

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Université de BLIDA « SAAD DAHLAB »*

*Faculté des sciences de l'ingénieur*

*Département d'Aéronautique*



*Mémoire De Fin d'Etudes*

*En vue de l'Obtention du Diplôme Master 2 En Aéronautique*

*Option: Communication, Navigation et Surveillance /Air Trafic Management*

*Presenté par : KHEDIM Farid*

***Intitulé :***

# Commande LQG optimale d'un aéronef de type Airbus A300 avec tolérance de pannes

*Encadré par :*

***Dr. BENCHOUBANE Hacine***

**Devant le JURY composé de :**

Mr **L. BOUNATIRO** *Professeur* : U.BLI DA -Président

Mr **M. LAGHA** Maitre de conférences : U.BLI DA -Examineur

Mr **H. BENCHOUBANE** Maitre de conférences : U.BLI DA -Directeur de thèse

Mr **S. DILMI** Maitre assistant : U.BLI DA -Examineur

*Octobre 2012*



## ملخص :

مشروع تخرجنا يتلخص في دراسة لنظام لمراقبة وتقييم الأداء لسلوك طائرة من نوع Airbus- A300، لضمان نوعية الطيران عن طريق تطبيق فئتين من أنظمة التحكم الأوامر الخطية متعددة المتغيرات ونظام خطي تربيعي غاوسي (LQG) استناداً الى تقديرات المتغيرات بواسطة كالمان.

بعد التحصل على النموذج الرياضي غير الخطي التي تحكم حركة الطائرات ، وبعد تطبيق بعض النظريات التي تسمح بجعلها معادلة خطية ، يتم فصل هذا النموذج في نظامين من المعادلات الخطية.

ثم التوليف من الدرجة الثانية الأمر LQ (الخطية التربيعية) والبيان العملي لهذا الأسلوب يقدم توليفة من مقدر كالمان قبل دراسة مدى سيطرة نظام التحكم LQG للمؤثرات الخارجية والاختلالات في تعطل احد أنظمة التحكم في الطائرة.

كلمات دلالية : نظام تحكم الطائرات ، ونظام خطي تربيعي غاوسي ، النموذج الطولي الجانبي ، مرتفع كالمان.

## Abstract:

*Our final project study is to study a system of monitoring and evaluation of the performance behavior of an aircraft type Airbus A300, to meet the quality of flight by applying two classes of commands, order multivariable linear and linear quadratic Gaussian control (LQG) based on a Kalman estimator.*

*A mathematical description of the state space model airplane applied, has been developed. Thereafter, a linearization of the system was necessary to decouple the system and achieve the two sub-systems of linear equations represent the lateral and longitudinal movement.*

*Finally a simulation was developed to test the performance and robustness of the LQG control on our multivariate system to control the yaw and roll.*

**Keywords:** flight control, LQG, lateral, longitudinal movement, KALMAN Filter.

## Résumé :

*Notre projet de fin d'étude consiste à concevoir un système de contrôle et d'évaluation de performances du comportement d'un avion de type Airbus- A300, pour satisfaire la qualité du vol en lui appliquant deux classes de commandes, commandes linéaires multivariées et commande linéaire quadratique gaussienne (LQG) basée sur un estimateur de KALMAN.*



*Une description mathématique dans l'espace d'état du modèle avion appliqué, a été développée. Par la suite une linéarisation du système a été nécessaire afin de découpler le système et d'aboutir aux deux sous systèmes d'équations linéaires représentant le mouvement latéral et longitudinal.*

*Enfin une simulation a été développée pour tester les performances et la robustesse de la commande LQG sur le système multivariables afin de contrôler le roulis et le lacet dans deux cas :*

- *en présence des perturbations externes et*
- *une panne de rudder*

**Mots clés :** LQG, commande quadratique, contrôle, avion, filtre de KALMAN.



## Dédicace

*Au nom du DIEU clément et miséricordieux et que le salut de DIEU  
soit sur son prophète MOHAMMED*

*Rien n'est aussi beau qu'à offrir le fruit d'un labeur qu'on dédie Du  
fond du cœur à ceux qu'on aime et qu'on remercie en exprimant La  
gratitude et la reconnaissance durant toute notre existence.*

*Je dédie ce modeste travail à :*

*La lumière de ma vie et l'espoir de mon existence, source d'affectation  
de courage et d'inspiration qui a autant sacrifié pour me voir  
atteindre ce jour ... ma chère mère.*

*Celui qui rend tel que je suis et tel qu'il souhaite, source de respect, en  
témoignage de ma profonde reconnaissance pour tout l'effort et le  
soutien incessant qui m'a toujours apporté ... mon cher père .*

*Mes chères sœurs .*

*A tout la famille KHEDIM et BEDIAF*

*Mes chers amis : Hafid ,Fethallah, Abdelhak, , Salah et Mustapha...*

*A tout mes collègues et amis pour les quels je souhaite une vie pleine de  
joie et de réussite.*

*Je remercie enfin tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans  
l'accomplissement de ce travail.*

*Et à tous ceux qui me connaissent...*

**Walid**

# REMERCIEMENT

*Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

*Je tiens à assurer de mes sincères et totales gratitudes et de mes profondes reconnaissances mon promoteur de thèse Dr H. BENCHOUBANE, Je tiens à le remercier pour m'avoir initié ce travail de recherche et ses directives et qui m'a apporté son soutien scientifique et académique. Merci également pour son encadrement qui a contribué au bon déroulement de cette thèse. Un grand merci également pour avoir corrigé attentivement tous les articles envoyés en dernière minute.*

*Je tiens à remercier vivement Messieurs Smain DILMI pour son aide, sa générosité et la grande patience dont il a su faire preuve malgré ses charges professionnelles. Merci également pour ses excellentes directives.*

*Je remercie madame DOUDOU pour son soutien permanent et ses conseils constructifs.*

*Je remercie tous les enseignants du département de l'aéronautique en particulier Mme KHLIFA et Dr MEGUELATI.*

*J'adresse ma reconnaissance à M. MADI, enseignant du Département d'Automatique de l'université de BLIDA. Je remercie vivement M JARRI contrôleur au sein de AIR ALGERIE ou j'ai effectué mon stage de fin de cycle pour son l'accueil chaleureux et agréable, et son soutien et son gentillesse. Ainsi que Mr TATA technicien supérieur à AIR ALGERIE*

*Je remercie les membres du jury qui ont accepté de juger et d'évaluer ce travail Professeur BOUNATIRO LOTH et Dr LAGHA MOHAND.*

*Un grand merci à mes parents et à mes amis pour leur soutien permanent.*

*Mes remerciements vont également à toutes les personnes, nombreuses, avec les quelles j'ai discuté à l'occasion de certains cours.*

*Je n'aurai pas pu réaliser cette thèse sans avoir acquis un certain niveau de connaissances, je tiens à exprimer mes reconnaissances envers tous les enseignants du département d'aéronautique DAB.*

*Enfin, je tiens également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

KHEDIM FARID

# TABLE DES MATIERES

Abstract	
Remerciement	
Table des matieres	
Liste des figure	
Nomenclature	
Introduction generale .....	1
<b>CHAPITRE I MODELISATION .....</b>	<b>5</b>
Introduction .....	5
I-1 Le modele mathematique de vol d'un avion rigide :.....	6
I-1-1 Triedes de reference:.....	6
I-1-1-1 Definitions.....	6
I-2-1-2 POSITIONS RELATIVES DES TRIEDRES ET MATRICES DE PASSAGE .....	7
a) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion .....	7
b) Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre .....	8
c) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre .....	9
I-2-2 Equations du mouvement relative a un systeme d'axe lie a l'avion :.....	9
I-2-2-1 Principes mécanique du vol .....	9
I-2-2-2 Equations cinématique.....	10
I-2-2-3 Equation dynamique .....	12
I-2-3 Developpement des équations du mouvement suivant un systeme d'axe fixe .....	15
I-2-3-2 Etudes des forces et des moments extérieurs .....	17
a) La force de pesanteur.....	17
b) La force aérodynamique .....	17
c) Les forces de propulsion.....	17
d) Le moment des forces aérodynamique .....	17
I-2-5 Equations générales des petits perturbations .....	18
a) Forces.....	20
b) Moments.....	22
I-2-6 Application sur un avion de transport de type airbus A300 .....	28
I-2-6-1 Les caractéristiques d'un AIRBUS A300 .....	28
I-2-7 Simulation en boucle ouverte .....	29

# TABLE DES MATIERES

a) le mouvement latéral .....	30
b) le mouvement longitudinal .....	34
INTERPRETATION .....	38
CONCLUSION .....	38
<b>CHAPITRE II :COMMANDES LINEAIRES DES SYSTEMES MULTIVARIABLE.....</b>	<b>40</b>
Introduction .....	40
II-1. Commande lineaire par retour d'etat .....	40
II-1.1 Calcul la loi de commande .....	40
II-1.3. Calcul la loi de commande en presence de perturbations .....	42
SIMULATION ET INTERPRTITAIONS .....	42
II-2 commande lineaire par retour d'etat avec action integrale .....	50
II-2.1 Détermination de la loi de commande .....	50
II-2.3 Calcul la loi de commande en presence de perturbations .....	51
II-2.4 simulation et interprtitaisons .....	51
Conclusion .....	59
<b>CHAPITRE III COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE OPTIMALE .....</b>	<b>60</b>
Introduction .....	60
III.1.1 Stratégies de la Commande Linéaires Quadratiques Optimale .....	61
III.1.2 Problèmes de Régulateur Quadratique Linéaire .....	62
III.1.3 Conception d'observateur .....	63
III.2 Le filtre de Kalman .....	65
III .3 Théorème de séparation .....	67
<b>CHAPITRE IV RESULTATS ET INTERPRETATION :.....</b>	<b>.....</b>
Resultats et interpretation: .....	71
Conclusion .....	83
Conclusion generale et perspectives.....	84
Bibliographie .....	85
Annexes A .....	a
Annexes B .....	d
Annexes C .....	f

## NOMENCLATURE

$a$ : Vitesse de son	$\theta$ : L'assiette (angle de tangage)
$a_{X,k}$ : Accélération cinématique suivant $X_B$	$\lambda$ : Gradient de température
$a_{Y,k}$ : Accélération cinématique suivant $Y_B$	$\omega$ : Fréquence angulaire
$a_{Z,k}$ : Accélération cinématique suivant $Z_B$	$\omega_n$ : Fréquence propre
$A_X$ : Force spécifique au centre c.g suivant $X_B$	$\Omega$ : Fréquence spatiale
$A_Y$ : Force spécifique au centre c.g suivant $Y_B$	A : Matrice d'état des systèmes linéaires.
$A_Z$ : Force spécifique au centre c.g suivant $Z_B$	B : Matrice d'action des commandes
$\bar{D}$ : Traînée	C : Matrice d'état de sortie de système linéaire
$F_X$ : Force totale suivant $X_B$	D : Matrice de commande de sortie du système
$F_Y$ : Force totale suivant $Y_B$	
$F_Z$ : Force totale suivant $Z_B$	
L : Moment de roulis total.	
$\bar{L}$ : Portance aérodynamique totale	
$\chi$ : Nombre de Mach	
R : Constante spécifique de l'air	
T : Température ambiante	
$T_t$ : Température totale	
u : Vitesse linéaire suivant OX	
v : Vitesse linéaire suivant OY	
w : Vitesse linéaire suivant OZ	
V : Vitesse totale de l'avion (vraie)	
W : Poids de l'avion	
$X_a$ : Force aérodynamique suivant l'axe $X_B$	
$X_p$ : Force propulsive suivant l'axe $X_B$	
$Y_a$ : Force aérodynamique suivant l'axe $Y_B$	
$Y_p$ : Force propulsive suivant l'axe $Y_B$	
$Z_a$ : Force aérodynamique suivant l'axe $Z_B$	
$Z_p$ : Force propulsive suivant l'axe $Z_B$	

S : Surface de reference	$\alpha$ : Angle d'incidence
$S_l$ : Surface de l'empenage	$\beta$ : Angle de dérapage
c : Corde areodynamique	$\theta$ : Angle d'assiette
$\bar{c}$ : Corde areodynamique moyenne	$\gamma$ : La pente aérodynamique
$C_l$ : Coefficient de moment de roulis	$\psi$ : Angle d'azimut
$C_m$ : Coefficient de moment de tangage	$\theta$ : Assiette longitudinalle
$C_n$ : Coefficient de moment de lacet	$\phi$ : Angle de gite
$C_x$ : Coefficient de force de trainée	Q : States weighting matrix of LQR.
$C_y$ : Coefficient de force de portance	R : Inputs weighting matrix of LQR.
$C_z$ : Coefficient de force latérale	K : Full-state feedback gain matrix of LQR.
b : Envergure	P : State transition matrix of LQR
$K_n = h_n - h$ : Marge statique	
H : Altitude de l'avion	
h : altitude pression	
m : Masse de l'avion totale	
g : force de Pesanteur	
$I_x, I_y, I_z$ : Moments d'inertie suivant les axes X, Y, Z	
$J_{xy}$ : Produits d'inertie suivant les axes X, Y	
$J_{xz}$ : Produits d'inertie suivant les axes X, Z	
$J_{yz}$ : Produits d'inertie suivant les axes Y, Z	
$\rho$ : Densité de l'air	
$\mu$ : Coef de viscosité	
M : Moment de tangage totale	
$M_a$ : Masse moleculaire de l'air	
$M_0$ : Masse moleculaire de l'air au niveau de la mer	
$\delta_a$ : Braquage des ailerons	
$\delta_e$ : Braquage de gouverne de profondeur	
$\delta_r$ : Braquage de gouverne de direction	
$\delta_f$ : Deflexion des volets	
p : Vitesse angulaire de roulis	
q : Vitesse angulaire de tangage	
r : Vitesse angulaire de lacet	

## LISTE DES FIGURES

- Figure I.1- position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion.
- Figure I.2 position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre
- Figure I.3-trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre
- Figure. (1.0) Carte Pôle-zéro du système en boucle ouverte.
- Figure. (1.1) : Réponse du système latérale à un échelon sur rudder ( $u_r$  =échelon)
- Figure. (1.2) : Réponse du système latérale à un échelon sur ailerons ( $u_a$  =échelon)
- Figure. (1.3) : Réponse du système latérale à un échelon ( $u_a, u_r$  =échelon)
- Figure. (1.4) : Réponse du système latérale à une impulsion sur  $u_r$  (rudder)
- Figure. (1.5) : Réponse du système latérale à une impulsion sur les ailerons ( $u_a$  ailerons )
- Figure. (1.6) : Réponse du système latérale à une impulsion sur  $u_a, u_r$  (ailerons+rudder)
- Figure. (1.7) : Réponse du système longitudinale à une impulsion sur  $u_m$
- Figure. (1.8) : Réponse du système longitudinale à un échelon sur  $u_m$
- Figure II.a : model espace d'état en boucle ouverte
- Figure II.b :Schéma synoptique de commande par retour d'état
- Figure (II.1.1) Commande par retour d'état avec placement de pole 1
- Figure (II.1.2) Commande par retour d'état avec placement de pole 2
- Figure (II.1.3) Commande par retour d'état avec placement de pole 3
- Figures (II.1.4) Commande à retour d'état avec perturbations externes d'amplitude =1°
- Figure (II.1.5) Commande par retour d'état avec perturbation d'amplitude =5°
- Figure II.c : Schéma synoptique de commande par retour d'état avec action integrale
- Figure (II.2.1) Commande à retour d'état avec action integral par placement de pole 4
- Figure(II.2.2) Commande a retour d'état avec action integral par placement de pole 5
- Figure(II.2.3) Commande à retour d'état avec action integral par placement de pole 6
- Figures (II.2.4) Commande à retour d'état avec action integral avec perturbation d'amplitude 0.1°.
- Figures (II.2.5) Commande à retour d'état avec action integral avec perturbations d'amplitude de 5°.
- Figure : III.1 Séquence aléatoire de 1000 points avec une distribution gaussienne de moyenne zéros et s.d=1
- Figure. III.a Filtre de Kalman
- Figure III.b : Structure de commande de LQG.
- Figure (IV.1) LQG et estimateur kalman sans perturbation avec pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

## LISTE DES FIGURES

Figure (IV.2) : LQG et estimateur kalman sans perturbation avec pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

Figure (IV.3) LQG et kalman sans perturbation avec pondération  $Q_2$  et  $R_2$ , angle  $\beta$

Figure (IV.4) LQG et kalman sans perturbation avec pondération  $Q_2$  et  $R_2$ , angle  $\Phi$

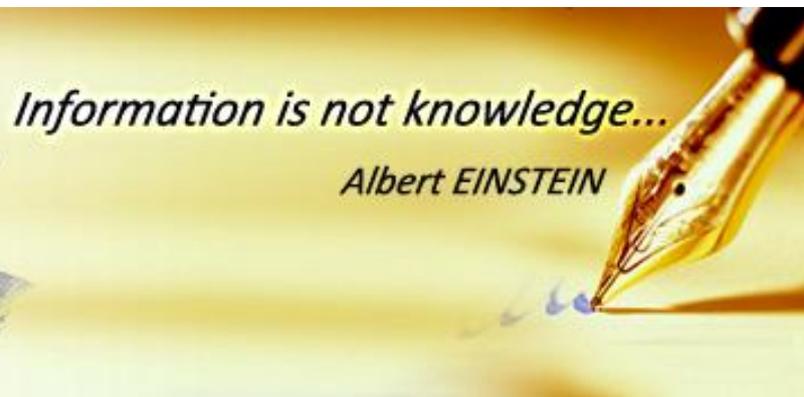
Figure (IV.5) LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

Figure (IV.6) : LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

Figure (IV.7) LQG avec perturbation de variance  $10^{-3}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

Figure (IV.8) LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-3}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

Figure (IV.9) simulation de Blocage de Rudder avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$



*Information is not knowledge...*

*Albert EINSTEIN*

## INTRODUCTION GENERALE

L'Automatique consiste en l'étude des systèmes réels des différentes disciplines scientifiques (Electronique, mécanique, thermique, chimie, écologie, biologie, économie, sociologie, physique, cosmologie...) , en vue de l'analyse, de la prédiction, de la surveillance, de la commande, et / ou de l'optimisation des systèmes. La condition nécessaire pour cela est l'obtention d'un modèle mathématique du système réel (on réalise une modélisation). Un système est un objet dans lequel des variables de différents types interagissent et produisent des signaux observables. Lorsque le modèle du système n'est pas connu, il est nécessaire de procéder à son identification.

Il y a eu au moins cinq étapes distinctes dans le développement du sujet du model-basé des systèmes de commande. Premiers travaux à côté de Nyquist [28], Bode [29] et Nichols [30] a été concerné par des méthodes de conception de réponse en fréquence pour les systèmes (scalaires) à sortie unique à entrée unique. L'importance des pôles et des zéros est devenue évidente tôt dans le développement du sujet et la technique de lieu de racine a été développée par Evans dans 1948 [31]. Des marges de gain et de phase ont été appliquées largement comme mesures de la qualité de la conception et ont donné une indication de la robustesse de stabilité. Les principes de base étaient et sont toujours employés dans la conception classique. La technique de conception de Bode s'est avérée pour avoir les propriétés inhérentes de robustesse, quoique ceux-ci n'aient pas été soulignés jusqu'à ce que le travail postérieur de Horowitz [32].

L'approche de réponse en fréquence à la commande optimale et au filtrage, présenté par Norbert Wiener [33], n'était pas nécessairement robuste. L'approche s'est concentrée sur la minimisation du désaccord des signaux plutôt que la minimisation des fonctions qui ont déterminé des propriétés de robustesse. La méthode de conception par la construction n'a pas assuré la stabilité asymptotique du système en circuit fermé. L'annulation instable de pôles-zéro, entre le contrôleur et système, a pu donc se produire. Le système résultant est naturellement instable en ce cas. La période des deux guerres mondiales a fourni l'impulsion pour la croissance forte de la théorie moderne dite de commande. Dans le tôt 1960 ceci a stimulé l'élaboration de nouvelles méthodes de conception de commande. Il y avait naturellement beaucoup d'autres influences et besoins de tous les secteurs d'industrie ce qui a aidé le développement de nouvelles techniques de commande, mais la commande optimale et

l'évaluation ont été en particulier encouragées par les applications dans l'espace. Les contributions les plus significatives étaient par Kalman [34] qui a présenté l'approche de l'«espace d'état» à la théorie optimale de commande et de filtrage. Dans cette deuxième étape du développement on a assumé que les modèles de système sont connus exactement (comme les procédures de solution de Wiener).

Dans la troisième étape du développement de théorie de commande, l'attention s'est tournée vers la conception des systèmes multivariables par des méthodes de conception de domaine de fréquence. Ainsi, des prolongements des techniques classiques scalaires de réponse en fréquence pour les systèmes (MIMO) à sorties multiples à entrées multiples ont été développés par Rosenbrock [35], MacFarlane [36] et Mayne [37]. Bien que Rosenbrock ait considéré les conceptions à haut niveau d'intégration qui pourraient faire face à la dégradation de gain de boucle, ces techniques n'ont pas fourni des méthodes formelles d'améliorer la robustesse face à modeler des incertitudes.

La quatrième étape dans la conception des systèmes a été concernée par produire des procédures robustes de conception et la majeure partie de l'attention a été impliquée de la prétendue philosophie de conception  $H_\infty$ . L'approche par Zames [28,38] robuste permise à traiter bien plus directement que d'autres procédures d'optimisation. Le travail a considéré certaines des questions de base de la théorie classique de commande et a attiré immédiate une attention. La robustesse était naturellement toujours une issue dans la conception, mais Zames a su qu'une approche plus scientifique était nécessaire pour la conception incertaine des systèmes. Cette méthode a permis à des ingénieurs d'exploiter des perspicacités classiques de conception de réponse en fréquence en utilisant une technique qui peut être mise en application dans les environnements assistés par ordinateur de conception de système de commande. Ainsi, on a permis des incertitudes pour dedans un cadre rigoureux de conception avec les avantages des perspicacités classiques de conception et formel d'un procédé de conception. La théorie quantitative de rétroaction de Horowitz a également fourni un itinéraire à la conception robuste de commande qui était particulièrement réussie avec ceux qui a aimé la conception classiquement basée non optimal met en scène. Cette méthodologie est simple pour employer pour à sortie unique à entrée unique (SISO) et elle fournit une compréhension des vraies questions d'incertitude qui manque souvent dans des méthodes de base de  $H_\infty$ . Malheureusement il est difficile d'employer des procédures normalisées formelles de conception, en particulier pour le cas (MIMO) à sorties multiples à entrées multiples, mais il fait participer une communauté d'utilisateur forte et commise. La cinquième et courante étape

des mensonges de développement dans l'application réussie des méthodes de contrôle modernes, qui est étroitement liée aux problèmes dans la conception non-linéaire de systèmes de commande. Progrès significatives ont été accomplis dans le développement des techniques optimales de commande pour les systèmes non-linéaires et dans l'évaluation d'exécution et les méthodes benchmarking pour de vraies applications.

La décennie suivante devrait voir des développements continus dans l'application des techniques avancées aux systèmes incertains, multivariables et non-linéaires les plus provocants, où la commande améliorée peut fournir l'exécution significative ou les avantages économiques. Par exemple, l'avion de chasse moderne entreprennent des manœuvres bonnes en dehors de la dynamique linéaire de vol, afin de réaliser tactiques des avantages. La commande non-linéaire est donc essentielle dans certaines applications. Il y a eu beaucoup d'applications de commande optimale prédictive ou les prétendues méthodes de contrôle prédictives modèle-model-basé dans de vraies applications et versions non-linéaires sont actuellement en cours de développement pour des applications de système de processus et de fabrication. Là développe également l'intérêt pour la commande des systèmes dits hybrides, qui peuvent comporter une combinaison des machines d'état fini et des systèmes dynamiques. Un problème hybride typique de commande surgit dans des ordres de démarrage ou d'arrêt de commande de turbine à gaz, où un mélange de prise de décision logique et de commande continue est exigé [39].

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse visent essentiellement à concevoir un système de contrôle et d'évaluation de performances du comportement d'un avion de type Airbus- A300, pour satisfaire la qualité du vol en lui appliquant deux classes de commandes :

- Commandes linéaires multivariables et
- Commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) basée sur un estimateur de KALMAN.

Une description mathématique dans l'espace d'état du modèle avion appliqué, a été développée. Par la suite une linéarisation du système a été nécessaire afin de découpler le système et d'aboutir aux deux sous systèmes d'équations linéaires représentent le mouvement latéral et longitudinal.

Enfin une simulation a été développée pour tester les performances et la robustesse de la commande LQG sur notre système multivariables afin de contrôler le roulis et le lacet.

CHAPITRE I.

# MODELISATION



# I. MODELISATION

## **Introduction:**

Pendant plusieurs années les développeurs ont eu un intérêt particulier sur La sécurité et la stabilité des avions en vol c'est un des sujets de recherche importants en aéronautique civil. En effet, le développement d'une modélisation mathématique traduisant le comportement de l'avion est une phase préliminaire indispensable, tout comme l'établissement de lois de commande pour aider à l'analyse et à la conception des avions, sont des objectifs importants afin d'assurer une meilleure sécurité aux phases critiques de décollage et atterrissage ainsi que d'améliorer le confort des passagers. [2]

Pour comprendre ou commander un système il est souvent très utile de le modéliser puis d'identifier les paramètres inconnus éventuels du modèle sur la base de mesures effectuées sur le système. Le modèle ainsi obtenu sert, pendant l'exploitation du système, à prévoir ou surveiller son comportement, voire à modifier ce dernier, auquel cas il faut souvent faire appel de nouveau à des techniques d'estimation

La modélisation mathématique générale du vol de l'avion a été développée depuis de nombreuses années à partir des équations de la mécanique du vol, Ces modèles mathématiques sont utilisés pour anticiper des événements ou des situations (des conditions de vol équilibré et perturbé ...etc.), l'étude mathématique ou les simulations informatiques de ces représentations nous informant sur le comportement du système.

En préambule, rappelons les concepts des repères et de force, indispensables pour comprendre la mécanique du vol ensuite, les équations générales du mouvement vont être développées en décrivant toutes les forces qui agissent sur un avion (forces aérodynamiques, forces de propulsion et des moments).

## **I-1 LE MODELE MATHEMATIQUE DE VOL D'UN AVION RIGIDE :**

### **I-1-1 TRIEDRES DE REFERENCE:**

#### **I-1-1-1 DEFINITIONS:**

Trois trièdres références sont utilisés pour le mouvement le plus général de l'avion.

- a) Un trièdre lié à la terre:  $Ox_0y_0z_0$  Un trièdre lié à la terre (supposé plat et immobile)

La position dans l'espace d'un objet mobile est a priori définie dans un repère "fixe", c'est-à-dire lié à la terre. L'origine "O" est fixe par rapport à la terre. L'axe  $Oz_0$  est orienté suivant la verticale descendante. Les axes  $Ox_0$  et  $Oy_0$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisis dans le plan horizontal. Ce trièdre est appelé trièdre normal terrestre.

b) Un trièdre lié à l'avion supposé indéformable :  $Oyz$  Ce trièdre est rigidement lié l'appareil (avion). L'origine "O" de ce trièdre est un point fixe de l'avion supposé être le centre de gravité. Les axes  $Ox$  et  $Oz$  sont deux directions rectangulaires arbitrairement choisis dans le plan de symétrie de l'avion. L'axe  $Ox$  est porté par le fuselage de l'avion orienté positivement de l'arrière vers le nez de l'avion. L'axe  $Oz$  normal à  $Ox$  et L'axe  $Oy$  complète le trièdre.

Ce trièdre est utilisé pour exprimer les forces de propulsions et l'expression des moments.

- c) Un trièdre lié à la vitesse, dit trièdre aérodynamique:  $Ox_a y_a z_a$

L'origine est un point fixe de l'avion généralement le même que l'origine du trièdre avion.

L'orientation des axes de ce trièdre aérodynamique n'est pas liée "rigidement" à l'avion mais à la vitesse. L'axe  $Ox_a$  est porté par la vitesse et orienté positivement dans le sens de la vitesse. L'axe  $Oz_a$  est perpendiculaire à  $Ox_a$  situé dans le plan de symétrie de l'avion. L'axe  $Oy_a$  complète le trièdre. Le repère aérodynamique est souvent utilisé pour exprimer les forces et les coefficients aérodynamiques.

#### **I-2-1-2 POSITIONS RELATIVES DES TRIEDRES ET MATRICES DE PASSAGE :**

- a) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion :

IL faut en général trois angles pour définir la position d'un trièdre par rapport à un autre. Dans le cas qui nous intéresse ici, deux angles suffisent puisque l'axe  $Oz_0$  est situé par définition dans le plan de symétrie.

- L'angle d'incidence est l'angle de l'axe  $Ox$  avec le plan  $Ox_a$  et  $Oy_a$  du trièdre aérodynamique.
- L'angle de dérapage est l'angle de l'axe  $Ox_a$  avec le plan de symétrie  $Oxz$  de l'avion.

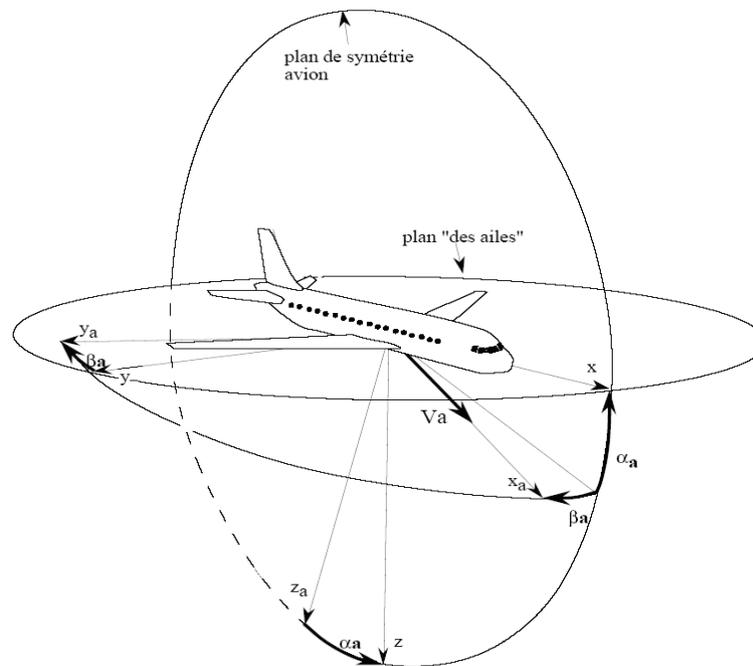


Figure I.1- position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre avion.

Matrice de passage d'un trièdre aérodynamique à un trièdre avion :  $[T]$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \quad \text{Ou,} \quad T = \begin{bmatrix} \cos r \cos s & -\cos r \sin s & -\sin r \\ \sin s & \cos s & 0 \\ \sin r \cos s & -\sin r \sin s & \cos r \end{bmatrix} \quad \dots (1.a)$$

b) Position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre :

La position du trièdre avion  $Oxyz$  peut être repérée par rapport au trièdre terrestre par plusieurs systèmes d'angles d'Euler. En définit trois rotations successives:

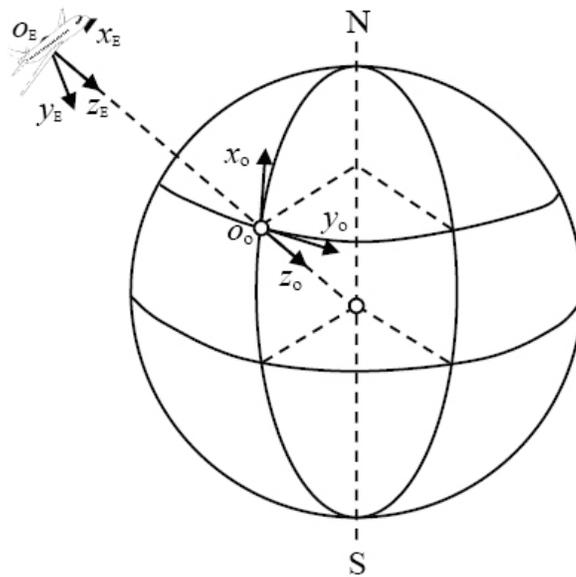


Figure I.2 position du trièdre avion par rapport au trièdre normal terrestre

Rappelons aussi des angles d'Euler sont choisis de façon à permettre une mémorisation simple de la construction du vecteur rotation instantané, nécessaire à l'étude de la cinématique de l'avion. Les angles  $\Psi, \Theta, \Phi$  sont l'angle d'azimut, d'assiette longitudinale et d'angle de gîte respectivement.

