

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université SAÂD DAHLAB de Blida

Faculté de Technologie

Département d'Aéronautique

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

Spécialité : **Aéronautique**

Option : **Propulsion**

Par:

GUELMOUNA Mohamed

SAYAH Djamel eddine

Thème

**Etude de la première Instabilité de Taylor-Couette par
processus des systèmes dynamiques**

Directeurs de mémoire :

Pr. REZOUG Tahar

Pr. BOUKRAA Salah

Soutenu publiquement le : **13 / 12 / 2012** devant le jury composé de :

Mr. Z. Benaouda	Professeur Université de Blida	Président
Mr. E. Khali	Maître de Conférences Université de Blida	Rapporteur
Mr. A. Allali	Maître de Conférences Université de Blida	Examinateur
Mr. S. Boukraa	Professeur Université de Blida	Directeur de mémoire
Mr. T. Rezoug	Professeur Université de Blida	Directeur de mémoire

ملخص:

إن تدفق (تايلور- كوات) هودفق السائل بين أسطوانتين متحدتي المركز, الأسطوانة الداخلية تدور بسرعة معينة وثابتة, أما الأسطوانة الخارجية فهي في حالة سكون . هذا التكوين يمثل حالة عدم الإستقرار الهيدروديناميكي والإنتقال للإضطراب (الفوضى الحيوية).

من أجل السرعات الزاوية المنخفضة , يكون التدفق الأولي ثابتا بدلالة الزمن ومتناظر محوريا, كما يكون متناسقا بالإنتقال العمودي.

بمجرد تجاوز قيمة معينة, نلاحظ أن هذا التدفق يصبح غير مستقر, و يظهر نمط من لفات حلقيه الشكل و متضادة الدوران التي تمتد في كافة أنحاء الأسطوانة, ويبقى هذا التدفق متناظر محوريا و ثابت بدلالة الزمن, ولكن هذه المرة التناظر بالإنتقال العمودي يختفي.

عندما نزيد في السرعة الزاوية, فإن هذا التدفق المنظم قد يتحول إلى وضعية عدم الإستقرار, و يمكن أن ينتقل إلى حالة التدم.

هذه المذكرة تشمل دراسة حالة عدم الإستقرار الأولي لتدفق (تايلور- كوات) عن طريق المحاكاة الرقمية و هذا باستخدام كل من البرمجيات GAMBIT-FLUENT كدراسة أولية . ثم ننتقل إلى الخطوة الثانية من أجل دراسة هذه الحالة من عدم الإستقرار الأولي باتباع نهج آخر يدعى هاميلتونايان, وهو يختلف تماما عما يتم تقليديا في مكانيك الموائع الرقمية. هذا النهج هو عملية تستند إلى النظم الديناميكية التي وضعت في الفيزياء النظرية.

الهدف من هذه الدراسة, هو تسليط الضوء على مدى مساهمة هذه الطريقة الجديدة في العثور على حالة عدم الإستقرار الأولي التي تم التطرق إليها في هذا النموذج, وهذا باستخدام التكامل الرقمي (رونج - كوتا) بترتيب 4, ومقارنة هذا النهج مع غيره في مجال مكانيك الموائع.

كلمات رئيسية : تايلور- كوات, أسطوانتين متحدتي المركز, عدم الإستقرار, المحاكاة الرقمية, هاميلتونايان, النظم الديناميكية.

Abstract:

The Taylor-Couette flow is the flow fluid between two concentric cylinders, the interior cylinder rotating at certain velocity and the outer cylinder being immobile. This configuration presents the case of hydrodynamic instabilities and transition (dynamic Chaos) to turbulence.

Indeed at low angular velocities, the initial flow is stationary, axisymmetric and invariant by vertical translation. As soon as we exceed a certain value, we note that this flow becomes unstable, and it appears a pattern of counter rotating ring rolls which extend around the cylinder, the flow always remains axisymmetric and stationary but this time the vertical translational symmetry disappears.

By increasing the angular velocity more, this structured flow may become in its turn unstable and transit to turbulence.

This memory consists to study the first instability of Taylor-Couette by numerical simulation using the two software GAMBIT-FLUENT, like preliminary study, then we pass at the second step to study this instability by another approach called HAMILTONIAN deferent by what is classically done in computational fluid mechanics. This approach is a process based on dynamical systems developed in theoretical physics.

The objective consists in clarifying the contribution of this new method to find the situation of instability described by this model using a numerical integration of the fourth order Runge-Kutta method, and to compare this approach with the others of the fluid mechanics field.

Key Words: Taylor-Couette, concentric cylinders, instability, numerical simulation, Hamiltonian, dynamical systems.

Résumé :

L'écoulement de Taylor-Couette est l'écoulement de fluide entre deux cylindres concentriques, le cylindre intérieur tournant à une certaine vitesse et le cylindre extérieur étant immobile. Cette configuration présente le cas des instabilités hydrodynamiques et de transition (Chaos dynamique) vers la turbulence.

En effet pour de faibles vitesses angulaires, l'écoulement initial est stationnaire, axisymétrique et invariant par translation verticale.

Dés qu'on dépasse une certaine valeur, on constate que cet écoulement devient instable, et il apparaît un motif de rouleaux toriques contrarotatifs qui s'étendent tout autour du cylindre, l'écoulement reste toujours axisymétrique et stationnaire, mais cette fois la symétrie de translation verticale disparaît.

En augmentant davantage la vitesse angulaire, cet écoulement structuré peut devenir à son tour instable, et transiter vers la turbulence.

Ce mémoire consiste à étudier la première instabilité de Taylor-Couette par simulation numérique utilisant les deux logiciels GAMBIT-FLUENT, comme étude préliminaire, puis on passe à la deuxième étape pour étudier cette situation d'instabilité par une autre approche appelée HAMILTONIENNE différente par ce qui est fait classiquement en mécanique des fluides numériques. Cette approche est un processus basé sur les systèmes dynamiques développés en physique théorique.

L'objectif consiste à mettre en lumière la contribution de cette nouvelle méthode pour retrouver la situation d'instabilité décrite par ce modèle en utilisant une intégration numérique de Runge-Kutta d'ordre quatre, et de comparer cette approche avec les autres du domaine de la mécanique des fluides.

Mots clés : Taylor-Couette, cylindres concentriques, instabilité, simulation numérique, Hamiltonien, systèmes dynamiques.

Remerciements

Nos remerciements vont tout d'abord et en premier lieu à Dieu.

Le travail qui fait l'objet de ce mémoire a été effectué au Laboratoire des Sciences Aéronautiques de l'université Saâd Dahlab de Blida sous la direction de Monsieur Tahar Rezoug.

Nous voudrions exprimer nos remerciements les plus respectueux à nos directeurs de mémoire : Le Professeur Salah Boukraa, pour sa très grande disponibilité, sa gentillesse et son dynamisme pendant cette étude.

Et le professeur Tahar Rezoug, pour nous avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils, pour sa bonne humeur, et surtout pour ses encouragements qui ont contribué à alimenter nos réflexions et qui nous ont permis aussi de mener à bien ce travail.

Au-delà de leurs qualités humaines rares et très appréciables, ils ont su nous mettre dans des conditions idéales pour réaliser ce mémoire. Travailler avec eux fut pour nous un véritable plaisir.

Nous exprimons notre profonde gratitude à Monsieur Le Professeur Z. Benaouda qui nous a fait l'honneur d'avoir accepté la lourde tâche de présider le jury et qui a bien voulu juger ce mémoire.

Nous sommes très redevables envers Monsieur E.Khali, qui a pratiquement vu naître ce travail et qui au début comme à la fin a formulé des critiques très fructueuses et a accepté d'être rapporteur et membre du jury.

Nous adressons également nos plus vifs remerciements à Monsieur A.Allali pour ses remarques et ses critiques judicieuses, il nous a aidés à mettre les dernières retouches à ce mémoire. Qu'il trouve, ici, l'expression de notre profonde reconnaissance. Nous le remercions également d'avoir accepté la tâche d'examiner ce travail.

Notre recherche n'aurait pu aboutir sans l'aide de nombreuses personnes. Nous adressons aussi, dans cette page traditionnelle, une pensée particulière à l'équipe de laboratoire de Thermodynamique et Systèmes Energétiques de l'université de Bab Ezzouar, à

Mlle Hamidi Narimène et à Monsieur Kamel Benazout, qui nous ont énormément aidés pendant cette longue étude.

Nous avons pu travailler dans un cadre particulièrement agréable, grâce à tous les enseignants et les personnels du département d'aéronautique (scolarité, bibliothèque, administration,...) qui ont contribué de près ou de loin à notre formation en aéronautique. Merci de nous avoir encadrés, observés, aidés, conseillés et critiqués.

Ces remerciements ne seraient pas complets sans une pensée pour nos parents qui nous ont permis de poursuivre nos études jusqu'à aujourd'hui.

