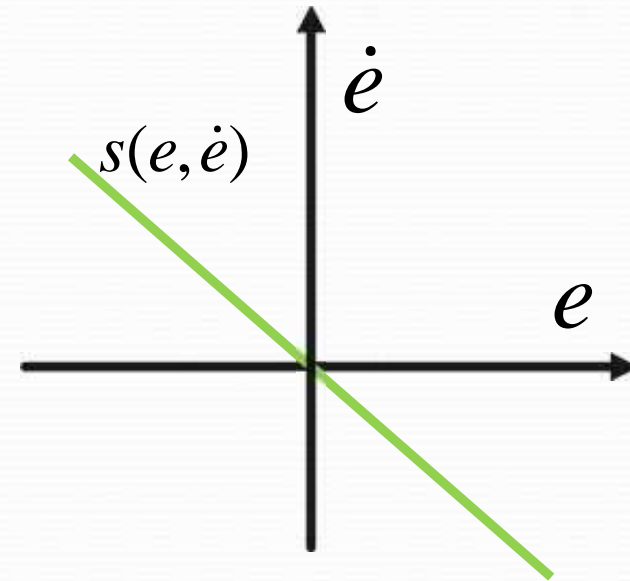
Choix de la surface de glissement

Conditions d'existence et de convergence

Calcul de la commande

1-choix de la surface de glissement:

$$S = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \dots \right)^{r-1} e$$



2-condition de convergence:

Fonction de Emilyanov et Utkin

$$\dot{S} < 0 \quad \text{lorsque} \quad S > 0$$

$$\dot{S} > 0 \quad \text{lorsque} \quad S < 0$$

Fonction de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x)$$

$$\dot{V}(x) = S(x) \cdot \dot{S}(x)$$

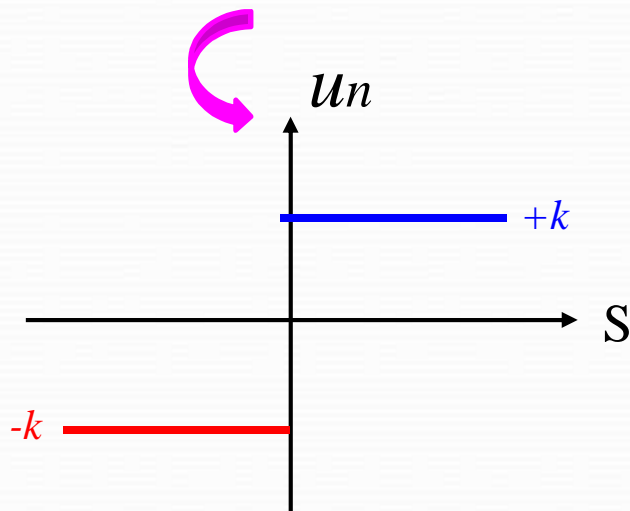
$$\dot{S}S < 0.$$

3-calcul de la commande:

