

# Logique

*méthodes pour l'intelligence artificielle*

Paul Gochet  
Pascal Gribomont  
André Thayse



Hermès  
Science  
— publications —

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> .....	17
<b>Chapitre 1. Introduction historique et philosophique à la logique modale</b> .....	19
1.1. L'étude des modalités relève-t-elle de la logique ? .....	19
1.2. Le carré modal .....	20
1.3. Le syllogisme modal .....	21
1.4. Les futurs contingents .....	22
1.5. L'école de Mégare .....	23
1.6. Les modalités temporelles au Moyen Age .....	24
1.7. La logique déontique au Moyen Age .....	26
1.8. Les logiques multimodales .....	29
1.9. De l'implication .....	29
1.10. L'implication stricte .....	30
1.11. Polysémie de l'implication stricte .....	31
1.12. La correction des systèmes de Lewis .....	32
1.13. L'avènement de la logique modale quantifiée .....	33
1.14. Carnap, précurseur de la sémantique des mondes possibles .....	34
1.15. De la nécessité selon Carnap à la nécessité selon Kripke .....	35
1.16. Domaines variables et relation d'accessibilité .....	36
1.17. De l'implication stricte à l'implication relevante .....	38
1.18. La diversification de la logique modale .....	40
<b>Chapitre 2. Logique modale des propositions</b> .....	41
2.1. Introduction .....	41
2.2. Logique modale des propositions .....	43
2.2.1. Introduction .....	43
2.2.2. Syntaxe de la logique modale .....	44
2.2.3. Sémantique de la logique modale .....	45

2.2.4. Interprétations de la logique modale .....	46
2.2.4.1. Logique du possible et du nécessaire .....	46
2.2.4.2. Logique temporelle .....	47
2.2.4.3. Logique dynamique .....	47
2.2.4.4. Logiques de croyance et de connaissance .....	48
2.2.4.5. Formules remarquables .....	48
2.2.5. Relations binaires et schémas de formules .....	48
2.2.6. Systèmes axiomatiques .....	50
2.2.6.1. Valuations et tautologies .....	50
2.2.6.2. Logiques .....	50
2.2.6.3. Logiques normales .....	51
2.2.6.4. Systèmes axiomatiques .....	51
2.2.7. Quelques logiques classiques .....	52
2.2.8. Système S5 : nécessité et connaissance introspective .....	53
2.2.9. Les logiques obtenues à partir des schémas D, T, B, 4, 5 .....	56
2.2.10. Langages multimodaux .....	59
2.2.11. Exemples de langages multimodaux .....	59
2.2.12. La logique dynamique .....	60
2.2.13. Logique temporelle et logiques de nécessité .....	61
2.2.14. Logique déontique .....	62
2.2.14.1. Le système OS de Von Wright .....	62
2.2.14.2. Le système NS (Von Wright 1964) : approche dyadique ..	63
2.2.14.3. Réduction à la logique modale aléthique (Anderson 1958) .	64
2.2.14.4. Approche dynamique .....	65
2.3. La sémantique algébrique .....	65
2.3.1. Introduction .....	65
2.3.2. La logique à trois valeurs de Lukasiewicz .....	66
2.3.3. Les logiques multivaluées .....	67
2.3.4. Sémantiques pour des logiques à quatre valeurs .....	68
2.3.5. Logiques multivaluées codées binaires .....	69
2.3.6. Interprétation ensembliste de logiques multivaluées .....	71
2.3.7. Structures modales et logiques multivaluées .....	73

### **Chapitre 3. Logiques modales temporelle et épistémique .....** 77

3.1. Le temps et le changement .....	77
3.1.1. Introduction .....	77
3.1.2. Relations entre temps et changement .....	78
3.1.3. Le temps : ensemble de points ou d'intervalles .....	78
3.1.3.1. Les instants comme primitives du temps .....	79
3.1.3.2. Les intervalles comme primitives du temps .....	79
3.1.4. Etats et événements .....	80
3.2. La logique temporelle des propositions .....	81
3.2.1. Syntaxe .....	81
3.2.2. Sémantique .....	82