Enfin, une pensée émue pour tous les étudiants de D.A.B sans exception, et surtout avec qui nous avons partagé une salle, un café, un repas ou une console d'ordinateur pendant notre cursus.

Merci à tous ...

Sayah & Guelmouna

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم
(قل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)
صدق الله العظيم

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك، ولا يطيب النهار إلا بطاعتك، ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك، ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك، ولا تطيب الجنة إلا برويتك جل جلالك، والصلاة والسلام على نبيك الذي دعا على بصيرة، وتولاك فكنت وليه ونصيره، نبي الرحمة ونور العالمين وعلى اله المتبعين لسنة.

إلى المتربعة على عرش الأيام، الطفلة التي عمرت بيتها من الحب والحجارة، المهرة الأصيلة التي طالما سبقت دنياها وزمانها، إلى الجزائر الأبية وشهداءها البواسل.

إلى روح والدي أكرم الله نزله ووسع مدخله وأحقه بصالح المؤمنين وجعله في كفالة إبراهيم.

إلى بسمه الحياة وسر الوجود، إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي، إلى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها، إلى التي لا تغيبه الكلمات والشكر والعرفان بالجميل، إلى من ركع العطاء أمام قدميها وأعطتني من دمها وروحها وعمرها حبا وتصميما ودفعا لغد أجمل، إلى أغلى الحبايب أمي الحبيبة، أرجو من الله أن يمد في عمرك لتري ثماراً قد حان قطافها بعد طول انتظار، وستبقى كلماتك نجوم أهدي بها اليوم وفي الغد وإلى الأبد.

إلى ورود المحبة ونبابيع الوفاء، إلى من رافقوني في السراء والضراء، إلى اصديق الأصحاب إخوتي.

إلى من بهن أكبر وعليهن أعتد، إلى شمعة متقدة تنير ظلمة حياتي، إلى من بوجودهن أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها، إلى من عرفت معهن معنى الحياة إلى أخواتي، أحبكن حبا لو مر على أرض قاحلة لتفجرت منها ينبابيع المحبة.

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره أو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائله فأظهر بسماحته تواضع العلماء وبرحابته سماحة العارفين، إلى الشموع التي ذابت في كبرياء لتنير كل خطوة في دربي لتذلل كل عائق أمامي، فكانوا رسلاً للعلم والأخلاق، إلى كل من علمني حرفاً أصبح سنا برقه يضيء الطريق أمامي، شكراً لكم جميعاً.

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنتقل السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة، وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات، ذكريات الأخوة البعيدة، إلى الذين أحببتهم وأحبوني، أصدقائي، إلى من شاركوني طفولتي وقضيت معهم أسعد الأوقات، إلى رفاق حياتي الذين عشت معهم أجمل لحظات حياتي. بأنامل تحيط بقلم أعياء التعب والأرق ولا يقوى على الحراك، يتكأ على قطرات حبر مملوءة بالحزن والفرح في أن واحد، فرح لبزوغ فجر جديد من حياتي هو يوم تخرجني، وحزن يشوبه الفراق بعد التجمع، و بدموع ساقطة وأعين ذارفة لفراق لمن كانوا و سيبقون الإخوة، إلى الذين سعدت برفقتهم في الجامعة، إلى الذين أرجو أن يجمعني بهم الله مرة أخرى، إلى زملاء الدراسة الذين أمضيت معهم لحظات، لحظات سعيدة كانت أو حزينة، التقينا فيها أو افترقنا، تعاهدنا أو تواعدنا، وسوف تصبح الذكري في عقولنا وقلوبنا ولن نرحل، فالسنين بالأحبة أئمن، ويكفي أن نحمل معا ابتسامة لنفس الذكرى تنقذنا أحياناً من الوحدة لتجمل ملامحنا، ومن أعرق نقطة صفاء في نفسي أقول لكم شكراً، على صداقتكم، شكراً على ودمكم، شكراً على أوقات فرح قضيتها معكم، هزمت أحزاني وأنتم لا تدرون، شكراً على وجودكم إلى جانبي دوماً، وبهذا سوف تنطوي صفحة، وقبل أن تطوى أقول لكم أن أغلى هدية قدمتها لي الدنيا هي معرفتكم، ومعرفة قلوبكم الطيبة، فشكراً لكم ولها، وعذرا إن قصرت في حق شخص منكم أو أخطأت، عذرا لقلوب أحببتي لا أعلم أهى راضية عني أم ساخطة علي، لفعل جهلته أو تقصير تماديت به، لعلمي في هذه الكلمات البسيطة الحروف التي تتمايل بتمايل أنامل عاجزة عن تكلمة هذا الإهداء بسبب الفراق لصرح ضمني بين أحضانه لغترات.

إلى من حملهم قلبي ونسيهم قلبي، إلى كل من أراد معرفتي، أبعث أرق تحية وأعذب سيمفونية وأردها لكم بأني أحببتكم من كل قلب، سيقف قلبي هنا برهة ليستقر بين أنضارك ما كتبت، لعلها هذه المفردات تكون خير معينة حتى تتذكروني يوماً ما.

سايح جمال الدين . . .

Sayah Djamel Eddine . . .

إهداء

باسم الخالق الذي أضاء الكون بنوره البهي وحده أعبد وله وحده أسجد خاشعا شاكرا لنعمته وفضله علي في إتمام هذا الجهد...

إلى صاحب الفردوس الأعلى وسراج الأمة المنير وشفيعها النذير البشير محمد - صلى الله عليه وسلم- فخرا واعتزازا...

إلى من سهر الليالي... ونسي الغوا لي... وظل سندي الموالي... وحمل همي غير مبالي... إلى سندي

وقوتي وملاذي بعد الله إلى من آثروني على أنفسهم إلى من علموني علم الحياة... إلى أمي وأبي...

إلى من أظهروا لي ما هو أجمل من الحياة... إلى إخوتي...

إلى من كانوا ملاذي وملجئي...

إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات...

إلى من سافقتهم... إلى طلاب قسم الطيران...

إلى من جعلهم الله إخوتي بالله... و من أحببتهم بالله... إلى زملائي...

إلى من يجمع بين سعادتي وحزني... إلى من لم أعرفهم ولن يعرفوني...

إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة...

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة... إلى جميع أساتذتنا الأفاضل...

إلى من أتمنى أن أذكرهم... إذا ذكروني...

إلى من أتمنى أن تبقى صورهم... في عيوني...

إلى الأرواح التي سكنت تحت تراب الوطن الحبيب... إلى الشهداء العظام...

قلمونة محمد

Guelmouna Mohamed

TABLE DES MATIÈRES

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Nomenclature

Introduction Générale.....02

Chapitre I : Etude Bibliographique

Introduction	07
I.1.1. Historique de l'écoulement de Taylor – Couette.....	08
I.1.2. Les applications technologiques et industrielles	10
I.2. Etude théorique.....	12
I.2.1 Principe de l'écoulement Taylor Couette	12
I.2.2. Paramètres de contrôle	13
I.2.2.1 Nombre de Reynolds(R_e).....	13
I.2.2.2 Nombre de Taylor (Ta)	14
I.2.3. Stabilité de l'écoulement de TAYLOR-COUETTE	14
I.2.3.1. Critère de Rayleigh.....	14
I.2.3.2. Effet de la viscosité	16
I.2.4. Diagramme de stabilité	17
I.2.5. Etats d'écoulement	18
I.2.5.1. Ecoulement de base	18
I.2.5.2. Transitions Couette-Taylor (Taylor Vortex Flow).....	19
I.2.5.3. Ecoulement tourbillonnaire ondulant (Wavy Vortex Flow)	20
I.2.5.4. Ecoulement de Taylor turbulent (ou Régime chaotique ou turbulent naissant) ...	21
I.2.5.5. Écoulement turbulent (Turbulence développé)	21

I.2.5.6. Récapitulatif des différents régimes	22
I.2.6. Paramètres influençant l'écoulement de Taylor-Couette	22
I.2.6.1. Effet dynamique	22
I.2.6.2. Effet géométrique	22
I.2.6.3. Effet de l'accélération	23
I.3. Formulation mathématique du problème de Taylor-Couette	23
I.3.1. Description du Problème physique	23
I.3.2. Hypothèses simplificatrices	24
I.3.3. Les équations de conservation	24
I.3.3.1. Conservation de la quantité de mouvement	24
I.3.3.1.1. Direction radiale	25
I.3.3.1.2. Direction tangentielle	25
I.3.3.1.3. Direction axiale	25
I.3.3.2. Equation de continuité	25
I.3.4. Equations du mouvement en régime laminaire stable	25
I.3.5. Conditions aux limites	26
Conclusion	28