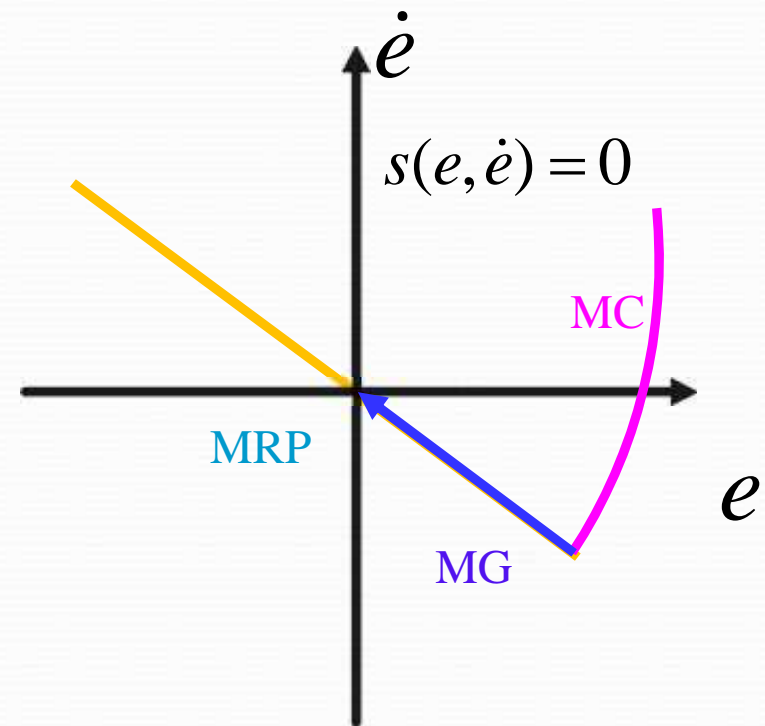
⇒ la forme la plus utilisée

$$u = u_n + u_{eq}$$

$$u_n = -k \operatorname{sign} e(s)$$



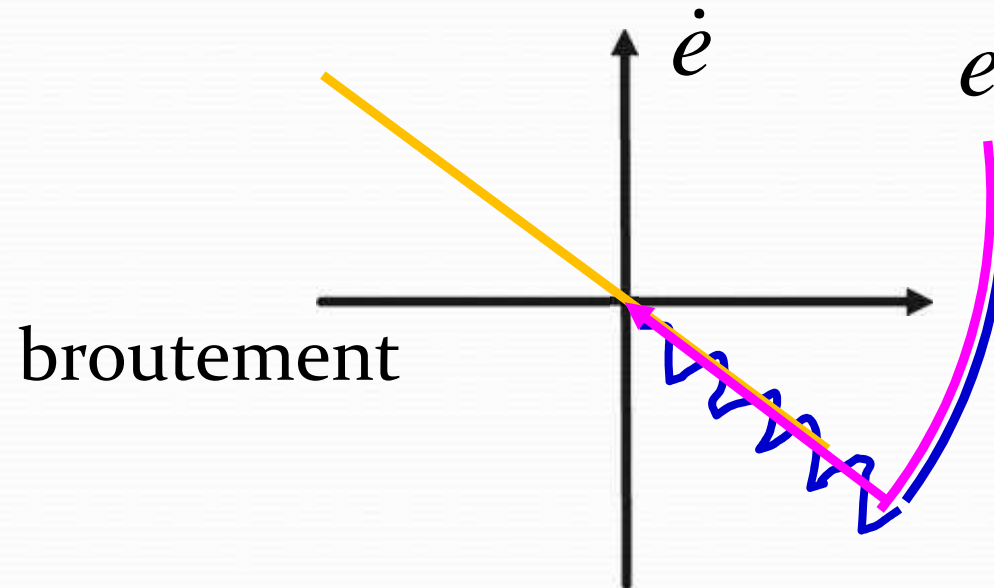
Définition de la commande signe.



La trajectoire des états dans la plan de phase

#### 4-phénomène de broutement(chattering):

durant le régime glissant, les discontinuités appliquées à la commande peuvent entrainer un phénomène de broutement. Celui-ci se caractérise par de forte oscillations des trajectoires du système autour de la surface de glissement

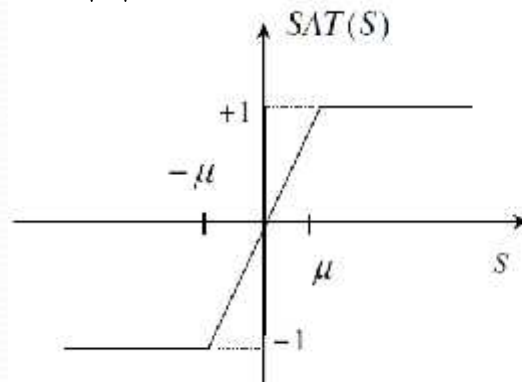


➡ résolution du phénomène de broutement:

pour remédier ce problème la fonction « **signe** » est remplacée par une fonction **saturation** adéquate qui filtre les hautes fréquences.

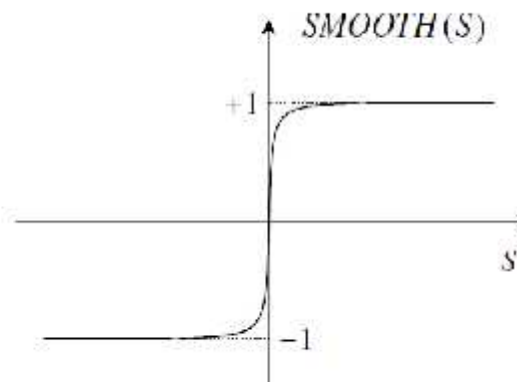
❖ **Fonction SAT:**

$$\begin{cases} \text{Sat}(S) = 1 & \text{si } S > \mu \\ \text{Sat}(S) = -1 & \text{si } S < -\mu \\ \text{Sat}(S) = \frac{S}{\mu} & \text{si } |S| < \mu \end{cases}$$



❖ **Fonction SMOOTH**

$$\text{Smooth}(S) = \frac{S}{|S| + \mu}$$



**Fonction « SAT » et « SMOOTH ».**



# Simulation et interprétation des résultats

Caractéristiques	B-52
Longueur	48,03 m
Envergure	56,40 m
Plafond	15000 m
Masse à vide	83 tonnes, jusqu'à 221 tonnes
Masse maximum au décollage	334 t
Vitesse	Mach 0,95 maximum
Moteur	8 réacteurs Pratt & Whitney



## Modèle mathématique longitudinal de Vol de l'avion B-52 :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \\ \dot{\lambda}_4 \\ \dot{\lambda}_5 \\ \dot{\lambda}_6 \\ \dot{\lambda}_7 \\ \dot{\lambda}_8 \\ \dot{\lambda}_9 \\ \dot{\lambda}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6 & 1 & -1.1811 & -0.1181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.57 & -2.4460 & -1.8130 & 1.1805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.1960 & -0.4450 & -56.8700 & -5.5300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13.400 & 0.2466 & 0 & 0 & -23.152 & -1.7120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0930 & 0.2420 & 0 & 0 & 0 & 0 & -403.86 & -2.6790 & -10.71 & -0.5180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3073 & 0.0559 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2400 & -0.1760 & -390.10 & -0.4740 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.07 & -0.006 \\ 3.726 & -0.28 \\ 0 & 0 \\ 0.571 & 0.019 \\ 0 & 0 \\ -0.465 & -0.054 \\ 0 & 0 \\ -0.582 & -0.0531 \\ 0 & 0 \\ -0.112 & -0.035 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ \xi \end{bmatrix}$$