Matrice de passage d'un trièdre avion à un trièdre normal terrestre :  $[R]$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1.b)$$

$$\text{Où } R = \begin{bmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & \sin \Psi \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \cos \Psi \sin \Theta \sin \Phi - \sin \Psi \cos \Phi & \cos \Psi \cos \Phi + \sin \Psi \sin \Theta \sin \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \sin \Phi + \cos \Psi \sin \Theta \cos \Phi & \sin \Psi \sin \Theta \cos \Phi - \cos \Psi \sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \dots (1.c)$$

c) Position du trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre :

La position du trièdre aérodynamique  $Ox_a y_a z_a$  par rapport au trièdre normal terrestre  $Ox_0 y_0 z_0$  est exprimée par un système de trois angles d'Euler :

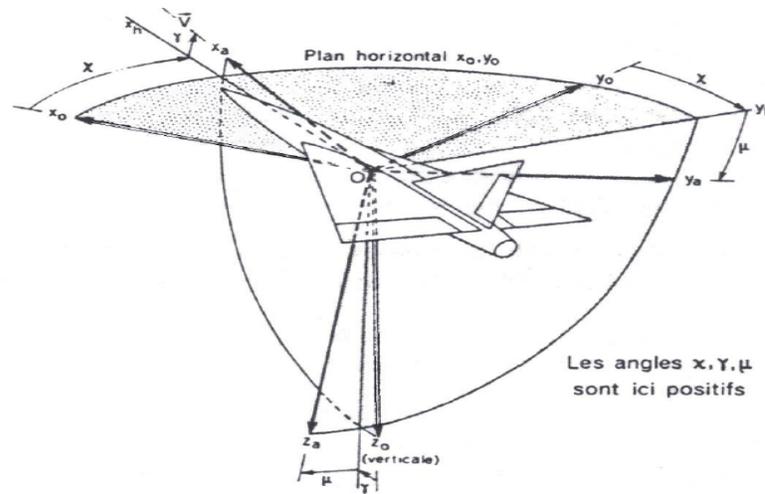


Figure I.3-trièdre aérodynamique par rapport au trièdre normal terrestre

Les angles  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\mu$  sont les angles d'azimut aérodynamique, de pente aérodynamique et angle de gîte aérodynamique respectivement.

Matrice de passage d'un trièdre aérodynamique à un trièdre normal terrestre :  $[R']$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} = [R'] \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(1.d)$$

$$\text{Où } [R'] = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \gamma \sin \mu - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma \cos \mu + \sin \alpha \cos \gamma \sin \mu & \cos \gamma \sin \mu \\ \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \cos \mu & \sin \alpha \sin \gamma \cos \mu - \cos \alpha \sin \gamma & \cos \gamma \cos \mu \end{bmatrix} \dots(1.e)$$

## I-2-2 EQUATIONS DU MOUVEMENT RELATIVE A UN SYSTEME

### D'AXE LIE A L'AVION :

#### I-2-2-1 Principes mécanique du vol :

Toute action d'un pilote humain ou automatique sur les gouvernes modifie, par suite du changement de géométrie du véhicule, les moments des forces aérodynamiques, ce qui provoque une rotation de l'appareil autour du centre de gravité. Ce changement d'attitude par rapport à la vitesse engendre alors une modification en grandeur et en direction des forces aérodynamiques et

entraîne, par conséquent, des modifications de la vitesse et de la courbure de la trajectoire. Celle-ci peut être également modifiée par les forces de propulsion. En mécanique du vol classique, l'avion est considéré comme un corps solide soumis à trois types de forces extérieures: la pesanteur, les forces aérodynamiques et les forces de propulsion. L'application à ce corps des deux théorèmes fondamentaux de la mécanique rationnelle (quantité de mouvement et moment cinétique) fournit le système des équations dynamiques qui régissent les variations du vecteur vitesse et du vecteur rotation, auxquelles on associe les équations cinématiques de la trajectoire et de l'attitude. Ces équations ne sont qu'exceptionnellement envisagées en totalité, car la plupart des mouvements s'accommodent d'une réduction importante du nombre des variables à considérer, qui est adaptée chaque fois au problème traité. (Voir annexe modélisation).

### I-2-2-2 EQUATIONS CINEMATIQUE :

Considérons un trièdre Pxyz en mouvement par rapport au trièdre fixe Oxyz et M un point de coordonnées x y z dans le trièdre mobile Pxyz :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \Lambda \vec{PM} \dots\dots\dots(1.1)$$

Soient  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  les vecteur unitaires des axes Px Py Pz .

$$\text{Avec : } \vec{\Omega} = p \vec{i} + q \vec{j} + r \vec{k} \dots\dots\dots(1.2)$$

La position relative du trièdre avion Oxyz par rapport au trièdre fixe terrestre  $Ox_0y_0z_0$  est définie par les trois angles  $\Psi, \Theta$  et  $\Phi$  . En reprenant la définition des angles  $\Psi, \Theta, \Phi$  , une rotation  $\vec{\Psi}$  s'effectue autour de l'axe  $Oz_0$  une rotation  $\Theta$  autour de l'axe  $Oy_h$  et une rotation  $\Phi$  autour de l'axe  $Ox$  . Par conséquent :

avec :  $\vec{i}$  vecteur unitaire de l'axe  $Ox$   $\Omega = \dot{\Phi} \vec{i} + \dot{\Theta} \vec{j}_h + \dot{\Psi} \vec{k}_0 \dots\dots\dots(1.3)$

$\vec{j}_h$  est le vecteur unitaire de l'axe  $Oy_h$

$\vec{k}_0$  est le vecteur unitaire de l'axe  $Oz_0$

La matrice de transformation R permet d'écrire :(Voir figure I.2)

$$\vec{k}_0 = -\sin \Theta \vec{i} + \cos \Theta \sin \Phi \vec{j} + \cos \Theta \cos \Phi \vec{k} \dots\dots\dots(1.4)$$

$$\vec{j}_h = \cos \Phi \vec{j} - \sin \Phi \vec{k} \dots\dots\dots(1.5)$$

Remplaçant les expressions (1.4) et (1.5) dans (1.3) on aura :

$$\Omega = (-\dot{\Psi} \sin \Theta + \dot{\Phi}) \vec{i} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi) \vec{j} + (\dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi) \vec{k} \dots\dots\dots(1.6)$$

Ainsi, par identification les composantes de dans le référentiel avion s'écrivent

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\Psi} \sin \Theta + \dot{\Phi} \\ \dot{\Psi} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Theta} \cos \Phi \\ \dot{\Psi} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Theta} \sin \Phi \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1.7)$$

ou bien, sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \Theta \\ 0 & \cos \Phi & \cos \Theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \Theta \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\Theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

On peut déduire Les relations inverses alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\Phi} = p + tg \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \quad (1.8.a) \\ \dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi \quad (1.8.b) \dots\dots\dots(1.8) \\ \dot{\Psi} = \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \Theta} \quad (1.8.c) \end{array} \right.$$

### I-2-2-3 EQUATION DYNAMIQUE :

L'étude de la stabilité dynamique de l'avion s'appuie sur la théorie linéarisée des petits mouvements autour d'un régime de vol. Les six degrés de liberté sont tous considérés, mais la linéarisation et les symétries conduisent à un découplage entre, d'une part, la dynamique longitudinale qui régit le mouvement de tangage, l'incidence et la vitesse et, d'autre part, la dynamique laterale qui concerne les mouvements de roulis, de lacet et de dérapage. Dans les deux cas, l'analyse permet d'établir les fonctions de transfert de l'avion, qui sont nécessaires à l'étude

Des hypothèses simplificatrices appropriées au type de problème que l'on cherche à traiter sont nécessaires a fin d'entamer cette étude puisque l'avion est un système dynamique complexe, difficile à aborder, Il est soumis à des forces externes très variables, dépendant à la fois de sa trajectoire, de son attitude, de ses déformations et de l'action de la pesanteur terrestre. Il n'est pas nécessaire de prendre en compte simultanément tous les facteurs régissant le mouvement de l'avion.

➤ Hypothèse 1 :

La terre est supposé plate et fixe dans l'espace comme une référence inertielle dans laquelle les lois de Newton de mouvement sont valides et l'atmosphère supposé fixe à la terre en négligeant ainsi l'accélération due à la courbure de la terre qui assume par conséquent la terre pour être une armature à inertie (Galiléen), où les lois de newton sont applicables.

➤ Hypothèse 2

L'avion est assimilé à un corps rigide (la distance entre deux points quelconques de ce corps est invariante).

➤ Hypothèse 3

Dans cette étude la masse totale de l'avion est supposé constante avec le temps  $\frac{dm}{dt} = 0$ .

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un corps rigide, on obtient les équations différentielles de NEWTON suivantes :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma F_e \\ \frac{d\vec{h}}{dt} = \Sigma M_e \end{cases} \dots\dots\dots(1.9)$$

Où  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  représente l'accélération du centre de gravité de l'avion par rapport à un système de référence galiléen.  $\vec{h}$  représente le moment cinétique de l'avion autour du centre de gravité.  $\Sigma F_e$  représente la résultante des forces extérieures agissant sur l'avion (force de pesanteur  $m \vec{g}$ , forces aérodynamique  $\vec{F}_A$ , force de propulsion  $\vec{F}_T$ ).

$\Sigma M_e$  est le moment résultant des différentes forces agissant sur l'avion (moment des forces aérodynamique et moment des forces de propulsion).

• **Calcul de l'accélération et de la dérivée du moment cinétique :**

La matrice de transformation T permet d'écrire les composantes u, v, w de la vitesse  $\vec{v}$  dans le trièdre avion sachant que les composantes de la vitesse (V, 0,0) de trièdre aérodynamique par définition :

$$\begin{cases} u = V \cos S \cos \Gamma \\ v = V \sin S \\ w = V \cos S \sin \Gamma \end{cases} \dots\dots\dots (1.10)$$

Alors l'expression des forces deviennent :

$$\begin{aligned} F_x = \frac{d}{dt} m u &= m \vec{g}_x + \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Tx} & \Sigma L = d h_x / dt &= A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} \\ F_y = \frac{d}{dt} m v &= m \vec{g}_y + \vec{F}_{Ay} + \vec{F}_{Ty} & \Sigma M = d h_y / dt & \\ F_z = \frac{d}{dt} m w &= m \vec{g}_z + \vec{F}_{Az} + \vec{F}_{Tz} & \Sigma N = d h_z / dt & \end{aligned} \dots\dots\dots (1.11)$$

En utilisant un élément de masse m qui tourne avec une vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ , on peut développer l'expression des moments cinétique représentées dans (1.12)

Le moment de quantité de mouvement élémentaire de l'élément m est donné par :

$$d\vec{h} = \vec{R} \wedge \vec{v} dm \dots\dots\dots (1.12)$$

La vitesse de cette élément dans un corps rigide rotationnel est donné par :

$$\vec{v} = \vec{v}_c + \vec{\Omega} \wedge \vec{R} \dots\dots\dots (1.13)$$

Où  $\vec{R}$  est le rayon vecteur issu du centre de gravité de l'avion pour positionner cette élément de masse m, et  $\vec{v}_c$  est le vecteur vitesse du centre de gravité de l'avion. Par suite on a :

$$d\vec{h} = \vec{R} \wedge dm \vec{v}_c + \vec{R} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) \dots\dots\dots (1.14)$$

En intégrant l'équation (1.14) sur toute la masse de l'avion donc le moment cinétique résultant de l'avion est:

$$\vec{h} = \int_m \vec{R} \wedge dm \vec{v}_c + \int_m \vec{R} \wedge dm (\vec{\Omega} \wedge \vec{R}) \dots \dots \dots (1.15)$$

→  
 $V_c$  est constant par rapport à la sommation et puisque c est le centre de gravité de l'avion et donc :  $\int_m \vec{R} dm = \vec{0}$

L'équation (1.15) devient :

$$\vec{h} = \int_m (\vec{R} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{R})) dm = \int_m (\Omega \vec{R}^2 - \vec{R} (\vec{R} \wedge \vec{\Omega})) dm \dots \dots \dots (1.16)$$

Les composantes scalaires de cette équation sont suivant les axes: tenant compte que p,q et r étant indépendant de la masse d'où :

$$\begin{aligned} h_x &= p \int (y^2 + z^2) dm - q \int (xy) dm - r \int (xz) dm \\ h_y &= q \int (x^2 + z^2) dm - p \int (xy) dm - r \int (yz) dm \dots \dots \dots (1.17) \\ h_z &= r \int (x^2 + y^2) dm - p \int (xz) dm - q \int (yz) dm \end{aligned}$$

par ailleurs si A,B,C sont respectivement les moments d'inertie ( $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}$ ) et D,E,F sont les produits d'inertie de l'avion respectivement  $I_{yz}, I_{xz}, I_{xy}$  par rapport aux axes avion Oxyz , le moment cinétique h à partir l'équation (1.17) devient :

Sur l'axe Ox	$h_x = Ap - Fq - Er$
Sur l'axe Oy	$h_y = -Fp + Bq - Dr \dots \dots \dots (1.18)$
Sur l'axe Oz	$h_z = -Ep - Dq + Cr$

Du fait que le plan Oxy est le plan de symétrie autrement dit les produit d'inertie

$$I_{yz} = I_{xy} = 0 \quad (D=F=0).$$

Et à l'aide des hypothèses précédentes (1.2et3) les équations décrivent le mouvement sont alors :

$\Sigma L = dh_x / dt = Ap - Fq - Er$	$\Sigma F_x = \frac{d}{dt} mu$	
$\Sigma M = dh_y / dt = -Fp + Bq - Dr$	ET $\Sigma F_y = \frac{d}{dt} mv \dots \dots \dots (1.19)$	
$\Sigma N = dh_z / dt = -Ep - Dq + Cr$	$\Sigma F_z = \frac{d}{dt} mw$	

Les vitesses et les moments cinétique sont représentées par rapport au trièdre avion, qui est le système de coordonnées xyz rotationnel (non inertiel), d'où les lois de Newton définies par avant ne peuvent pas être appliquées. d'où la nécessité de passer à un système d'axe fixe.

### I-2-3 DEVELOPPEMENT DES EQUATIONS DU MOUVEMENT SUIVANT UN SYSTEME D'AXE FIXE :

L'accélération mesurée dans un système d'axe fixe est donnée par :

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{x_0 y_0 z_0} = \left. \frac{d\vec{v}_c}{dt} \right|_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v} \dots \dots \dots (1.20)$$

$\vec{\Omega}$  Voir (1.2), et  $\vec{v}$  peut être écrite sous la forme de ses composantes :

$$\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k} \dots \dots \dots (1.21)$$

Où 
$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

u, v et w sont les composantes de vecteur vitesse  $\vec{v}$  et p, q et r celles de  $\vec{\Omega}$

Donc : 
$$\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \vec{i} (qw - vr) + (\vec{j} (ur - wp) + (\vec{k} (vp - uq))$$

L'expression de la résultante des forces extérieures s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m (\dot{u} + qw - vr) \\ \sum F_y &= m (\dot{v} + ur - wp) \dots \dots \dots (1.22) \\ \sum F_z &= m (\dot{w} + vp - uq) \end{aligned}$$

De la même manière, La variation du moment cinétique en fonction du temps dans un axe fixe s'écrit :

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{x_0 y_0 z_0} = \left. \frac{dh}{dt} \right|_{xyz} + \vec{\Omega} \wedge \vec{h} \quad \vec{\Omega} \wedge \vec{h} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

On aura :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{h} = \vec{i} (qh_x - rh_y) + \vec{j} (rh_x - ph_z) + \vec{k} (ph_y - qh_x) \dots\dots\dots(1.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_x}{dt} &= A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} \\ \frac{dh_y}{dt} &= -F \dot{p} + B \dot{q} - D \dot{r} \dots\dots\dots (1.24) \\ \frac{dh_z}{dt} &= -E \dot{p} - D \dot{q} + C \dot{r} \end{aligned}$$

Prenant en considération que le système d'axe choisi est lié à l'avion et tenant compte les hypothèses précédentes les expressions résultantes du moment s'écrivent :

$$\begin{aligned} L &= \frac{dh_{x0}}{dt} = A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} + qr(C - B) - p(Fr - qE) + D(r^2 - q^2) \\ M &= \frac{dh_{y0}}{dt} = B \dot{q} - D \dot{r} - F \dot{p} + pr(A - C) + E(p^2 - r^2) + q(Dp - Fr) \dots\dots\dots (1.25) \\ N &= \frac{dh_{z0}}{dt} = C \dot{r} - E \dot{p} - D \dot{q} + pq(B - A) + r(Eq - Dp) + F(q^2 - p^2) \end{aligned}$$

En écrivant que les dérivées des coordonnées x,y,H ou (H=-Z<sub>g</sub>) du centre de gravité sont égales à u<sub>g</sub>, v<sub>g</sub>, -w<sub>g</sub> ou u<sub>g</sub>, v<sub>g</sub>, w<sub>g</sub> sont les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}$  sur le trièdre terrestre en utilisant la matrice de passage R) il vient :

$$\dot{x} = u_g = u \cos\Psi \cos\Theta + v(-\sin\Psi \cos\Phi + \cos\Psi \sin\Theta \sin\Phi) + w \sin\Psi \sin\Phi + \cos\Psi \sin\Theta \cos\Phi \dots\dots\dots(1.26)$$

$$\dot{y} = v_g = u \sin\Psi \cos\Theta + v(\cos\Psi \cos\Phi + \sin\Psi \sin\Theta \sin\Phi) + w(-\cos\Psi \sin\Phi + \sin\Psi \sin\Theta \cos\Phi) \dots\dots\dots(1.27)$$

$$\dot{H} = -w_g = u \sin\Theta - v \cos\Theta \sin\Phi - w \cos\Theta \cos\Phi \dots\dots\dots(1.28)$$

### I-2-3-2 ETUDES DES FORCES ET DES MOMENTS EXTERIEURS :

Nous venons de voir l'expression des premiers membres de l'équation de NEWTON étudiant maintenant les seconds membres (forces et moments extérieures).

#### a) La force de pesanteur :

$\vec{m} \vec{g}$  est portée par l'axe Oz<sub>0</sub>, d'après la matrice R les composantes du poids  $\vec{m} \vec{g}$  dans le trièdre avion Oxyz sont :

$$\begin{aligned}
 \text{suivant l'axe } O_x: & \quad - mg \sin\Theta \\
 \text{suivant l'axe } O_y: & \quad mg \cos\Theta \sin\Phi \dots\dots\dots(1.29) \\
 \text{suivant l'axe } O_z : & \quad mg \cos\Theta \cos\Phi
 \end{aligned}$$

L'angle d'azimute n'intervient pas dans cette équation, car on a la supposé que la terre est plate dans l'hypothese1.

**b) La force aérodynamique :**

a pour composantes par définition des coefficients  $C_x, C_y, C_z$  :

$$\begin{aligned}
 \text{suivant l'axe } O_x : & \quad \frac{1}{2} \dots SV^2 C_x \\
 \text{suivant l'axe } O_y : & \quad \frac{1}{2} \dots SV^2 C_y \dots\dots\dots (1.30) \\
 \text{suivant l'axe } O_z : & \quad \frac{1}{2} \dots SV^2 C_z
 \end{aligned}$$

**c) Les forces de propulsion :**

Ont pour composantes  $F_{Tx}, 0, F_{Tz}$  (nous supposons ce qui est généralement le cas que les forces de propulsion n'ont pas de composante perpendiculaire au plan de symétrie).

**d) Le moment des forces aérodynamique :**

a pour composantes par définition des coefficients  $C_\ell, C_m$  et  $C_n$  :

$$\begin{aligned}
 \text{suivant l'axe } O_x : & \quad \frac{1}{2} \dots S\ell V^2 C_\ell \\
 \text{suivant l'axe } O_y : & \quad \frac{1}{2} \dots S\ell V^2 C_m \dots\dots\dots (1.31) \\
 \text{suivant l'axe } O_z : & \quad \frac{1}{2} \dots S\ell V^2 C_n
 \end{aligned}$$

*Remarque\_:*

Les forces aérodynamiques et les forces de propulsion dépendent entre autre de la masse volumique de l'air ... . La loi de Laplace d'équilibre de l'atmosphère et la loi de Mariotte-Gay Lussac (l'air est supposé comme un gaz parfait) .

D'une vu mathématique, les équations cinématique (1.8), des forces (1.22) et des moments (1.25) composent neuves équations différentielles avec neuves variables :

Les composantes de la vitesse (u,v,w), la vitesse angulaire (p,q,r) et les angles d'Euler ( $\Psi, \Theta, \Phi$ ).

### I-2-5 EQUATIONS GENERALES DES PETITS MOUVEMENTS :

Le modèle décrivant le comportement de l'avion est ainsi résumé par les neuves équations ci-après. En soustrayant des équations générales du mouvement (1.8), (1.11) (1.25) et (1.28) régissant  $\Phi, \Theta, u, v, w, p, q, r, H$

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} &= q \cos \Phi - r \sin \Phi \\ \dot{\Phi} &= p + \operatorname{tg} \Theta (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \\ m(\dot{u} + qw - vr) &= X - mg \sin \Theta \\ m(\dot{v} + ur - wp) &= Y + mg \cos \Theta \sin \Phi \\ m(\dot{w} + vp - uq) &= Z + mg \cos \Theta \cos \Phi \\ \dot{H} &= u \sin \Theta - \hat{v} \cos \Theta \sin \Phi - w \cos \Theta \cos \Phi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum L &= A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + qr(C - B) - p(Fr - qE) + D(r^2 - q^2) \\ \sum M &= B\dot{q} - D\dot{r} - F\dot{p} + pr(A - C) + E(p^2 - r^2) + q(Dp - Fr) \\ \sum N &= C\dot{r} - E\dot{p} - D\dot{q} + pq(B - A) + r(Eq - Dp) + F(q^2 - p^2)\end{aligned}$$

Les équations d'équilibre sont:

$$\left. \begin{aligned}q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0 &= 0 \\ p_0 + \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) &= 0 \\ v_0 \sin \chi_0 = u_0 \sin \Theta_0 - v_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - w_0 \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \\ m(q_0 w_0 - r_0 v_0) &= X_0 - mg \sin \Theta_0 \\ m(r_0 u_0 - p_0 w_0) &= Y_0 + mg \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 \\ m(p_0 v_0 - q_0 u_0) &= Z_0 + mg \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \\ L_0 &= (C - B)q_0 r_0 + p_0 (Fr_0 - Eq_0) + D(r_0^2 - q_0^2) \\ M_0 &= (A - C)r_0 p_0 + q_0 (Dp_0 - Fr_0) + E(p_0^2 - r_0^2) \\ N_0 &= (B - A)p_0 q_0 + r_0 (Eq_0 - Dp_0) + F(q_0^2 - p_0^2)\end{aligned} \right\} \dots (1.32)$$

Et en considérant les variables

$$\begin{aligned}\bar{\Phi} &= \Phi - \Phi_0 \\ \bar{\Theta} &= \Theta - \Theta_0 & \bar{p} &= p - p_0 \\ \bar{u} &= u - u_0 & \bar{q} &= q - q_0 \\ \bar{v} &= v - v_0 & \bar{r} &= r - r_0 \\ \bar{w} &= w - w_0 \\ \bar{H} &= H - H_0\end{aligned}$$

Comme des premiers ordres par rapport aux valeurs de  $\Theta_0, \Phi_0, p_0, q_0, r_0, u_0, v_0, w_0$  les équations régissant les variables  $\bar{\Phi}, \bar{\Theta}, \bar{H}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$  s'écrivent (en tenant compte de ce que  $v_0$  est nul). [1]

$$\left. \begin{aligned}\dot{\bar{\Theta}} &= -\bar{\Phi}(q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0) + \bar{q} \cos \Phi_0 - \bar{r} \sin \Phi_0 \\ \dot{\bar{\Phi}} &= \bar{\Theta} \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos^2 \Theta_0} + \text{tg} \Theta_0 (q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0) \bar{\Phi} + \bar{p} + \sin \Phi_0 \text{tg} \Theta_0 \bar{q} + \cos \Phi_0 \text{tg} \Theta_0 \bar{r}\end{aligned}\right\} \quad (1.33)$$

$$\left. \begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \frac{X - X_0}{m} - g \cos \Theta_0 \bar{\Theta} + r_0 \bar{v} - q_0 \bar{w} - w_0 \bar{q} \\ \dot{\bar{v}} &= \frac{Y - Y_0}{m} - g \sin \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} + g \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \bar{\Phi} - r_0 \bar{u} + p_0 \bar{w} + w_0 \bar{p} - u_0 \bar{r} \\ \dot{\bar{w}} &= \frac{Z - Z_0}{m} - g \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \bar{\Theta} - g \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 \bar{\Phi} + q_0 \bar{u} - p_0 \bar{v} + u_0 \bar{q}\end{aligned}\right\} \quad (1.34)$$

$$\left. \begin{aligned}A \dot{\bar{p}} - F \dot{\bar{q}} - E \dot{\bar{r}} &= L - L_0 + \bar{p}(Eq_0 - Fr_0) + \bar{q}((B - C)r_0 + Ep_0 + 2Dq_0) + \bar{r}((B - C)q_0 - Fp_0 - 2Dr_0) \\ B \dot{\bar{q}} - D \dot{\bar{r}} - F \dot{\bar{p}} &= M - M_0 + \bar{q}(Fr_0 - Dp_0) + \bar{r}((C - A)p_0 + Fq_0 + 2Er_0) + \bar{p}((C - A)r_0 - Dq_0 - 2Ep_0) \\ C \dot{\bar{r}} - E \dot{\bar{p}} - D \dot{\bar{q}} &= N - N_0 + \bar{r}(Dp_0 - Eq_0) + \bar{p}((A - B)q_0 + Dr_0 + 2Fp_0) + \bar{q}((A - B)p_0 - Er_0 - 2Fq_0)\end{aligned}\right\} \quad (1.35)$$

$$\dot{\bar{H}} - V_0 \sin \chi = \bar{\Theta}(w_0 \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 + u_0 \cos \Theta_0) + \bar{\Phi} w_0 \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 + \bar{u} \sin \Theta_0 - \bar{v} \cos \Theta_0 \sin \Phi_0 - \bar{w} \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \dots (1.37)$$

par ailleurs les variables auxiliaires  $v$ , et sont liée à  $\bar{u}, \bar{v}$  et  $\bar{w}$  par

$$\left. \begin{aligned}\bar{u} &= \bar{v} \cos \Gamma_0 - v_0 \sin \Gamma_0 \bar{r} \\ \bar{v} &= V_0 \bar{S} \\ \bar{w} &= \bar{V} \sin \Gamma_0 + V_0 \cos \Gamma_0 \bar{r}\end{aligned}\right\} \dots (1.38).$$

$$\left. \begin{aligned}\bar{v} &= \cos \Gamma_0 \bar{u} + \sin \Gamma_0 \bar{w} \\ \bar{r} &= \frac{\cos \Gamma_0 \bar{w} - \sin \Gamma_0 \bar{u}}{V_0} \\ \bar{S} &= \frac{\bar{v}}{V_0}\end{aligned}\right\} \dots (1.39).$$

Il est enfin utile de faire intervenir les variations du nombre de mach

$$\bar{M} = \bar{V} / \bar{a} \quad (\bar{a} = V_0 / a_0)$$

$$\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0} = \frac{\bar{V}}{V_0} \frac{a_0}{\bar{a}}$$

Comme  $a = \sqrt{\gamma r T}$  et  $T = T_0 - kH$  (en atmosphère standard  $T_0 = 288.15$  et  $k = 6.5 \cdot 10^{-3}$  au dessous de 11000 m et  $T_0 = 216.65$  et  $k = 0$  entre 11000 et 20000m)

Il vient 
$$\bar{M} = \bar{V} \frac{\bar{a}_0}{V_0} + \frac{k}{2 T_0} \bar{H}$$

$$\bar{M} = \frac{\bar{a}_0}{V_0} (\cos \Gamma \bar{u} + \sin \Gamma \bar{w}) + \frac{k}{2 T_0} \bar{H}$$

Calculons maintenant les variations des six composantes du système de forces.

a) **Force** : les équations de force suivant les trois axes sont données par :

$$\left. \begin{aligned} X - X_0 &= \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_x - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_x^0 + (F - F_0) \cos \tilde{S} \\ Y - Y_0 &= \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_y - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_y^0 \\ Z - Z_0 &= \frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_z - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_z^0 + (F - F_0) \sin S \end{aligned} \right\} \dots (1.40)$$

$$\frac{1}{2} \rho_0 S V^2 C_i - \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_i^0 = \frac{1}{2} \rho_0 S V_0^2 C_i^0 \left[ 2 C_i^0 \frac{\bar{V}}{V_0} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_i^0 \bar{H} + \bar{C}_i \right] \dots (1.41)$$

$$F - F_0 = \frac{\partial F}{\partial V} \bar{V} + \frac{\partial F}{\partial H} \bar{H} + \frac{\partial F}{\partial \delta_x} \bar{\delta}_x \dots (1.42)$$

Or rappelons que  $(C_x = -C_{x_a}, C_y = +C_{y_a}, C_z = -C_{z_a})$

$$\left. \begin{aligned} C_x &= -\cos \Gamma \cos S C_x - \cos \Gamma \sin S C_y + \sin \Gamma C_z \\ C_y &= -\sin S C_x + \cos S C_y \\ C_z &= -\sin \Gamma \cos S C_x - \sin \Gamma \sin S C_y - \cos \Gamma C_z \end{aligned} \right\} \dots (1.43)$$

$$D'o\grave{u} \quad \begin{cases} C_x^0 = -\cos \alpha_0 C_x^0 + \sin \alpha_0 C_z^0 \\ C_y^0 = 0 \\ C_z^0 = -\sin \alpha_0 C_x^0 - \cos \alpha_0 C_z^0 \end{cases} \dots\dots\dots(1.44)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_X &= C_{Xu} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{Xv} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{Xw} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{Xp} \frac{\bar{p}\ell}{V_0} + C_{Xq} \frac{\bar{q}\ell}{V_0} + C_{Xr} \frac{\bar{r}\ell}{V_0} + C_{XH} \bar{H} + C_{X\delta\ell} \bar{\delta\ell} + C_{X\delta m} \bar{\delta m} + C_{X\delta n} \bar{\delta n} \\ \bar{C}_Y &= C_{Yu} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{Yv} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{Yw} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{Yp} \frac{\bar{p}\ell}{V_0} + C_{Yq} \frac{\bar{q}\ell}{V_0} + C_{Yr} \frac{\bar{r}\ell}{V_0} + C_{YH} \bar{H} + C_{Y\delta\ell} \bar{\delta\ell} + C_{Y\delta m} \bar{\delta m} + C_{Y\delta n} \bar{\delta n} \\ \bar{C}_Z &= C_{Zu} \frac{\bar{u}}{V_0} + C_{Zv} \frac{\bar{v}}{V_0} + C_{Zw} \frac{\bar{w}}{V_0} + C_{Zp} \frac{\bar{p}\ell}{V_0} + C_{Zq} \frac{\bar{q}\ell}{V_0} + C_{Zr} \frac{\bar{r}\ell}{V_0} + C_{ZH} \bar{H} + C_{Z\delta\ell} \bar{\delta\ell} + C_{Z\delta m} \bar{\delta m} + C_{Z\delta n} \bar{\delta n} \end{aligned} \right\} (1.45)$$

Nous supposons ici que les coefficients a\u00e9rodynamique ne d\u00e9pendent pas de  $\dot{r}$  et  $\dot{s}$ .