Chapitre II : Modélisation & Résolution Numérique

Introduction	30
II -1. Expérience de validation	30
II -1.1. Description du dispositif expérimentale	30
II -1.2. La transmission du mouvement rotatif	32
II.2. Description du problème	32
II.3. Présentation des logiciels	32
II.4. Construction sous GAMBIT	33
II.4.1. GAMBIT	33
II.4.2. Représentation de la géométrie	33
II.4.3. Le maillage	34
II.4.4. Conditions aux limites	35
II.5. La résolution par le solveur	36
II.5.1. Présentation de "Fluent"	37

II .5.2. Méthode des Volumes Finis	37
II .5.3. Procédure sous "Fluent"	38
II .5.3.1. Simple précision ou double précision	38
II .5.3.2. Choix de la formulation du solveur	39
II .5.3.3. Schémas de discrétisation	39
II .5.3.4. Choix du schéma d'interpolation de la pression	40
II .5.3.5. Choix de la méthode de couplage Pression-Vitesse	40
II .5.3.6. Facteurs de relaxation	42
II .5.3.7. Initialisation	42
Conclusion	44

Chapitre III : Résultats & Discussions

Introduction.....	46
III .1.Effet de maillage	46
III. 2. Validation des résultats numérique	47
III.3. Etude de la première instabilité _	48
III.3.1.Champ de vitesse Axiale	50
III.3.1.1.Evaluation des cellules de Taylor et des couches d'Ekman	50
III.3. 2.Champ de pression statique	54
III.3. 3.Champ de pression dynamique	56
III.4. 1. Profil de vitesse axiale	58
III.4. 2. Profil de pression statique	60
III.4. 3. Profil de pression dynamique	61
Conclusion	63

Chapitre IV : Résolution par L'approche Hamiltonienne

Introduction	65
IV.1. Approche Hamiltonienne en mécanique	66
IV.1.1. Hamiltonien	66
IV.1.2. Equations de Hamilton	66
IV.1.3. Transformation canoniques	67

IV.2.Hamiltonien en mécanique des fluides	67
IV.2.1. Hypothèses simplificatrices	68
IV.2.2. Rappel de la mécanique des fluides	68
IV.2.3.1. Equations de Navier-Stokes.....	69
IV.2.3.2. Equation de continuité	70
IV.2.4.Modèle considéré	71
IV.2.4.1. Champ de vitesse	71
IV.2.4.2. Condition initiale	72
IV.2.5. Méthode de Runge-Kutta	73
IV.2.6. Organigramme du programme numérique	74
IV.3. Résultats	76
IV.3.1. Validation de la méthode	76
IV.3.2. Trajectoire des particules fluides	77
IV.3.3. Ligne de courant	80
IV.3.4. Champ de vitesse axiale	81
IV.3.5. Champ de vitesse radiale	82
IV.3.6. Profil de vitesse axiale	83
Conclusion	85
Conclusion Générale	87
Références Bibliographiques	89

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 : Palier à roulement ; interposé entre les paliers et les arbres des systèmes mécaniques en rotation	10
Figure I.2 : Palier de transmission des vitesses dans les machines tournantes	11
Figure I.3 : Pompes à centrifugations employées dans les industries pharmaceutiques et chimiques	11
Figure I.4 : Représentation schématique du rotor-stator configuration et notations	12
Figure I.5 : Ecoulement de Taylor Couette	13
Figure I.6 : Structure en rouleaux toroïdaux de l'écoulement bifurqué	15
Figure I.7 : Diagramme de stabilité d'après COLES ($R_2 \setminus R_1 = 0/5$)	17
Figure I.8 : Ecoulement circulaire de COUETTE d'un cylindre intérieur tournant et extérieur immobile	18
Figure I.9 : Tourbillons de l'écoulement de Taylor laminaire d'après OHMURA, (1997) ...	19
Figure I.10 : visualisations du régime d'onde de la seconde instabilité (WVF).....	21
Figure II.1 : configuration géométrique	34
Figure II.2 : Maillage du domaine de simulation	35
Figure II.3 : condition aux limites	36
Figure III.1 : L'évolution du nombre de Taylor en fonction du nombre de mailles	47
Figure III.2.A : résultat expérimental.....	48
Figure III.2.B : résultat numérique	48
Figure III.3 . Processus de développement de la première instabilité (Champ de vitesse axial)	52
Figure III.4 . Champ de vitesse axiale dans le plan(r, z).....	54
Figure III.5 . Champ de pression statique dans le plan(r, z).	56
Figure III.6 . Champ de pression dynamique dans le plan(r, z).	58

Figure III.7 : Profil de la vitesse axiale selon la direction radiale ($Ta=41.33$)	58
Figure III.8 : L'évolution de la pression statique le long de l'entrefer pour ($Ta=41.33$).....	60
Figure III.9: Evolution de la pression dynamique selon la direction radiale ($Ta=41.33$).....	61
Figure IV.1 : comparaison des résultats. (A).visualisation expérimentale, (B) résultat théorique	76
Figure IV.2 : Représentation de la trajectoire des particules fluides par l'approche Hamiltonienne pour différents temps	79
Figure IV.3. : Représentation des lignes de courant.....	80
Figure IV.4. : Contour de la vitesse axiale (A) : obtenu par la simulation numérique, (B) : obtenu par l'approche Hamiltonienne	81
Figure IV.5. : Contour de la vitesse radiale ; (A) : obtenu par la simulation numérique, (B) : obtenu par l'approche Hamiltonienne.	82
Figure IV.6. : Profil de la vitesse axiale au niveau $Z = 0.15 m$ pour $Ta = 41.33$	84
Figure IV.7. : Profil de la vitesse axiale au niveau $Z = 0.05 m$ pour $Ta = 41.33$	84

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I.1 : Récapitulatif des régimes d'écoulement en fonction du nombre de Taylor	22
Tableau II.1 : Schéma d'interpolation	40
Tableau II.2 : Facteurs de sous-relaxation	42
Tableau III.1 : Représentation du Ta critique en fonction du nombre de maille	46
Tableau III.2 : Représentation de la vitesse de rotation, nombre de Taylor et Nombre de Reynolds	49

NOMENCLATURE

Liste des Symboles utilisés :

R_1	Rayon du cylindre intérieur
R_2	Rayon du cylindre extérieur
$d = R_2 - R_1$	Espace annulaire
h	Hauteur
δ	Jeu radiale
Ta	Nombre de Taylor
Ta_{c1}	Nombre de Taylor critique de la première instabilité
Ta_{c2}	Nombre de Taylor critique de la deuxième instabilité
Ta_{c3}	Nombre de Taylor critique de la troisième instabilité
Ta_{c4}	Nombre de Taylor critique de la quatrième instabilité
H	Hamiltonien
p_α	Quantités de mouvement
\dot{q}_α	Vitesse généralisées
L	Lagrangien
\mathcal{H}	Hamiltonien des variables canoniques
P	Pression
t	Temps
ρ	Masse volumique
ν	Viscosité cinématique
Re	Nombre de Reynolds
Re_c	Nombre de Reynolds critique
ψ	Fonction de courant
V_0	Vitesse
Ω_1	Vitesse angulaire du cylindre intérieur
Ω_2	Vitesse angulaire du cylindre extérieur

V_θ	Vitesse tangentielle
r	Rayon
μ	Viscosité dynamique
Ω	Vitesse angulaire
Γ	Facteur d'aspect ou Taux de remplissage
Δt	Pas du temps
η	Rapport des rayons
n	Discrétisation suivant x
m	Discrétisation suivant y
l	Discrétisation temporelle
t_i	Temps initial
t_f	Temps final
x_0, y_0	Position initiale suivant x, y
x_t, y_t	Position à chaque instant t
$x(i, j), y(i, j)$	Nœuds du maillage
(Q_α, P_α)	Variables canoniques
(x, y, z)	Coordonné cartésienne
(r, θ, z)	Coordonné cylindrique
(u, v, w)	Composante de la vitesse
(g_r, g_θ, g_z)	Composante de la gravité
$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$	Composante de la vitesse

Liste des Abréviations utilisées :

$grad$	Gradient
div	Divergence
EDO	Equation Différentielle Ordinaire
TVF	Rouleaux de Taylor

<i>CCF</i>	Écoulement Circulaire De Couette
<i>WVF</i>	Rouleaux Ondulés
<i>MWVF</i>	Rouleaux Ondulés Modulés
<i>TTVF</i>	Rouleaux De Taylor Turbulent
<i>MDF</i>	Mécanique Des Fluides
<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>CAO</i>	Conception Assisté par Ordinateur
<i>RK4</i>	Runge-Kutta d'ordre 4

Introduction
Générale

Introduction générale :

Les phénomènes d'instabilité revêtent une importance primordiale dans la définition de la plupart des écoulements et la prévision de leurs propriétés. L'intérêt d'une connaissance approfondie des mécanismes mis en cause apparaît évident, qu'il s'agisse de mieux comprendre certains phénomènes naturels en Physique, Océanographie, Météorologie et Astrophysique ou de s'assurer la maîtrise et le contrôle des opérations industrielles en Aéronautique, Génie Atomique et Chimique ...etc.