- Simulation et interprétation des résultats en boucle ouverte:

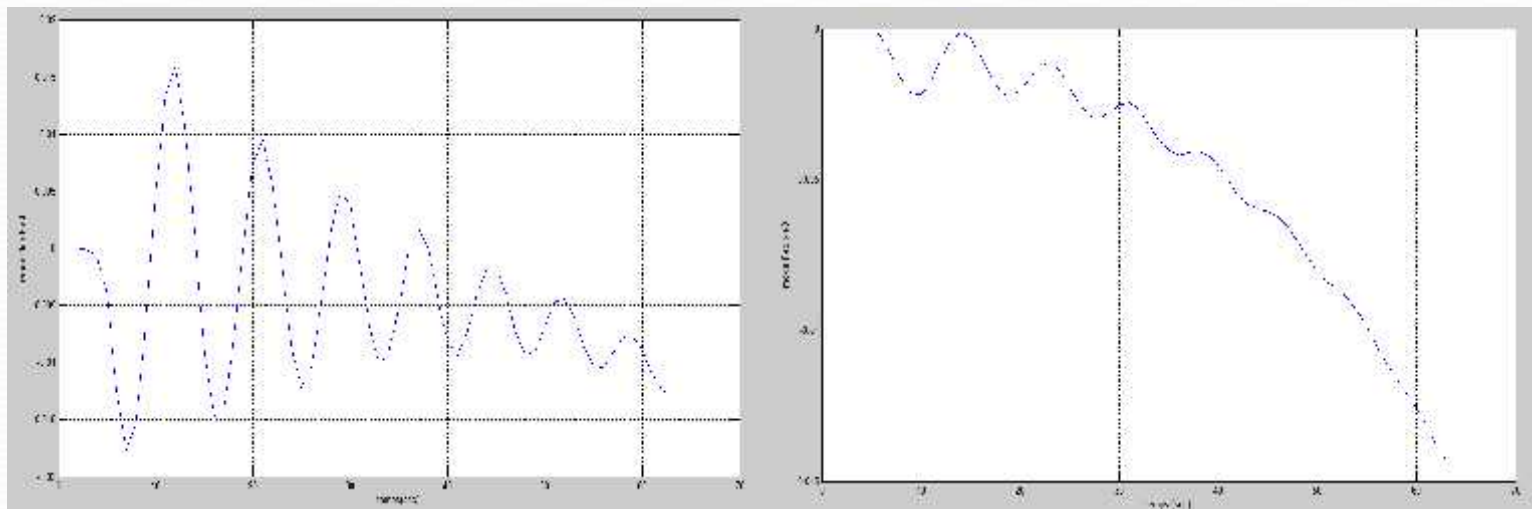
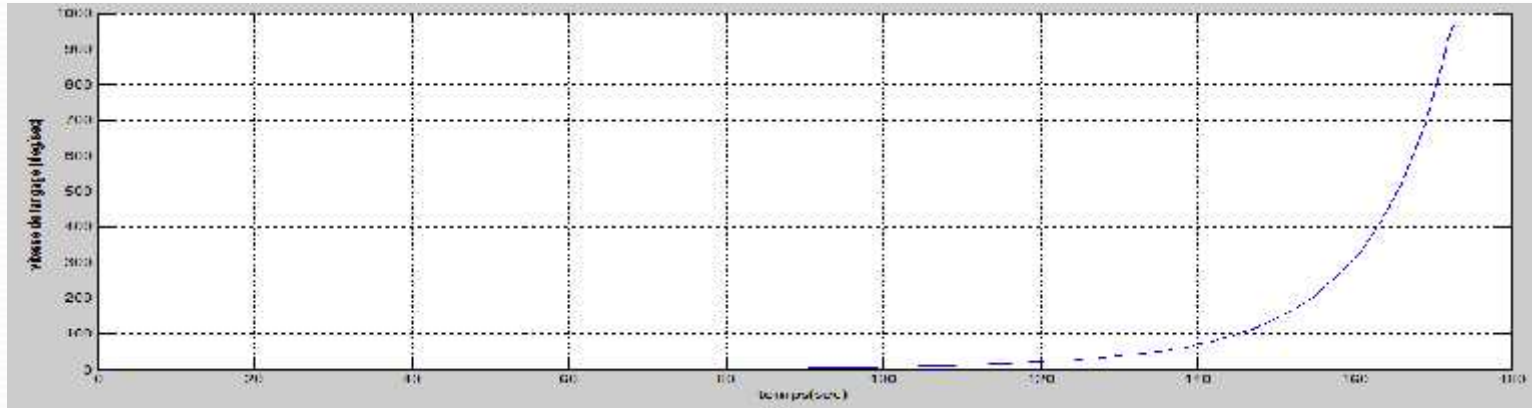
➡ **Etude de la stabilité:**

$$|\lambda I - A| = 0$$

<i>V.P</i>	0.6990	-4.7432	-2.7659±7.0362i	-0.8560 ±15.1917i	-1.3606±20.1933i	-0.2159±19.7306i
<i>Amortissement</i>	-1	1	0.366	0.0563	0.0672	0.0109
<i>fréquence</i>	0.699	4.74	7.56	15.2	20.02	19.7