Autrement dit, nous n\u00e9gligeons les ph\u00e9nom\u00e8nes d'a\u00e9rodynamique instationnaire, (Les forces a\u00e9rodynamique ne d\u00e9pendent que du champ de vitesse instantan\u00e9 et non pas de sa variation instantan\u00e9).

$$\begin{aligned} C_{Xu} &= -\sin \Gamma_0 C_{Xr}^0 + \sim_0 \cos \Gamma_0 C_X^0 \sim & C_{Xv} &= C_{Xs}^0 \\ C_{Zu} &= -\sin \Gamma_0 C_{Zr}^0 + \sim_0 \cos \Gamma_0 C_Z^0 \sim & C_{Yv} &= C_{Ys}^0 \\ C_{Yv} &= -\sin \Gamma_0 C_{Yr}^0 + \sim_0 \cos \Gamma_0 C_Y^0 \sim & C_{Zv} &= C_{Zs}^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{Yw} &= \cos \Gamma_0 C_{Yr}^0 + \sim_0 \sin \Gamma_0 C_Y^0 \sim & C_{XH} &= \frac{k}{2} \frac{\sim_0}{T_0} C_X \sim \\ C_{Xw} &= \cos \Gamma_0 C_{Xr}^0 + \sim_0 \sin \Gamma_0 C_X^0 \sim & C_{YH} &= \frac{k}{2} \frac{\sim_0}{T_0} C_Y \sim \\ C_{Zw} &= \cos \Gamma_0 C_{Zr}^0 + \sim_0 \sin \Gamma_0 C_Z^0 \sim & C_{ZH} &= \frac{k}{2} \frac{\sim_0}{T_0} C_Z \sim \end{aligned}$$

$$C_{Xr}^0 = \sin r_0 (C_X^0 + C_{Zr}^0) + \cos r_0 (C_Z^0 - C_{Xr}^0)$$

avec :  $t = p, q$  ou  $r$  et

$$C_{Xs}^0 = \sin r_0 C_{Zs}^0 - \cos r_0 C_{Xs}^0$$

$$C_{Yr}^0 = C_{Yr}^0$$

$$C_{Xt}^0 = \frac{\partial C_X}{\partial \frac{t\ell}{V_0}} \quad C_{Zt}^0 = \frac{\partial C_Z}{\partial \frac{t\ell}{V_0}}$$

$$C_{Ys}^0 = C_{Ys}^0 - C_X^0$$

$$C_{Zr}^0 = \sin r_0 (C_Z^0 - C_{Xr}^0) - \cos r_0 (C_{Zr}^0 + C_X^0)$$

$$C_{Zs}^0 = -\sin r_0 C_{Xs}^0 - \cos r_0 C_{Zs}^0$$

et :  $i = \ell, m, n$

$$C_{X\sim}^0 = -\cos r_0 C_{X\sim}^0 + \sin r_0 C_{Z\sim}^0$$

$$C_{Y\sim}^0 = C_{Y\sim}^0$$

$$C_{Z\sim}^0 = -\cos r_0 C_{Z\sim}^0 - \sin r_0 C_{X\sim}^0$$

$$C_{Xt} = -\cos r_0 C_{Xt}^0 + \sin r_0 C_{Zt}^0$$

$$C_{Yt} = C_{Yt}^0$$

$$C_{Zt} = -\cos r_0 C_{Zt}^0 - \sin r_0 C_{Xt}^0$$

$$C_{Xui} = -\cos r_0 C_{Xui}^0 + \sin r_0 C_{Zui}^0$$

$$C_{Yui} = C_{Yui}^0$$

$$C_{Zui} = -\cos r_0 C_{Zui}^0 - \sin r_0 C_{Xui}^0$$

### b) Moments :

La variation de l'une des trois composantes L, M, N peut s'écrire : ( $R_F$  est la composante du moment de la poussée sur le même axe).

Les trois équations de moment s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} A \dot{p} - F \dot{q} - E \dot{r} &= L_u \bar{u} + L_v \bar{v} + L_w \bar{w} + L_p \bar{p} + L_q \bar{q} + L_r \bar{r} + L_H \bar{H} + L_{ux} \bar{u}_x + L_{u\ell} \bar{u}_\ell + L_{um} \bar{u}_m + L_{un} \bar{u}_n \\ B \dot{q} - D \dot{r} - F \dot{p} &= M_u \bar{u} + M_v \bar{v} + M_w \bar{w} + M_p \bar{p} + M_q \bar{q} + M_r \bar{r} + M_H \bar{H} + M_{ux} \bar{u}_x + M_{u\ell} \bar{u}_\ell + M_{um} \bar{u}_m + M_{un} \bar{u}_n \\ C \dot{r} - E \dot{p} - D \dot{q} &= N_u \bar{u} + N_v \bar{v} + N_w \bar{w} + N_p \bar{p} + N_q \bar{q} + N_r \bar{r} + N_H \bar{H} + N_{ux} \bar{u}_x + N_{u\ell} \bar{u}_\ell + N_{um} \bar{u}_m + N_{un} \bar{u}_n \end{aligned} \right\} (1.46)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned}
 L_p &= \frac{1}{2} \rho_0 S \ell^2 V_0 C_{LP}^0 + E q_0 - F r_0 \\
 L_q &= \frac{1}{2} \rho_0 S \ell^2 V_0 C_{Lq}^0 + (B - C) r_0 + E p_0 + 2 D q_0 \\
 L_r &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Lr}^0 + (B - C) q_0 + E p_0 + 2 D r_0 \\
 M_p &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{MP}^0 + (C - A) r_0 - D q_0 - 2 E p_0 \\
 M_q &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Mq}^0 + F r_0 - D p_0 \\
 M_r &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Mr}^0 + (C - A) p_0 + F q_0 + 2 E r_0 \\
 N_p &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Np}^0 + (A - B) q_0 - D r_0 - 2 F p_0 \\
 N_q &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Nq}^0 + (A - B) p_0 - E r_0 - 2 F q_0 \\
 N_r &= \frac{1}{2} \dots_0 S \ell^2 V_0 C_{Nr}^0 + D p_0 - E q_0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.47)$$

Ces trois équations se mettent sous la forme

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\bar{p}} &= \} _u \bar{u} + \} _v \bar{v} + \} _w \bar{w} + \} _p \bar{p} + \} _q \bar{q} + \} _r \bar{r} + \} _H \bar{H} + \} _{ux} \bar{u}_x + \} _{ul} \bar{u}_l + \} _{um} \bar{u}_m + \} _{un} \bar{u}_n \\
 \dot{\bar{q}} &= \sim _u \bar{u} + \sim _v \bar{v} + \sim _w \bar{w} + \sim _p \bar{p} + \sim _q \bar{q} + \sim _r \bar{r} + \sim _H \bar{H} + \sim _{ux} \bar{u}_x + \sim _{ul} \bar{u}_l + \sim _{um} \bar{u}_m + \sim _{un} \bar{u}_n \\
 \dot{\bar{r}} &= v_u \bar{u} + v_v \bar{v} + v_w \bar{w} + v_p \bar{p} + v_q \bar{q} + v_r \bar{r} + v_H \bar{H} + v_{ux} \bar{u}_x + v_{ul} \bar{u}_l + v_{um} \bar{u}_m + v_{un} \bar{u}_n
 \end{aligned} \right\} \dots (1.48)$$

Les  $\} _i, \sim _i, v_i$  sont liée aux coefficients  $L_i, M_i, N_i$  par

$$\left. \begin{aligned}
 \} _i &= [L_i(BC - D^2) + M_i(CF + DE) + N_i(FD + BE)] / \Delta \\
 \sim _i &= [M_i(CA - E^2) + N_i(AD + EF) + L_i(DE + CF)] / \Delta \\
 v_i &= [N_i(AB - F^2) + L_i(BE + FD) + M_i(EF + AD)] / \Delta
 \end{aligned} \right\} \dots (1.49)$$

Ou bien sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \} \\ u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} BC - D^2 & CF + DE & BE + FD \\ CF + DE & CA - E^2 & AD + EF \\ BE + FD & AD + EF & AB - F^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{Bmatrix}$$

avec :

$$\Delta = ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 - 2DEF$$

$$\begin{aligned} B_{31} &= QC_{xu\ell} \ell & B_{51} &= QC_{Zu\ell} \ell \\ B_{32} &= QC_{xum} & B_{41} &= QC_{yu\ell} \ell & B_{52} &= QC_{Zum} \\ B_{33} &= QC_{xun} & B_{42} &= QC_{yum} & B_{53} &= QC_{Zun} \\ B_{34} &= \frac{\cos\%_0}{m} \frac{\partial F}{\partial u_x} & B_{43} &= QC_{yun} & B_{54} &= \frac{\sin\%_0}{m} \frac{\partial F}{\partial u_x} \end{aligned}$$

et  $i = u, v, w, p, q, r, \dot{H}^*, u_x, u_\ell, u_m, u_n$

Les neuf variables  $(\bar{\Phi}, \bar{\Theta}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}, \bar{H})$  sont donc régies par un système de neuf équations que l'on peut décrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\Theta}} \\ \dot{\bar{\Phi}} \\ \dot{\bar{u}} \\ \dot{\bar{v}} \\ \dot{\bar{w}} \\ \dot{\bar{p}} \\ \dot{\bar{q}} \\ \dot{\bar{r}} \\ \dot{\bar{H}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{17} & A_{18} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 1 & A_{27} & A_{28} & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} & A_{39} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} & A_{49} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} & A_{59} \\ 0 & 0 & \lambda_u & \lambda_v & \lambda_w & \lambda_p & \lambda_q & \lambda_r & \lambda_H \\ 0 & 0 & \mu_u & \mu_v & \mu_w & \mu_p & \mu_q & \mu_r & \mu_H \\ 0 & 0 & v_u & v_v & v_w & v_p & v_q & v_r & v_H \\ A_{91} & A_{92} & A_{93} & A_{94} & A_{95} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Theta} \\ \bar{\Phi} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \\ \bar{H}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & 0 \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} \\ \lambda_{\delta\ell} & \lambda_{\delta m} & \lambda_{\delta n} & \lambda_{\delta x} \\ \mu_{\delta\ell} & \mu_{\delta m} & \mu_{\delta n} & \mu_{\delta x} \\ v_{\delta\ell} & v_{\delta m} & v_{\delta n} & v_{\delta x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\ell \\ \delta_m \\ \delta_n \\ \delta_x \end{bmatrix} = 0 \dots (1.5)$$

Avec :  $\dot{H}^* = \dot{H} - V_0 \sin \chi_0 \dots (1.51)$

et  $\begin{cases} A_{12} = -q_0 \sin \Phi_0 - r_0 \cos \Phi_0 \\ A_{17} = \cos \Phi_0 \\ A_{18} = -\sin \Phi_0 \end{cases} \dots (1.52)$

et avec 
$$Q = \frac{1}{2} \dots S V_0^2 / m \quad \dots (1.53)$$

$$\begin{cases} A_{21} = \frac{q_0 \sin \Phi_0 + r_0 \cos \Phi_0}{\cos^2 \Theta_0} \\ A_{22} = \operatorname{tg} \Theta_0 (q_0 \cos \Phi_0 - r_0 \sin \Phi_0) \\ A_{27} = \sin \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \\ A_{28} = \cos \Phi_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \end{cases} \quad \dots (1.54)$$

$$\begin{cases} A_{31} = -g \cos \Theta \\ A_{33} = \frac{Q}{V_0} \left[ 2C_x^0 \cos \alpha_0 - C_{x\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{x\mu}^0 \mu_0 \cos \alpha_0 \right] + \frac{1}{m} \cos \alpha_0 \cos \varpi \frac{\partial F}{\partial V} \\ A_{34} = \frac{Q}{V_0} C_{x\beta}^0 + r_0 \\ A_{35} = \frac{Q}{V_0} \left[ 2C_x^0 \sin \alpha_0 - C_{x\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{x\mu}^0 \mu_0 \sin \alpha_0 \right] + \frac{1}{m} \cos \alpha_0 \cos \varpi \frac{\partial F}{\partial V} \\ A_{36} = \frac{Q \ell}{V_0} C_{xp}^0 \\ A_{37} = \frac{Q \ell}{V_0} C_{xq}^0 - w_0 \\ A_{38} = \frac{Q \ell}{V_0} C_{xr}^0 \\ A_{39} = Q \left[ \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dH} C_x^0 + C_{x\mu}^0 \frac{k}{2} \frac{\mu_0}{T_0} \right] + \frac{1}{m} \cos \varpi \frac{\partial F}{\partial H} \end{cases} \quad \dots (1.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{41} = -g \sin \Phi_0 \sin \Theta_0 \\
 A_{42} = g \cos \Theta_0 \cos \Phi_0 \\
 A_{43} = \frac{Q}{V_0} [-C_{Y\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{Y\mu}^0 \mu_0 \cos \alpha_0] - r_0 \\
 A_{44} = \frac{Q}{V_0} C_{Y\beta}^0 \\
 A_{45} = \frac{Q}{V_0} [-C_{Y\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{Y\mu}^0 \mu_0 \sin \alpha_0] + p_0 \quad \dots\dots (1.56) \\
 A_{46} = \frac{Q\ell}{V_0} C_{Yp}^0 + w_0 \\
 A_{47} = \frac{Q\ell}{V_0} C_{Yq}^0 \\
 A_{48} = \frac{Q\ell}{V_0} C_{Yr}^0 - u_0 \\
 A_{49} = QC_{Y\mu}^0 \frac{k \mu_0}{2 T_0}
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{51} = -g \cos \Phi_0 \sin \Theta_0 \\
 A_{52} = -g \sin \Phi_0 \cos \Theta_0 \\
 A_{53} = \frac{Q}{V_0} [2C_z^0 \cos \alpha_0 - C_{z\alpha}^0 \sin \alpha_0 + C_{z\mu}^0 \mu_0 \cos \alpha_0] + \frac{1}{m} \cos \alpha_0 \sin \varpi \frac{\partial F}{\partial V} + q_0 \\
 A_{54} = \frac{Q}{V_0} C_{Z\beta}^0 - p_0 \\
 A_{55} = \frac{Q}{V_0} [2C_z^0 \sin \alpha_0 + C_{z\alpha}^0 \cos \alpha_0 + C_{z\mu}^0 \mu_0 \sin \alpha_0] + \frac{1}{m} \sin \alpha_0 \sin \varpi \frac{\partial F}{\partial V} \quad \dots\dots(1.57) \\
 A_{56} = \frac{Q\ell}{V_0} C_{Zp}^0 \\
 A_{57} = \frac{Q}{V_0} C_{Z\beta}^0 - u_0 \\
 A_{58} = \frac{Q\ell}{V_0} C_{Zr}^0 \\
 A_{59} = Q \left[ \frac{1}{\rho_a} \frac{d\rho}{dH} C_{Z\mu}^0 \frac{K \mu_0}{2 T_0} \right] + \frac{1}{m} \sin \varpi \frac{\partial F}{\partial H}
 \end{array} \right.$$

Avec :  $p_0 = r_0 = 0$

Faisons maintenant les hypothèses suivantes :

a) conditions d'équilibre

Vol symétrique en ressource dans le plan vertical (au voisinage de la pente nulle)

$$p_0 = r_0 = 0 \quad \Phi_0 = 0$$

b) Les coefficients aérodynamique longitudinaux ne dépendent pas du dérapage et des vitesses de roulis p et de lacet r.

$$\begin{aligned} C_{x_s} = C_{z_s} = C_{x_p} = C_{x_r} = C_{z_p} = C_{z_r} = 0 \\ C_{m_s} = C_{m_p} = C_{m_r} = 0 \end{aligned}$$

c) les coefficients aérodynamiques latéraux ne dépendent pas de l'incidence  $\Theta$ , ni de la vitesse de tangage q ni du nombre de mach  $M$

$$\begin{aligned} C_y = C_{y^*} = 0 \\ C_l = C_{l^*} = 0 \\ C_n = C_{n^*} = C_{nq} = 0 \end{aligned}$$

d) l'avion est non seulement géométriquement mais aussi massivement symétrique ainsi :

$$D = E = 0$$

et les moments d'équilibrage latéraux  $L_0$ ,  $N_0$  sont nuls.

Cette approche suppose que les mouvements sont découplés. Celle-ci est valable pour des angles d'incidence et de dérapage petits et à l'aide des hypothèses simplificatrices.

Dans ces conditions il est facile de voir que le système des neuf équations du mouvement libre se sépare en deux sous système indépendants :

Le système longitudinal qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -g \cos \Theta_0 & A_{33} & A_{35} & A_{37} & A_{39} \\ -g \sin \Theta_0 & A_{53} & A_{55} & A_{57} & A_{59} \\ 0 & \tilde{u} & \tilde{w} & \tilde{q} & \tilde{H} \\ A_{91} & \sin \Theta_0 & -\cos \Theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ u \\ w \\ q \\ H \end{bmatrix} \quad \dots (1.58)$$

Le système latéral :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \operatorname{tg} \Theta_0 & 0 & 1 & \operatorname{tg} \Theta_0 \\ g \cos \Theta_0 & A_{44} & A_{46} & A_{47} \\ 0 & \} _v & \} _p & \} _r \\ 0 & v_v & v_p & v_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ v \\ p \\ r \end{bmatrix} \quad \dots\dots (1.59).$$

Ces remarques justifient donc la séparation des deux mouvements dans le cas du vol équilibré rectiligne ou en évolution dans le plan vertical (au voisinage de la pente nulle) et précisent les hypothèses complémentaires nécessaires.

En ce qui concerne le mouvement forcé (action des gouvernes) les deux mouvements se séparent dans la mesure où poussée du moteur et gouverne de tangage n'induisent pas des moments latéraux autour de Ox ou de Oz, ni de force latérale et où les gouvernes de lacet et de roulis n'induisent pas de forces suivant Ox ou Oz ni de moment longitudinal autour de Oy

Dans le cas général du vol stabilisé en virage le système des neuf équations ne peut se séparer en sous systèmes et le mouvement libre est géré par une équation caractéristique du neuvième ordre dont les racines pour les faibles taux de virage sont voisines des racines des deux équations caractéristiques du 5<sup>ème</sup> ordre pour le longitudinal et du 4<sup>ème</sup> ordre pour le latérale.

## I-2-6 APPLICATION SUR UN AVION DE TRANSPORT DE TYPE AIRBUS A300 : [1]

### I-2-6-1 Les caractéristiques d'un AIRBUS A300 :

Géométrie – Masse – Inerties :

S=260m<sup>2</sup>, L=6.61m

m=120000Kg

A=5.55 10<sup>6</sup> Kg.m<sup>2</sup>, B=9.72 10<sup>6</sup> Kg.m<sup>2</sup>, C= 14.51 10<sup>6</sup> Kg.m<sup>2</sup>

D=0, E=-3.3 10<sup>4</sup> Kg. M<sup>2</sup>, F=0

Paramètres Moteurs:

Bimoteur dont la poussée du moteur au point fixe au sol F<sub>0</sub>=120000 N

Coefficient  $\alpha=0$ , Coefficient  $\beta=1$ , calage=1°

Distance de l'axe moteur au plan de symétrie XZ=8m

**Aérodynamique :**

**a) Longitudinale :**

Polaire  $100C_x = 1.75 + 6C_z$

$C_z = r / 11.5$  (r en degré),  $C_{zr} = 4.982 \text{ rad}^{-1}$ ,  $C_{zum} = 0.435 \text{ rad}^{-1}$ ,  $C_{mr} = -5$

$C_{zq} = -0.7$ ,  $C_{z\dot{\alpha}} = -0.3$ ,  $C_{m0} = -0.1$ ,  $C_{mr} = -1.46$ ,  $C_{mq} = -15$ ,  $C_{m\dot{\alpha}} = -1.46$

**b) Latéral :**

	S	P	R	$u_l$	$u_n$
$C_y$	-1.5			0.05	0.3
Cl	-1.3	-1.3	2.9	-0.33	0.25
$C_n$	1.75	-1.5	-7.5	-0.125	-1.0

• Condition de vol :

L'altitude H= 30000ft, densité d'aire  $\rho = 0.458312 \text{ Kg/m}^3$

L'angle d'attaque initial  $\alpha_0 = 3^\circ, 825$

Nombre de mach  $M = 0.8$ , la vitesse du vol  $V_0 = 242.54 \text{ m/s}$

**I-2-7 SIMULATION EN BOUCLE OUVERTE :**

Dans cette section, et après avoir découpler le modèle en mouvement latérale et longitudinale afin de simplifier l'étude et on va étudier la stabilité de l'avion A300 (le comportement de l'avion latérale et longitudinale ) en simulant le système en boucle ouverte toute en observant l'évolution en lui appliquant deux types d'entrées un échelon et une impulsion.

Les courbes ci-après fournissent les résultats en simulation de l'avion en boucle ouverte.

En appliquant les caractéristiques de l'avion A300 sur le model mathématique obtenu on trouve les matrices suivantes :

**a) Pour le mouvement latéral :**

Le mouvement latéral se compose de roulis (angle  $\Phi$ , vitesse angulaire  $p$ ) d'un mouvement de lacet (vitesse angulaire  $r$ ) et d'un dérapage latéral, caractérisé par l'angle de dérapage latéral  $\beta$ . deux actionneurs permettent de stabiliser ce mouvement et de guider l'avion le long de la trajectoire désirée : l'angle des ailerons et l'angle de la gouverne de direction.

Compte tenu de ce que  $\bar{v} = V_0 \bar{\beta}$  on retrouve la représentation en espace d'état du mouvement latéral du système avion comme suit :

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{r} \\ \dot{p} \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ r \\ p \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_r \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

En boucle ouverte, ce procédé possède les valeurs propres suivantes :

- $\lambda_{1,2} = -0.5681 \pm 2.4436 i$  : paire complexe conjugué qui caractérise le mouvement de lacet qui est amorti, dont la pulsation propre  $\omega_n=2.51$  et le coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.226$ , encore appelé le roulis hollandais (Dutch roll).
- $\lambda_3 = -0.8426$  qui représente le mode (roulis)
- $\lambda_4 = -0.0065$  qui représente le mode (spiral), ce mode est très faiblement amortie.

Avec un temps de réponse  $T_s = \frac{4}{|0.0065|} = 615.4 \text{ s}$ .

**La figure (1.0)** représente les pôles et les zéros du mouvement latéral du system.

Les figures **(1.1) (1.2) (1.3) (1.4) (1.5) (1.6)** représentent la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant des signaux d'entrée de différent types.

**La figure (1.1)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type échelon seulement sur l'entrée de la gouverne de direction.

**La figure (1.2)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type échelon seulement sur les ailerons.

**La figure (1.3)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type échelon cette fois simultanément les deux commandes gouverne de direction et les ailerons.

**La figure (1.4)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type impulsion seulement sur l'entrée de la gouverne de direction.

**La figure (1.5)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type impulsion seulement sur les ailerons.

**La figure (1.6)** représente la simulation du mode latérale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type impulsion cette fois simultanément les deux commandes gouverne de direction et les ailerons.

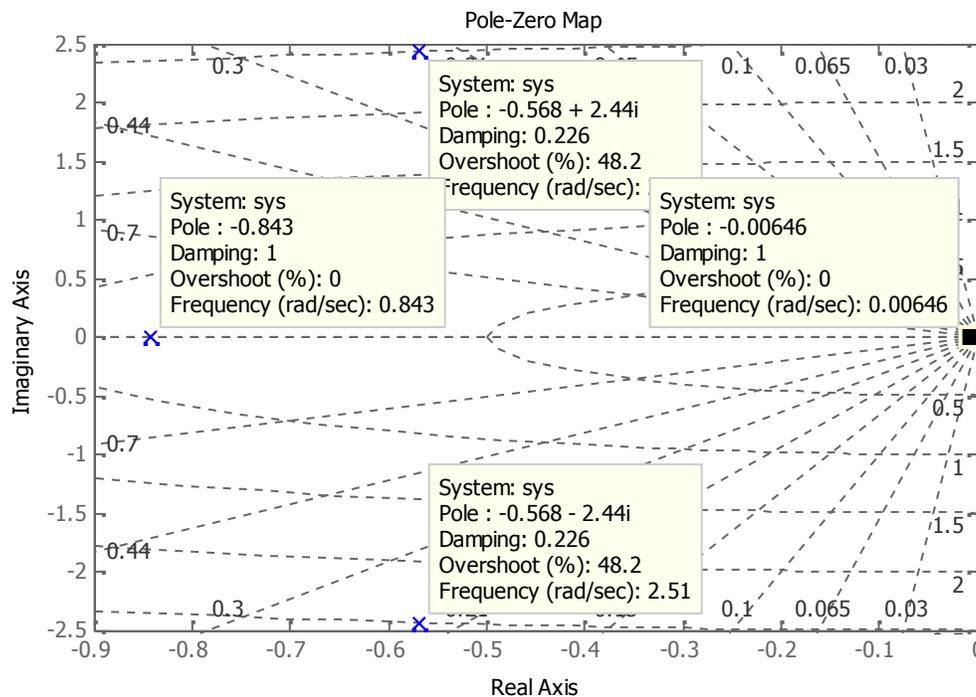


Figure (1.0) Carte Pôle-zéro du système latéral en boucle ouverte

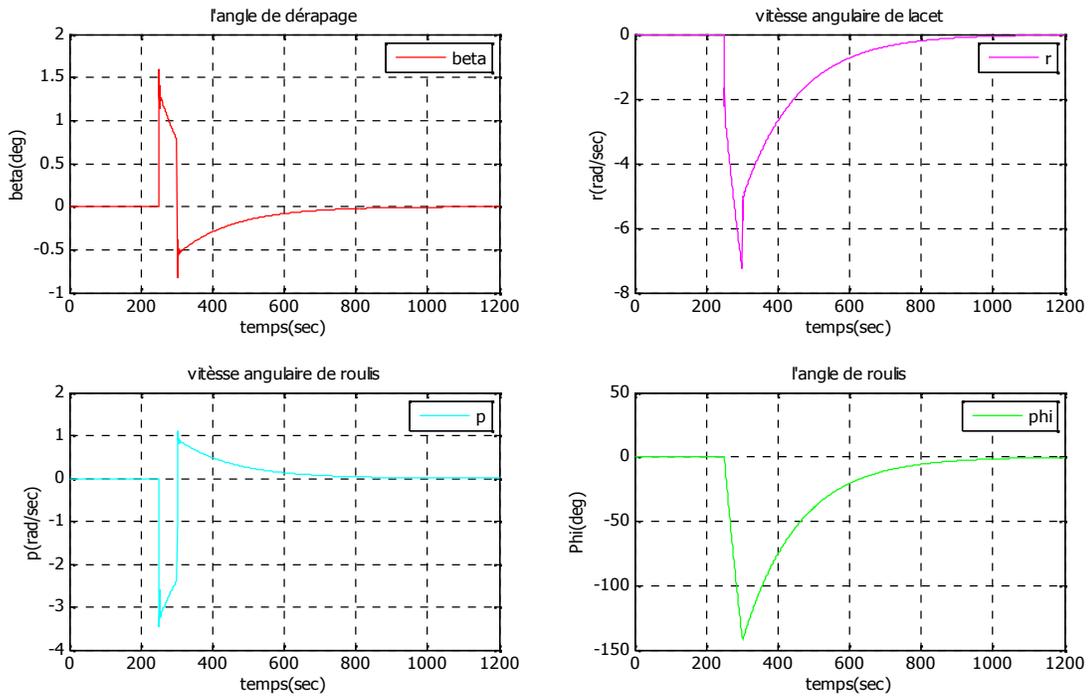


Figure. (1.1) : Réponse du système latérale à un échelon de 50s sur rudder  $u_r$ .

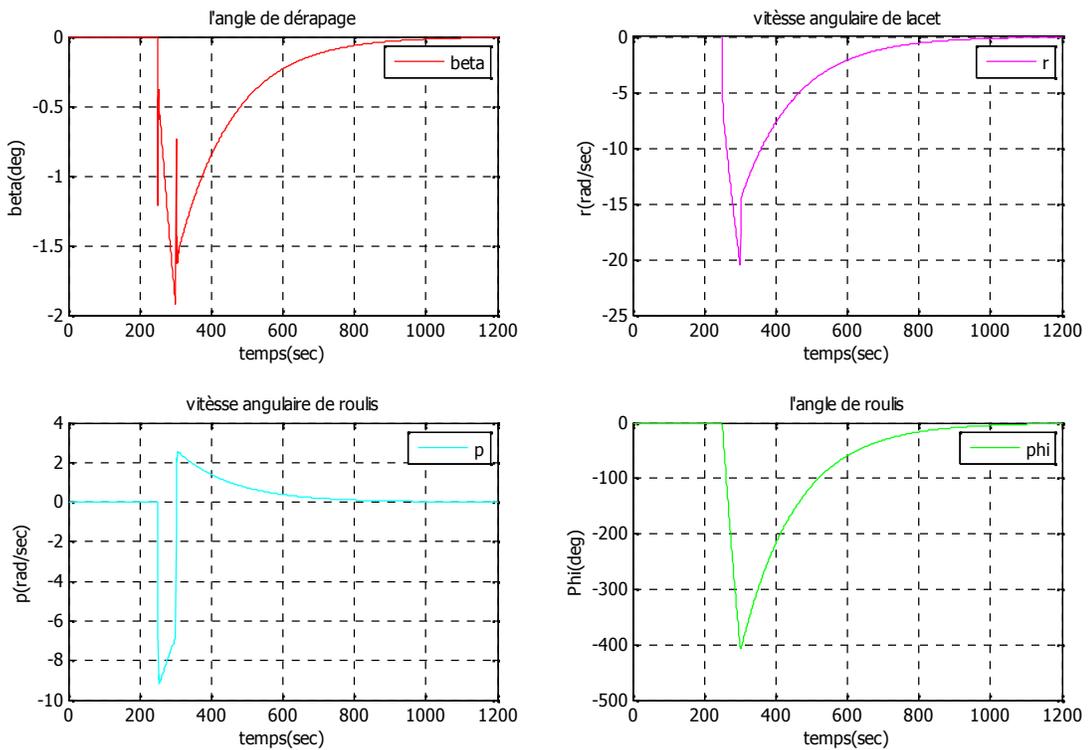


Figure. (1.2) : Réponse du système latérale à un échelon de 50s sur les ailerons  $u_a$ .

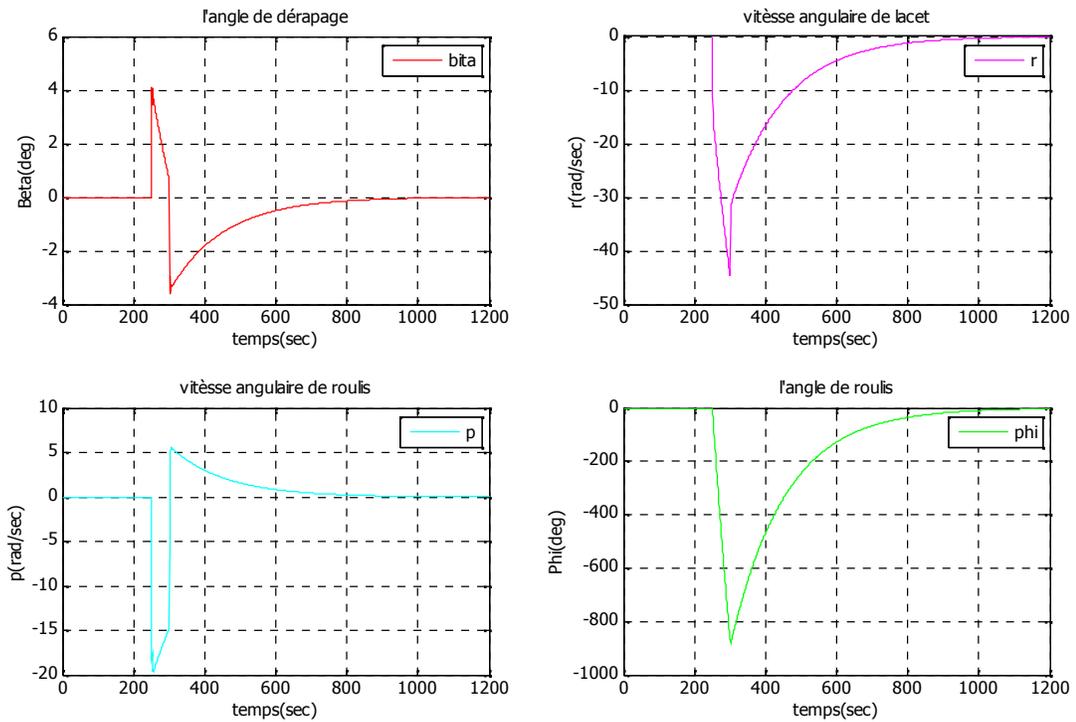


Figure. (1.3) : Réponse du système latérale à un échelon de 50s sur  $u_a, u_r$ .

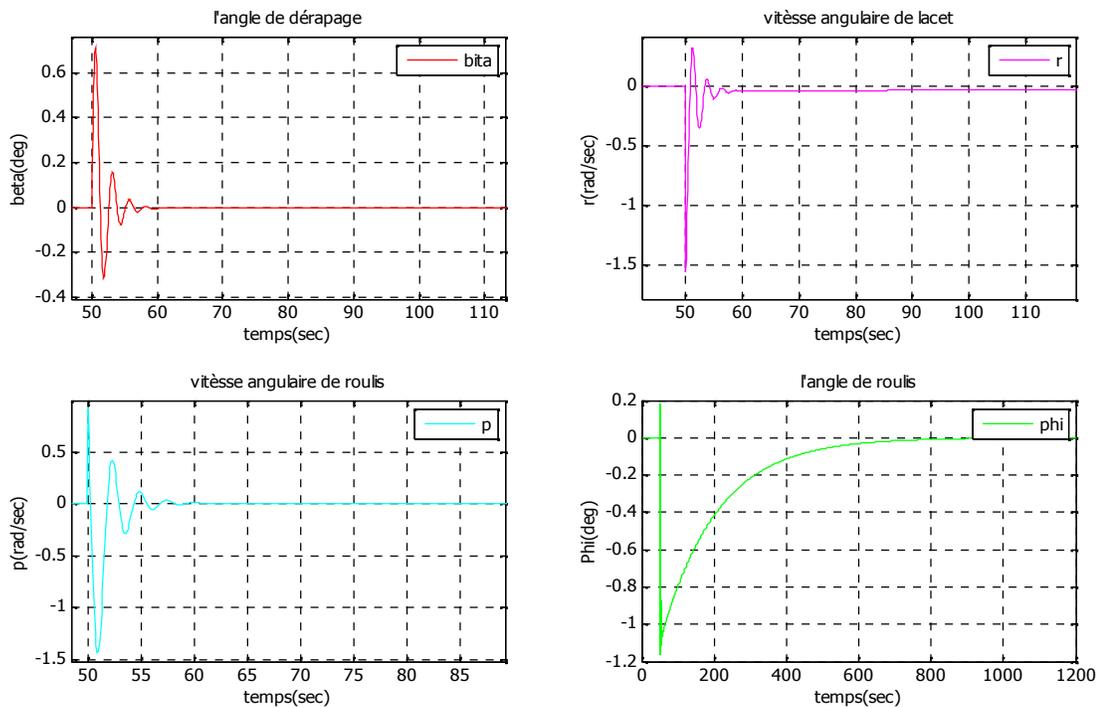


Figure. (1.4) : Réponse du système latérale à une impulsion d'amplitude 1 et durée  $t=1$ s sur  $u_r$ .