Dans la mécanique des fluides la théorie de l'instabilité hydrodynamique fait désormais partie de l'arsenal de techniques mis à la disposition des mécaniciens du fluide pour étudier les transitions dans une grande variété d'écoulements.

L'expérimentation s'en trouve stimulée, tant par l'observation que par la simulation numérique, ainsi que le développement ou la transposition de nouveaux concepts d'analyse, liés en particulier à l'analyse asymptotique et à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

La théorie classique de l'instabilité porte essentiellement sur les écoulements cisailés quasi parallèles ou parallèles, tels que la couche de mélange, le jet, le sillage et l'écoulement de Poiseuille dans un canal...etc.

La littérature sur le sujet est si vaste que peu de chercheurs se sont attaqués à la rédaction d'ouvrages pédagogiques rendant compte des développements majeurs du domaine.

Il est maintenant avéré qu'il existe différents types d'instabilité hydrodynamique que nous voyons dans divers aspects :

- *Instabilité inflexionnelle* : la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse est une condition suffisante d'apparition d'instabilités. C'est le cas pour les couches de mélanges comme l'instabilité de Kelvin-Helmholtz qui se retrouve également dans l'instabilité des sillages et dans l'instabilité des jets, elle est à l'origine de la turbulence dans tous les écoulements où règne un fort cisaillement [3].

- *Instabilité gravitationnelle* : l'origine de l'instabilité est maintenant due à des variations de masse volumique, qui lorsqu'elles dépassent l'effet de la viscosité peuvent entraîner des mouvements organisés dans le fluide par exemple l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou bien l'instabilité de Rayleigh-Bénard ; un exemple notable est l'instabilité thermo convective d'une couche de fluide chauffée par le bas [13].

Le fluide chaud est moins dense que le froid et il a tendance à monter dans le champ de gravité. La diffusion thermique tend à homogénéiser la température et à réduire les gradients de densité responsable de la convection.

- *instabilité centrifuge* : c'est la présence de courbure des lignes de courant de l'écoulement qui est le moteur du déclenchement de l'instabilité (instabilité de Taylor-Couette, Dean et Görtler). On peut voir l'apparition des tourbillons longitudinaux (axe du tourbillon parallèle avec l'écoulement porteur) qui peuvent subir ensuite des oscillations et des modulations d'amplitude qui conduisent graduellement l'écoulement vers la turbulence.

Une des caractéristiques communes de toutes les instabilités décrites est l'apparition d'une structure spatiale périodique dans l'instabilité primaire.

Pour tenter d'apporter une contribution qui s'insère dans une perspective correspondant plus particulièrement au dernier type d'instabilité, nous nous sommes intéressés à un type de mouvement ; écoulement dit de Taylor-Couette confiné entre deux cylindres coaxiaux dans le cas où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire Ω_1 ce problème remonte à la publication historique de G.I Taylor (1923), en raison de la richesse des structures qui apparaissent au cours du mouvement[3].

L'écoulement de Taylor -Couette est un écoulement académique qui occupe une place privilégiée en raison de ces liens nombreux et diversifiés avec la technologie et la pratique industrielle et qui présente un mouvement cisailé gardant un haut degré de symétrie dans lequel la transition vers la turbulence se fait par apparition successive d'instabilités bien connues et de la dégradation progressive de l'ordre vers le désordre en hydrodynamique du chaos.

Ce type d'instabilité a une grande importance dans divers domaines, et en particulier en aéronautique où l'on voit ce type d'instabilité dans plusieurs situations, et qui contribue d'une façon ou d'une autre afin d'améliorer et accroître la qualité du fonctionnement de différentes turbomachines.

En revanche, la théorie des systèmes dynamiques représente de façon quasiment parfaite les systèmes de la physique continue, par contre son application dans la mécanique des fluides est récente. Cette théorie reflète l'utilisation d'une formulation due à Hamilton pour pouvoir résoudre certains problèmes réels en hydrodynamique telle que l'instabilité de Taylor-Couette en raison de ses avantages.

L'objectif de ce travail est d'étudier la première instabilité de Taylor-Couette par deux approches différentes, la première basée sur la simulation numérique avec un code de calcul et la deuxième basée sur la formulation Hamiltonienne avec une intégration numérique de Runge-Kutta et de comparer les résultats des deux approches.

La présente recherche rassemble l'essentiel de notre travail qui comprend une introduction générale avec quatre principaux chapitres repartis comme suit:

Le premier chapitre de ce rapport est consacré à la littérature sur l'instabilité de l'écoulement Taylor-Couette. L'accent sera mis sur trois points essentiels : l'évolution historique de ces études depuis les travaux pionniers en faisant un aperçu des recherches relatives pour ce type d'écoulements ainsi que certaines applications technologiques et industrielles, puis on passe à la description proprement dite de cette instabilité dont on tire les paramètres qui rentrent en jeu pour celle-ci. Enfin, on développe la formulation mathématique du problème, la où le comportement du fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes et qui sera le prélude à l'étude numérique du chapitre suivant.

Le deuxième chapitre interprète la description du problème et la procédure de résolution par le mailleur GAMBIT et le solveur FLUENT avec le choix de maillage adéquat pour simuler l'écoulement à l'intérieur de la géométrie considérée.

Le troisième chapitre présente une analyse asymptotique des résultats numériques obtenus, ainsi que leurs discussions, pour la mise en évidence de l'évolution de l'écoulement dans le système Taylor-Couette en faisant une représentation des

différents contours et profils. Il comprend aussi la validation de nos résultats numériques.

Le quatrième chapitre est réservé pour l'étude de cette instabilité en utilisant l'approche Hamiltonienne avec une intégration de Runge-Kutta d'ordre (4), pour donner la trajectoire des particules fluides allant de l'écoulement laminaire jusqu'à la formation finale des tourbillons contrarotatifs, on mettra aussi en relief les contours des vitesses axiale et radiale ainsi que les lignes du courant.

Et on terminera ce travail par une conclusion générale où l'on évaluera l'ensemble des résultats obtenus et on proposera quelques pistes de travail pour l'avenir.

Chapitre -I-
Etude Bibliographique

Introduction :

L'écoulement dans une section annulaire comprise entre deux cylindres concentriques, et quand le cylindre intérieur tourne avec une vitesse donnée et l'extérieur reste stationnaire, est connu comme un écoulement de Taylor-Couette qui est un modèle dynamique d'une grande importance. Cette terminologie a été attribuée suite à des recherches théoriques et expérimentales, ces études ont commencé par les travaux de COUETTE(1890) et MALLOCK (1896), mais G.I TAYLOR a fait les avancées les plus significatives en décrivant cet écoulement dans sa publication historique "Stability of a viscous liquid between two rotating concentric cylinders" en 1923[1].

Cet écoulement peut être décrit comme un écoulement de cisaillement simple dans lequel les composantes de vitesses axiales et radiales sont nulles comme il a été démontré par COUETTE, tandis que TAYLOR a prouvé que pour des petits rapports de la largeur d'espace comprise entre les deux cylindres et pour des faibles vitesses angulaires l'écoulement demeure laminaire ,et quand la vitesse de rotation du cylindre intérieur dépasse une valeur critique l'instabilité se place dedans, et des rangées des vortex cellulaires sont développées[2]. Quand la vitesse tournante grimpe jusqu'à une valeur encore plus élevée, les rangées de cellules se décomposent et un modèle de turbulence est produit, c'est la raison pour laquelle il a proposé un paramètre, généralement connu maintenant sous le nom de NOMBRE DE TAYLOR pour caractériser cet état critique pour l'instabilité.

En outre l'écoulement de TAYLOR-COUETTE est aussi caractérisé par un autre nombre adimensionnel qui est le NOMBRE DE REYNOLDS, cet écoulement de TAYLOR-COUETTE devient particulièrement complexe à mesure que ce nombre augmente. Avec l'augmentation du nombre de Reynolds, l'écoulement subit une série de transitions avec les modes d'écoulement suivants : Écoulement Circulaire De Couette(CCF), Rouleaux de TAYLOR(TVF), Rouleaux Ondulés(WVF), Rouleaux Ondulés Modulés (MWVF), Rouleaux de Taylor Turbulent (TTVF). Cependant, le problème de l'écoulement de TAYLOR-COUETTE est toujours loin d'être complètement résolu en dépit de ces recherches très poussées. Par exemple, le cas de limitation de l'écoulement de TAYLOR-COUETTE quand le rapport de la largeur d'espace aux rayons tend vers zéro, il devrait être conforme avec l'écoulement plat de Couette [3]. Ceci inclut deux possibilités : ou le rayon est infini ou la largeur d'espace est très petite. Ainsi, le critère pour l'instabilité devrait refléter ce phénomène

afin de fournir une perspective sur les structures d'écoulement et les statistiques de la turbulence de Taylor-Couette.