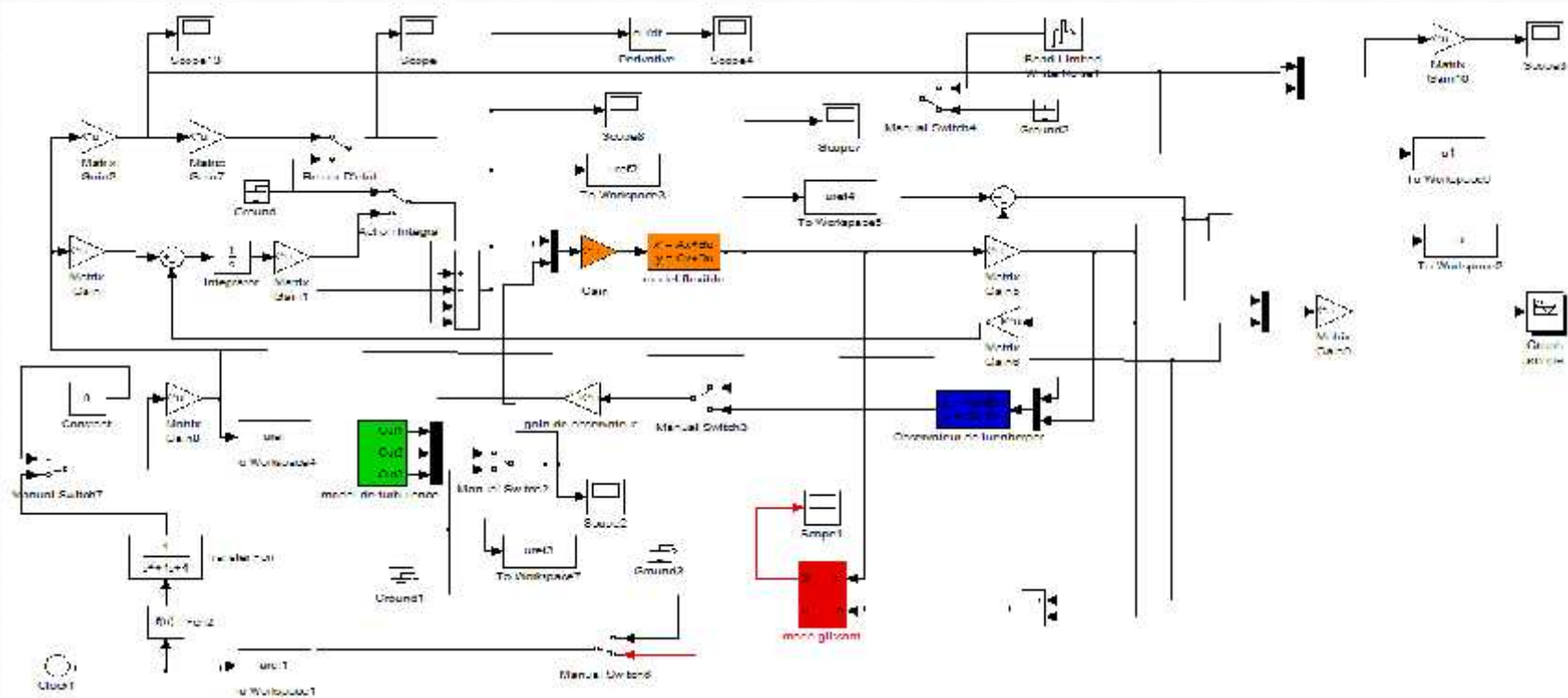
$\lambda_2 = 0.6990$  :Caractérise le mode short période.

## ➡ interprétation des résultats:



- Simulation et interprétation des résultats en boucle fermée:

Dans le but de pouvoir comparer les performances des contrôleurs optimale linéaire et non-linéaire on effectue tout d'abord les simulations convenables pour obtenir les résultats désirés.



## ➡ Commande optimale LQR :

Avant de passer à la simulation, on doit vérifier l'une des conditions de la commande optimale LQR soit satisfaite, qu'il fallait étudier la contrôlabilité et l'observabilité du système.