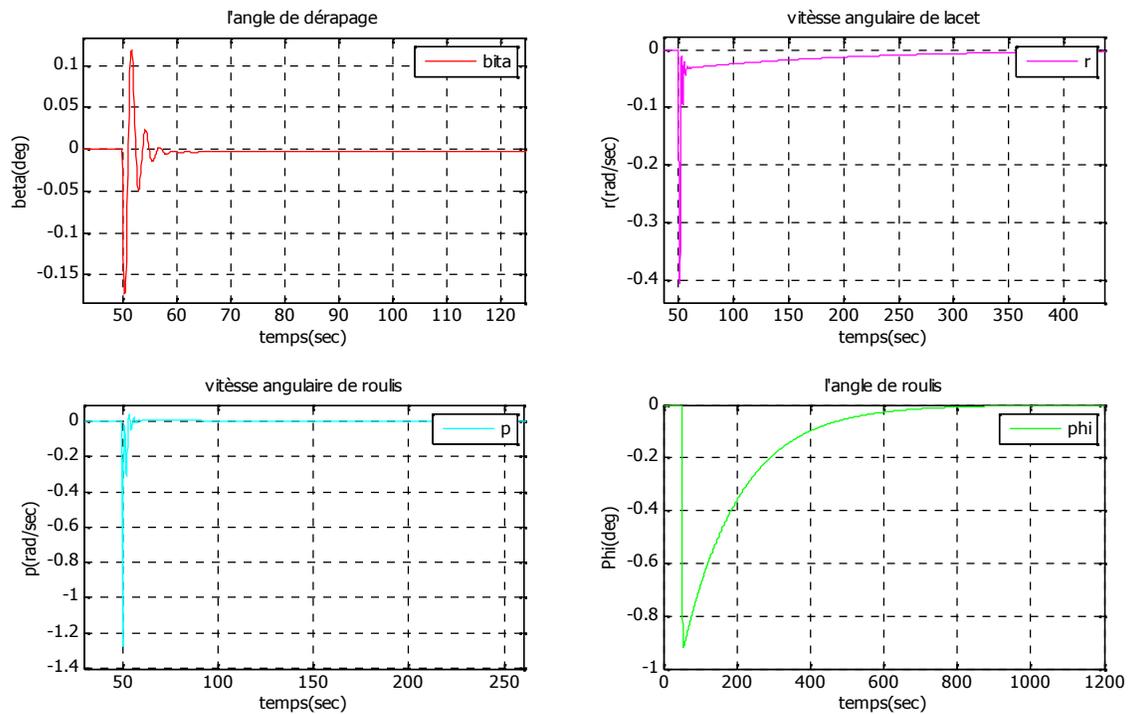


Figure. (1.5) : Réponse du système latérale à une impulsion d'amplitude 1 et durée  $t=1s$  sur les ailerons ( $u_a$ )

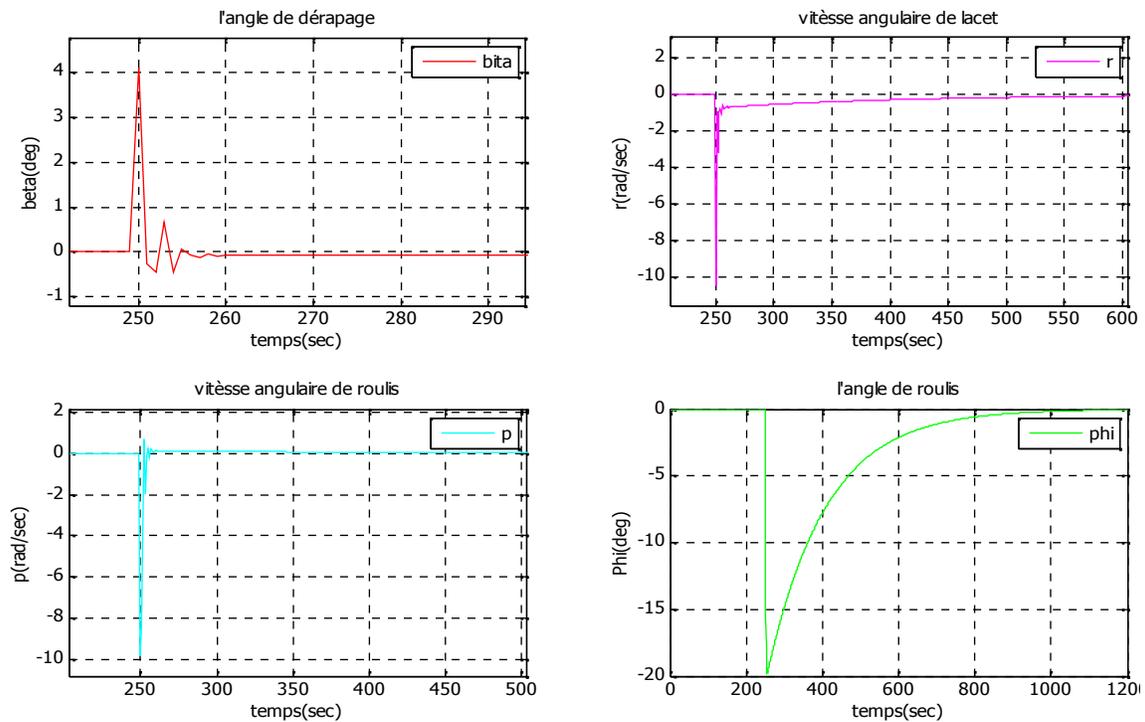


Figure. (1.6) : Réponse du système latérale à une impulsion d'amplitude 1 et durée  $t=1s$  sur  $u_a$  et  $u_r$

**b) Pour le mouvement longitudinal :**

Le mouvement longitudinal est gouverné par les deux commandes  $u_m$  et  $u_x$ , cependant, nous allons procéder notre contrôle avec manette à gaze fixée, donc la poussée sera en fonction de la vitesse, de la température, de l'altitude et des conditions de vol, et contenu de ce que  $w = V_0 \alpha$  on trouve le système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{u} \\ \dot{r} \\ \dot{q} \\ \dot{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9.7881 & -0.0058 & 19.3961 & -17.5435 & 0 \\ -0.0027 & -0.0002 & -0.0453 & 1.0819 & 0 \\ 0 & -0.0027 & -9.3654 & -2.6043 & 0 \\ 242.54 & 0.0667 & -241.997 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ u \\ r \\ q \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8476 \\ -0.0523 \\ -9.3011 \\ 0 \end{bmatrix} u_m \quad (1.62)$$

Les racines de l'équation caractéristique :

- $\lambda_1 = 0$  caractérise le mode énergétique (apériodique).
- $\lambda_{2,3} = -1.32 \pm 2.91i$  un paire conjugués dont la pulsation propre est  $\omega_n = 3.19$  rad/s le coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.414$  qui caractérise le mode short period.
- $\lambda_{4,5} = -0.0049 \pm 0.0404i$  : un paire conjugués dont la pulsation propre est  $\omega_n = 0.0407$  rad/s et le coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.122$  qui caractérise le mode oscillatoire (phugoïde). [1]

**La figure (1.7)** représente la simulation du mode longitudinale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type impulsion seulement sur l'entrée de la gouverne de profondeur.

**La figure (1.8)** représente la simulation du mode longitudinale en boucle ouverte en lui appliquant un signal d'entrée de type échelon seulement sur l'entrée de la gouverne de profondeur.

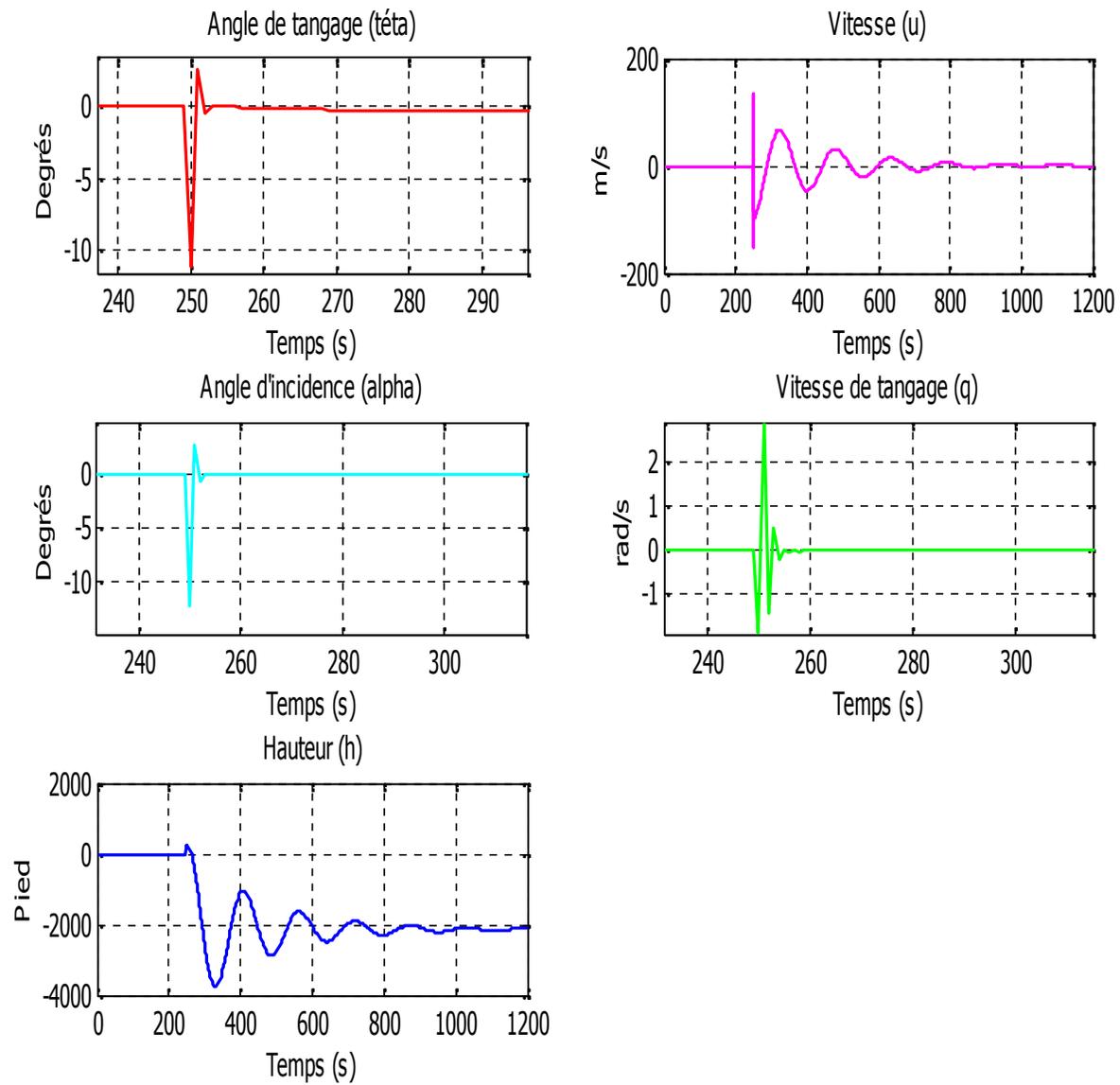


Figure. (1.7) : Réponse du système longitudinale à une impulsion d'amplitude 1 et durée  $t=1s$  sur  $u_m$

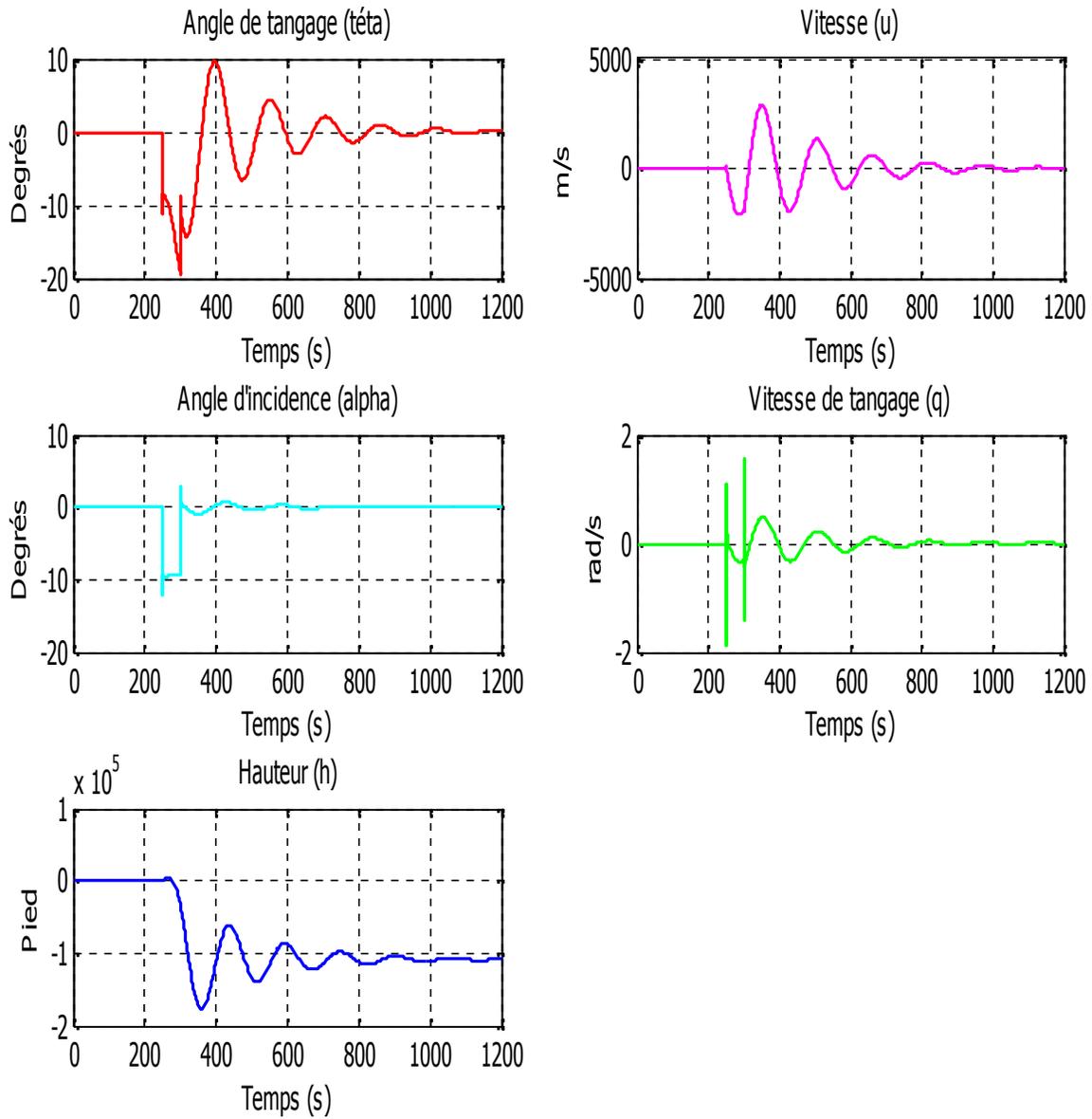


Figure. (1.8) : Réponse du système longitudinale à un échelon de durée  $t=50s$  sur  $u_m$

### **INTERPRETATION :**

A partir des résultats obtenues suite à une simulation des deux systèmes latérale et longitudinale en boucle ouverte en appliquant des entrées impulsionnelle et de type échelon on remarque que les deux systèmes ont des pôles à parties réelles négatives qui donne théoriquement une stabilité générale au système avion

Un de ces pôles est très proche de l'axe imaginaire (marginale stable) qui est défavorable pour la stabilité et néfaste pour la structure de l'avion donc ces résultats ne sont pas acceptables en pratique d'où la nécessité de faire appel aux commandes pour contrôler en boucle fermée le système afin de stabiliser l'appareil.

Nous avons testé la stabilité des deux systèmes latéral et longitudinal, en boucle ouverte on appliquant des entrées impulsionnelle et de type échelon. On remarque que les deux systèmes possèdent des pôles avec des parties réelles négatives d'où la stabilité théorique est acquise, mais ces résultats ne sont pas acceptables en pratique grâce à la présence des pôles très proche de l'axe imaginaire qui conduit l'avion vers le problème de décrochage, d'où la nécessité de faire appel au contrôle de vol pour stabiliser le système en boucle fermée.

### **CONCLUSION :**

Dans ce chapitre deux étapes ont été élaborées la modélisation mathématique en premier et ensuite la simulation.

Dans une première étape le modèle mathématique du système avion a été développé à l'aide du concept de mécanique du vol, en ce qui concerne cette partie le principal avantage de la démarche, lorsqu'elle est aboutie amène à une description mathématique représentative au système avion sous forme finale matricielle, est de disposer d'un outil à même de générer, de manière reproductible, des réponses relatives à différentes interrogations sur le système

De même, un modèle n'est jamais parfait, ni totalement représentatif de la réalité : le choix des paramètres et des relations qui les lient éclaire la finalité. Au sein d'un même modèle, le choix des valeurs des paramètres peut permettre d'appréhender divers aspects, ou encore des réalités différentes.

En suite après le découplage du modèle en mouvement latérale et longitudinale afin de simplifier l'étude on va étudier le comportement de l'avion (latérale et longitudinale) tout en observant l'évolution de l'appareil en simulant le système en boucle ouverte.

L'un des problèmes des avions est de présenter un très faible amortissement pour l'un des modes du mouvement latéral, l'une des tâches de l'asservissement qui va être mise en place sera d'augmenter ce coefficient d'amortissement et améliorer le temps de réponse ce qui l'objectif des différents commandes.

**COMMANDES LINEAIRES MULTIVARIABLES**



# II. COMMANDES LINEAIRES DES SYSTEMES MULTIVARIABLES

## INTRODUCTION :

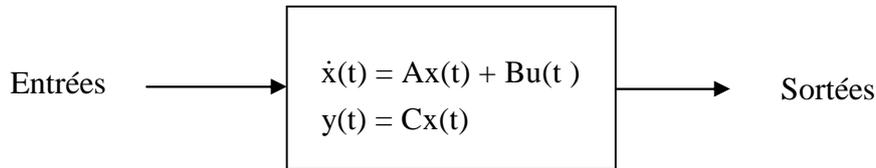


Figure II.a : model espace d'état en boucle ouverte

Après étudier le comportement de notre system avion A300 dans le chapitre précédent On s'intéresse dans ce chapitre à la commande de l'avion par retour d'état et retour d'état avec action intégrale pour le stabiliser et améliorer la réponse du system,

On a en général plusieurs points à résoudre lors de la détermination de commande. D'abord, il faut assurer que les sorties 'y' suivent les références 'r' en générant les commandes 'u'

L'étude se portera sur deux commandes linéaires les plus utilisées et qui sont :

- La commande linéaire par retour d'état *Figure II.b*.
- La commande linéaire par retour d'état avec action intégrale *Figure II.c*.

## II-1. COMMANDE LINEAIRE PAR RETOUR D'ETAT :

### II-1.1 Calcul la loi de commande :

Soit le système physique donné par les équations d'états suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \dots\dots\dots(2.1)$$

pour le mouvement latérale de notre system avion

Avec  $x = [ s \quad r \quad p \quad \Phi ]^T$  .

On associe à une représentation d'état linéaire, une loi de commande linéaire par retour d'état :

$$u = -k x + k_r r \dots\dots\dots(2.2)$$

Ou K est la matrice de gain de retour et  $K_r$  est la matrice de gain d'allée.

La loi de commande est entièrement déterminée par le choix des matrices de gains k et  $k_r$

En utilisant les equation precedentes (2.1) et (2,2) on obtient (2.3):

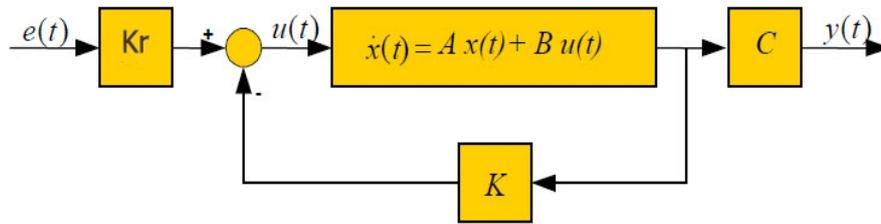


Figure II.b :Schéma synoptique de commande par retour d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - Bk)x + Bk_r r \\ y = Cx \end{cases} \dots\dots\dots(2.3)$$

On définit un système en boucle fermée stable si les valeurs propres de la matrice A-BK sont à parties réelles négatives, ceci est assuré en fonction du choix de la matrice de gain K.

**II-1.2 Calcul des matrices de gains de la loi de commande K et Kr :**

Il s'agit ici de déterminer les matrices de gains **K** et **Kr** de telle sorte que la dynamique du système commandé par cette loi de commande obéisse à différentes caractéristiques (modes et découplages) et que la sortie du système soit telle que :

$$\bar{y} - \bar{r} = 0$$

**II-1.2.1 Calcul de k :**

On vérifie la contrôlabilité du système, on trouve  $C_{cont} = [B \ BA \ BA^2 \ BA^3]$ , elle est de rang 4 donc elle valide le théorème de contrôlabilité le système est contrôlable.

On procède par la méthode de placement des pôles et à l'aide de la fonction PLACE sous le logiciel MATLAB on peut calculer la matrice de gain K.

**II-1.2.2 Calcul de Kr :**

La représentation d'état du système linéaire invariant commandé à l'aide de la loi de commande ci-dessus explicitée devient :

Sachant qu'il faut assurer que les sorties y suivent les références donc :

L'erreur finale :  $\bar{y} - \bar{r} = 0$  quand t tend vers l'infini, alors par suite  $C \bar{x} = \bar{r}$  à l'infini.

Si la consigne r est une valeur constante donc  $\dot{x} = 0$

Alors :  $e = r - y = r - Cx$

Et  $C\bar{x} = \bar{r} \Rightarrow - [C \ A \ B]K \ B_r K = \bar{r}$

$$\Rightarrow -C[A - BK]^{-1} B K_r = \bar{r}$$

$$K_r = \left[ -C (A - BK)^{-1} B \right]^{-1} I_m$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.18063 & -0.9978 & 0.668 & 0.0404 \\ 2.8056 & -0.3269 & -0.06187 & 0 \\ -5.4416 & 0.33165 & -1.4776 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0060211 & 0.036127 \\ -0.19639 & -1.5985 \\ -1.3759 & 1.0528 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### II-1.3. Calcul la loi de commande en presence de perturbations :

Dans cette section nous allons prendre en confédération les perturbations externes sur notre system a fin d'observer l'évolution de la commande en présence des perturbations.

La forme des perturbation est d(t) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + Bu(t) + d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Avec

$$u = -k x + k_r r$$

$$D'où \begin{cases} \dot{x} = (A - Bk)x + Bk_r r + d(t) \\ y = Cx \end{cases} \dots\dots\dots(2.4)$$

### II-1.4 SIMULATION ET INTERPRÉTATIONS :

Après l'obtention des lois de la commande, et en utilisant pour la simulation le logiciel MATLAB , on va exciter le system pour avoir sa réponse à un signal de référence, en imposant un temps de réponse spécifié a notre modèle d'avion .

Les reponses des variables d'état ainsi que les commandes correspondantes sont tracés dans les tous les cas

- Réponse indicielle : C'est la réponse du système lorsque le signal d'entrée est un échelon

**Figure (II.1.1) :** Représente, la simulation de la commande par retour d'état à placement de pôle :  $\lambda_1 = [-0.2+1i ; -0.2-1i ; -1 ; -2 ]$ , il resulte le temps de réponse

$$t_s = \frac{4}{|P_{\min}|} \frac{4}{|-0.2|} = 20s. \text{ Ou } P_{\min} \text{ est le pôle dominant.}$$

en utilisant la commande PLACE on obtient les matrices de gains K et K<sub>r</sub> :

$$k = \begin{bmatrix} 1.6477 & -0.0016 & -0.2385 & -0.6486 \\ -1.9484 & -0.8276 & -0.1673 & -0.9122 \end{bmatrix} \quad k_r = \begin{bmatrix} -0.7489 & -0.6455 \\ 0.2255 & -0.9541 \end{bmatrix}$$

On remarque que les sorties (angle dérapage) et  $\Phi$  (angle d'inclinaison), suivent les références  $r_1 = 10$ ,  $r_2 = 0$  respectivement, après une phase transitoire oscillatoire et avec un déplacement de  $3^\circ$  pour l'angle de dérapage. Le pole utilisé dans ce cas resulte un temps de reponse egale à 20 seconde. On observe aussi que les commandes sont bornées, donc le système est stable.

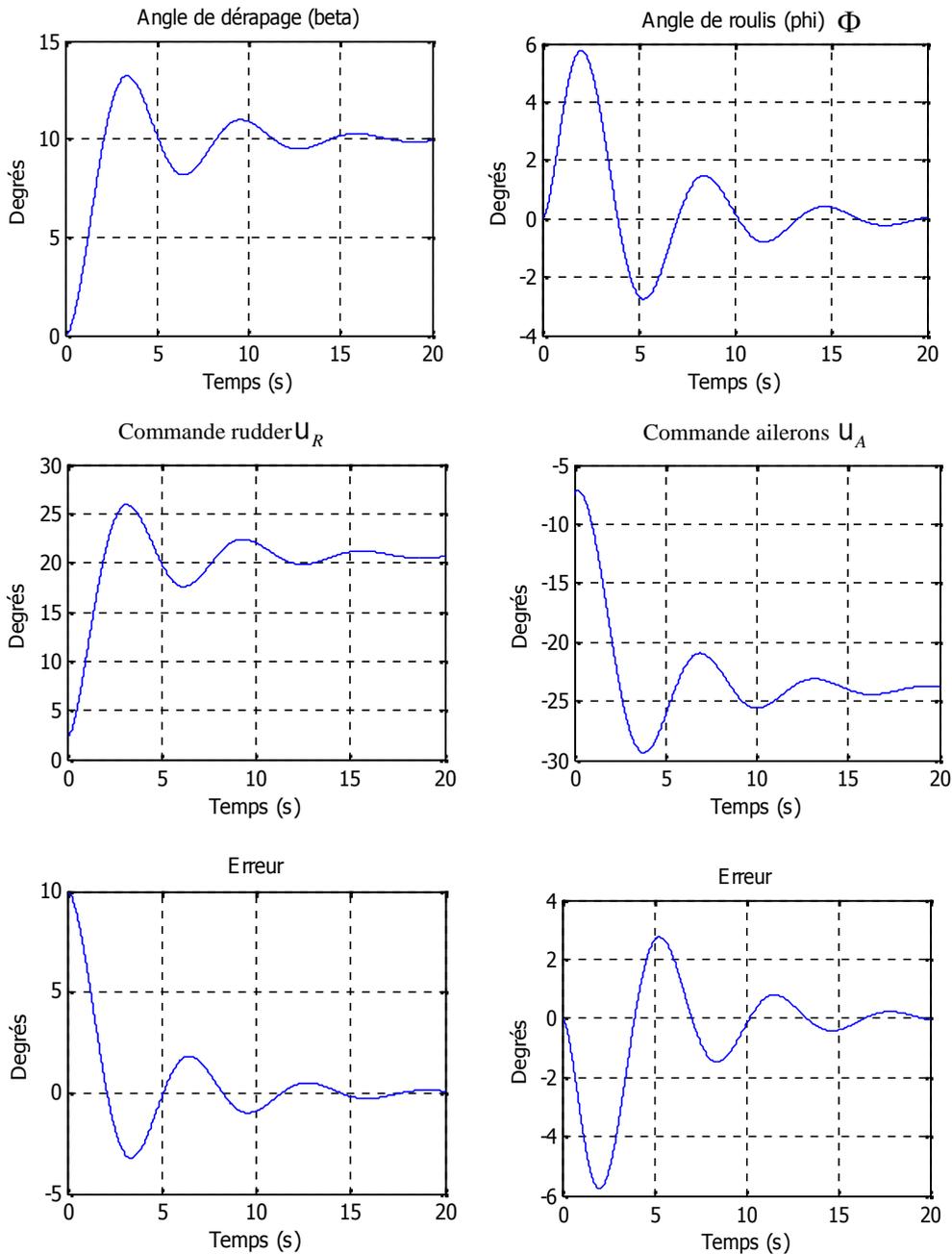


Figure (II.1.1) : Commande par retour d'état avec placement de pôle  $\lambda_1$

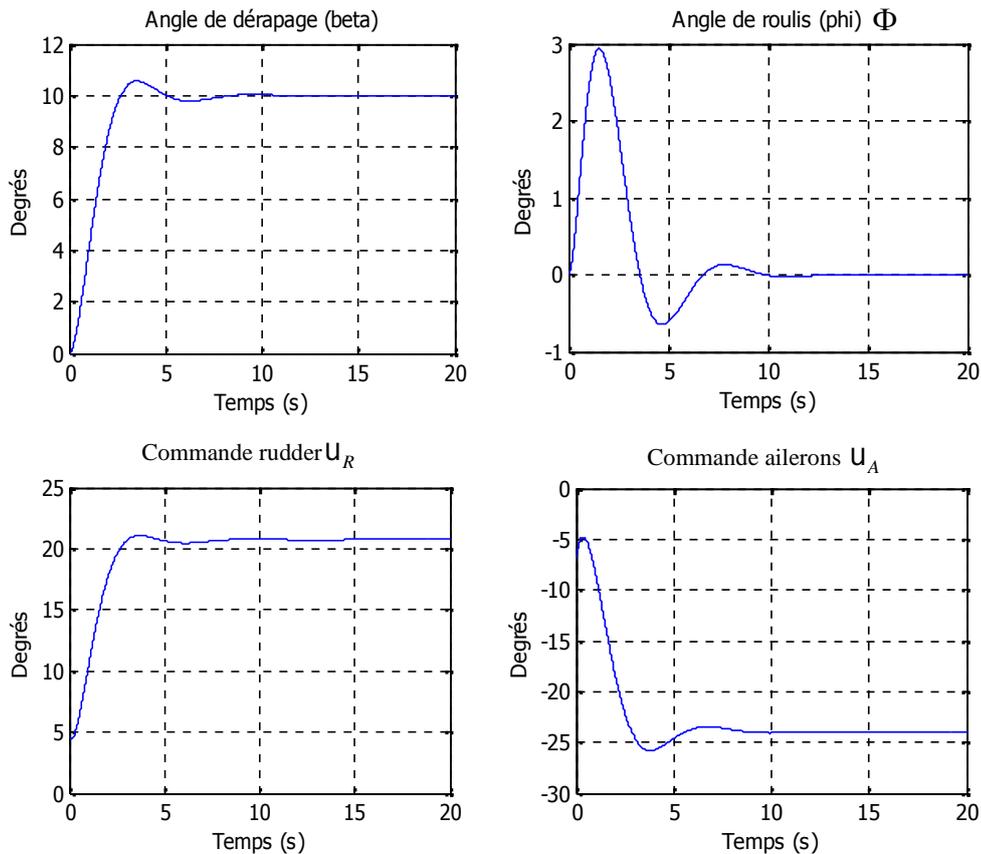
**Figure (II.1.2) :** Dans une deuxième étape on joue sur le placement des pôle et on change ces valeur à afin de voir clairement l'effet du coefficient d'amortissement ( $\zeta$ ), On augmente la partie réelle des pôles complexes, le pôle devient :

$$\lambda_2 = [ -0.5+1i ; -0.5-1i ; -1 ; -2 ] \quad \text{Temps de réponse } t_s = \frac{4}{|\text{Re}(\lambda_2)|} = \frac{4}{0.5} = 8\text{s.}$$

$$\text{gains } K \text{ et } K_r, \text{ respectivement deviennent : } k = \begin{bmatrix} 1.7477 & 0.2719 & -0.7983 & -1.0825 \\ -1.6956 & -0.6657 & -0.0414 & -0.7618 \end{bmatrix}$$

$$k_r = \begin{bmatrix} -0.6818 & -1.0685 \\ 0.4588 & -0.7972 \end{bmatrix}$$

On remarque que le système est mieux amorti par rapport au premier cas correspond au pôle  $\lambda_1$ , les signaux suivent bien les références  $r_1, r_2$  par rapport au premier graphe avec un petit déplacement de  $0.5^\circ$ , Les commande sont toujours bornées, la stabilité du système est donc maintenue.