3.2.3. Axiomatique .....	83
3.2.4. Logique temporelle linéaire .....	84
3.2.4.1. Exemples .....	85
3.2.4.2. Axiomatisation .....	85
3.2.5. Opérateurs spécialisés .....	86
3.2.6. Propriétés additionnelles de la relation d'accessibilité .....	87
3.2.7. Logique temporelle non transitive .....	89
3.2.8. Logique temporelle à plusieurs dimensions .....	90
3.2.9. Logique d'intervalles .....	91
3.3. Logique épistémique .....	92
3.3.1. Introduction .....	92
3.3.2. Les mondes possibles en logique épistémique .....	92
3.3.3. Exemple : Le problème des trois conseillers .....	94
3.3.4. Connaissance commune et distribuée .....	96
3.3.5. Exemple : Le problème des trois conseillers (suite) .....	97
3.3.6. Connaissance et temporalités .....	101
<b>Chapitre 4. Logique modale quantifiée .....</b>	<b>103</b>
4.1. Introduction .....	103
4.2. Syntaxe et sémantique .....	104
4.2.1. Syntaxe .....	104
4.2.2. Sémantique .....	104
4.2.3. Extension et intension .....	106
4.2.4. Désignateurs rigides et non rigides .....	107
4.2.5. Les choix en logique modale quantifiée .....	108
4.3. Interprétation objectuelle .....	110
4.3.1. Termes rigides; domaines fixes .....	111
4.3.2. Termes rigides; domaines dépendant du monde .....	113
4.3.2.1. Le système Q1R .....	113
4.3.2.2. Remarques .....	114
4.3.3. Désignateurs non rigides .....	116
4.3.3.1. Le système Q3 .....	116
4.3.3.2. Le système Q3L .....	117
4.3.3.3. Application à la logique aléthique .....	117
4.4. Domaines de quantification contenant des éléments de type intensionnel .....	118
4.4.1. Introduction .....	118
4.4.2. Interprétation conceptuelle .....	118
4.4.2.1. Domaines fixes; le système QC .....	118
4.4.2.2. Domaines dépendant du monde; le système Q2 .....	119
4.4.3. Interprétation substantielle .....	119

<b>Chapitre 5. Logiques temporelle et épistémique quantifiées</b> .....	121
5.1. Logique temporelle quantifiée .....	121
5.1.1. Introduction .....	121
5.1.2. Quantification et modalités temporelles .....	123
5.1.3. Version quantifiée de logiques normales .....	125
5.1.4. Changement temporel, identité, loi de Leibniz .....	127
5.1.5. Logique modale quantifiée et temps arborescent .....	127
5.2. Logique épistémique quantifiée .....	128
<b>Chapitre 6. Théorie des modèles. Première partie</b> .....	131
6.1. Introduction .....	131
6.2. Affinement de la notion de conséquence en logique modale .....	133
6.3. Validité en logique modale .....	134
6.3.1. Vérité et validité .....	134
6.3.2. Validité dans un modèle .....	134
6.3.3. Validité dans une classe de modèles .....	134
6.3.4. Validité dans une structure .....	135
6.3.5. Valuation et substitution .....	136
6.3.6. Utilité de conserver la notion de validité dans une classe de modèles .....	138
6.4. Relations de conséquence logique .....	139
6.4.1. La conséquence logique en logique non modale .....	139
6.4.2. Les variables au sens conditionnel et au sens de la généralité ....	139
6.4.3. Force des deux relations de conséquence en logique du premier ordre .....	141
6.4.4. La conséquence locale .....	142
6.4.5. La conséquence globale pour les modèles .....	143
6.4.6. La conséquence globale pour les structures .....	143
6.4.7. Force des trois relations de conséquence en logique modale ....	143
6.4.8. Importance de la conséquence locale .....	144
6.4.9. Conséquence globale sur les structures et règle d'échange .....	146
6.4.10. Le lien unissant la conséquence locale à la conséquence globale .....	147
6.5. Le théorème de la déduction en logique modale .....	148
6.5.1. Le théorème de la déduction en logique modale et en logique non modale .....	148
6.5.2. Les deux sortes de prémisses .....	150
6.5.3. Systèmes non normaux .....	150
6.5.4. Le théorème de la déduction revisité .....	151
6.5.5. Le théorème local de la déduction .....	151
6.5.6. Le théorème global de la déduction .....	152
6.6. La preuve de complétude par la méthode du modèle canonique .....	152
6.6.1. Correction, complétude, caractérisation pour les systèmes sans prémisses .....	152