$$\text{rank}[\text{ctrb}(A,B)]=10$$

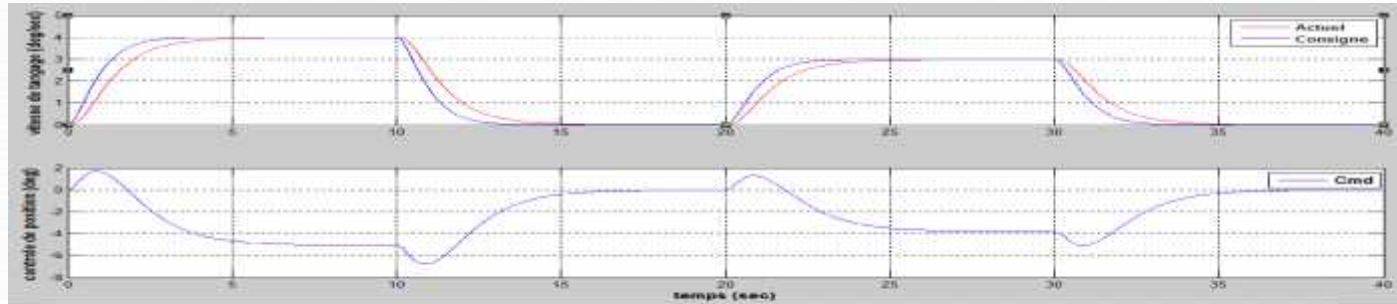
$$\text{rank}[\text{obsv}(A,C)]=10$$

### -Détermination de la matrice k:

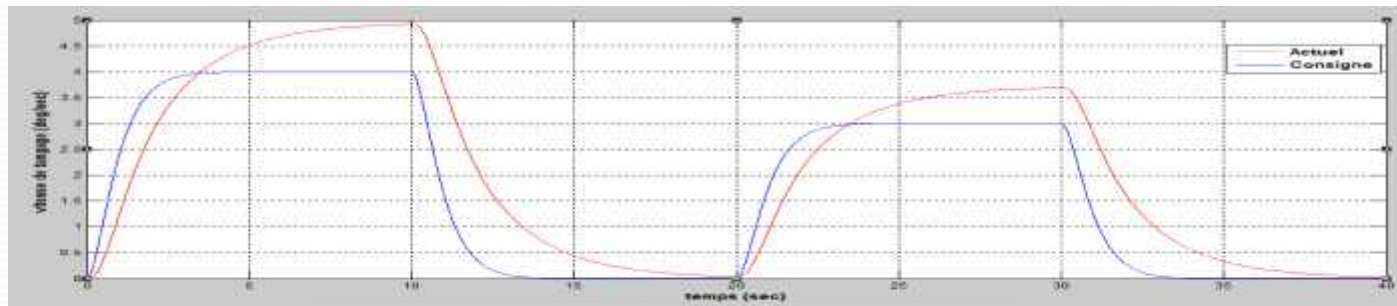
$$[k, P, E] = \text{LQR}(A, B, Q, R)$$

$$k = [2.3109 \ 0.7432 \ -0.9765 \ -0.0597 \ -0.0000 \ -0.0000 \ 0.0168 \ 0.0028 \ -0.2739 \ -0.0551]$$

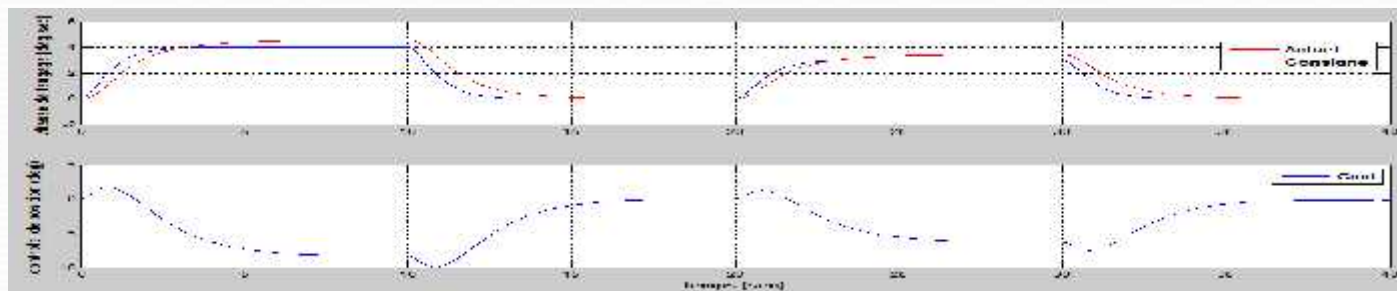
## -interprétation des résultats:



La réponse du système et la commande LQR en absence des perturbations externes



Réponse du système avec incertitudes internes



La réponse du système et la commande LQR avec perturbations externes

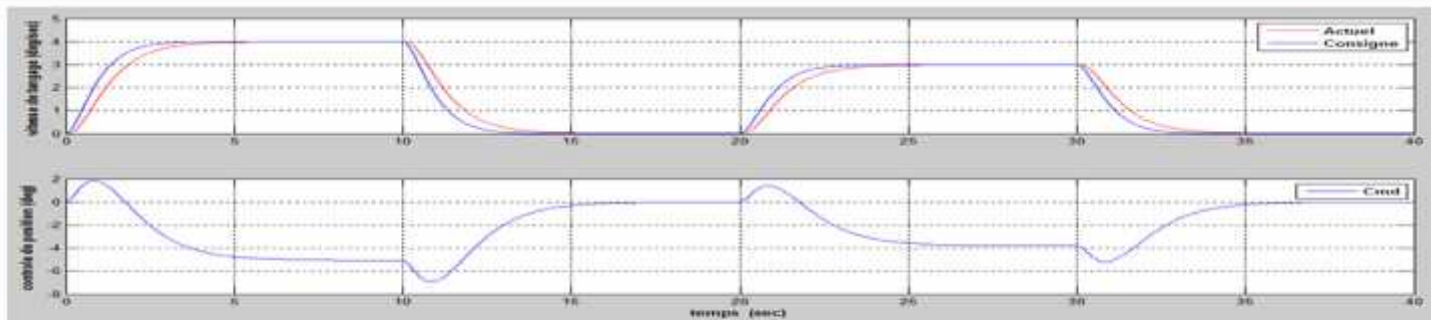
## ➔ Commande optimale LQR avec action intégral:

-Les gains de commande obtenus sont:

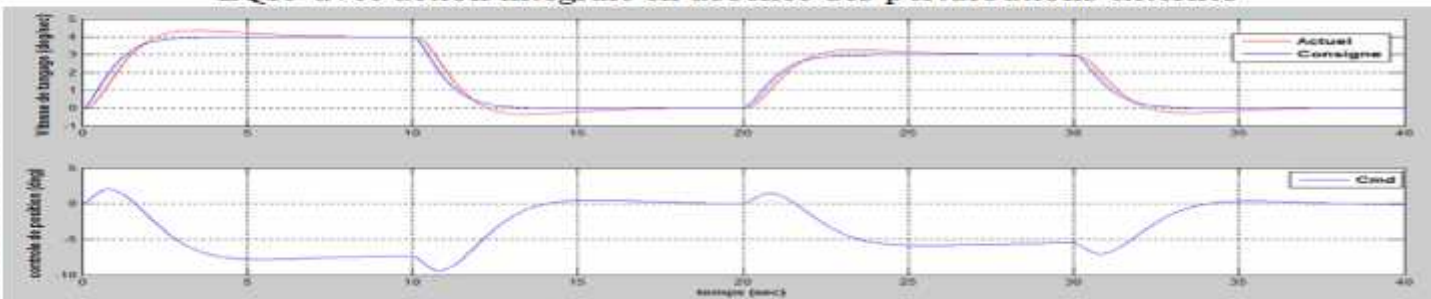
$$k=[3.0203 \ 1.0030 \ -1.3316 \ -0.0822 \ -0.0028 \ 0.0607 \ 0.0000 \ 0.0414 \ -0.0043 \ 0.1130]$$

$$K_i = [0.0100]$$

- Interprétation des résultats:



LQR avec action intégrale en absence des perturbations externes



LQR avec action intégrale en présence de perturbations

## ➡ LQR avec observateur de Luenberger:

- Les résultats de calcul nous donnent les valeurs des matrices suivantes:

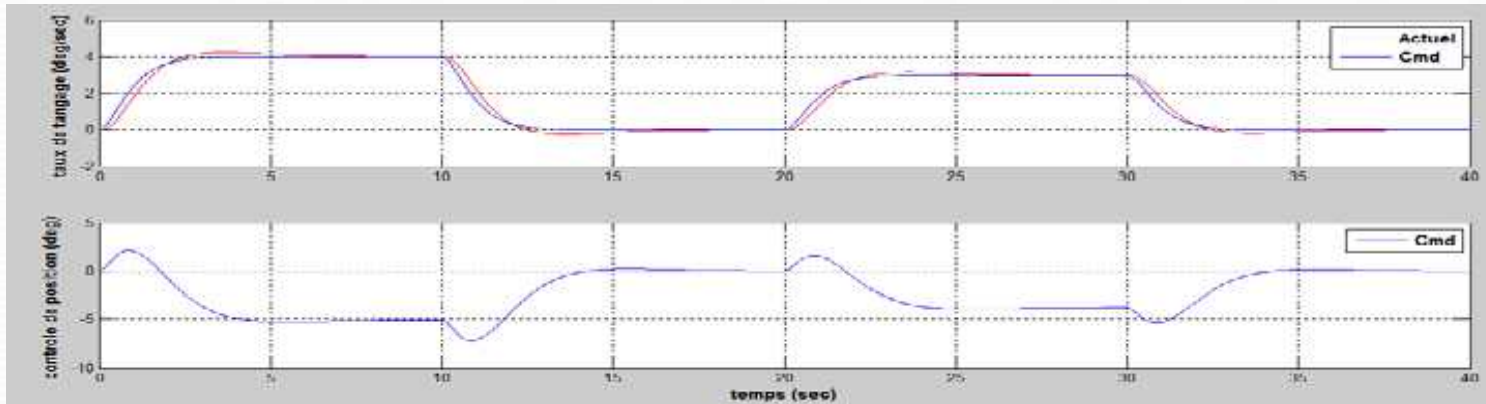
$$J = [-0.0320 \ 2.0030 \ 0 \ 0.2765 \ 0 \ -0.2055 \ 0 \ -0.2644 \ 0 \ -0.0385]^T$$