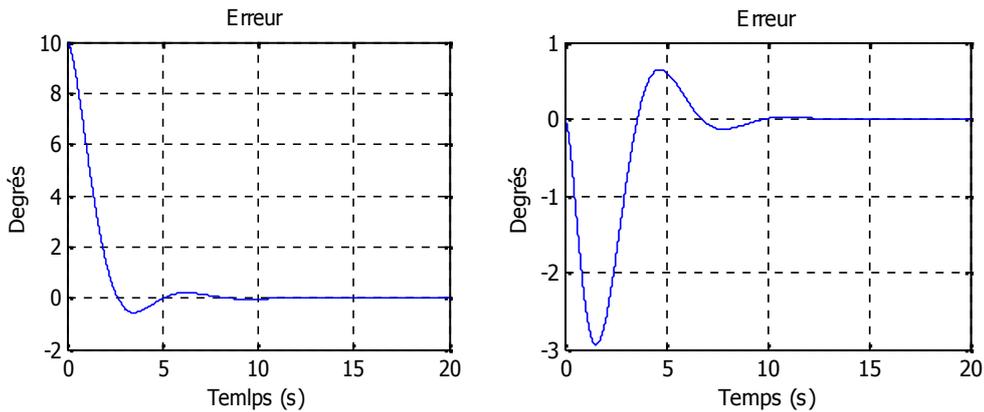


Figure (II.1.2) Commande par retour d'état avec placement de pôle  $\lambda_2$

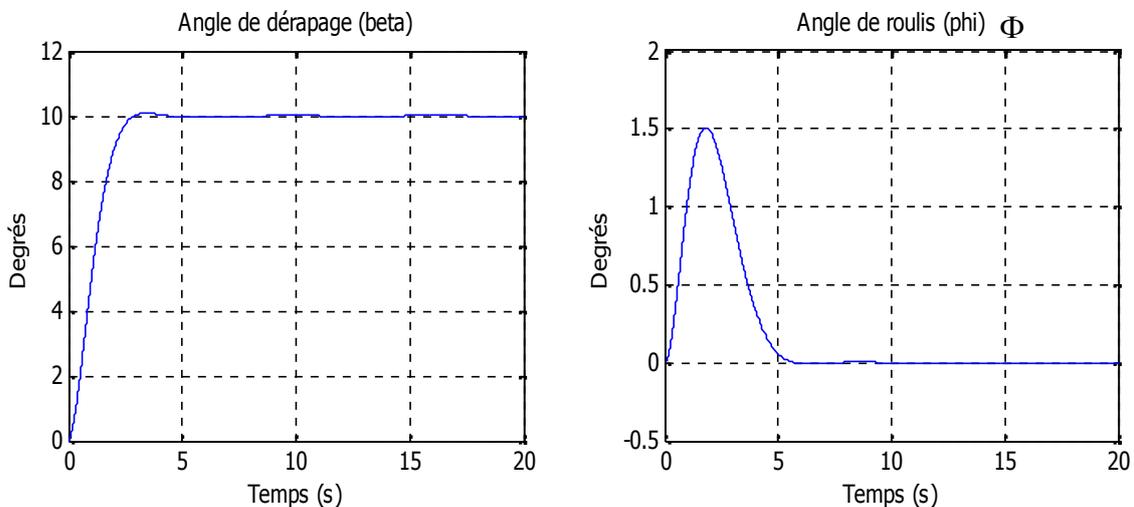
$$\lambda_3 = [ -0.9+1i ; -0.9-1i ; -1 ; -2 ]$$

$$\text{Temps de réponse } t_s = \frac{4}{|P_{\min}|} \frac{4}{|-0.9|} = 4.44s$$

les matrices de gains  $K$  et  $K_r$  sont:  $k = \begin{bmatrix} 2.7952 & -1.3224 & -0.5551 & -1.6913 \\ -1.0955 & -1.3186 & -0.2789 & -0.8060 \end{bmatrix}$  et

$$k_r = \begin{bmatrix} 0.5576 & -1.7414 \\ 1.1374 & -0.8676 \end{bmatrix}$$

en comparant avec les courbes de la **Figure (II.1.2)** On remarque que les reponses dynamiques sont sensiblement les memes avec une amelioration et precision en terme de temps de reponse pour atteindre la valeur stable et en terme d'amortissement ou les signeux de sortie suivent parfaitement les signaux de referances, le systeme est mieux amortie que le roulis hillondais de la boucle ouverte avec un deplacement de  $0.1^\circ$ . la stabilite du systeme toujours assuree.



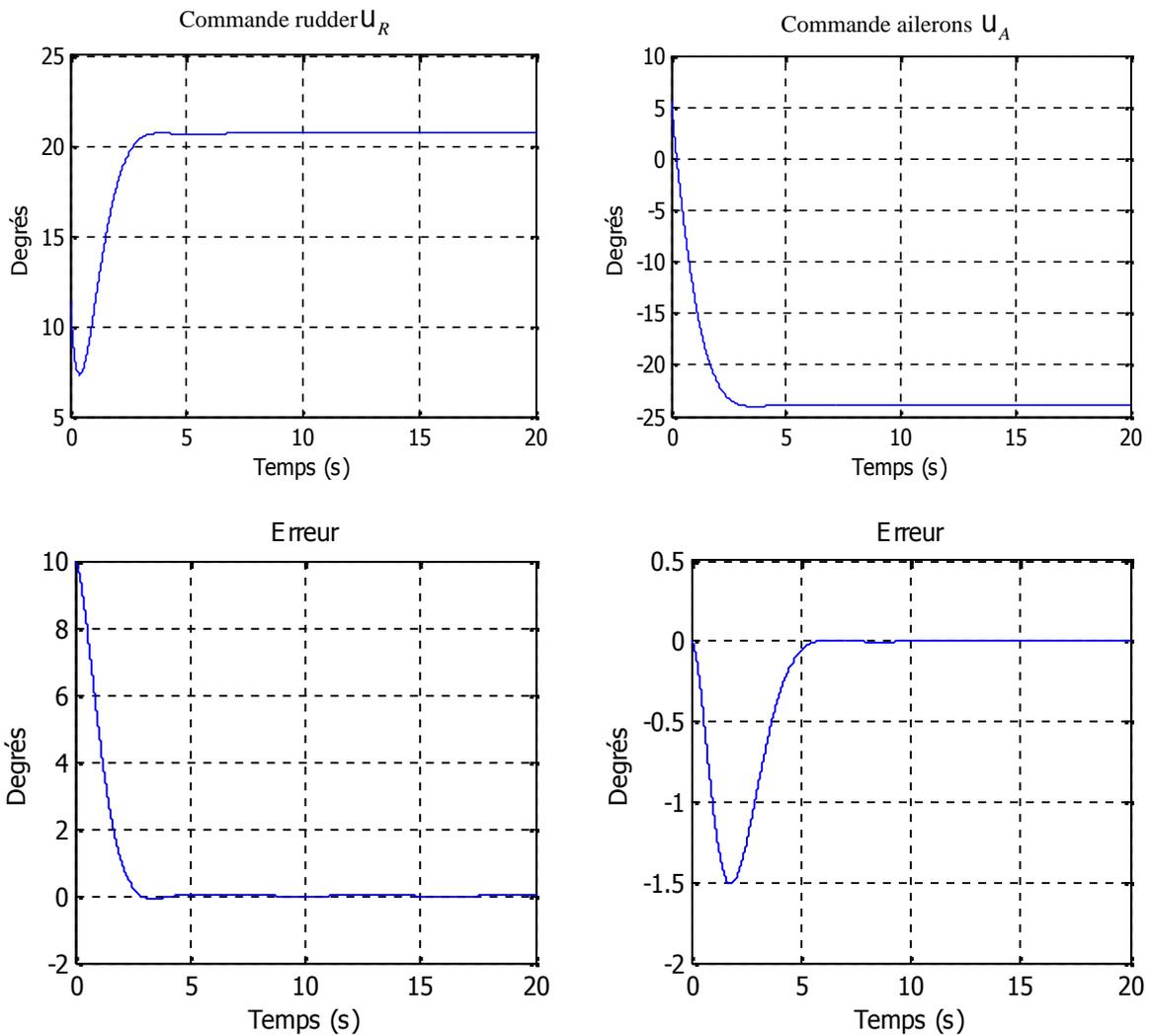
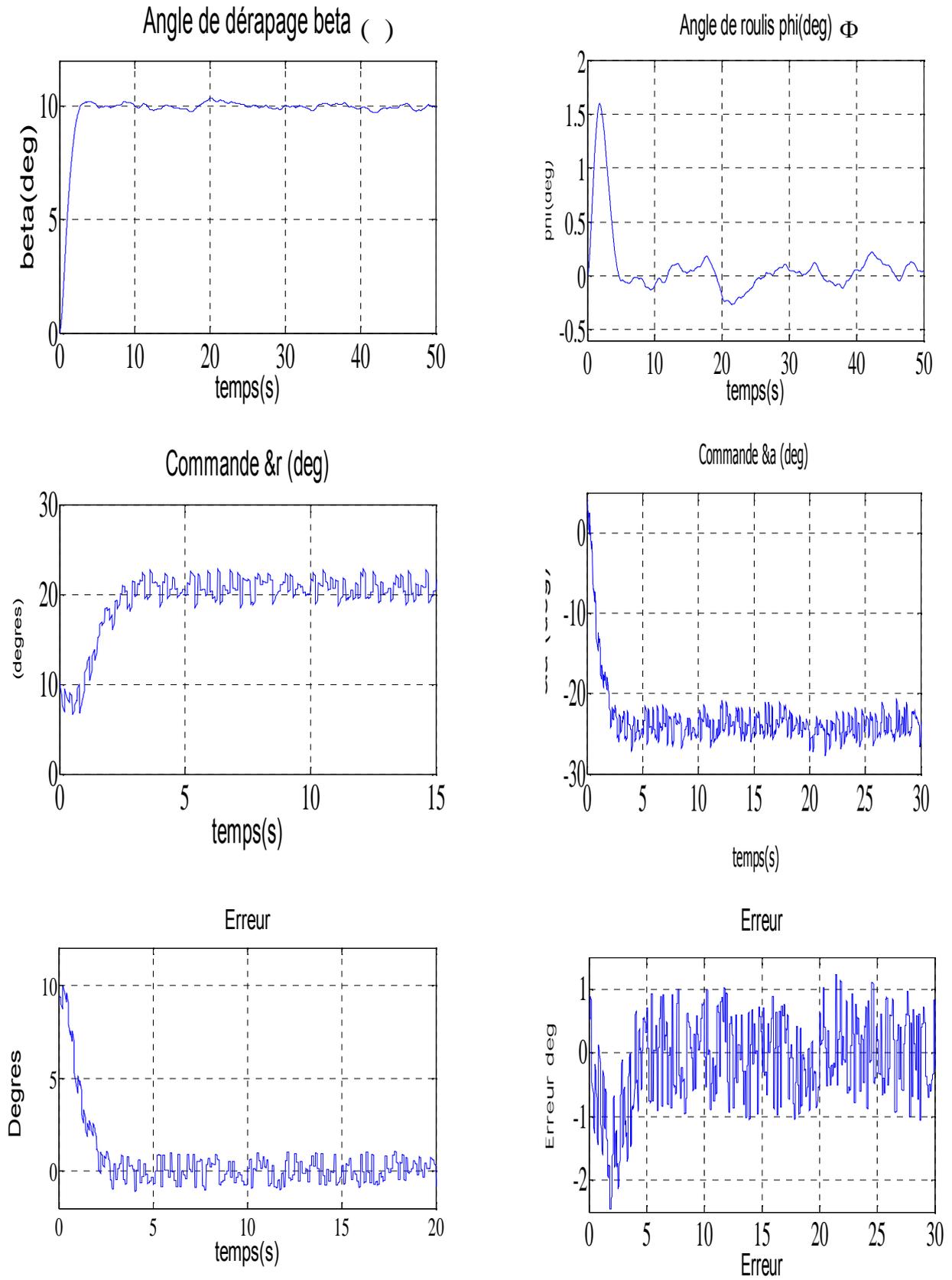


Figure (II.1.3) Commande par retour d'état avec placement de pôle  $\lambda_3$

**Figure (II.1.4) Figure (II.1.5)** montrent la Commande à retour d'état avec perturbations externes d'amplitude  $1^\circ$  et  $5^\circ$  respectivement due à une rafale de vent .

Ces figures representent le cas ou l'avion subit une perturbation externe de forme bruit aleatoire de moyenne costante, on distingue son influence par une augmentation d'amplitude du signal de sortie ; en causant la création d'une erreur statique sur les angles  $\alpha$  et  $\Phi$  . La perturbation est absorbée par les commandes, par contre les commandes restent bornées.



**Figures (II.1.4)** Commande à retour d'état avec perturbations externes d'amplitude = 1°

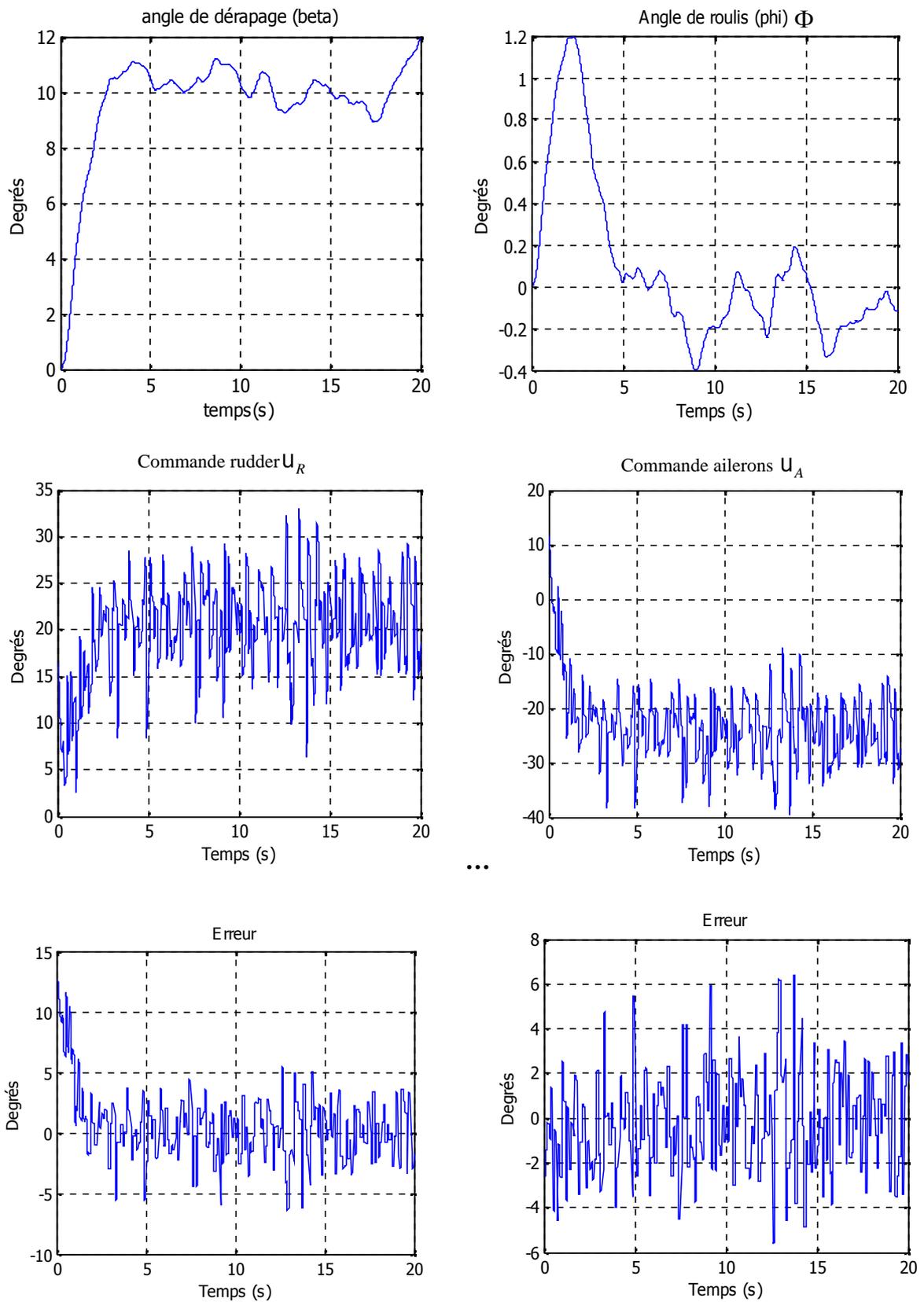


Figure (II.1.5) Commande par retour d'état avec perturbation d'amplitude  $=5^\circ$

**II-2 COMMANDE LINEAIRE PAR RETOUR D'ETAT AVEC ACTION INTEGRALE :**

**II-2.1 Détermination de la loi de commande :**

Le problème avec la commande avec retour d'état est que les erreurs (au repos) peuvent avoir lieu. Pour cela, on combine une action intégrale pour résoudre ce problème. Le terme de l'action intégrale n'est autre que l'intégrale de l'erreur définie par {2.6} :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk_l \\ -C & 0_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n.m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

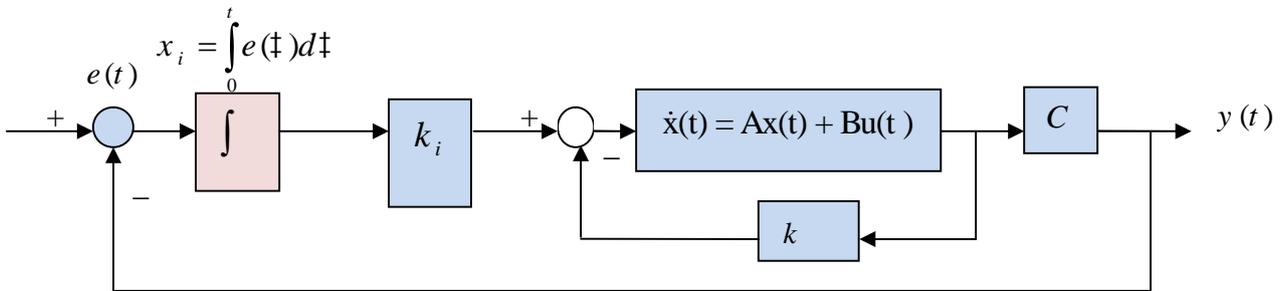


Figure II.c :Schéma synoptique de commande par retour d'état avec

$$x_i = \int_0^t e(\ddagger) d\ddagger \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\dot{x}_i = r - C x \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

La commande est :

$$u = -K x + K_i x_i \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

Où  $K_i$  : matrice des gains intégrales

$$\dot{x}(t) = (A - BK) x(t) + BK_i x_i(t) \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

$$\dot{x}_i = r - C x$$

On définit un nouveau vecteur d'état augmenté

$$K^* = [k \quad -k_i] \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

Soit encore :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{4 \times 2} \\ -C & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0_{2 \times 2} \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

**II-2.2 Détermination les matrices des gains K et Ki :**

On déduit alors la représentation de la dynamique du système en tenant compte que le choix de K et Ki est dicté par l'utilisation du nouveau système augmenté qui est de la forme :

$$\dot{z} = A^* z + B^* u$$

$$\text{Avec } u(t) = -K^* z$$

Ou  $K^* = [k \quad k_i]$ , avec  $k \in R^{2,4}$ , et  $k_i \in R^{2,2}$

Utilisant la fonction PLACE de MATLAB et par palcement de pôle, on calcule cette fois-ci le vecteur K\* et on deduit les matrices gains K et Ki

**II-2.3 Calcul la loi de commande en presence de perturbations :**

prendre en considération les perturbations externes sur notre system a fin d'observer l'évolution de la commande, la dynamique est toujours présenté par l'équation (2.2) la forme des perturbations sont représentées par d(t)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BK) x(t) + BK_i x_i(t) + d(t) \\ \dot{x}_i &= r - C x \end{aligned}$$

**II-2.4 SIMULATION ET INTERPRTITAIONS :**

Nous allons suivre les mêmes étapes celles de la commande par retour d'état, en choisissant un échelon comme signal de référence, pour les simulations.

**Figure (II.2.1) :** Représente, le résultat de simulation d'une commande par retour d'état avec action intégral par placement de pôle

$$\lambda_4 = [-0.2+1i ; -0.2-1i ; -2 ; -1 ; -10 ; -10];$$

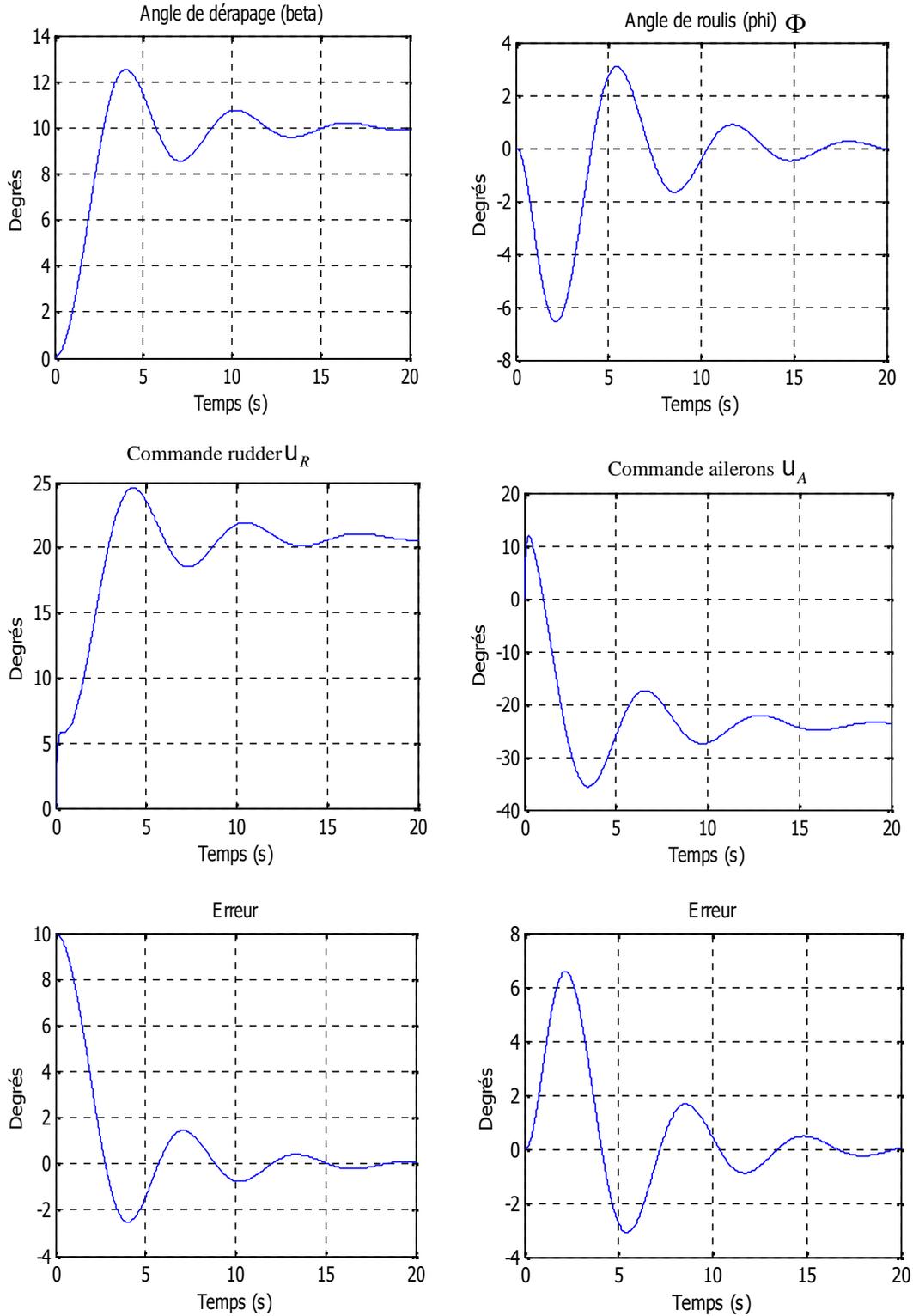
$$\text{Le temps de réponse } t_s = \frac{4}{|P_{\min}|} \frac{4}{|-0.2|} = 20s$$

A l'aide de l'instruction PLACE , les gains sont :

$$k = \begin{bmatrix} 22.6251 & -5.9166 & -5.2924 & -9.2838 \\ 13.2771 & -6.6470 & 1.6432 & -0.2350 \end{bmatrix} \quad k_i = \begin{bmatrix} -15.0921 & -0.2255 \\ -7.0504 & -5.8043 \end{bmatrix}$$

On remarque que les signaux de sorties s , { suivent les références r1 ,r2 respectivement, sans erreur statique après une phase transitoire oscillatoire, on observe que le signal est mal

amorti, avec un déplacement de  $2.5^\circ$ . les commandes sont toujours bornées, la stabilité du système est maintenue. on va jouer sur l'amortissement pour éliminer la phase oscillatoire.



**Figure (II.2.1)** Commande à retour d'état avec action intégrale par placement de pôle 4

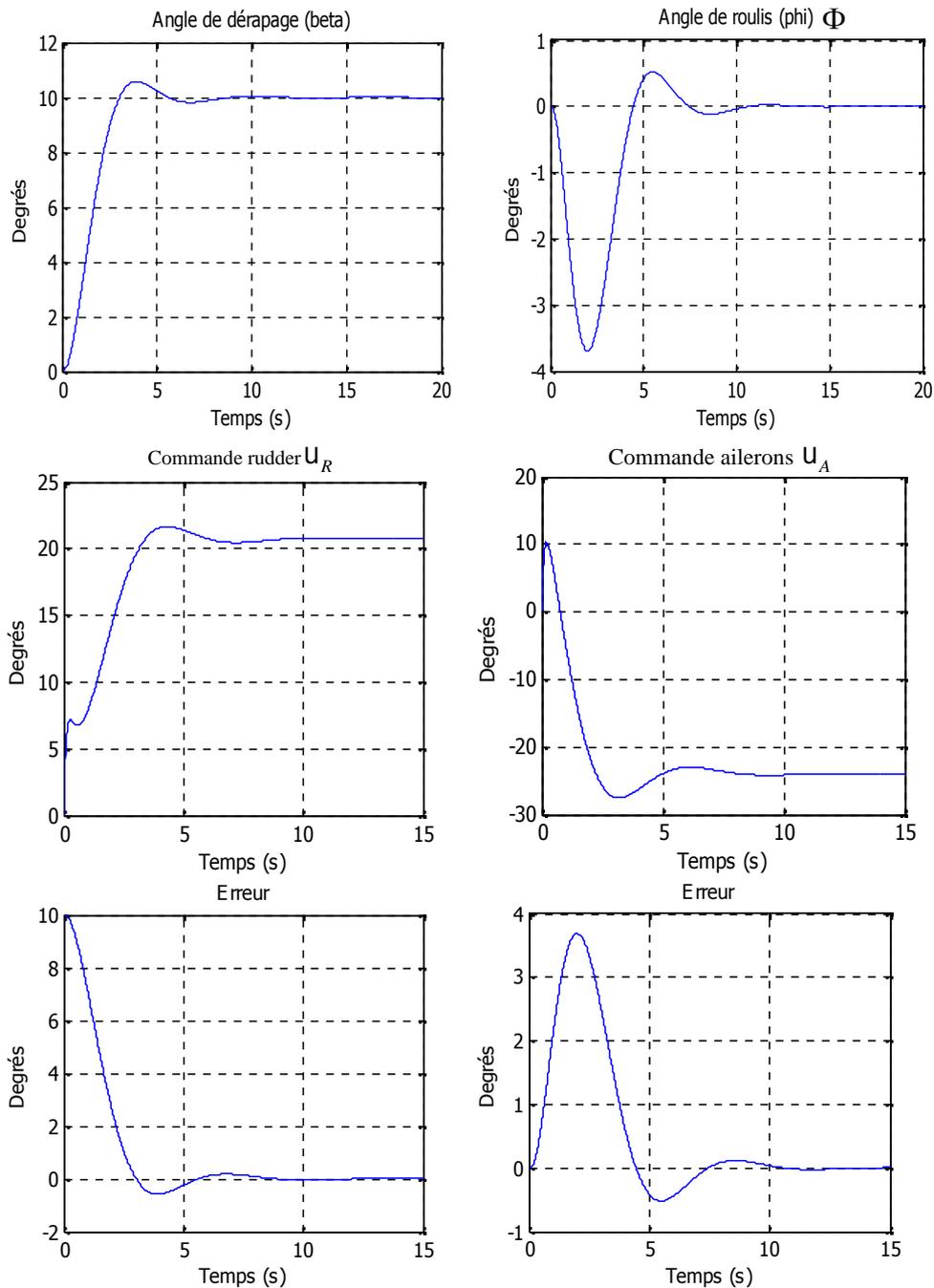
**Figure (II.2.2)** Représente, le résultat de simulation d'une commande par retour d'état avec action intégral par placement de pôle. En fait augumanter la partie réel des pôles complexes jusq'a atteindre une reponse suffisante.

$$\lambda_s = [-0.5+1i; -0.5-1i; -2; -1; -10; -10]; \text{ il en résulte le temps de repense } t_s = \frac{4}{|P_{\min}|} \frac{4}{|-0.5|} = 8s$$

les gains pour ce placement de pôle sont:

$$k = \begin{bmatrix} 19.1240 & -5.6455 & -5.5920 & -10.3919 \\ 14.0919 & -6.6909 & 1.7975 & 0.7567 \end{bmatrix} \quad k_i = \begin{bmatrix} -14.7582 & 4.4661 \\ -9.5825 & -4.1049 \end{bmatrix}$$

A partir des résultats obtenues on remarque que les signaux de sorties  $s, w$  suivent bien les références  $r_1, r_2$  respectivement, sans erreur statique sous l'effet de l'action integrale . On voit ainsi que le signal est bien amortie par rapport au cas précédent, avec un déplacement de  $1.5^\circ$  .