6.6.2. Caractérisation .....	153
6.6.3. La complétude prouvée à partir du modèle canonique .....	153
6.6.4. La structure canonique .....	154
6.6.5. La valuation canonique .....	155
6.6.6. Le modèle canonique .....	155
6.6.7. Le système canonique .....	155
6.6.8. La preuve de complétude .....	156
6.6.8.1. Introduction .....	156
6.6.8.2. Définitions préliminaires .....	156
6.6.8.3. Propriétés de clôture des ensembles maximaux consistants .	156
6.6.8.4. Equivalences remarquables .....	157
6.6.8.5. Lemme d'existence (Lemme de Lindenbaum) .....	158
6.6.8.6. Le modèle canonique .....	158
6.6.8.7. Lemme de dérivabilité .....	159
6.6.8.8. Lemme préparatoire à l'extension de la valuation des atomes aux formules .....	160
6.6.8.9. Le lemme d'extension de la valuation $V$ en $V'$ .....	161
6.6.8.10. Le théorème de complétude .....	162
6.6.8.11. Adéquation faible et adéquation forte .....	162
6.6.8.12. Application de la méthode de preuve par les modèles canoniques à d'autres systèmes .....	163
<b>Chapitre 7. Théorie des modèles. Deuxième partie</b> .....	165
7.1. Filtration et modèles finis .....	165
7.1.1. La filtration .....	165
7.1.2. Notions préliminaires .....	165
7.1.3. Théorème de préservation de la valuation .....	167
7.1.4. Préservation de la non-validité .....	168
7.1.5. La propriété du modèle fini (p.m.f.) .....	168
7.1.6. La propriété de la structure finie (p.s.f.) .....	169
7.1.7. Modèles finis, structures finies et décidabilité .....	169
7.2. La théorie de la correspondance .....	170
7.2.1. La traduction de la logique modale propositionnelle dans le calcul des prédicats .....	170
7.2.2. Conséquences de la possibilité de traduire la logique modale propositionnelle en logique du premier ordre .....	171
7.2.3. Limites de la traduction dans la logique du premier ordre .....	171
7.2.4. Comment établir un résultat de correspondance ? .....	172
7.2.5. L'algorithme de Sahlqvist-van Benthem .....	173
7.2.6. Notions préliminaires .....	173
7.2.7. La traduction en logique du deuxième ordre .....	174
7.2.8. L'instantiation minimale .....	174
7.2.9. Exemple d'application de l'algorithme .....	175
7.2.10. Justification de l'algorithme .....	176

7.2.11. Portée et limites de l'algorithme .....	177
7.3. Résultats de préservation .....	178
7.3.1. Les sous-modèles engendrés .....	178
7.3.2. Définitions préliminaires .....	178
7.3.3. Intérêt de la notion de modèle et de sous-modèle engendrés .....	179
7.3.4. Théorème de préservation pour les sous-modèles engendrés .....	179
7.3.5. Ultrafiltres et ultraproducts .....	180
7.3.6. Théorème de Loš .....	182
7.3.7. Autres résultats de préservation .....	182
<b>Chapitre 8. Théorie de la preuve pour la logique modale propositionnelle</b> .....	<b>185</b>
8.1. Introduction .....	185
8.2. Méthode de déduction naturelle .....	186
8.2.1. Les règles et notions nouvelles .....	186
8.2.2. Exemple de démonstration en déduction naturelle .....	188
8.3. La méthode des tableaux explicites .....	191
8.3.1. Définition .....	191
8.3.2. La preuve par tableaux explicites .....	191
8.3.3. Les règles d'élimination des opérateurs modaux .....	191
8.3.4. Règles duales .....	192
8.3.5. Tableau récapitulatif des règles .....	194
8.3.5.1. Règle alpha de prolongation .....	194
8.3.5.2. Règle bêta de ramification .....	194
8.3.5.3. Règle pi de possibilité .....	194
8.3.5.4. Règle nu de nécessité .....	194
8.3.6. Exemple de preuve dans K .....	195
8.3.7. Les règles qui diffèrent selon les systèmes modaux .....	195
8.3.8. La part du choix .....	196
8.3.9. Exemple de démonstration dans S4 .....	196
8.3.10. Tableaux avec prémisses locales et tableaux avec prémisses globales .....	197
8.4. La méthode des tableaux implicites .....	198
8.4.1. Le problème de la décision dans le calcul des propositions et dans le calcul des prédicats non modaux .....	198
8.4.2. Preuve constructive de la complétude .....	198
8.4.3. La méthode des tableaux implicites .....	199
8.4.4. La forme des règles dans la méthode des tableaux implicites .....	199
8.4.5. Les règles structurelles .....	200
8.4.6. La règle de coupure .....	200
8.4.7. Définitions préliminaires .....	200
8.4.8. Relâchement du principe de la sous-formule .....	202
8.4.9. La propriété de la sur-formule analytique .....	202
8.4.10. Restriction sur la coupure .....	203