$$L = [0.6562 \ 1.3983 \ -0.0874 \ -0.0610 \ -0.0023 \ -0.0016 \ -0.0025 \ -0.0018 \ 0.0007 \ 0.0005]^T$$

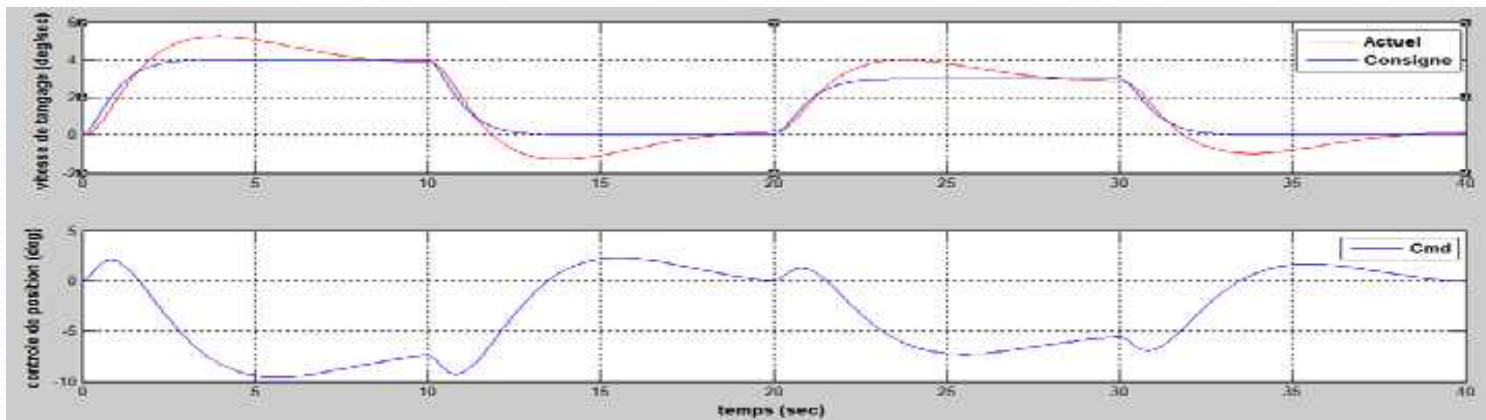
$$F = \begin{bmatrix} -1.6 & 0.3438 & -1.1811 & -0.1181 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6.57 & -3.8443 & -1.8130 & 1.1805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0874 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7.1960 & -0.3840 & -56.8200 & -5.5300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0023 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.3490 & 0.2482 & 0 & 0 & -231.52 & -1.7120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.0930 & 0.2438 & 0 & 0 & 0 & 0 & -408.86 & -2.6790 & -10.71 & -0.5180 \\ 0 & -0.0007 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3073 & 0.0554 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.2400 & -0.1760 & -390.10 & -0.4740 \end{bmatrix}$$