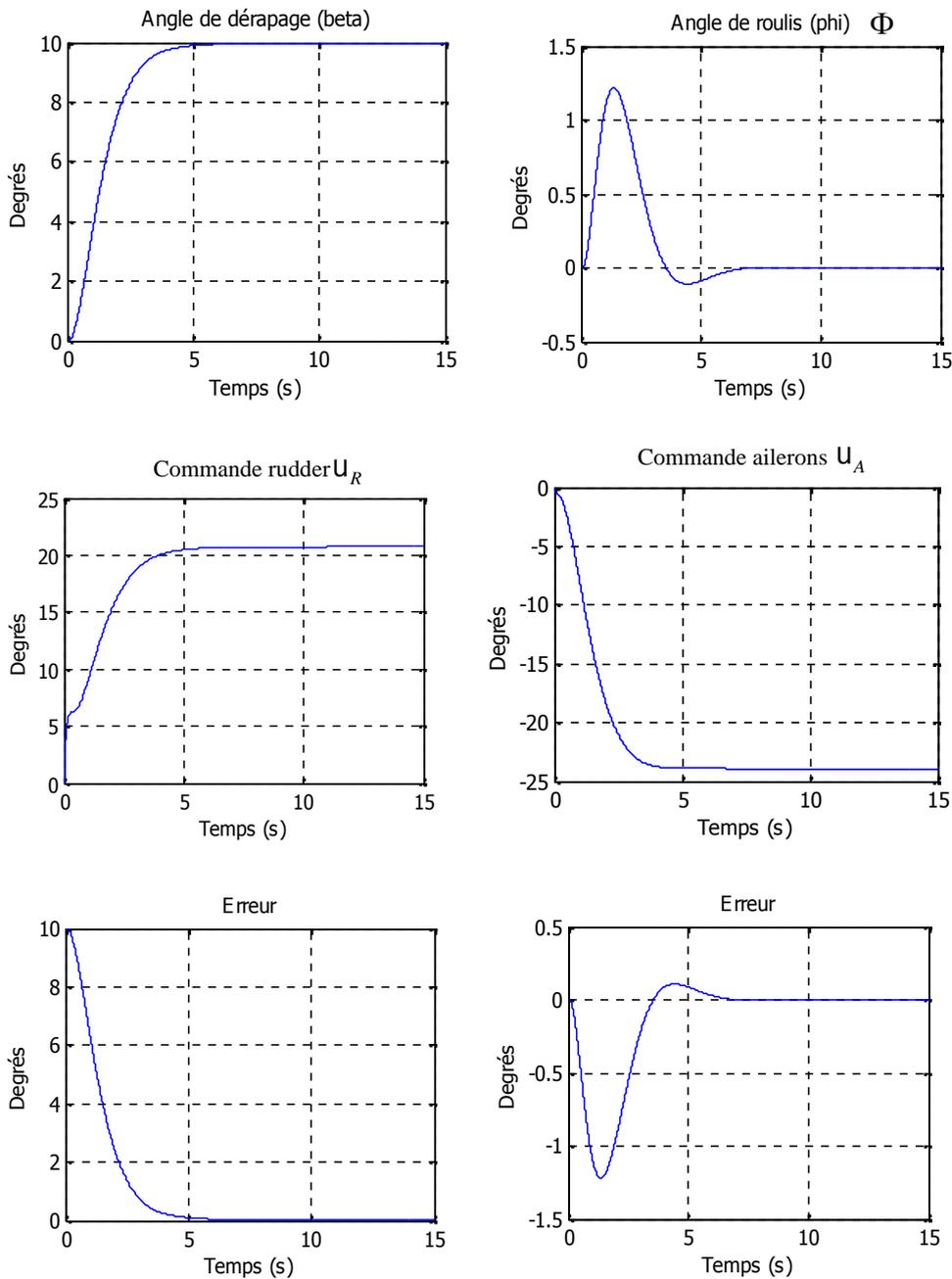
**Figure(II.2.2)** Commande a retour d'état avec action integral par placement de pôle 5

**Figure (II.2.3)** Cette figure représente les mêmes simulations que précédemment seulement qu'on a imposé au système bouclé le pôle comme suit :  $\lambda_6 = [-0.9+1i; -0.9-1i; -2; -1; -10; -10]$   
 Il en résulte la loi de commande suivante : avec  $t_s=4.44s$

$$k = \begin{bmatrix} 4.4273 & -4.6176 & -7.3977 & -20.8309 \\ 11.0209 & -6.4622 & 0.9260 & -7.2153 \end{bmatrix} \quad k_i = \begin{bmatrix} 0.6885 & 17.6767 \\ -8.1426 & 8.3595 \end{bmatrix}$$

On remarque que les signaux de sorties  $s$ ,  $\{\}$  sont bien amorti et suivent parfaitement les références  $r_1, r_2$  respectivement et sans erreur statique, en gardant toujours la stabilité.

Ceci montre que les valeurs propres  $\lambda_i$  déterminent le taux de croissance de la réponse du système



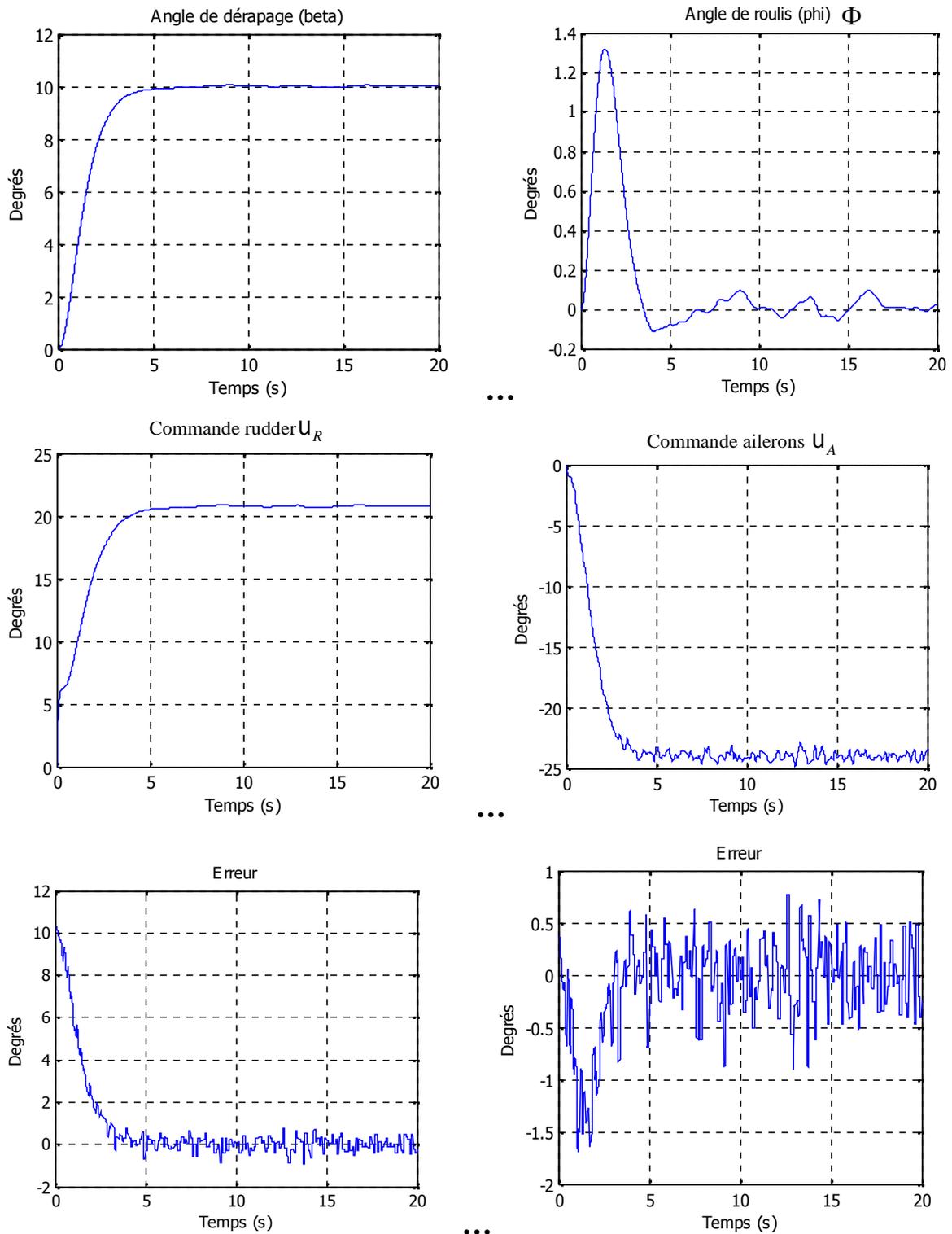
**Figure(II.2.3)** Commande à retour d'état avec action integral par placement de pôle 6

**Figure (II.2.4) et Figure (II.2.5)** Commande à retour d'état avec action integral avec perturbations externes d'amplitude  $1^\circ$  et  $5^\circ$  respectivement.

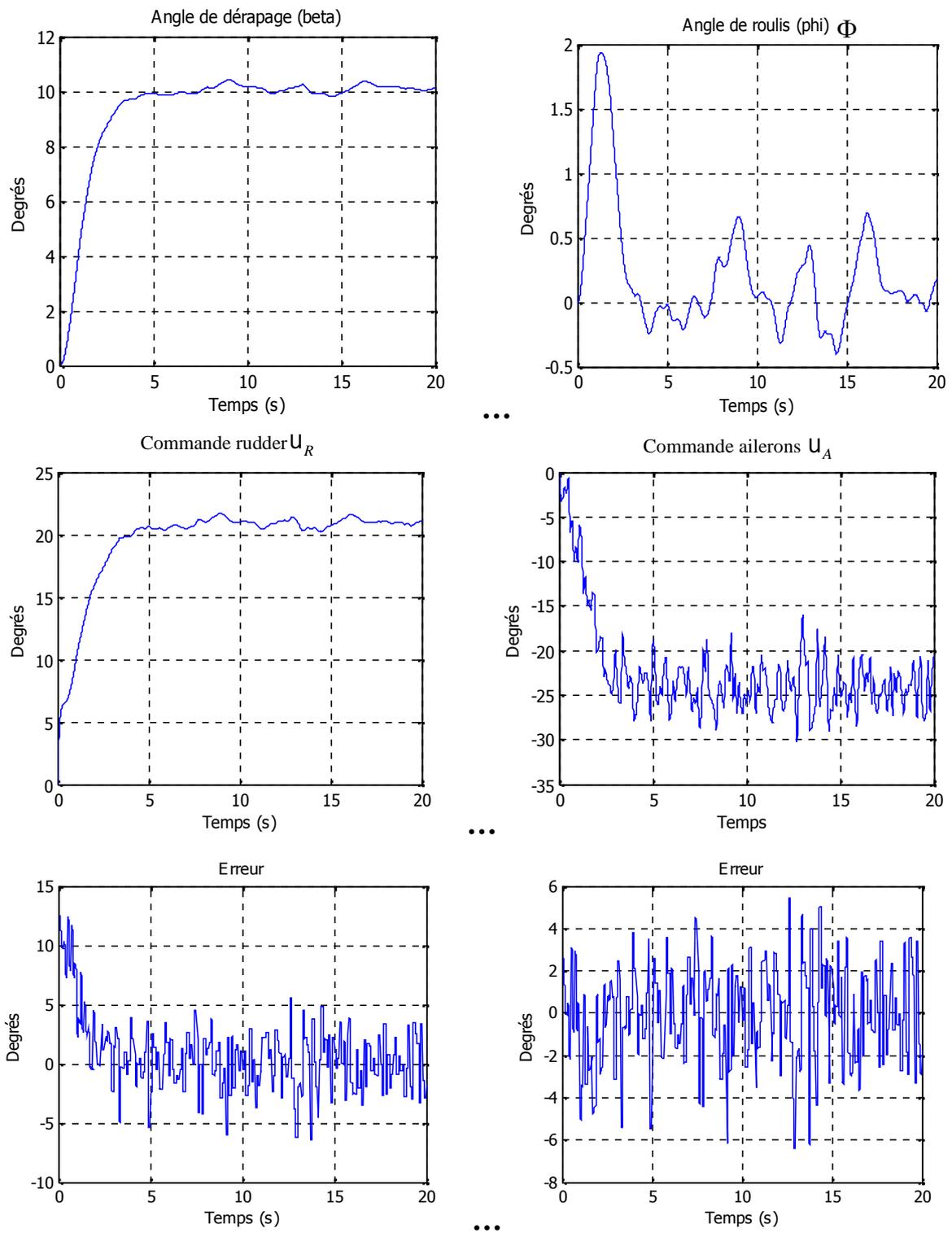
Ces figures representent le cas ou l'avion subit une perturbation externe de forme bruit aleatoire de moyenne constante, on distingue son influence qui se caracterise par une augmentation ou diminution des signaux de commandes par rapport aux cas precedents, selon les resultats , on note qu'il y a une bonne poursuite des signaux de sortie aux signaux de référence, on déduit que la commande est sensiblement robuste face à ces perturbations et maintien le system stable avec des commandes bornées.

Il en result la loi de commande suivante :

$$k = \begin{bmatrix} 2.7952 & -1.3224 & -0.5551 & -1.6913 \\ -1.0955 & -1.3186 & -0.2789 & -0.8060 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad kr = \begin{bmatrix} 0.5576 & -1.7414 \\ 1.1374 & -0.8676 \end{bmatrix}$$



**Figures (II.2.4)** Commande à retour d'état avec action integral avec perturbations d'amplitude de  $0.1^\circ$ .



**Figures (II.2.5)** Commande à retour d'état avec action integral avec perturbations d'amplitude de  $5^\circ$ .

### II.3 Conclusion :

Dans cette partie Nous avons entamé la phase de contrôle et nous avons commencer par les commandes linéaires multivariable .

on s'intéresse à la commande de l'avion par retour d'état et retour d'état avec action intégrale pour :

- stabiliser le système,
- obtenir de meilleure performance de suivi de consigne : en terme de temps de réponse des sorties et un bon amoertissement avec une erreur statique nulle, et dynamique sans oscillation.
- rejeter les effets des perturbations exterieures.

Nous avons étudié la réponse des deux commandes classique lorsque ils sont appliquées à un système linéaire.

A partir des résultats obtenus, on constate que la commande par retour d'état avec action integrale est plus efficace que celle par retour d'état, et ceci par l'annulation de l'erreur statique. Cependant, les paramètres du système doivent être connus et supposé constants, d'où une variation de ces paramètre entrainera une instabilité du système. Alors, la nécessité de faire appel à des lois de commande optimale basant sur un critère quadratique caractérisé par une fonction quadratique permettre une meilleure adaptation de la commande et une meilleure poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence. Pour cela on av étudier dans le prochain chapitre une commande quadratique appelée commande Linéaire Quadratique Gaussienne.

**COMMANDE LINEAIRE  
QUADRATIQUE GAUSSIENNE  
LQG**



# III

## COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE GAUSSIENNE LQG

### **Introduction :**

Développée au début de la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle à partir des années 60, on commence à voir apparaître des travaux portant sur la synthèse de loi de commande minimisant un critère de type énergétique. On parle alors de commande optimale. Les premières approches de type Linéaire Quadratique (LQ) sont proposées et permettent alors de calculer un gain de retour d'état. Dans la foulée, les techniques de filtrage de Kalman ou encore de synthèse Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) ont permis de régler des difficultés sur la notion de filtrage de bruit sur l'état ou les sorties. Toutes ces techniques reposent sur l'existence d'une modélisation la plus fine possible représentative de la dynamique réelle du système.

La commande LQG présente l'intérêt de s'appliquer à des systèmes dont l'état n'est pas mesuré, et appliquée lors du programme spatial Apollo pour la stabilisation de lanceurs, elle est apparue comme la première méthode générale pour l'asservissement des systèmes multivariables. De ce fait, elle a connu un grand succès comme en témoigne les nombreuses publications sur le sujet. Depuis la fin du 20<sup>ème</sup> siècle, la commande H-infini apparaît comme un sérieux concurrent pour l'asservissement robuste des systèmes multivariables. Néanmoins, la commande LQG n'en demeure pas moins un standard industriel.

Au cours des années 70, le principe de robustesse a commencé à être plus précisément abordé. On définit la robustesse comme une propriété permettant de garantir la stabilité et la performance d'un système incertain; l'incertitude pouvant être de nature variée : fréquentielle, paramétrique, ... Plus récemment, des techniques de synthèse prenant en compte explicitement la robustesse ont été proposées : la commande  $H_\infty$ , la  $\mu$ -synthèse, la commande LQG-LTR ou encore la commande QFT ([9], [10], [11]).

### III.1 Commande Linéaire Quadratique Optimale :

#### III.1.1 Stratégies de la Commande Linéaires Quadratiques Optimale :

La commande Linéaire Quadratique LQ est une commande à retour d'état, calculée sur un modèle, supposé parfait et non bruité, du système à régler. L'introduction d'un observateur de Kalman a permis de relâcher l'hypothèse de mesurabilité de l'état, tout en prenant en compte l'existence de bruits supposés blancs et gaussiens [12].

Considérant un système donné par son modèle de l'espace d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

où  $x$  est appelé vecteur d'état du système et composé de grandeurs internes caractérisant de façon minimale l'état physique du système à un instant donné.  $n$  s'appelle l'ordre du système. Les équations d'état et d'observation représentent des relations de causalité entre les signaux d'entrée  $u$  et l'état interne du système  $x$  d'une part et les signaux de sortie  $y$  d'autre part.

Présentant l'index suivant d'exécution pour la conception de contrôleur optimale:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt, \quad \dots\dots\dots(3.2)$$

Où  $Q$  et  $R$  présentent des matrices de pesés pour les variables d'état et les variables d'entrée, respectivement, et  $t_f$  est le temps terminal pour l'action de commande, qui signifie que l'action de la commande est dans un intervalle de temps fini.  $S \geq 0$  est la matrice pesante pour les états terminaux.

Ce problème de commande optimale désigné sous le nom (LQ) de la commande linéaire quadratique optimale. Pour résoudre ce problème de commande optimale de LQ, on doit d'abord construire une fonction dite Hamiltonienne

$$H = -\frac{1}{2} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] + \lambda^T(t) [Ax(t) + Bu(t)] \quad \dots\dots\dots (3.3).$$

Quand il n'y a aucune contrainte sur le signal d'entrée, (dans ce cas-ci, le minimum) la valeur optimale peut être résolue en prenant la dérivée de  $H$  par rapport à  $u$  et puis en résolvant l'équation suivante:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad \dots\dots\dots(3.3.1)$$

Dénotons par  $u^*(t)$  le signal de commande optimal de  $u(t)$ . Puis,  $u^*(t)$  peut être explicitement écrite sous la forme suivante:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad \dots\dots\dots(3.4)$$

D'autre part, le multiplicateur lagrangien  $\lambda(t)$  peut être écrit comme  $\lambda(t) = -P(t)x(t)$ ,  $t_f \rightarrow \infty$ . Où  $P(t)$  est la matrice symétrique de la solution de l'équation différentielle bien connue de Riccati (DRE)

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q \quad \dots\dots\dots(3.5)$$

avec sa valeur finale  $P(t_f) = S$ . Donc, le signal de commande optimal peut également être écrit comme suit :

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad \dots\dots\dots(3.6)$$

Il est intéressant de noter que la solution du problème de commande optimale fini du temps LQ s'avère être une boucle retour d'état linéaire avec une matrice de gain variable en temps, à laquelle est égal  $-R^{-1}B^T P(t)$

### III.1.2 Problèmes de Régulateur Quadratique Linéaire :

Quand  $t_f$  est fini, résoudre le problème de commande de LQ optimal conduit à résoudre l'équation DRE (3.5) ce qui est très difficile à résoudre

Dans beaucoup d'applications, un avantage est concerné par l'exécution réglementaire, qui implique cela  $t_f \rightarrow \infty$  comme dans beaucoup de processus de commande des systèmes.

Par conséquent le problème de commande optimale de LQ désigné sous le nom d'un problème de LQR (régulateur quadratique linéaire).

Dans le problème de LQR, le  $t_f \rightarrow \infty$  et le système en boucle fermée seront asymptotiquement stabilisés.

La solution matrice  $P(t)$  de l'équation de Riccati tendra à une matrice constante, c-à-dire  $\dot{P}(t)=0$

Dans ce cas-ci, le DRE réduit à l'équation algébrique de Riccati prétendue (ARE) comme suit

$$PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \quad \dots\dots\dots(3.7)$$

Puis, le problème de LQR peut être résolu en utilisant un retour linéaire d'état avec une matrice constante de gain, c.-à-d., Le problème est de trouver un retour d'état stabilisant, optimal au sens du compromis rapidité – énergie de commande. Il s'agit donc de trouver la matrice de gain du retour d'état  $K$  :

$$u(t) = -Kx(t), \quad \dots\dots\dots(3.8.1)$$

$$K = -R^{-1}B^T P, \quad \dots\dots\dots(3.8.2)$$

Où la matrice d'état du système en boucle fermée vaut :  $(A-BK)$

### III.1.3 Conception d'observateur :

Dans la conception de LQR, nous avons explicitement assumé que :

1. le modèle du système est parfaitement connu, et
2. tous les états sont directement mesurables

Si la première prétention n'est pas vérifiée, c.-à-d., le modèle peut contenir l'incertitude, nous emploierons le cadre robuste de conception de commande. Dans cette section, nous nous concentrons sur le cas quand la prétention 2 n'est pas vraie. En fait, dans la pratique, les variables d'état ne sont habituellement pas tout mesurables. Si seulement les signaux de sortie plutôt que les états sont mesurables, qui est souvent le cas dans beaucoup d'applications, pouvons-nous néanmoins employons-nous un LQR? La réponse est "oui" si nous pouvons concevoir un observateur pour observer les états de l'information d'entrée et de rendement. Naturellement, le système doit être observable.

Il est normal et pratiquement important de demander, "est ce le contrôleur conçu robuste contre l'incertitude et les perturbantes ?

En ce chapitre, nous présentons un nouveau cadre dans lequel l'incertitude et la perturbation peuvent prendre en considération explicitement et quantitativement pendant la conception du contrôleur.

Ceci désigné sous le nom de la conception robuste de contrôleur et a été le centre de la recherche pendant des décennies. La commande robuste continuera à être une matière davantage de recherche puisque la question de robustesse de n'importe quelle conception de contrôleur est un problème inhérent qui doit toujours être adressé.

D'ailleurs, la recherche sur la commande robuste sera multipliée.

La raison est évidente: les différents types de connaissance au sujet de l'incertitude et de la perturbation mèneront à différentes méthodes de conception robustes de contrôleur.

Nous présentons le problème linéaire quadratique gaussien (LQG).

### 3.2 La commande Linéaire Quadratique Gaussienne :

La commande de LQG est considérée une méthode de contrôle robuste, puisque le bruit dans les équations d'état et de rendement est explicitement considéré. En outre, des informations quantitatives sur le bruit sont employées dans la conception de contrôleur

Problème de LQG :

Considérant le modèle de l'espace d'état du système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \kappa(t), \\ y(t) &= Cx(t) + \nu(t), \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3.9)$$

Où  $\kappa(t)$  et  $\nu(t)$  sont les bruits aléatoires dans l'équation d'état et les mesures de sortie respectivement. Supposez que le  $\kappa(t)$  et le  $\nu(t)$  sont les processus aléatoires gaussiens de moyens zéro avec matrices de covariance données par :

$$E[\kappa(t)\kappa^T(t)] = E \geq 0, \quad E[\nu(t)\nu^T(t)] = \Theta > 0, \quad \dots\dots\dots (3.10)$$

Où  $E[x]$  désigne la valeur moyenne de  $x$  et  $E[XX^T]$  est la matrice de covariance de signal  $x$  gaussien de moyen nulle. Les signaux aléatoires  $\kappa(t)$  et  $\nu(t)$  sont en outre supposé être mutuellement indépendants, à savoir,  $E[\kappa(t)\nu^T(t)] = 0$ . L'indice de performance pour un contrôle optimal est défini comme :

$$J = E \left\{ \int_0^{\infty} [z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \right\} \quad \dots\dots\dots(3.11)$$

Où  $z(t) = T(x)$  est la combinaison linéaire du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $T$  défini par : l'utilisateur pour mesurer la performance. Les matrices constante de pondération  $Q$  et  $R$  sont, respectivement, symétrique semi positive-définie et symétrique définie positive matrice, c'est-à-dire,  $Q = Q^T \geq 0$ ,  $R = R^T \geq 0$

Vu la fonction de coût (3.2);  $Q$  est relié avec de l'énergie des états,  $R$  est relié avec de l'énergie des entrées commandées. Dans LQR, on cherche un contrôleur qui réduit au minimum les deux énergies; cependant, diminuer l'énergie des états exigera un grand signal de commande et un petit signal de commande mènera à de grands états la déviation

La solution de ce problème s'appuie sur le principe de séparation qui établit que la commande optimale est obtenue [13].

Le problème de LQG peut être divisé en deux sous-problèmes suivants :

1. Le contrôle de retour d'état optimale de LQ, et
2. L'évaluation d'état avec des perturbations.

Contrôle de LQG avec filtres de Kalman :

### III.2 Le Filtre de Kalman :

Le plus utilisé pour l'estimation, Le filtre de Kalman est un observateur non linéaire en boucle fermée dont la matrice de gain est variable. A chaque pas de calcul, le filtre de Kalman prédit les nouvelles valeurs des variables d'état du system.

Le but de cette section est de démontrer les résultats du filtre de KALMAN en régime permanent afin de donner les éléments théoriques juste nécessaires pour comprendre son utilisation dans le cadre de la commande stationnaire des systèmes linéaires et de montrer la dualité parfaite entre commande et estimation. En effet dans une utilisation en boucle fermée telle que nous allons la présenter, on oublie rapidement les considérations stochastiques qui sont à la base du filtre de KALMAN. Les paramètres de réglages du filtre (c'est-à-dire les matrices de covariance des bruits d'état et de mesure) sont utilisés comme des paramètres de réglages du correcteur LQG finalement obtenu (au même titre que les matrices de pondérations du critère LQ),

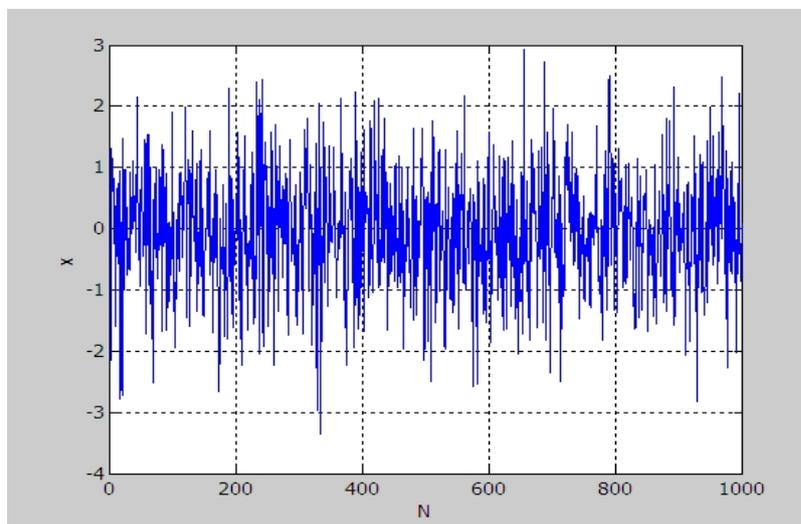


Figure : III.1 Séquence aléatoire de 1000 points avec une distribution gaussienne de moyenne zéros et DSP=1

#### III.2.1 Principe du filtre de KALMAN :

Considérons le système linéaire continu d'ordre n suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \kappa(t) \\ y(t) = Cx(t) + D(u) + \nu(t) \end{cases} \dots\dots\dots(3.12)$$

ou  $\kappa(t)$  et  $\nu(t)$  représentent respectivement.

— le bruit sur l'équation d'état sensé représenter les perturbations extérieures agissant sur le système

— le bruit de mesure lié aux capteurs utilisés.

Un filtre de KALMAN est un système dynamique avec 2 entrées : la commande  $u$  et la mesure  $y$ , c'est-à-dire tous les signaux connus du système. L'état  $\hat{x}$  ou la sortie de ce système dynamique est un estimé de l'état  $x$  du système.

L'équation du filtre de KALMAN s'écrit :

$$\dot{\hat{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f (y - C\hat{x} - Du) \dots\dots\dots(3.13)$$

**Note :**

Le gain  $K_f$  est calculé en fonction de la confiance que l'on a dans le modèle relativement à la confiance que l'on a dans la mesure. Si le modèle est très bon et la mesure très bruitée alors le gain  $K_f$  devra être très petit.

Schéma fonctionnel du filtre de KALMAN : voir Figure. III.a

• **Hypothèses :**

Nous supposons que :

— La paire  $(A, C)$  est détectable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et inobservable dans le système,

— les signaux  $\kappa(t)$  et  $\nu(t)$  sont des bruits blancs gaussiens centrés voir figure (III.1).

- a) En recherchant l'estimé optimal  $\hat{x}$  (au sens de la variance d'erreur minimale) de l'état  $x$  par la méthode du Filtre de KALMAN, c'est-à-dire on estime l'état  $x$  par l'équation classique du filtre de KALMAN (3.13)

$$\dot{\hat{x}} = (A\hat{x} + Bu) + K_f (y - C\hat{x} - Du) \dots\dots\dots(3.13)$$

- b) en employant cet estimé comme s'il était la mesure exacte du vecteur d'état, pour résoudre le problème de commande optimale linéaire déterministe (méthode LQ)

$$u = -Kc \hat{x} \dots\dots\dots(3.14)$$

La figure III.b représente la structure du correcteur LQG dans la boucle de régulation.

La représentation d'état du correcteur LQG s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_c - K_f C + K_f DK_c & K_f \\ -K_c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ y \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3.15)$$

Les états peuvent être estimés de façon optimale si un filtre de Kalman, plutôt qu'un observateur, est utilisé

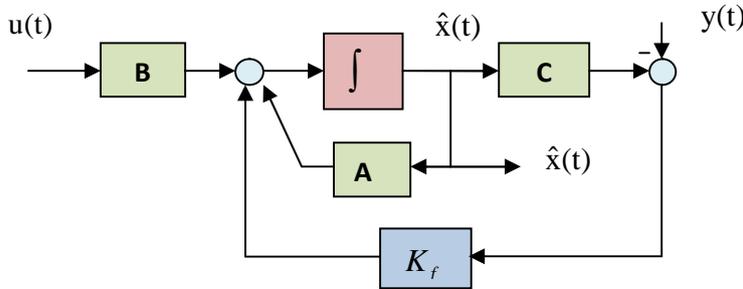


Figure. III.a Filtre de Kalman

On peut d'abord trouver une estimation optimale d'état du signal  $\hat{x}(t)$ , ce qui minimise la covariance  $E [(x - \hat{x}) (x - \hat{x})^T]$ , et ensuite utiliser le signal estimé  $\hat{x}(t)$  pour remplacer l'état actuel des variables telles que le problème d'origine peut être réduite à un problème de contrôle ordinaire LQ optimal.

Le schéma de principe du filtre de Kalman est montré dans la figure III.a, où la matrice de gain de filtre de Kalman  $K_f$  est donnée par :

$$K_f = P_f C^T \Theta^{-1} \dots\dots\dots(3.16),$$

Où  $P_f$  satisfait à l'équation algébrique de Riccati (ARE) :

$$P_f A^T - A P_f - P_f C^T \Theta^{-1} C P_f + MEM^T = 0 \dots\dots\dots(3.17)$$

et  $P_f$  est une matrice symétrique semi positive définie, c.-à-d  $P_f = P^T \geq 0$

$$E = E [ \langle (t) * \langle^T (t) ] \quad \Theta = E [ \text{ } (t) * \text{ }^T (t) ]$$

### III .3 Théorème de séparation :

Principe de séparation pour la conception de LQG :

La solution de ce problème de commande optimale de processus stochastique est bien connue sous le nom de théorème de séparation (*Seperation Theorem* ou *Certainty Equivalence Principle*). Ce théorème énonce que la solution du problème est composée de deux parties :

- un observateur de Kalman permettant de donner l'estimée  $\hat{x}$  de  $x$  qui est non biaisée et à variance minimale,

- la commande par retour d'état  $u^*(t) = -K_c \hat{x}(t)$  à appliquer à  $\hat{x}$  où  $K$  est calculé en considérant le problème LQ correspondant (en enlevant  $\kappa(t)$  et  $\nu(t)$  de l'équation d'état et  $E$  dans le critère).

Ce théorème est intéressant dans la mesure où il donne la solution du problème complet comme étant la réunion des solutions de deux problèmes plus simples et déjà résolus : celui de la commande LQ et celui de l'estimation de Kalman. Pour une démonstration de ce théorème voir [13] et [15].

Lorsque le signal optimal de filtre  $\hat{x}(t)$  est obtenu, le schéma de principe du compensateur LQG peuvent être construits, comme le montre la figure III.b, avec le contrôle optimal  $u^*(t)$  donnée par :

$$u^*(t) = -K_c \hat{x}(t) \quad \dots\dots\dots(3.18)$$

et la matrice optimale de retour d'état  $K_c$  donnée par :

$$K_c = R^{-1} B^T P_c \quad \dots\dots\dots(3.19)$$

où  $P_c$  la matrice symétrique semi positive- définie satisfait l'équation de Ricatti:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R^{-1} B^T P_c + M^T Q M = 0 \quad \dots\dots(3.20)$$

A partir des discussions ci-dessus, nous pouvons observer que, dans le problème de commande de LQG optimal, l'estimation optimale et les problèmes de commande optimale sont résolus séparément.

C'est le principe de séparation "separation principle." c'est-à-dire, pour concevoir un contrôleur LQG, on peut d'abord concevoir un estimateur d'état et ensuite employer les états estimés, comme si les états sont exactement mesurables, pour concevoir le contrôleur de retour d'état de LQR.