Dans cette étude bibliographique, on exposera une étude historique et théorique d'écoulement de Taylor-Couette et ses caractéristiques ainsi que le modèle mathématique qui le reflète.

I. 1.1 Historique de l'écoulement de TAYLOR – COUETTE :

L'écoulement de TAYLOR-COUETTE tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire (Taylor 1923) [1].

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17^{ème} siècle ; il s'agit de l'étude effectuée par NEWTON en 1786. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant. Plus tard, en 1848 STOKES a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses [2].

En 1881, MARGULSE a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides, et autour de (1888) MALLOCK a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants. Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche [4]. Dans la même période, COUETTE a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de COUETTE). Loin des parois horizontales l'écoulement est circulaire et obéit à la loi suivante :

$V_{\theta}(r) = Ar + B/r$. Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. COUETTE a remarqué que contrairement au cas de la rotation du cylindre extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos. Les travaux de MALLOCK et ceux de COUETTE ont été axés sur la mesure de

viscosité valable seulement pour le cas laminaire. Néanmoins, ils furent les premiers à observer le début des instabilités dues à l'augmentation de la vitesse de rotation de l'un des cylindres [5].

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de COUETTE a été faite par Lord RAYLEIGH [1917]. Il a justifié ultérieurement les remarques de COUETTE et MALLOCK pour le cas non visqueux.

A partir de son critère, il est arrivé à la condition de stabilité suivante :

$\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$ où Ω_1 et Ω_2 sont les vitesses angulaires de rotation, R_1 et R_2 sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement [6].

G.I. TAYLOR 1923 a repris cette étude pour un fluide visqueux ; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du développement des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette ; la solution est donnée sous forme de série de BESSEL-FOURRIER. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires. Basé sur les observations de COUETTE et MALLOCK, TAYLOR a supposé une symétrie axiale de l'écoulement, un espace annulaire étroit, les effets de la gravité sont négligés et il a supposé également une perturbation axialement périodique [8].

La théorie linéaire développée par TAYLOR, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables. J.T.STUART (1958) fut le premier à tenir compte des termes quadratiques pour étudier par une théorie non linéaire, l'évolution et l'amplification de la perturbation au voisinage de la première instabilité. Il a déterminé l'amplitude de ces perturbations à partir d'une équation de bilan énergétique écrite sous forme intégrale [7].

Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom « d'écoulement de TAYLOR-COUETTE », n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à

une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes. Il a été bien documenté dans la revue classique publiée par DIPRIMA & SWINNEY 1985. En outre, l'article de TAGG 1994 est l'une des références les plus exhaustives concernant l'historique et les avancées de la recherche sur ce sujet. Depuis l'époque des travaux fondateurs de TAYLOR, plus de 2000 publications scientifiques sont parues concernant le TAYLOR-COUETTE. On notera également l'existence d'un colloque biannuel entièrement consacré à cette expérience « COUETTE –TAYLOR WORKSHOP » [4].

I.1.2. Les applications technologiques et industrielles :

Comme on voit, l'écoulement Taylor-couette est employé dans plusieurs applications technologiques et industrielles dans des domaines aussi variés telles que l'aéronautique, la médecine, le nucléaire, et génie des procédés pour la filtration membranaire ou le traitement des eaux par désinfection ultraviolet, en géophysique pour la convection dans le manteau terrestre et surtout dans le domaine des turbomachines et des machines électriques...etc. On peut citer par exemple :

- Application dans le domaine de la Tribologie afin de réduire le frottement dans les machines tournantes et établir les conditions optimales de lubrification des paliers de transmission de vitesse dans l'industrie aéronautique, automobile et les centrales de production de l'énergie électrique [12].
- Application à l'extraction liquide – liquide pour le recyclage du combustible nucléaire usé [10].
- Application en génie des Procédés, par exemple dans les réacteurs électrochimiques, l'ultrafiltration et le viscosimètre [13].

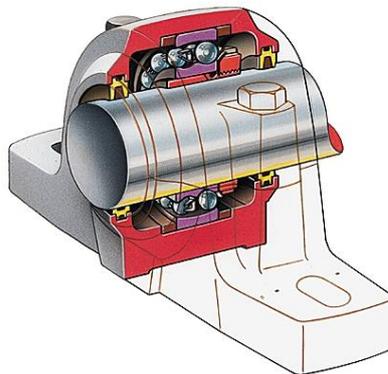


Figure I.1 : Palier à roulement ; interposé entre les paliers et les arbres des systèmes mécaniques en rotation [8]

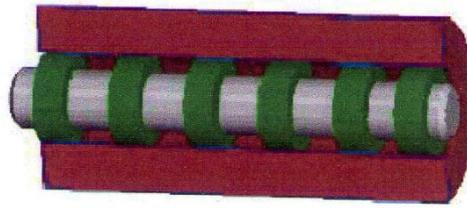


Figure I.2 : Palier de transmission des vitesses dans les machines tournantes [11]

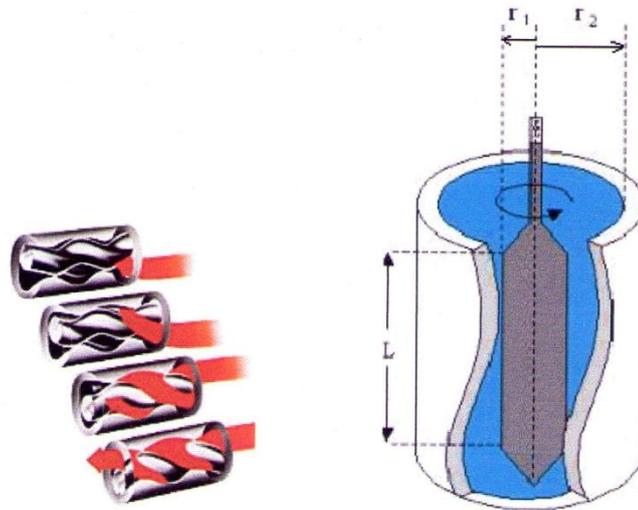


Figure I.3 : Pompes à centrifugations employées dans les industries pharmaceutiques et chimiques [13].

L'instabilité de l'écoulement Taylor-Couette à de nombreuses applications dans le domaine de l'aviation en utilisant l'écoulement Taylor-Couette de base qu'on appelle aussi le cas nominale, ou bien par la modification de certains paramètres comme la géométrie des deux cylindres, le sens de rotation des cylindres...etc., et cela se reflète dans :

Les compresseurs axiaux dans les turboréacteurs, où nous assimilons le cylindre intérieur comme rotor et le cylindre extérieur comme stator où le liquide dans l'espace annulaire sera examiné.

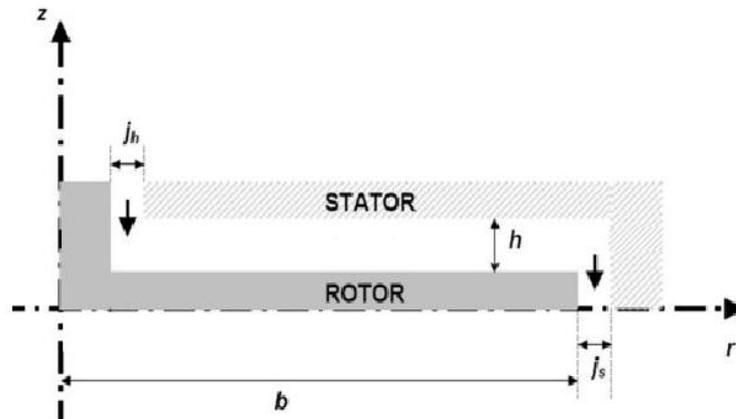


Figure I.4 : Représentation schématique du rotor-stator configuration et notations. [2]

L'usage de l'écoulement Taylor-Couette dans les turbopropulseurs comme le TP400-D6 qu'est un turbopropulseur triple-corps ,il développe une puissance maximale de (8 203 kW) , le moteur est fonctionné pour la première fois sur banc en 28 octobre 2005, il y'a deux arbres coaxiaux entraînent les onze étages de compression (six étages haute pression et cinq moyenne pression), ainsi les deux premiers des cinq étages de la turbine (un étage haute pression et un moyenne pression) ; un troisième arbre, coaxial aux deux premiers, relie la turbine à l'hélice via un réducteur[1].

On le voit aussi dans les études de transition vers la turbulente, et la simulation numérique directe des régimes turbulents. L'objectif est d'améliorer les modélisations statistiques utilisées dans le refroidissement des turbomachines [4].