## -Interprétation des résultats:

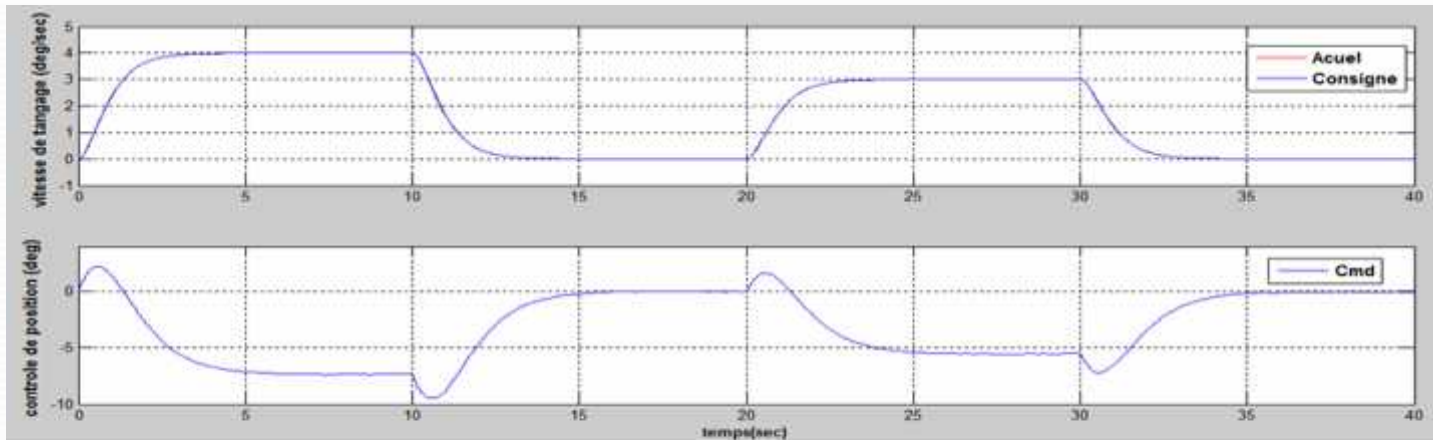


LQR avec observateur de Luenberger sans perturbation

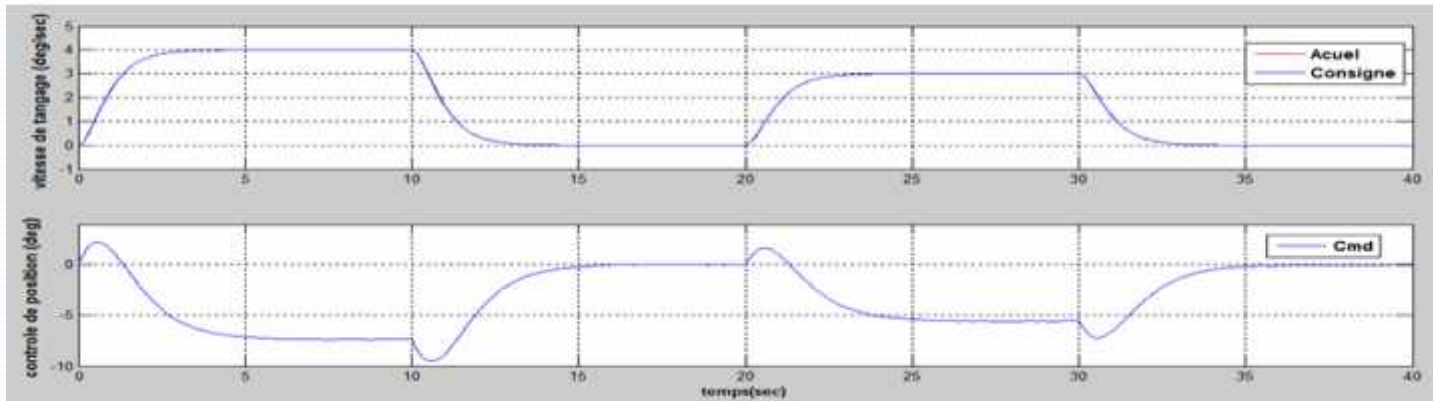


LQR avec observateur de Luenberger avec perturbation

## ➡ Commande optimale par mode glissant:



LQR par mode glissant en absence de perturbation



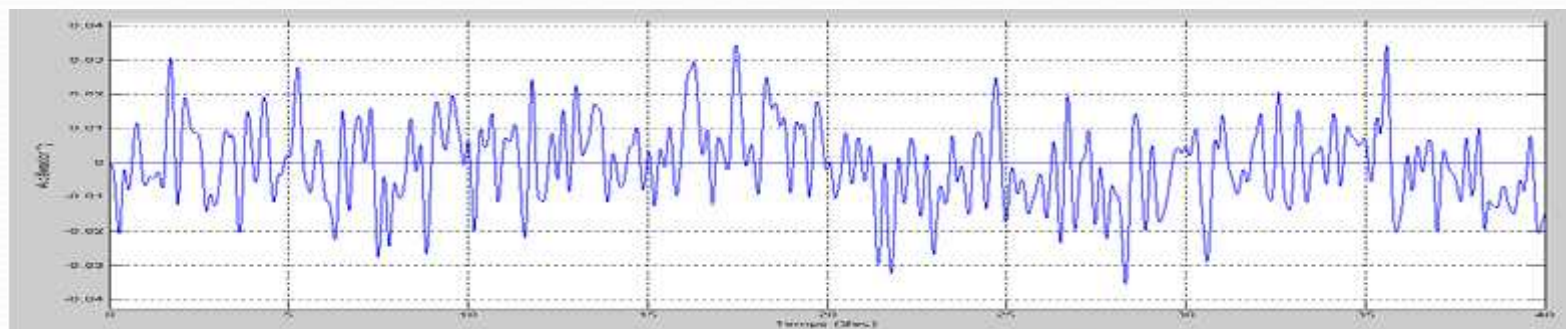
Réponse du système par LQR avec mode glissant en présence de perturbation

- **Réduction des accélérations par LQR:**

Afin d'alléger l'effet des rafales sur l'accélération de l'avion, on va choisir les matrices de pondération comme suit :

$$Q = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0001 & 0.0002 & 0 & 0.0046 & 0 & 0.0056 & 0 & 0.0146 & 0 \\ 0.0001 & 0.0001 & -0.0001 & -0 & 0.0039 & 0 & 0.0048 & 0 & 0.0125 & 0 \\ -0.0002 & -0.0001 & 0.0002 & 0 & -0.0070 & -0.0001 & -0.0085 & -0.0001 & -0.0223 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0003 & -0 & -0.0004 & -0 & -0.0011 & -0 \\ 0.0046 & 0.0039 & -0.0070 & -0.0003 & 0.1975 & 0.0015 & 0.2400 & 0.0018 & 0.6285 & 0.0011 \\ 0 & 0 & -0.0001 & -0 & 0.0015 & 0 & 0.0018 & 0 & 0.0046 & 0 \\ 0.0056 & 0.0048 & -0.0085 & -0.0004 & 0.2400 & 0.0018 & 0.2916 & 0.0022 & 0.7637 & 0.0013 \\ 0 & 0 & -0.0001 & -0 & 0.0018 & 0 & 0.0022 & 0 & 0.0059 & 0 \\ 0.0146 & 0.0125 & -0.0223 & -0.0011 & 0.6285 & 0.0046 & 0.7637 & 0.0059 & 7 & 0.0034 \\ 0 & 0 & -0 & -0 & 0.0011 & 0 & 0.0013 & 0 & 0.0039 & 0 \end{bmatrix} \quad R=I$$

**-Interprétation des résultats:**



Réduction de l'accélération en boucle fermée