**Contrôleur LQG :**

Soit le modèle de system de l'espace d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \kappa(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D(u) + \nu(t) \end{aligned} \quad \dots\dots (3.21)$$

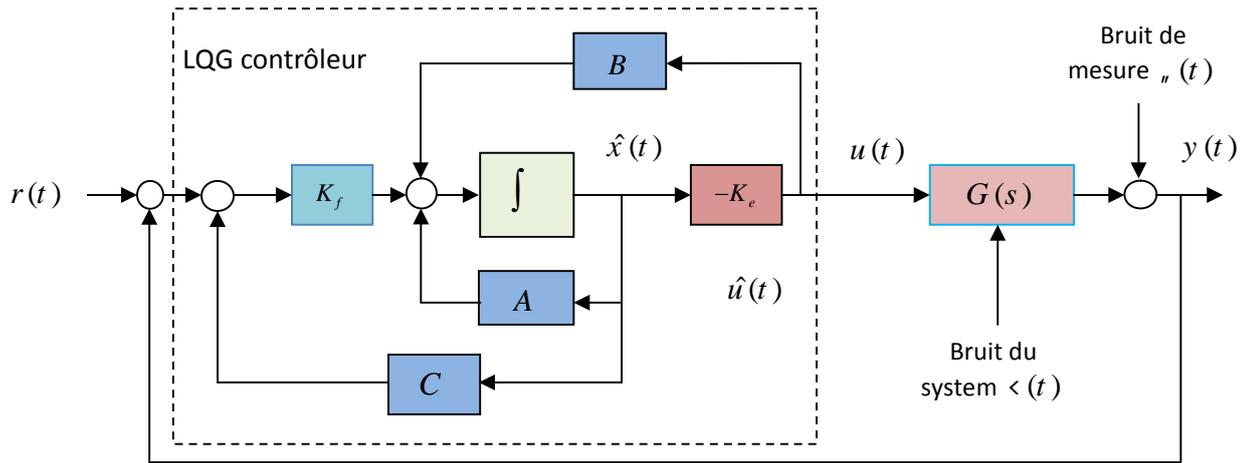


Figure III.b : Structure de commande de LQG.

et le critère d'optimisation

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N_C \\ N_C^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \right\} \dots\dots\dots(3.22)$$

où  $N_C$  peut normalement être choisi comme matrice zéro, le contrôleur de LQG est illustré dans le schéma III.b. Après avoir calculé la matrice de gain de retour d'état  $K_C$  et la matrice de gain de filtre de Kalman  $K_f$  ont été obtenues par l'intermédiaire du principe de séparation.

**L'estimateur d'état :**

L'estimateur d'état s'appuie sur la commande  $u$  et sur la mesure  $y$  du système pour donner l'estimée de l'état la plus plausible, compte-tenu des incertitudes et bruits affectant le modèle et la mesure. Une première approche du réglage du filtre concerne le cas où l'hypothèse de départ sur le modèle est respectée ; c'est-à-dire que le seul défaut du modèle est d'être affectée par des signaux stochastiques blancs. Dans ce cas, le réglage se fera directement par une évaluation des variances des bruits.

Evaluer le bruit de mesure  $v(t)$  en observant  $y$  est direct ; ce qui n'est pas le cas du bruit d'état  $w(t)$ . Ce bruit peut être attribué à la commande  $u$  en choisissant  $w(t) = BEB^T$ , avec  $E$  la variance du bruit de mesure.

Cependant, la principale source de bruit d'état d'un modèle provient généralement des erreurs de modélisation qui sont déterministes et non stochastiques. Néanmoins ces erreurs de modélisation sont généralement mal connues et il n'est pas aberrant d'en tenir compte globalement grâce à un terme stochastique. La validation du filtre de Kalman peut alors se faire en simulation en introduisant des erreurs sur le modèle telles que des variations sur ses paramètres.

# RESULTATS & INTERPRETATION

A large, white, stylized number '4' is centered on a light blue background. The number has a thick, rounded font style with a slight shadow effect. The background is a solid light blue color.

# IV . RESULTATS ET INTERPRETATION

## Introduction:

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la commande LQG au système avion de type A300 et nous présentons notre résultat numérique et graphique de simulation en utilisant MATLAB/Simulink®. Nous avons effectué trois expériences comme suit:

Après l'obtention des lois de la commande LQG, on va exciter le system pour avoir sa réponse à un signal de référence, en imposant une pondération spécifiée à notre modèle d'avion en mouvement latéral.

Les réponses des variables d'état ainsi que les commandes correspondantes sont montrées par les graphes.

Considérant la représentation d'état dynamique du mouvement latéral de l'avion eq (1.61)

Nous commençons en notant que le system est sensiblement stable, par des valeurs propres calculées par la fonction et contrôlable, (voir le premier chapitre), en premier temps un régulateur de LQ (linéaire quadratique) peut être conçu avec des paramètres appropriés de coût, tels  $Q_i$  et  $R_i$

En suite, nous voudrions récupérer l'exécution réglée par retour d'état avec un filtre de Kalman basé sur la mesure des deux sorties. Puisque le system est observable avec les sorties, on peut facilement concevoir un tel filtre de Kalman.

La première partie consiste à appliquer la loi de la commande LQG multivariable à notre system avion A300 sans perturbations avec pondérations déférentes.

## IV. 2 Résultats et interprétation :

Les figures (IV.1) , (IV.2) , (IV.3) et (IV.4) représentent le cas ou la commande LQG est appliquée à notre système d'avion sans aucune perturbation pour deux valeurs de pondération  $Q_i$  et  $R_i$  en résultant les lois de commandes ou  $K_C$  le gain de régulateur LQ et  $K_f$  le gain de l'estimateur Kalman correspond a chaque cas:

- Figures (IV.1), (IV.2) 1<sup>er</sup> cas :  $Q_1 = 1 \cdot \text{eye}(4)$  et  $R_1 = 1 \cdot \text{eye}(2)$

$$K_f = \begin{bmatrix} 0.0537 & 0.0083 \\ -0.0669 & -0.0001 \\ -0.0308 & 0.0682 \\ 0.0061 & 0.0666 \end{bmatrix}, \quad K_c = \begin{bmatrix} 0.5945 & -0.4938 & -0.5969 & -0.8309 \\ 0.6142 & -1.1977 & 0.0411 & -0.4754 \end{bmatrix}$$

- Figures (IV.3) (IV.4) : 2<sup>ème</sup> cas :  $Q_2 = 100 \cdot \text{eye}(4)$  et  $R_2 = 1 \cdot \text{eye}(2)$

$$K_f = \begin{bmatrix} 0.1492 & 0.0285 \\ -0.3240 & 0.0106 \\ 0.0330 & 0.2435 \\ 0.0252 & 0.1255 \end{bmatrix}, \quad K_c = \begin{bmatrix} 2.5184 & 3.8696 & 8.9382 & 8.429 \\ 7.3389 & 9.3835 & 3.6498 & 8.941 \end{bmatrix}$$

On observe une bonne poursuite des signaux de références par l'état et l'estimé, sans aucune erreur statique avec un signal de commande à énergie minimale. L'estimé et l'état sont confondus. Un dépassement dans le signal de sortie de l'ordre de 0.18 degrés montré par les graphes du premier cas qui a été annulé en choisissant des nouvelles pondérations

La commande atteint la consigne désirée, le choix des matrices de pondération favorise nettement l'économie d'énergie dans le deuxième cas au détriment de la vitesse de réponse.

#### La commande LQG avec perturbation externes :

- Figures (IV.5) et (IV.6) (IV.7) et (IV.8) dans ces figures nous allons présenter les résultats de simulation qui montrent la réponse de la commande LQG avec les pondérations  $Q_1$  et  $R_1$  en présence d'une perturbation externe de variance  $10^{-5}$ , puis avec une perturbation de variance  $10^{-3}$ . On observe que la commande garantit la stabilité globale du système, et ne sature pas malgré la présence de la perturbation. Nous pouvons observer aussi que la réponse converge vers une valeur à l'équilibre, avec la présence d'un dépassement au début du contrôle du à l'influence de la perturbation sur l'estimation qui joue sur la sortie.

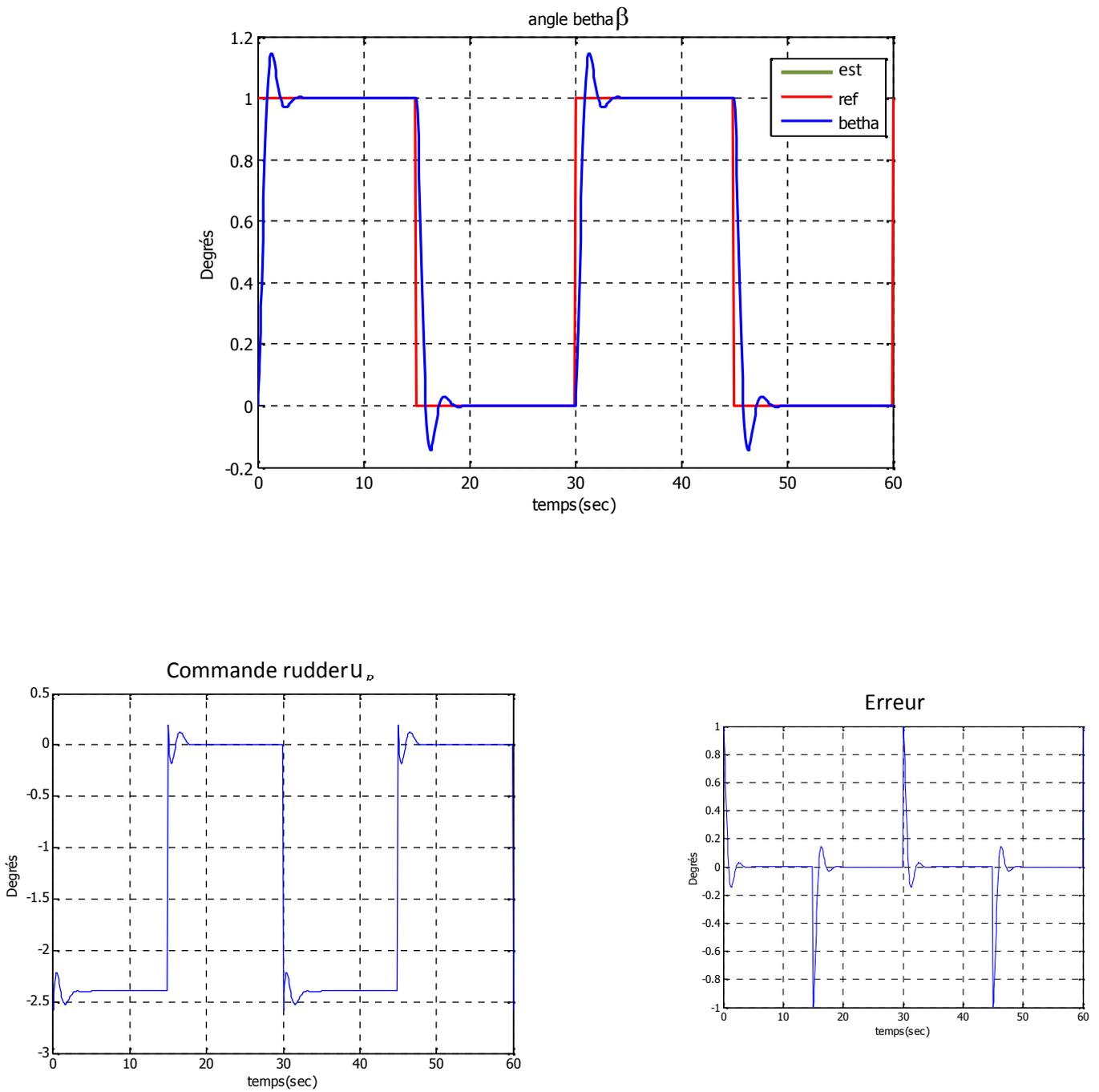


Figure (IV.1) LQG et estimateur kalman sans perturbation avec pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

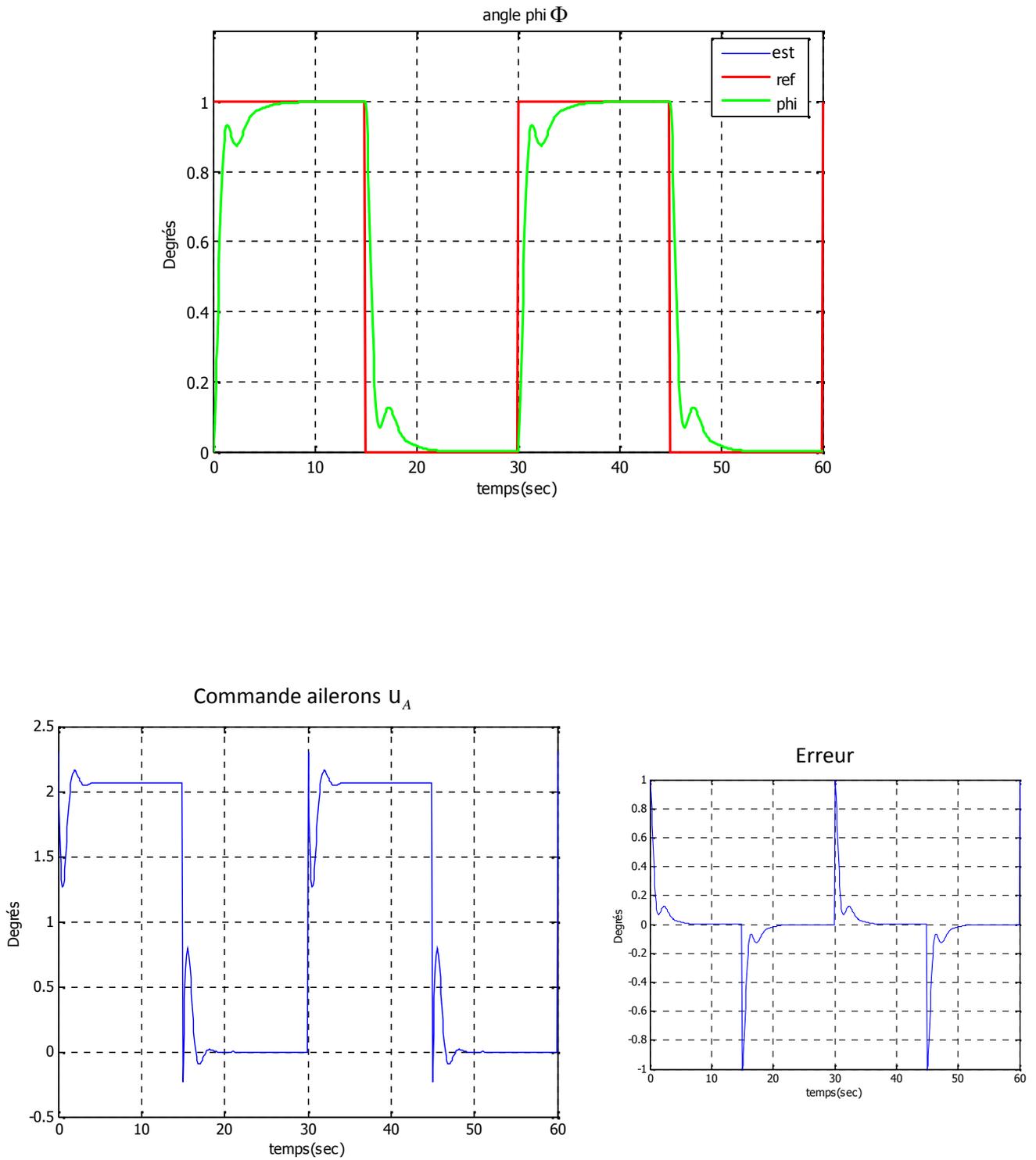


Figure (IV.2) : LQG et estimateur kalman sans perturbation avec pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

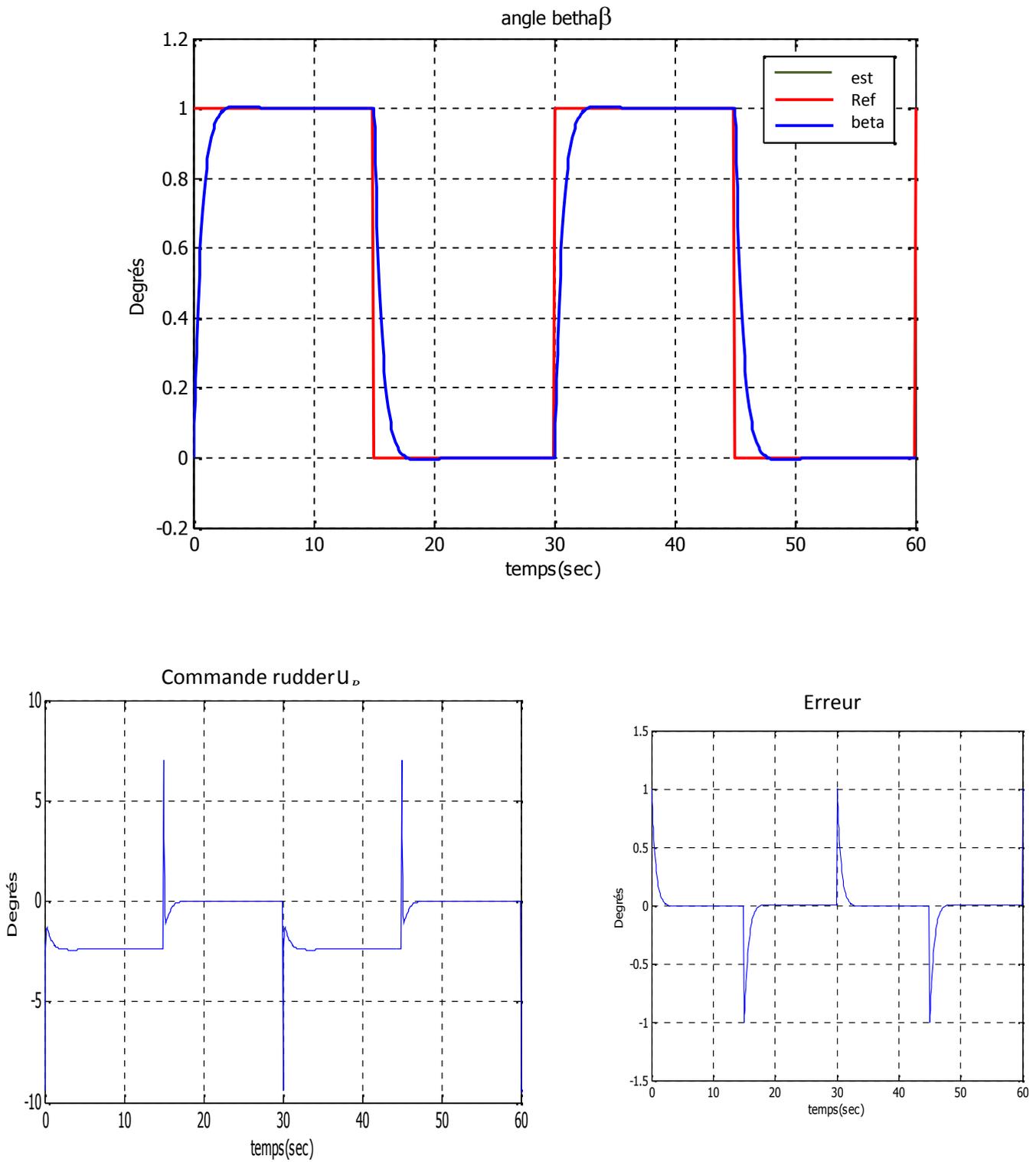


Figure (IV.3) LQG et kalman sans perturbation avec  
pondération  $Q_2$  et  $R_2$ , angle  $\beta$

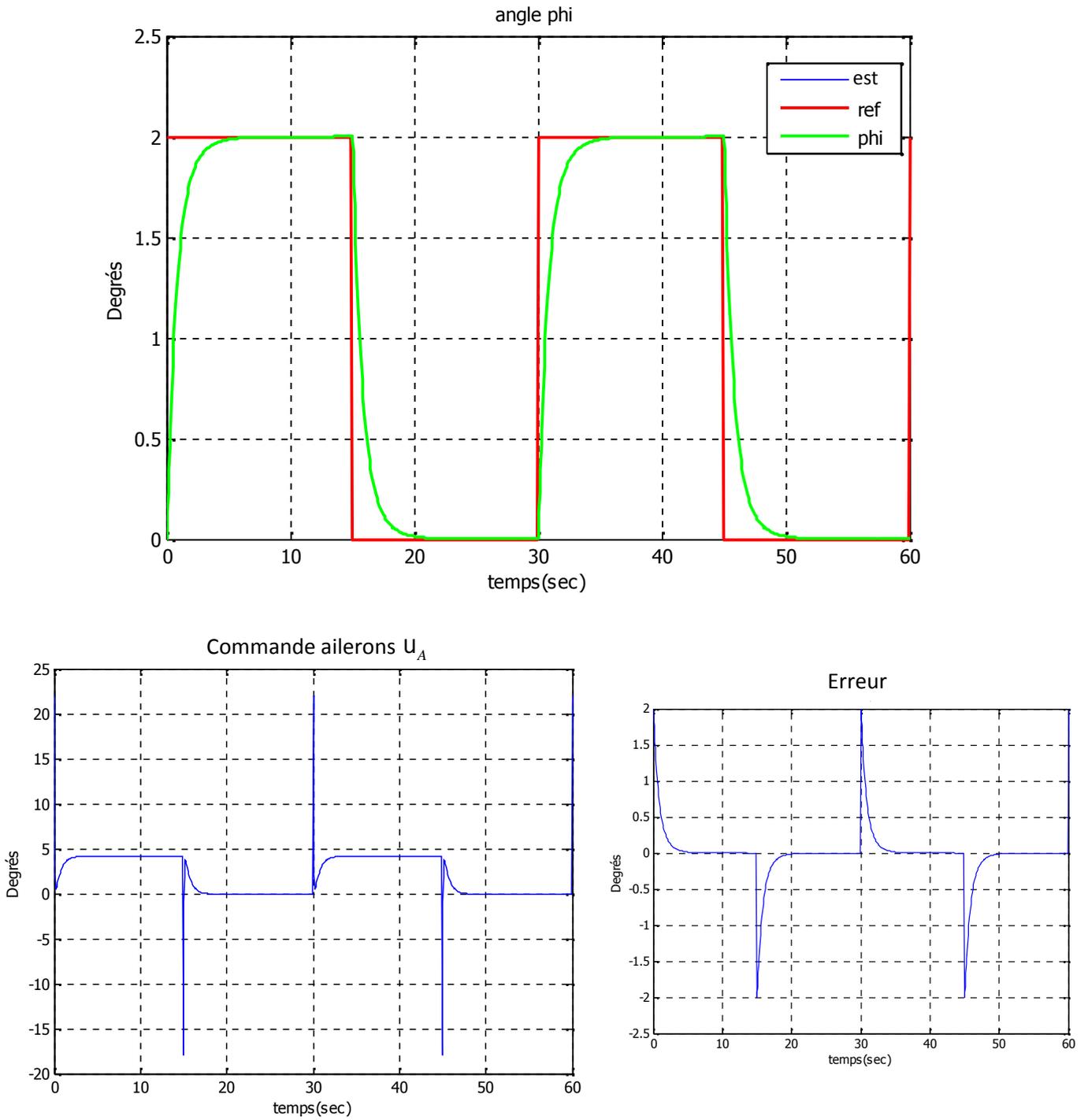


Figure (IV.4) LQG et kalman sans perturbation avec pondération  $Q_2$  et  $R_2$ , angle  $\Phi$

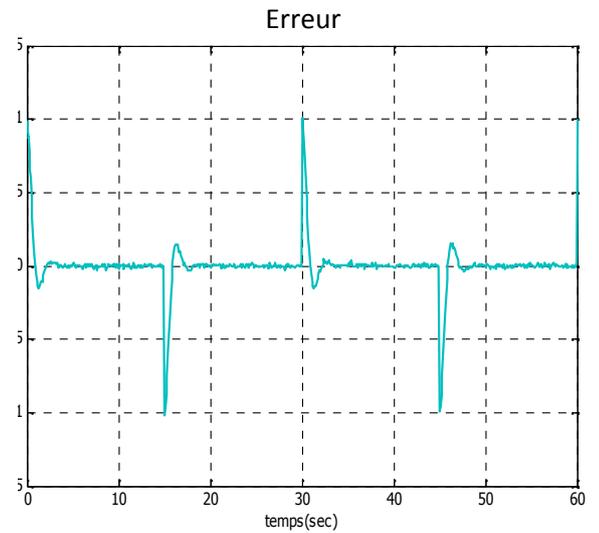
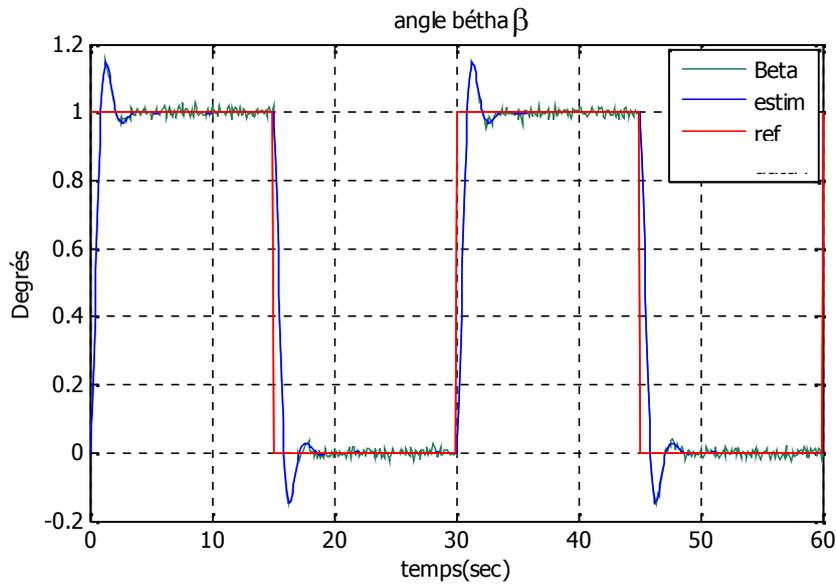


Figure (IV.5) LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

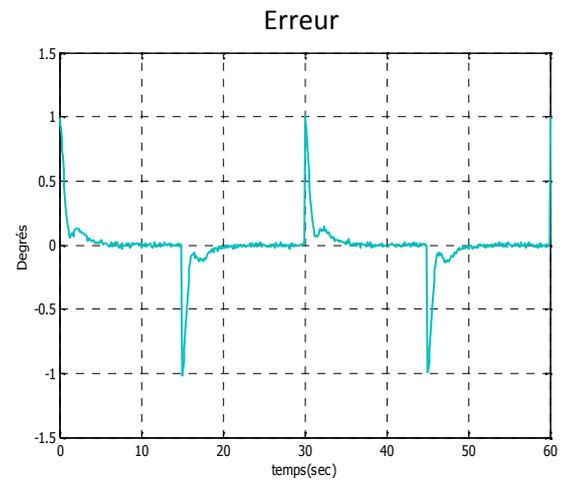
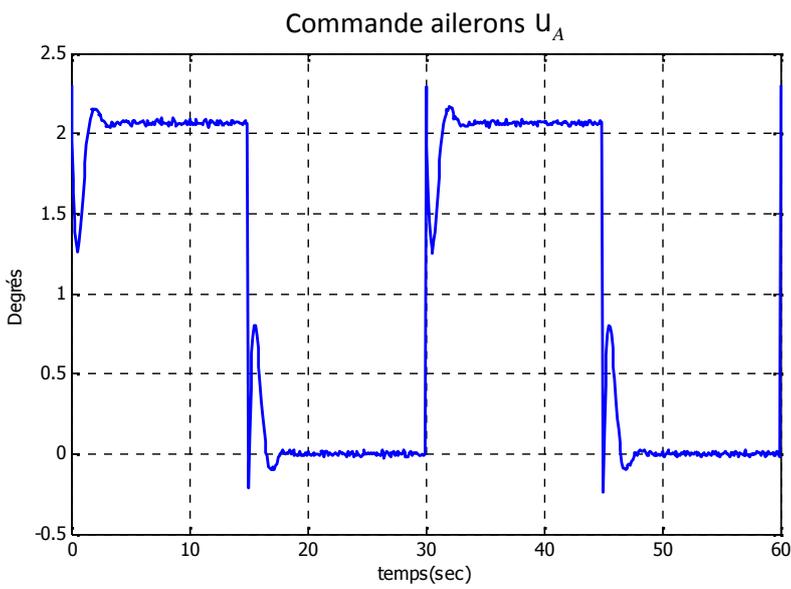
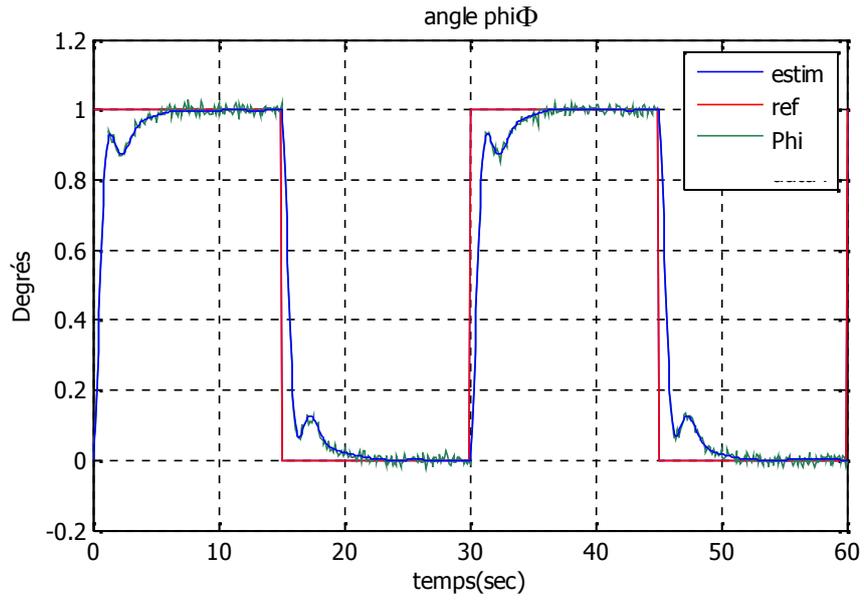


Figure (IV.6) : LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

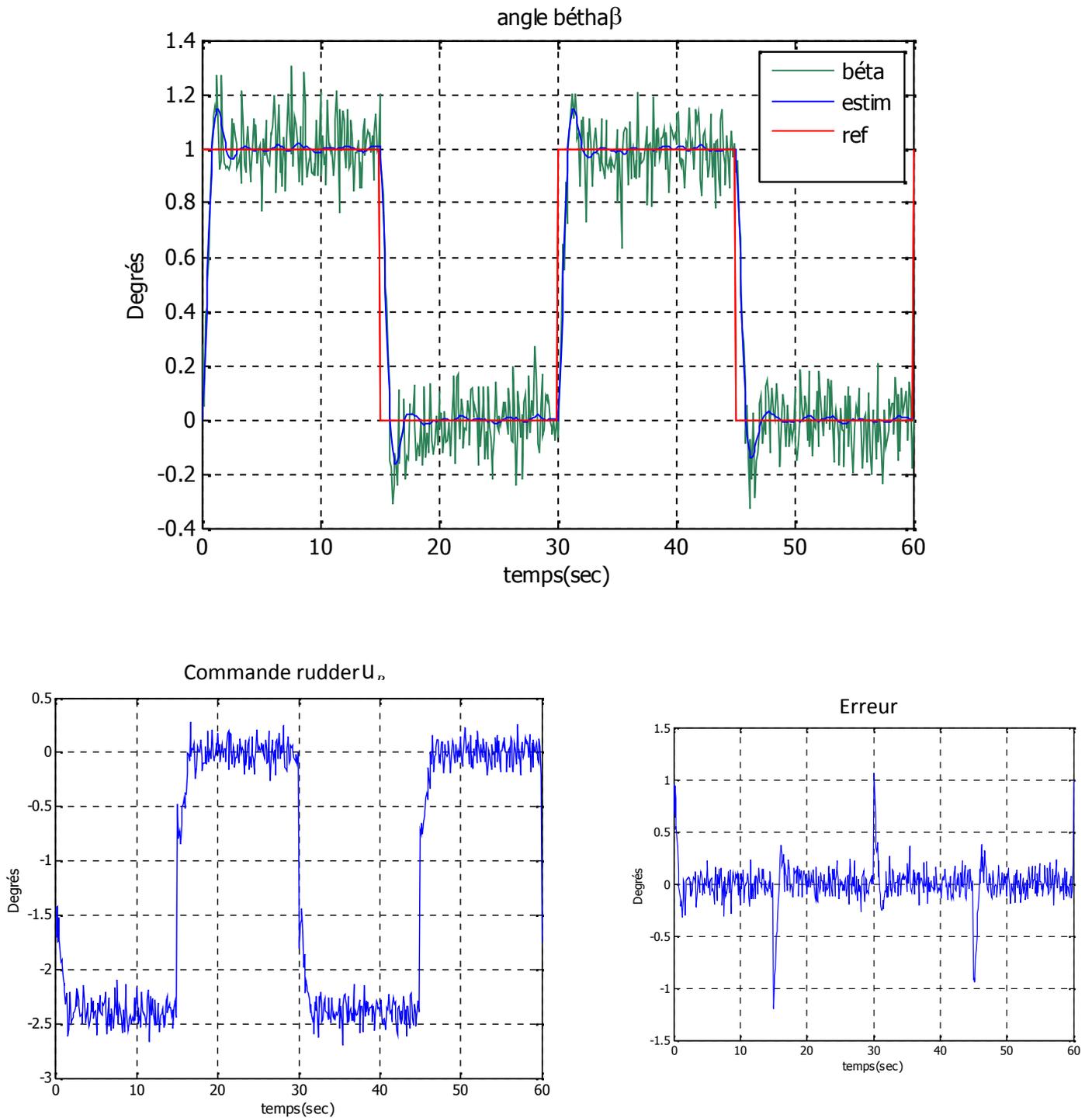


Figure (IV.7) LQG avec perturbation de variance  $10^{-3}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\beta$