I.2. Etude théorique :

I.2.1.Principe de l'écoulement Taylor Couette :

L'écoulement de TAYLOR-COUETTE est la version cylindrique de l'écoulement de Couette plan. C'est un écoulement cisailé, il s'obtient en insérant un fluide entre deux cylindres coaxiaux disposés verticalement ou horizontalement, figure I. 5. Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. D'ailleurs, les quatre cas de rotation : les deux cylindres tournent à des vitesses angulaires différentes dans le même sens ou dans des sens opposés ; cylindre interne fixe ; cylindre externe fixe correspondent à

quatre régimes d'écoulement différents, excepté à très grandes valeurs de vitesse de rotation. La viscosité met le fluide en mouvement car au niveau de leurs surfaces de contact, le fluide visqueux et les cylindres doivent avoir la même vitesse. On présente dans cette étude théorique le dernier cas, dont l'étude remonte au début du siècle dernier, ce qui indique l'abondance de la littérature de ce régime d'écoulement, comme on le verra dans la section suivante [6].

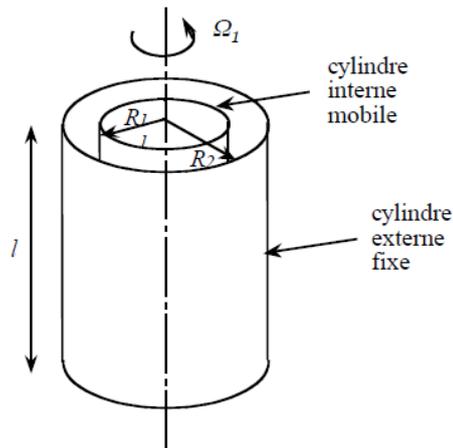


Figure I.5 : Ecoulement de Taylor Couette [4].

I.2.2. Paramètres de contrôle :

Pour traiter les phénomènes d'instabilités, il est très important d'exprimer les conditions de leurs apparitions et d'indiquer dans quel domaine le mouvement persiste afin d'analyser ces états en fonction des paramètres caractérisant l'écoulement. L'étude des instabilités hydrodynamiques, fait intervenir des paramètres sensibles, selon des nombres adimensionnel s'évaluant l'effet relatif des forces centrifuges qui jouent un rôle déstabilisant par rapport aux forces visqueuses dues au frottement qui ont un rôle plutôt stabilisant. On distingue deux paramètres de contrôle de l'évolution de l'écoulement.

Ces paramètres sont définis comme suit :

I.2.2.1. Nombre de Reynolds (R_e) :

C'est un nombre adimensionnel utilisé dans le domaine de la mécanique des fluides, qui caractérise le régime d'un écoulement (laminaire, transitoire, turbulent) et qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité [7].

On le définit de la manière suivante :

$$Re = \rho \frac{R_1 \Omega_1 d}{\mu} \quad (I.1)$$

Avec :

ρ : Masse volumique du fluide.

μ : viscosité dynamique.

Ω_1 : vitesse angulaire du cylindre intérieur.

R_1 : Rayon du cylindre intérieur.

On peut également l'exprimer en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ de la façon que :

$$Re = R_1 \left(\frac{\Omega_1 d}{\nu} \right) \quad (I.2)$$

I.2.2.2. Nombre de Taylor (Ta) :

La spécificité de l'écoulement cylindrique (pour les fluides visqueux) se caractérise par le paramétrage basé sur le Nombre de Taylor caractéristique, qui lui-même dérive du nombre de Reynolds corrigé par le jeu radial [5].

$$Ta = Re \sqrt{\frac{d}{R_1}} \quad (I.3)$$

Qui s'écrit de façon explicite comme suit :

$$Ta = \rho \frac{\Omega_1 R_1 d}{\mu} \sqrt{\delta} \quad (I.4)$$

$d = R_2 - R_1$: La largeur de la colonne fluide comprise entre les deux cylindres des rayons R_2 et R_1 .

$$\delta = \frac{d}{R_1} \quad (I.5)$$

δ : Jeu radial sans dimension.

Selon la valeur de paramètre de contrôle (Re ou Ta) l'écoulement devient stable ou instable.

I.2.3. Stabilité de l'écoulement de TAYLOR-COUPETTE :

I.2.3.1. Critère de RAYLEIGH :

L'origine de l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette est une instabilité centrifuge.

Dans un écoulement en rotation, la trajectoire des particules fluides résulte de l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression radial centripète, égal et opposé. Pour savoir si un tel écoulement est stable ou non, il faut regarder si un déplacement infinitésimal d'une particule fluide dans la direction radiale va être amplifié (cas instable) ou au contraire atténué (Cas stable) [10].

Considérons une particule fluide initialement à la distance r de l'axe des cylindres. Cette particule fluide a une vitesse ortho-radiale $v_\theta = r \Omega(r)$, et subit donc une force centrifuge $f = \rho(\Omega r)^2$, contrebalancée par un gradient de pression centripète $\frac{\partial p}{\partial r}$. Si l'on déplace cette particule en $r + dr$, elle va devoir ralentir, car elle doit conserver son moment cinétique $J = v_\theta r = \Omega r^2$. En conséquence, la force centrifuge de la particule fluide diminue, et ne sera donc plus compensée par le gradient de pression environnant en $r + dr$. Deux cas peuvent alors se présenter :

- I. Soit le moment cinétique en $r + dr$ est supérieur à celui en r : dans ce cas, le gradient de pression en $r + dr$ aura tendance à ramener la particule fluide à sa position initiale, en r . L'écoulement est stable.
- II. Soit le moment cinétique en $r + dr$ est inférieur à celui en r : dans ce cas, la particule subit une force centrifuge supérieure au gradient de pression centripète environnant, et la particule continue son chemin à r croissant. L'écoulement est instable. Par conservation de la masse (incompressibilité), d'autres particules fluides, à d'autres hauteurs Z se déplaceront au contraire vers l'intérieur, conduisant ainsi aux rouleaux toroïdaux représentés en figure I.6.

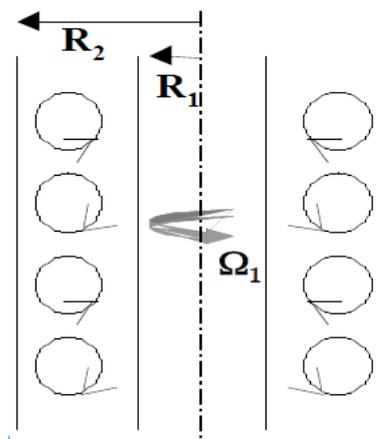


Figure I.6 : Structure en rouleaux toroïdaux de l'écoulement bifurqué [4]

Pour résumer, si le moment cinétique Ωr^2 décroît quelque part, alors l'écoulement est instable. On peut formaliser ce raisonnement par le **critère de RAYLEIGH**¹:

$$\text{L'écoulement est stable si : } \frac{d}{dr} |\Omega r^2| > 0 \text{ pour tout } r. \quad (\text{I.6})$$

Dans le cas de l'écoulement de TAYLOR-COUETTE, il est possible de calculer exactement la vitesse angulaire $\Omega(r)$ solution de l'équation de Navier-Stokes, et donc définir les valeurs des paramètres pour lesquelles l'écoulement reste stable. Il est clair que $\Omega(r)$ varie de façon monotone entre Ω_1 et Ω_2 . Ainsi, pour vérifier le critère de Rayleigh (I.6) pour tout r entre R_1 et R_2 , il faut :

$$|\Omega_1 R_1^2| < |\Omega_2 R_2^2| \text{ Écoulement stable} \quad (\text{I.7})$$

Dans notre géométrie particulière, on a $\Omega_2 = 0$ et $\Omega_1 \neq 0$, seul le cylindre intérieur tourne. Donc, selon le critère (I.7), l'écoulement devrait toujours être instable, même pour des vitesses de rotation Ω_1 arbitrairement faibles.

I.2.3.2. Effet de la viscosité :

En fait, à la force centrifuge déstabilisante s'oppose une autre force, stabilisante, dont nous n'avons pas tenu compte : le frottement visqueux. On peut donc construire un nombre sans dimension qui compare l'effet relatif de ces deux forces : c'est le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse caractéristique $\Omega_1 R_1$ et la distance inter-cylindre $R_2 - R_1$:

$$Re = \frac{\Omega_1 R_1 (R_2 - R_1)}{\nu} \quad (\text{I.8})$$

(La distance verticale est supposée très grande, et n'intervient donc pas).

Pour de faibles valeurs de Re , la force de frottement stabilise le déplacement des particules fluides induit par le déséquilibre centrifuge, et l'écoulement reste stable. Au-delà d'une certaine valeur critique de Re_c , en revanche, la force centrifuge devient prépondérante et l'écoulement est instable [7]. On voit donc que la prise en compte de la viscosité implique l'existence d'un seuil non nul, alors que le seul critère de RAYLEIGH prédit une instabilité sans seuil.