8.4.11. Règles de réduction .....	203
8.4.12. Exemples de démonstration .....	204
8.5. Correction, complétude et décidabilité .....	205
8.5.1. Caractère non déterministe de la procédure .....	205
8.5.2. Preuve de la correction de R. Goré .....	206
8.5.3. La notion d'ensemble saturé vers le bas .....	207
8.5.4. Vue d'ensemble sur la preuve de complétude de R. Goré .....	209
8.5.5. La procédure de saturation vers le bas est effective .....	210
8.5.6. Construction du graphe de modèle .....	210
8.5.7. Lemme d'existence d'un modèle .....	210
8.6. La méthode des graphes cycliques orientés avec racine .....	212
8.7. La méthode des diagrammes .....	213
8.7.1. Le test de validité dans la logique classique .....	213
8.7.2. Le test des diagrammes pour $K$ .....	213
8.7.3. Le test des diagrammes pour $T$ .....	215
8.7.4. Le test des diagrammes pour $S4$ .....	216
8.7.5. Méthode de preuve par réfutation et méthode de décision .....	217
8.7.6. La méthode des tableaux pour la logique temporelle .....	218
8.7.7. Incomplétude de la logique temporelle linéaire du premier ordre .....	220
<b>Chapitre 9. Théorie des modèles et théorie de la preuve pour la logique modale quantifiée .....</b>	<b>221</b>
9.1. Introduction .....	221
9.1.1. La formule de Barcan et sa converse .....	223
9.1.2. Sémantique de la logique modale quantifiée avec domaine variable .....	223
9.1.3. Modèles falsificateurs pour la formule de Barcan .....	224
9.1.4. Modèle falsificateur pour la converse de la formule de Barcan .....	225
9.1.5. Les mérites respectifs des modèles avec domaine constant et des modèles avec domaines variables .....	226
9.1.6. Immersion de la sémantique à domaines variables dans la sémantique à domaine constant .....	227
9.1.7. Immersion de la sémantique à domaine constant dans la sémantique à domaines variables .....	227
9.1.8. Evaluation des deux types d'unification des sémantiques .....	228
9.1.9. Expression syntaxique de la monotonie et de l'antimonotonie .....	228
9.2. La preuve par tableaux en logique modale quantifiée .....	229
9.2.1. Règles de réduction pour les opérateurs modaux .....	229
9.2.2. Règles de réduction pour les quantificateurs .....	230
9.2.3. Exemple de démonstration en $QK$ .....	231
9.2.4. Exemple de non-théorème de $QK$ .....	231
9.3. Correction et complétude .....	232



9.3.1. Généralités .....	232
9.3.2. Extraction d'un modèle falsificateur .....	232
9.4. Logique modale quantifiée avec identité .....	233
9.4.1. Règles de réduction pour la logique de l'identité .....	235
9.5. La preuve de complétude de K quantifié avec identité .....	235
9.6. Logique modale quantifiée avec prédicat d'existence .....	236
9.7. La logique des termes singuliers en logique modale quantifiée .....	238
9.7.1. Le manque d'expressivité du formalisme standard .....	238
9.7.2. L'introduction des abstraits de prédicats .....	239
9.7.3. La syntaxe des abstraits de prédicats .....	240
9.7.4. La sémantique des termes et de la prédication à l'aide d'abstrais de prédicats .....	240
9.7.5. Les désignateurs rigides .....	241
9.7.6. Identité nécessaire et coréférentialité .....	242
9.8. L'argument du lance-pierres .....	242
9.8.1. Transparence et opacité .....	242
9.8.2. Contextes intensionnels .....	243
9.8.3. L'anéantissement des contextes intensionnels .....	244
9.8.4. Une version stylisée de l'argument du lance-pierres .....	244
9.8.5. Réfutation du lance-pierres .....	245
9.8.6. La réhabilitation de la logique modale quantifiée .....	245
9.8.7. Logique modale quantifiée et déduction naturelle .....	247
9.8.8. Implémentation de la logique modale quantifiée .....	247
<b>Chapitre 10. Introduction à l'intelligence artificielle .....</b>	<b>249</b>
10.1. Une définition naturelle de l'intelligence artificielle .....	250
10.1.1. Qu'est-ce qu'un comportement intelligent ? .....	250
10.1.2. Simuler un comportement intelligent .....	252
10.1.3. Intelligence artificielle et informatique .....	253
10.1.4. Le point de vue anthropomorphe .....	253
10.1.5. Intelligence et traitement de l'information .....	255
10.2. Une définition orientée de l'intelligence artificielle .....	258
10.2.1. Qu'est-ce qu'un programme ? .....	258
10.2.2. Qu'est-ce qu'un système intelligent ? .....	261
10.2.3. Les Tours de Hanoï .....	262
10.2.4. Nim .....	267
10.2.5. Echecs et Hexapion .....	268
10.3. Pour en savoir plus .....	271
<b>Chapitre 11. Principes de la programmation logique .....</b>	<b>273</b>
11.1. Concepts de base .....	273
11.1.1. Les termes .....	273
11.1.2. Faits et règles .....	276