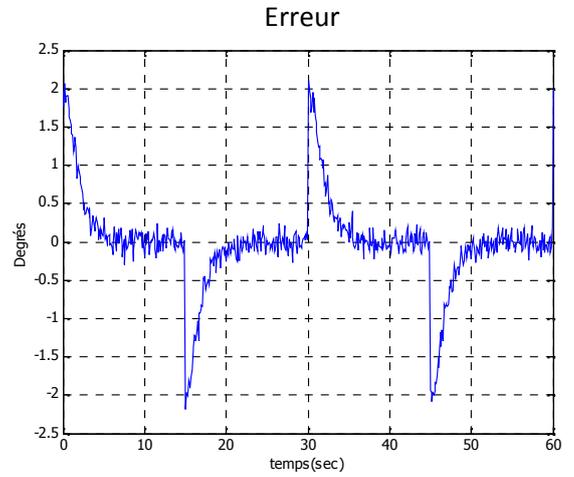
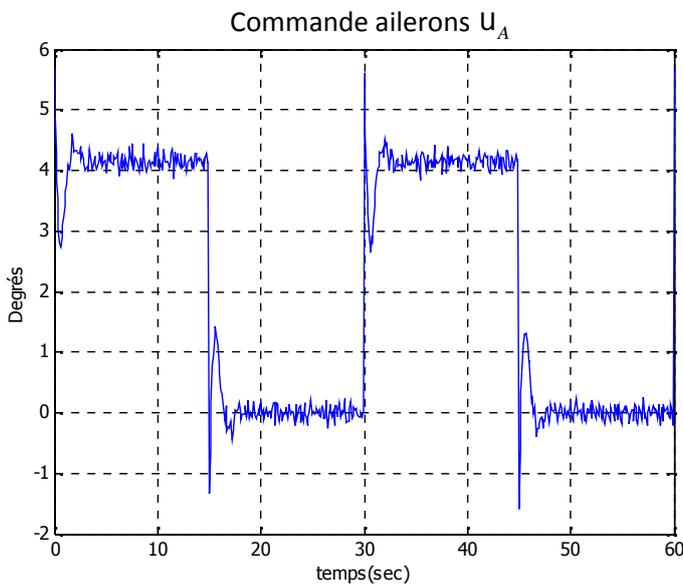
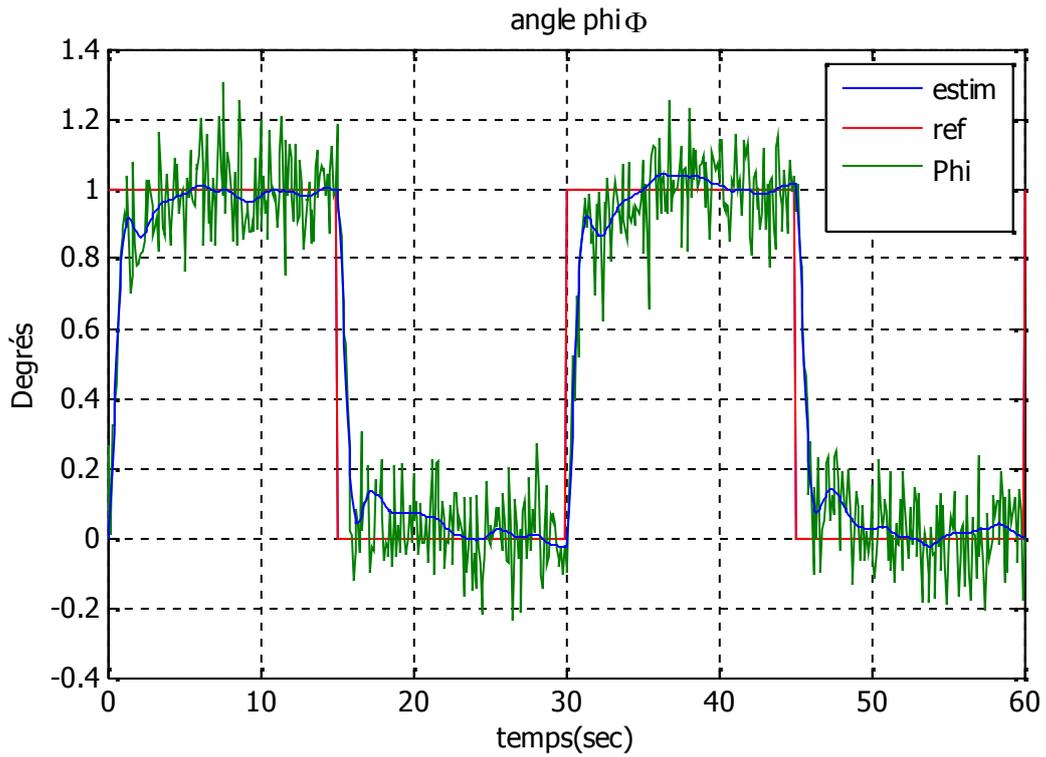


Figure (IV.8) LQG et kalman avec perturbation de variance  $10^{-3}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$ , angle  $\Phi$ .

### III.4.1 Simulation de la panne de rudder :

Avant présenter les résultats correspondent à cette partie on définisse quelque mots clé importants.

**Robustesse :** une commande est dite robuste si on peut garantir la satisfaction d'un certain niveau de performances malgré la présence d'erreur (bornée) de modèle (notion d'incertitude). La robustesse à un caractère global. [12].

#### **Panne:**

"Une panne est une interruption permanente de la capacité d'un système à effectuer une fonction requise dans des conditions de fonctionnement spécifiées ». [21]. Résultant d'un ou plusieurs défauts, une défaillance est donc un cas où termine le fonctionnement d'une unité dans le système. Sur un avion.

#### **Tolérance de panne :**

Système de contrôle tolérant de panne c'est un système de contrôle insensible aux défaillances et capable de commander le système avec satisfaisante représentation même si un ou plusieurs défauts, ou plus en critique, un ou plusieurs échecs se produisent dans ce système. Les systèmes de contrôle tolérant aux pannes peuvent être regroupés dans deux familles principales : contrôleurs tolérant aux pannes passives et contrôleurs tolérant aux pannes actives. [21].

- Figure (IV.9) : cette figure montre le comportement du système par le contrôleur LQG en cas d'une présence d'une panne exprimée par le blocage du Rudder en une position de 5 degrés, et en voulant que l'angle de dérapage atteigne le niveau 1 (step de 1). On constate que la commande assure la poursuite de l'angle désiré après un certain temps, cette intervalle du temps de retard du au fonctionnement normale de la commande mais parce que l'actionneur qui fait tourner l'angle de dérapage est bloqué, la commande commence à compenser le blocage du rudder par une action sur l'actionneur des ailerons pour arriver à l'angle de dérapage commandée, par conséquent on déduit que la commande LQG est tolérante de panne.

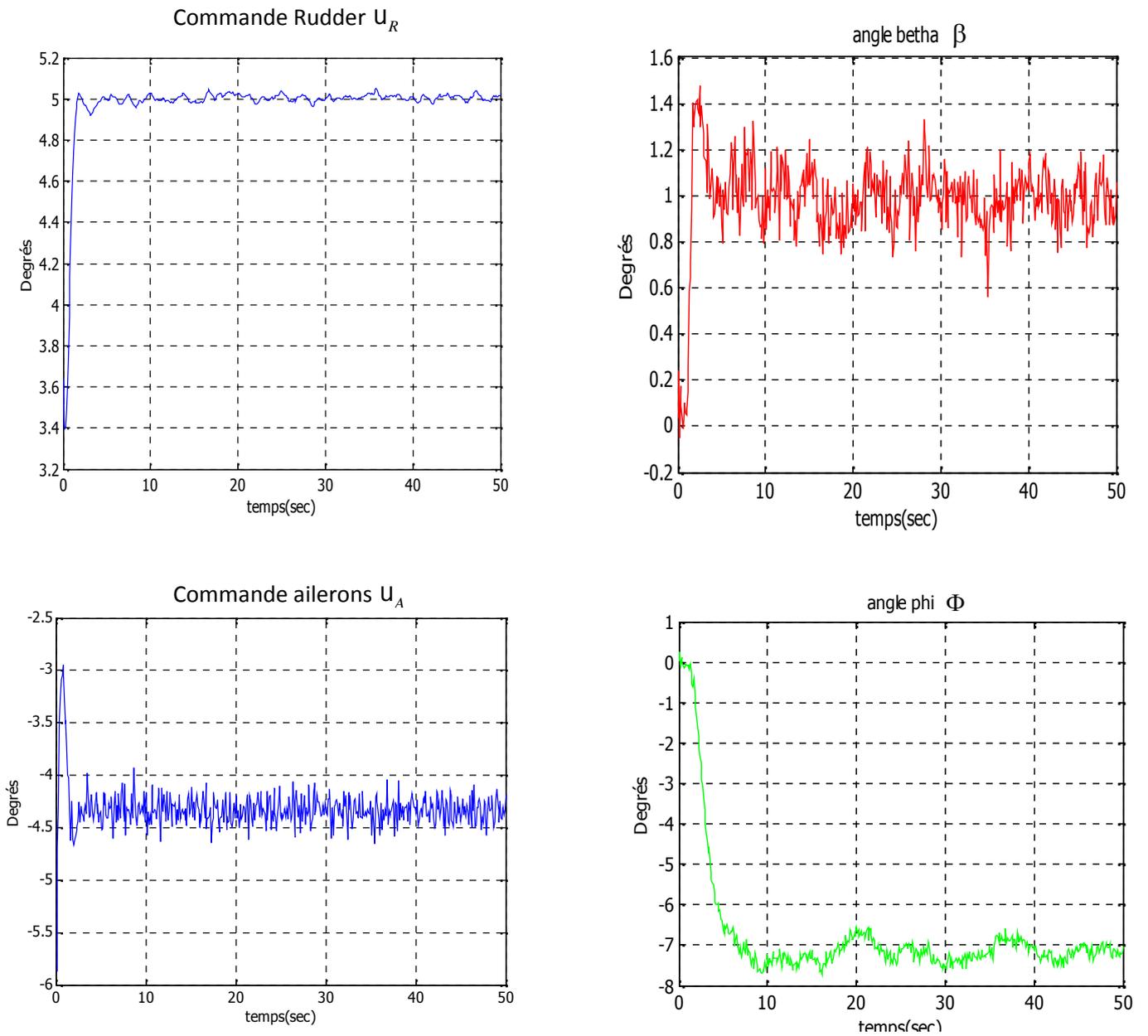


Figure (IV.9) simulation de blocage de Rudder avec perturbation de variance  $10^{-5}$  et pondération  $Q_1$  et  $R_1$

## Conclusion :

✚ Le réglage du correcteur LQG nécessite la donnée de quatre matrices de pondération : Q et R pour le retour d'état ; et celui de l'estimateur. La méthode de réglage la plus simple repose sur un réglage séparé : régler les pondérations de kalman de sorte que l'état soit bien reconstruit et régler Q et R pour avoir un bon retour d'état qui assure la robustesse de la commande et garantit la tolérance aux pannes.

✚ Pour que le comportement du système bouclé ne soit pas modifié de façon notable par la présence de l'estimateur kalman, il suffit que la reconstruction de l'état soit rapide devant la dynamique du système bouclé: autrement dit les pôles de  $(A - K_f C)$  sont de grand module devant ceux de  $(A - B K_c)$ .

La stabilité du système bouclé n'est pas affectée par la présence de l'estimateur si celui-ci est sans biais (c-à-dire tel que  $(A - K_f C)$  soit stable).

✚ Si les dynamiques de la régulation sont relativement lentes devant celles de l'observation, on peut supposer que l'état est parfaitement connu du point de vue du retour d'état et la commande est robuste, le cas où on veut obtenir un régulateur avec des dynamiques élevées, la robustesse n'est plus assurée [18].

### Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire visent essentiellement à étudier la commande linéaire quadratique gaussienne appliqué à un avion de transport de type airbus, Afin de mieux percevoir les principaux apports de ce travail, ceux-ci peuvent être présentés sur trois plans :

- La modélisation de la dynamique de l'avion : il concerne la mise en équations, la validation et la calibration par rapport à des données réelles, Des études paramétriques exhaustives de la dynamique ainsi modélisée et l'écriture de représentations d'état non linéaires, puis grâce à des hypothèses de linéarisation on à découplé le système en deux sous système latéral et longitudinal.
- la mise en œuvre des commandes linéaires des systèmes multivariables : la commande à retour d'état et la commande à retour d'état avec action intégrale.
- Présentation de la loi de la commande LQG (Linéaire Quadratique Gaussienne)
- La mise en œuvre de la commande linéaire quadratique gaussienne afin de contrôler le mouvement de roulis et de lacet, ou nous avons approuvé la robustesse de la commande LQG devant les perturbations externes et les tolérances des pannes.

### Perspectives :

En perspectives on peut poser les questions suivantes : est ce la commande LQG est robuste devant les perturbations internes ? et quels sont les techniques pour améliorer l'optimalité de l'estimateur kalman ?

On peut aussi appliquer la commande LQG mais sur un système avion d'autre type, l'étudier en utilisant le filtre de kalman étendu (KFE) pour une estimation plus précise est moins sensible aux perturbations.

Les paramètres du système doivent être connus et supposé constants, d'où une variation de ces paramètres entrainera une instabilité du système, d'ou la nécessité de faire appel à des lois de commandes non-linéaire qui permettront une meilleure adaptation de la commande et une meilleure poursuite du signal de sortie par rapport au signal de référence.

**Aspect pratique :** l'implémentation de telle commande (Linéaire Quadratique Gaussienne) sur les petits drones est réalisable et assure un contrôle plus au moins efficaces pour des hauteurs limités et des missions comme la photographie et la vidéosurveillance etc....

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. WANNER. «Dynamique du vol et pilotage des avions» département véhicules aérospatiales.
- [2] B. ETKIN: Dynamics of atmospheric f. Wiley, 1972.
- [3] J. ROSKAM. «Airplane flight dynamics and automatic flight controls part1» Third edition university of Kansas, Lawrence, 2001.
- [4] J. ROSKAM «Airplane flight dynamics and automatic flight controls part2», university of Kansas, Lawrence, 1998.
- [5] Fault-Tolerant Flight Control and Guidance Systems for a Small Unmanned Aerial Vehicle.
- [6] B.ETKIN. «Dynamics of flight», 3 editions, 1996.
- [7] L. BOIFFIER. «Notes de cours de dynamique de vol».
- [8] Mme Khelifa, These magistère « commande auto ajustable du vol latéral et longitudinal d'un avion de type Airbus A300 ».Université de Blida octobre 2000.
- [9] Alazard D., Cumer C. et Apkarian P. (1999) "Robustesse et commande optimale", Cépaduès Editions.
- [10] Fossard A.J. et Normand-Cyrot D. (1993) "Systèmes non linéaires", Tome III, Ed. Masson.
- [11] De Larminat P. (1996) "Automatique : Commande des systèmes linéaires", 2ème Edition, Hermès, Collection Automatique.
- [12] [A] Benoît Bergeon Professeur, Commande linéaire des systèmes multivariables, 2012
- [13] B. D. O. Anderson and J. B. Moore, Optimal Control - Linear Quadratic Methods, Canberra Prentice Hall, 1989.
- [14] H BENCHOUBANE. Cour PGRS, Partie sur les commandes linéaires 1995.
- [15] M. H. A. Davis, Linear Estimation and Stochastic Control, Chapman and Hall, 1977.
- [16] Fabrice Villaumé. (2002) "Automatiques : Thèse contribution a la commande des systèmes complexes l'Université de Toulouse III.
- [17] Kimon P. Valavanis Advances in Unmanned Aerial Vehicles State of the Art and the Road to Autonomy University of South Florida Tampa, Florida, USA ISBN 978-1-4020-6114-1 (e-book) © 2007 Springer.
- [18] Dingyü Xue, YangQuan, Chen Derek P. Atherton, Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB, Ralph C. Smith, North Carolina State University, 2007.

## BIBLIOGRAPHIE

- [19] Tewari, Ashish. Advanced control of aircraft, rockets, and spacecraft, © 2011 John Wiley & Sons, Ltd.
- [20] S. S. Wibowo, Aircraft Flight Dynamics, Control and Simulation, Kuala Lumpur, 2007.
- [21] Guillaume J.J. Ducard, PhD Fault-tolerant Flight Control and Guidance Systems Practical Methods for Small Unmanned Aerial Vehicles, Department of Mechanical and Process Engineering ETH Zurich Springer 2009.
- [22] Edouard Laroche, Commande Optimale, Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, 2010.
- [23] D. Alazard Notes de cours Régulation LQ/LQG SUPAERO.
- [24] D. Alazard Notes de cours Introduction au filtre de Kalman SUPAERO Janvier 2005.
- [25] Documentation Help Robust Control Toolbox User's Guide the Math Works 2012.
- [26] Boris J. Lurie and Paul J. Enright Classical Feedback Control with MATLAB California Institute of Technology 2000.
- [27] Dr. Jan Roskam and Dr. Chuan-Tau Edward Lan. "Airplane Aerodynamics and Performance", university of Kansas, Lawrence, First edition 1997.
- [28] Nyquist H., 1932, Regeneration Theory Bell System Tech.
- [29] Bode H.W., 1945, Network Analysis and Feedback Amplifier Design, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J.
- [30] Nichols N.B., 1954, Backlash in a velocity lag servomechanism, Trans. ALEE, 22(2), 173–179.
- [31] Evans W.R., 1954, Control System Dynamics, McGraw Hill Book Company Inc., New York.
- [32] Horowitz I. 1991, Survey of quantitative feedback theory (QFT), International J. Control, 53 (2), 255–291.
- [33] Wiener N., 1949, Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications, New York Technology Press and Wiley (Originally issued in Feb. 1942 as a classified National Defence Research Council Report).
- [34] Kalman R.E., 1960, A new approach to linear filtering and prediction problems, Journal of Basic Engineering, 82, 35–45.
- [35] Rosenbrock H.H., 1974, Computer-aided Control System Design, Academic Press.
- [36] MacFarlane A.G.J., 1971, Linear multivariable feedback theory: a survey, IFAC Symposium on Multivariable Control Systems, Dusseldorf.
- [37] Mayne D.Q., 1973, The design of linear multivariable systems, Automatica, 9, 201–207.

## BIBLIOGRAPHIE

- [38] Zames G., 1979, Feedback and optimal sensitivity: model reference transformation, weighted seminorms, and approximate inverses, Proc. 17th Allerton Conference, 744–752.
- [39] M. J. Grimble Robust Industrial Control Systems—Optimal Design Approach for Polynomial Systems 2006 John Wiley & Sons, Ltd.

# **ANNEXES**

## A. Réponse aux commandes :

### A.1. Introduction :

La réponse de l'avion à l'actuation des principales commandes : gouvernes de profondeur et de direction, ailerons et manette des gaz. Remarquons que ce ne sont pas les seules commandes qui peuvent être employées. Ainsi on a parfois recours à l'orientation de la poussée ou encore à une commande directe de portance. Étroitement liés à ces problèmes sont les réponses de l'avion à un changement de configuration de vol : déflexion des volets hypersustentateurs, lâcher de masses (bombes ou réservoirs), déploiement des aérofreins. .

### A.2. Guidage longitudinal :

Les deux grandeurs principales à contrôler en vol symétrique sont la vitesse et la pente de la trajectoire. Pour ce faire, il faut bien entendu être capable d'appliquer des forces parallèlement et perpendiculairement à la trajectoire de vol. On agit sur les premières au moyen de la commande de poussée (manette des gaz) et en réglant la traînée (aérofreins), et sur les secondes en réglant la portance par l'entremise de la gouverne de profondeur ou de volets. Il est évident, par simple raisonnement physique (ou en se fondant sur les équations du mouvement) que la réponse *initiale* à une augmentation des gaz (et donc de poussée) est une accélération. De même, la principale réponse *initiale* à une déflexion de la gouverne est un mouvement de tangage, qui induit par la suite une variation d'incidence et de portance, et donc un changement de direction de vol.

Asymptotiquement, le nouvel état d'équilibre correspondant aux nouvelles positions des commandes se détermine précédemment. Ainsi, un changement de la poussée à braquage de la gouverne (et donc à incidence) donné produit un changement de pente de la trajectoire sans changement de vitesse. Au contraire, une déflexion de la gouverne modifie l'incidence d'équilibre (cfr section 2.3) et donc la vitesse, ce qui, à poussée constante, entraîne secondairement un changement de pente de la trajectoire.

On constate que les effets initiaux et asymptotiques des commandes sont en quelques sortes inversées. Il est donc nécessaire d'étudier les transitoires qui lient ces réponses initiales et finales. Nous verrons par la suite que ceux-ci sont dominés par l'oscillation faiblement amortie et de longue période qu'est la phugoïde, et que l'état final n'est obtenu que longtemps après l'actuation de la commande.

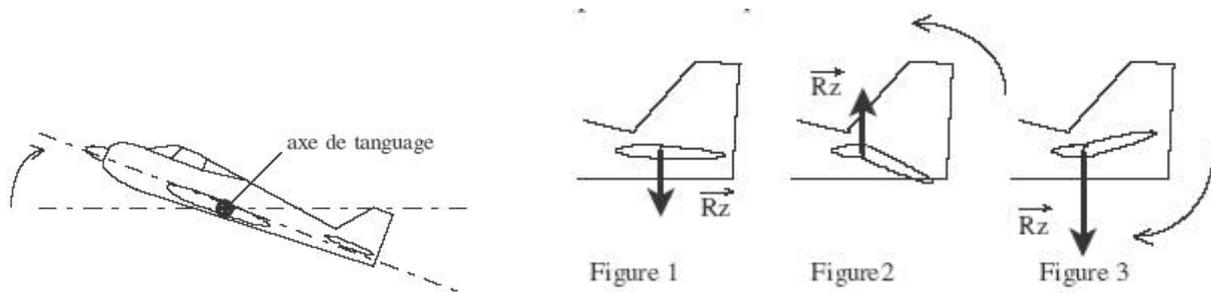


Figure (5.6)- Contrôle de tangage

### A.3. Guidage latéral :

Les fonctions des commandes latérales sont triples :

- assurer l'équilibre en cas d'asymétrie de la poussée due à la défaillance d'un moteur,
- corriger les mouvements indésirés induits par la turbulence atmosphérique,
- permettre d'effectuer les manœuvres de virage.

Les deux premières fonctions s'obtiennent grâce aux couples de lacet et de roulis produits par les commandes. Pour la troisième, il faut appliquer une force horizontale perpendiculaire à la vitesse de l'avion, ce qui s'obtient en inclinant l'avion d'un angle de gîte  $\gamma$ .

Les commandes latérales permettent donc de mettre l'avion en virage comme sous-produit de leur faculté de contrôler l'angle de gîte.

D'ordinaire, les réponses au braquage des ailerons ou de la gouverne de direction sont très compliquées, tous les modes latéraux étant simultanément excités. Dans ce cas, seule la solution des équations non-linéaires du mouvement permet de le décrire correctement.

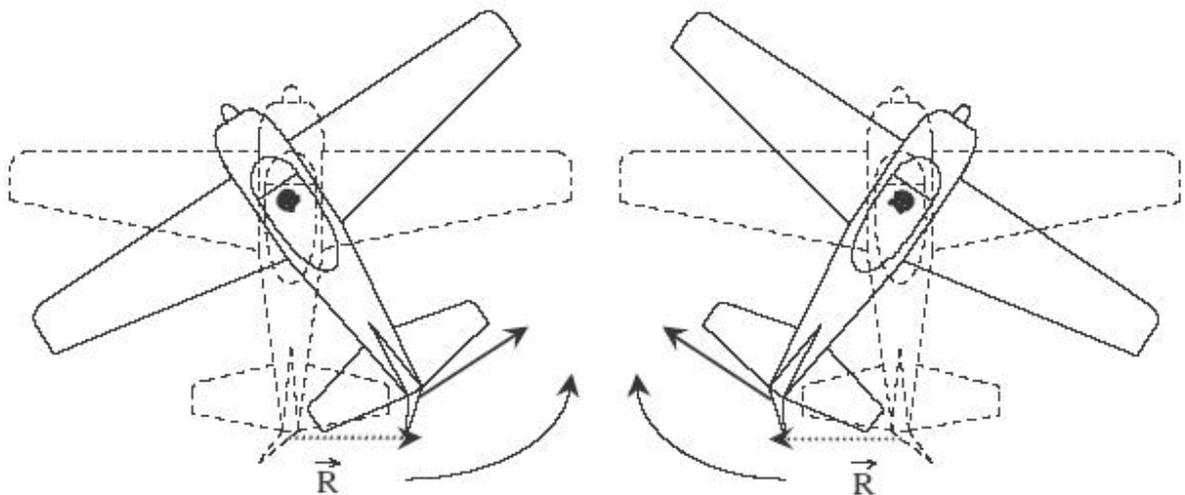


Figure (5.11)- Braquage de la gouverne de direction.

La figure suivante présente les différents créateurs de moments aérodynamiques

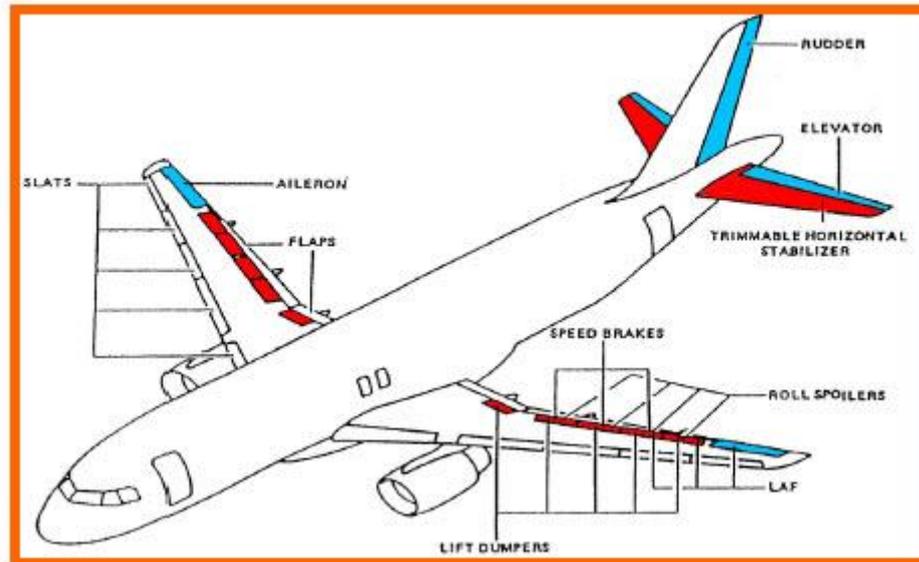


Fig. A.1 suivante présente les différents créateurs de moments aérodynamiques

## B. Démonstration La commande a critère quadratique :

### B.1 Principe

Considérons un système linéaire :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \Gamma(t), \\ y(t) &= Cx(t) + \nu(t),\end{aligned}$$

### B.2 Hypothèse :

La paire (A, B) est stabilisable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de mode instable et ingouvernable dans le système. La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère LQ :

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) S x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t)] dt, \dots\dots\dots (B.1)$$

Avec

$$u^*(t) = R^{-1} B^T \lambda(t) \dots\dots\dots (B.2)$$

**B.3 Démonstration** [23]: La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande  $u(t) = -Kx(t)$  obéit à l'équation :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \dots\dots\dots (B.3)$$

La réponse autonome de  $x(t)$  s'écrit alors.

$$x(t) = e^{A_f t} x_0 \text{ avec } A_f = A - BK \text{ et } x_0 = x(t=0)$$

Le critère J devient :

$$J = \int_0^\infty (x^T(t) Q_x x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \dots\dots\dots (B.4)$$

$$= \int_0^\infty x^T(t) (Q_x + K^T R K) x(t) dt \dots\dots\dots (B.5)$$

$$= x_0^T \left( \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt \right) x_0 \dots\dots\dots (B.6)$$

$$= x_0^T P x_0 \dots\dots\dots (B.7) \quad \text{Avec } P = \left( \int_0^\infty e^{A_f^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A_f t} dt \right)$$

La contrainte  $A_f$  stable entraîne que P vérifie l'équation de LYAPUNOV :

$$A_f^T P + P A_f + Q_x + K^T R K = 0 \dots\dots\dots (B.8)$$

Par ailleurs  $P \geq 0$  car  $J = x_0^T P x_0$  et  $J \geq 0 \quad \forall x_0$  (critère quadratique).

Soit  $K_c$  la valeur optimale de  $K$  qui minimise  $J$ , et  $P_c$  la solution correspondante de l'équation de LYAPUNOV (B.8), soit :

$$(A-BK_c)^T P_c + P_c(A-BK_c) + Q_x + K_c^T R K_c = 0 \quad \dots\dots\dots(B.9)$$

Considérons une variation  $\Delta K$  autour de  $K_c$  ; soit  $P = P_c + \Delta_p$ , alors il en résulte une variation  $\Delta_p$  autour de  $P_c$  ; soit  $P = P_c + \Delta_p$  qui vérifie :

$$(A-B(K_c + \Delta_K))^T (P_c + \Delta_p) + (P_c + \Delta_p)(A-B(K_c + \Delta_K)) + \dots \dots \dots \\ \dots \dots Q_x + (K_c + \Delta_K)^T R (K_c + \Delta_K) = 0 \quad \dots\dots\dots(B.10)$$

$K_c$  est la valeur optimale au sens du critère  $J$ , ssi le critère augmente pour toute variation  $\Delta_K$  autour de  $K_c$  ; soit :  $\Delta_p > 0 \forall \Delta_K / A-B(K_c + \Delta_K)$  stable

(si  $\Delta_K$  est telle que  $A-B(K_c + \Delta_K)$  est instable, alors le critère devient infini). Si on retranche l'équation (B.9) de l'équation (B.10), nous obtenons :

$$(A-B(K_c + \Delta_K))^T \Delta_p - \Delta_K^T B^T P_c + \Delta_p (A-B(K_c + \Delta_K)) + \dots \dots \dots \\ \dots \dots \Delta_K^T R \Delta_K + \Delta_K^T R K_c + K_c^T R \Delta_K = 0$$

$$(A-BK_c)^T \Delta_p + \Delta_p (A-BK_c) + \dots \dots \dots \\ \dots \dots \Delta_K^T (R K_c - B^T P_c) + (R K_c - B^T P_c)^T \Delta_K + \Delta_K^T R \Delta_K = 0$$

C'est une l'équation de LYAPUNOV.  $A-BK_c$  étant stable,  $\Delta_p$  est positif ssi (théorème de Lyapunov) :

$$\Delta_K^T (R K_c - B^T P_c) + (R K_c - B^T P_c)^T \Delta_K + \Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \Delta_K$$

or  $\Delta_K^T R \Delta_K > 0 \quad \forall \Delta_K$  car  $R > 0$ , il faut donc que :

$$R K_c - B^T P_c = 0, \text{ soit :}$$

$$K_c = R^{-1} B^T P_c$$

Si on reporte cette l'équation dans l'équation (B.9), nous obtenons l'équation de RICCATI de commande :

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0.$$

Remarque : Cette démonstration s'appuie sur le théorème de LYAPUNOV. Une démonstration plus générale utilise le principe du maximum (voir [4], par rapport à ce cadre plus général, le cas qui nous traitons ici est celui de la régulation à horizon libre des systèmes linéaires avec un critère quadratique). [23].

### C.1 BRUIT BLANC GAUSSIEN : [23]

Un bruit blanc est un signal aléatoire stationnaire de puissance infinie dont la fonction d'auto-corrélation est proportionnelle à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés  $w(t)$  et  $v(t)$  que nous allons utiliser dans le cadre du filtre de KALMAN sont donc entièrement définis par leur densités spectrales respectives  $W(t)$  et  $V(t)$  :

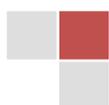
$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau), \quad E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau) \quad \dots(C.1)$$

Bien que toute la théorie de KALMAN soit valable dans le cas non-stationnaire, nous supposons de plus que les bruits blancs gaussiens centrés  $w(t)$  et  $v(t)$  sont de plus stationnaires et indépendants :

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W\delta(t), \quad \dots(C.2)$$

$$E[v(t)v(t+\tau)^T] = V\delta(t), \quad \dots(C.3)$$

$$E[v(t)w(t+\tau)^T] = 0. \quad \dots(C.4)$$



MASTER : CNS/ATM | Email :d\_zaero@hotmail.fr  
September 2012