Pour des valeurs de Re supérieures à Re_c , une seconde instabilité apparaît dite instabilité secondaire. Il s'agit d'une instabilité cette fois oscillatoire et qui brise l'axisymétrie. D'autres types d'états sont observables à plus grandes valeurs du paramètre de contrôle.

¹Ce critère ne s'applique en fait qu'aux perturbations axisymétriques.

I.2.4. Diagramme de stabilité :

Dans le cas générale, ou les vitesses Ω_1 et Ω_2 varient de façon quelconque, la prévision des instabilités en milieu visqueux a été synthétisé expérimentalement par D.COLES sous la forme d'un diagramme dans le plans des nombres des Reynolds associés :

$$\begin{cases} Re_1 = \frac{\Omega_1 d^2}{\nu} \\ Re_2 = \frac{\Omega_2 d^2}{\nu} \end{cases} \quad (I.9)$$

L'évolution des états de l'écoulement du régime laminaire vers le régime turbulent a été largement étudiée dans le cas des cylindres infiniment longs correspondant à un facteur d'aspect $\Gamma = \frac{H}{d}$ grand et le rapport des rayons η voisin de l'unité $\eta = \frac{R_1}{R_2} \approx 1$, tel que $\delta = \frac{d}{R_1} \ll 1$. Cette configuration correspondant à la géométrie d'un faible espace annulaire dans lequel il a été montré que le régime chaotique de l'écoulement apparait après trois bifurcations seulement [5].

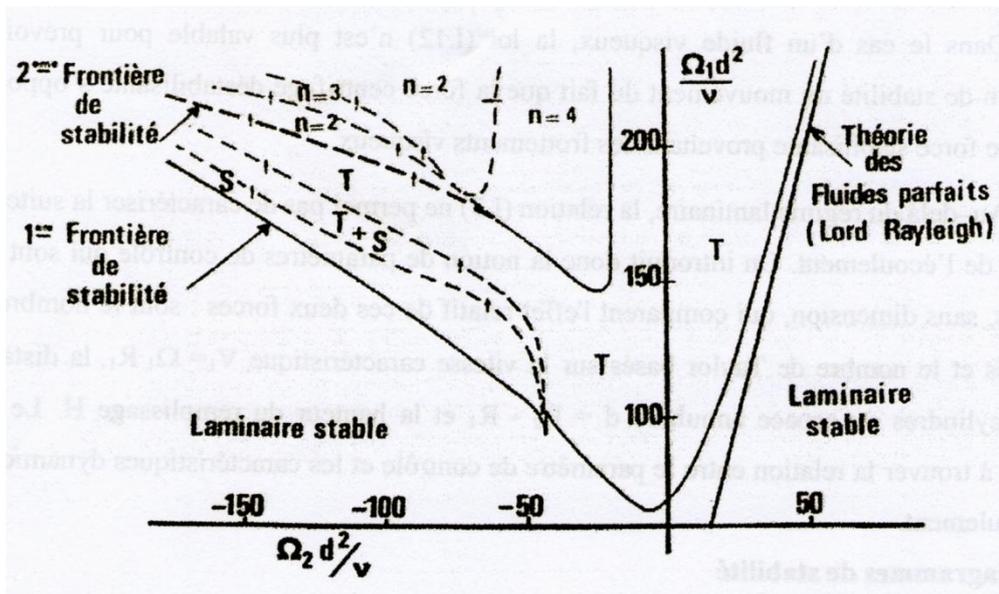


Figure I.7 : Diagramme de stabilité d'après COLES ($R_2 \setminus R_1 = 0/5$) [5].

T : mouvement périodique selon l'axe (z) stationnaire ou cellules de Taylor.

S : mouvement spirale selon l'axe (z) ou le mouvement non-axisymétrique simple. (n) :

n=2,3,4 nombre d'ondes circumférentielles associées au mouvement de doublement périodique selon l'axe (z) (θ, z) instationnaire.

I.2.5. Etats d'écoulement :

L'écoulement dans le système de TAYLOR-COUPETTE a été largement étudié auparavant (COLES, 1965), (TAGG, 1994). Ainsi, de nombreux travaux ont permis d'identifier différents régimes et d'en étudier les transitions [7]. Ces différents régimes rencontrés dans les réacteurs de Taylor-Couette sont généralement recensés par ordre croissant des vitesses de rotation pour les quelles ils sont observés. Notre étude se limite aux écoulements créés par le mouvement de la paroi interne, le second restant immobile, et sans flux axial de matière, c'est-à-dire sans alimentation à l'une des deux extrémités.

I.2.5.1. Ecoulement de base :

L'écoulement de base est laminaire de nature tridimensionnel. Il est le résultat de l'équilibre des forces centrifuges et des forces visqueuses dérivant du gradient de pression centripète dans l'espace annulaire où la condition d'adhérence est vérifiée aux parois et en absence de toute perturbation, et ça pour des faibles vitesses de rotations pour lesquels les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisant de l'inertie. L'écoulement créé entre les deux cylindres se présente sous la forme d'un mouvement homogène dans toute la colonne fluide, caractérisé par une parfaite symétrie axiale et azimutale, c'est l'écoulement de COUPETTE stationnaire [6].

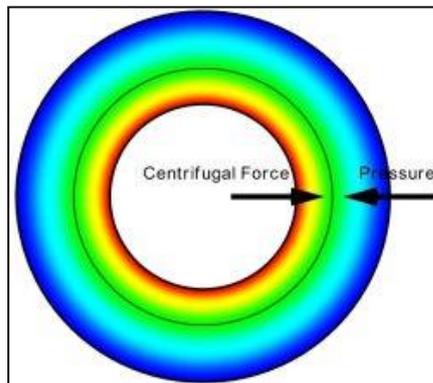


Figure I.8 : Ecoulement circulaire de COUPETTE d'un cylindre intérieur tournant et extérieur immobile [11].

I.2.5.2. Transitions Couette-Taylor (Taylor Vortex Flow) :

Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation à partir du régime laminaire stable il apparaît tout d'abord, pour une valeur critique du nombre de Taylor $Ta_{c1} = 41.2 \pm 0.5$ équivalent à un nombre de Reynolds critique Re_c , une structure de tourbillons toriques occupant la largeur de l'espace annulaire où les trajectoires des particules fluides s'enroulent sur des tores ; c'est un système d'ondes² stationnaires dont la vitesse reste indépendante du temps et qui a une composante axiale et une autre radiale qui sont périodiques le long de l'axe des deux cylindres, une onde étant constituée par deux cellules voisines contrarotatives dans une section parallèle à l'axe des cylindres, une cellule (vortex) a une section carrée (correspondant à la taille du gap) (cf. Figure I.9).

Les centres de ces vortex sont des cercles dont le centre est situé sur l'axe commun dans le cas de deux cylindres [12].

Ce type de configuration cellulaire, dite de Taylor appelée encore perturbation axisymétrique.

Cette première instabilité est due à la force centrifuge: c'est l'instabilité primaire qui fait apparaître une structure spatiale périodique, et commence en premier temps par une seule paire de cellules contrarotatives aux bornes de l'entrefer appelée les cellules d'Eckman, le nombre des cellules augmente graduellement jusqu'à elles remplissent toute la hauteur de l'entrefer.

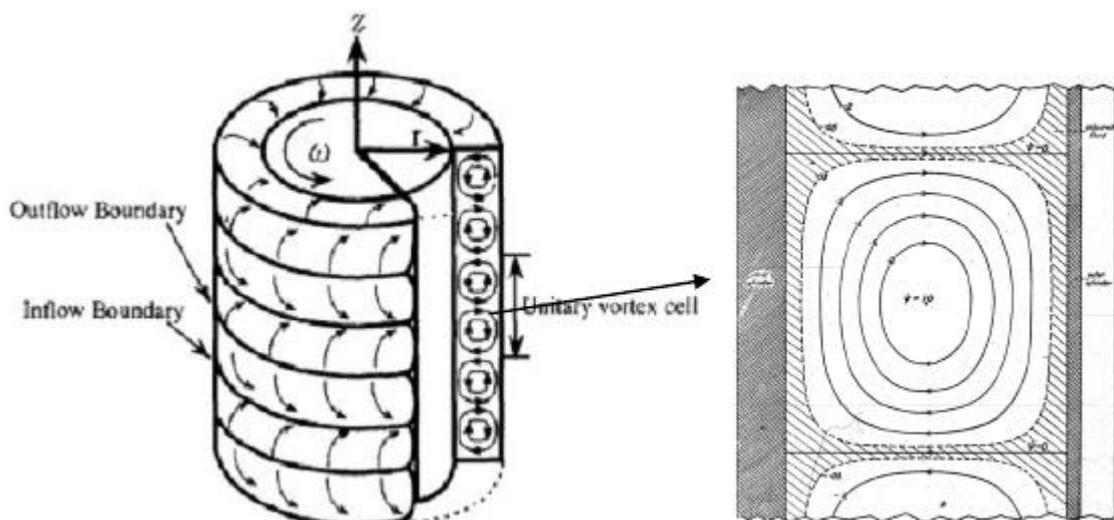


Figure I.9 : Tourbillons de l'écoulement de Taylor laminaire d'après OHMURA, (1997) [2].