11.1.3. Questions .....	278
11.2. Sémantique .....	280
11.2.1. Sémantique opérationnelle .....	280
11.2.2. Sémantique déclarative .....	284
11.3. Approche théorique de la programmation logique .....	285
11.3.1. La programmation logique propositionnelle .....	286
11.3.2. PROLOG propositionnel .....	290
11.4. Programmer en PROLOG .....	290
11.4.1. Listes, préfixes, suffixes, sous-listes et sous-ensembles .....	290
11.4.2. Machines abstraites et fonctions récursives .....	296
11.4.2.1. Automates .....	296
11.4.2.2. Fonctions récursives .....	299
11.4.3. Calcul symbolique .....	302
11.5. Pour en savoir plus .....	304
<b>12 Le langage PROLOG en intelligence artificielle .....</b>	<b>305</b>
12.1. Enigmes attribuables à Lewis Carroll .....	306
12.1.1. Un problème d'intelligence artificielle ? .....	307
12.1.2. Un programme de résolution en PROLOG .....	308
12.1.3. La classe de mathématiques .....	310
12.1.4. Les aléas de l'exploration .....	314
12.1.5. Une enquête de Sherlock Holmes .....	317
12.1.6. L'énoncé .....	318
12.1.6.1. Une solution directe .....	319
12.1.6.2. Une solution plus rapide .....	321
12.1.6.3. PROLOG comme outil de preuve .....	322
12.2. Une limitation importante .....	322
12.2.1. Un tri "orienté IA" .....	323
12.2.2. Vers un tri raisonnablement efficace .....	324
12.2.3. Approche directe du problème de tri .....	325
12.2.4. Le tri rapide .....	326
12.2.5. Le problème des partitions .....	326
12.2.6. Conclusion .....	329
12.3. Un exemple d'apprentissage .....	329
12.3.1. Introduction .....	329
12.3.1.1. Hexapion .....	329
12.3.1.2. Principe simple d'apprentissage .....	330
12.3.2. Le programme de jeu .....	330
12.3.2.1. Quelques mécanismes particuliers .....	330
12.3.2.2. Le principe du jeu .....	331
12.3.2.3. Les coups possibles .....	332
12.3.3. Le dialogue avec l'adversaire .....	333
12.3.3.1. Gestion de l'apprentissage .....	334
12.3.3.2. Prédicats auxiliaires supplémentaires .....	335

12.3.4. Exemples d'exécution .....	336
12.3.4.1. Première partie .....	336
12.3.4.2. Deuxième partie .....	338
12.3.4.3. Progression de l'apprentissage .....	338
12.3.4.4. Conclusion .....	340
12.4. Pour en savoir plus .....	341
<b>chapitre 13. Vérification assistée par ordinateur</b> .....	<b>343</b>
13.1. Introduction .....	343
13.2. Construction d'invariant .....	347
13.2.1. Une méthode théorique .....	347
13.2.2. Application : programme séquentiel .....	349
13.2.3. Application : programme parallèle .....	351
13.3. Construction de programme .....	354
13.3.1. Un protocole de transfert de données .....	355
13.3.1.1. La version initiale .....	355
13.3.1.2. Perte de messages .....	355
13.3.1.3. Plus de parallélisme .....	356
13.3.2. Le principe de la fenêtre de Stenning .....	358
13.3.2.1. L'idée générale .....	358
13.3.2.2. Le développement .....	359
13.3.3. Représentation des processus .....	360
13.3.3.1. Identification des processus .....	360
13.3.3.2. Communication asynchrone .....	361
13.3.4. Amélioration du parallélisme .....	363
13.3.5. Conclusion .....	363
13.4. Validation des conditions de vérification .....	363
13.4.1. Introduction .....	363
13.4.2. Propriétés structurelles des conditions de vérification .....	365
13.4.3. Le problème de la validation .....	367
13.4.4. Type, type réduit et polarité .....	367
13.4.5. Rang d'une sous-formule .....	368
13.4.6. Polarité et interpolation .....	369
13.4.7. Pertinence et règle d'élimination .....	370
13.4.8. La règle de connectivité .....	370
13.4.9. Un exemple .....	371
<b>Bibliographie</b> .....	<b>373</b>
<b>Index</b> .....	<b>389</b>