² Ce système d'onde est périodique dans la direction axiale.

TAYLOR a développé une approche basée sur l'analyse linéaire, qui permet de déterminer la transition à cette instabilité. Elle repose sur la résolution analytique de l'écoulement de COUETTE qui met en évidence que les forces centrifuges sont plus importantes sur le cylindre intérieur que sur le cylindre extérieur. Ce gradient est à l'origine de l'instabilité puisque le fluide a tendance à être éjecté radialement du cylindre intérieur vers le cylindre extérieur.

Lorsque la vitesse de rotation est suffisamment faible, les forces visqueuses sont plus importantes que les forces centrifuges et l'écoulement de Couette est stable. Au-delà de cette transition, l'écoulement résulte de la superposition de l'écoulement de COUETTE et d'un écoulement hélicoïdal tournant autour de l'axe des tourbillons.

Lorsque la vitesse de rotation augmente, cet écoulement devient lui aussi instable et laisse place à d'autres types d'écoulement.

I.2.5.3.Écoulement tourbillonnaire ondulant (Wavy Vortex Flow) :

En augmentant encore la vitesse de rotation jusqu'à une autre valeur particulière correspondante à un nombre de Taylor $Ta_{c2} = 49$ dont la valeur dépend du jeu radial c.-à-d. la largeur d et de la hauteur h de l'espace annulaire, on observe la naissance d'une seconde instabilité constituée de tourbillons ondulés azimuthalement (dans la direction tangentielle) tournant autour de l'axe de symétrie des deux cylindres [5].

Ce système d'ondes instationnaires se superpose aux cellules de Taylor comme l'indique la figure I.10. On est alors en présence du régime d'ondes azimuthales appelé " *wavy-mode* " caractérisé par une vitesse de propagation dans la direction tangentielle (θ) et un nombre d'ondes circonférentielles n . L'ensemble du mouvement apparaît doublement périodique en z et θ alors le centre des vortex est animé de mouvements axial et radial.

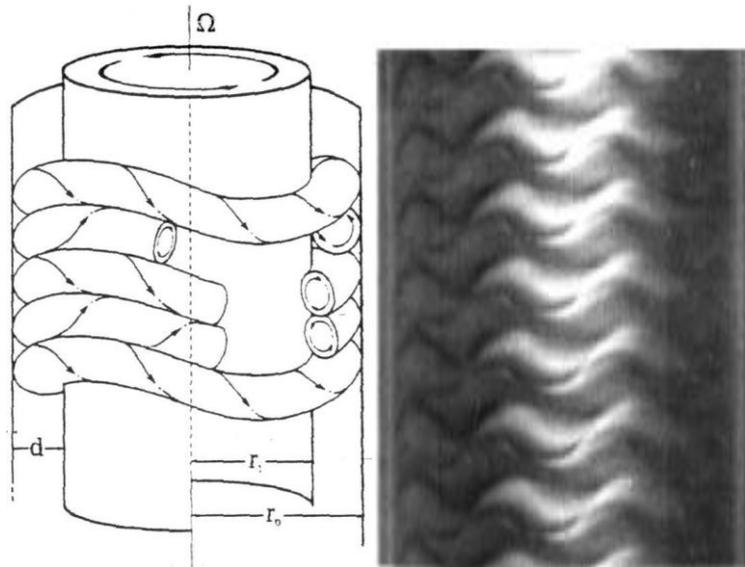


Figure I.10 : visualisations du régime d'onde de la seconde instabilité (WVF) [10].

I.2.5.4. Écoulement de Taylor turbulent (ou Régime chaotique ou turbulent naissant) :

En continuant à augmenter progressivement la vitesse de rotation du cylindre intérieur, on constate que la vitesse du fluide varie aléatoirement dans le temps et le mouvement présente une complexité croissante jusqu'à ce que l'écoulement devienne perturbé et peut être considéré comme chaotique. Le régime chaotique ou pré-turbulent s'établit avec la disparition de l'onde azimutale vers $Ta_{c3} \approx 740$ et garde une périodicité spatiale le long de l'axe de rotation. Ce passage du régime d'ondes azimutales vers le régime chaotique est difficile à suivre par des techniques de visualisation [8].

I.2.5.5. Écoulement turbulent (turbulence développée) :

Si on continue à augmenter la vitesse de rotation du cylindre intérieur, à une certaine valeur critique de nombre de Taylor Ta_{c4} supérieur à 4500, on observe l'établissement de la turbulence complètement développée qui est caractérisé par une homogénéisation de l'écoulement en présence des structures turbulentes et elle est marquée par la persistance de l'onde axiale qui se maintient indéfiniment malgré la vitesse de rotation imposée au cylindre intérieur élevée [8].

I.2.5.6. Récapitulatif des différents régimes :

Le passage d'un écoulement laminaire où la vitesse est indépendante du temps à un écoulement turbulent où la vitesse varie d'une manière aléatoire dans le temps s'effectue par une série d'instabilités, dont ces différents régimes d'écoulement rencontrés dans le dispositif de Taylor-Couette sont récapitulés dans le Tableau I.1 pour le cas d'un faible jeu radial et selon les valeurs de nombre de Taylor proposées par A .BOUABDALLAH [7].

Taylor critiques	Régimes d'écoulement
$Ta < 41.2$	Régime laminaire stable
$41.2 < Ta_{c1} < 48$	Première instabilité
$48 < Ta_{c2} < 740$	Deuxième instabilité
$740 < Ta_{c3} < 4500$	Régime de pré-turbulence ou chaos
$Ta_{c4} > 4500$	Régime turbulent complètement développé

Tableau I.1 Récapitulatif des régimes d'écoulement en fonction du nombre de Taylor.

I.2.6. Paramètres influençant l'écoulement de Taylor-Couette :

L'écoulement de Taylor Couette est caractérisé par des paramètres géométriques et dynamiques tel que le choix de ces paramètres est particulièrement important compte tenu du fait qu'ils influent directement sur les nombres de Taylor de transition et sur la multiplicité des états d'écoulement.

I.2.6.1. Effet dynamique (Taux de remplissage variable) :

Dans le cas d'un espace annulaire totalement rempli le fluide est compris entre deux plans limitant aux extrémités le mouvement du fluide. En outre, la condition d'adhérence est appliquée et causant le freinage de l'écoulement en paroi. Ce freinage ne peut pas exister en présence d'une surface libre, pour cela la vitesse élevée entraîne des forces centrifuges qui vont créer des instabilités ultérieures [7].

I.2.6.2. Effet géométrique :

Un faible facteur de forme η , c'est-à-dire un espace annulaire large, permet de retarder les transitions, voire de ne pas faire apparaître le régime de la deuxième instabilité

($\eta < 0.65$, Diprima, 1984). Il en est de même pour le rapport d'aspect Γ s'il est suffisamment faible ($\Gamma < 6$, Dominguez-Lema et AL, 1984).

De manière générale, les paramètres géométriques ont plus d'influence sur la transition à la deuxième instabilité que sur la transition à la première. A partir de l'apparition du régime d'onde, dès le régime de deuxième instabilité, l'écoulement de Taylor Couette est caractérisé par la multiplicité des états d'écoulement (Coles, 1965). Plusieurs combinaisons entre nombre d'onde axial et nombre d'onde azimutale sont alors possibles. Mais il est certain qu'un rapport d'aspect important ($\Gamma > 40$) tendra à favoriser un plus grand nombre d'états qui dépendront non seulement du nombre de Taylor mais aussi de l'historique de l'écoulement (Coles, 1976 et Cognet, 1984)[4].

De plus A.BOUABDALLAH a mené une étude sur la transition laminaire-turbulent dans les cas d'espace annulaire mince, intermédiaire et large. Il a observé que le processus de transition vers la turbulence est presque identique pour les cas d'espace annulaire mince et moyen par contre la différence devient notable lors qu'il s'agit d'un espace plus large [7].

I.2.6.3. Effet de l'accélération :

L'écoulement du fluide dans les réacteurs de Taylor Couette peut présenter un caractère de non-unicité pour une vitesse donnée de la rotation du cylindre intérieur et qui peut se traduire par l'existence de plusieurs structures possibles de l'écoulement pour un même nombre de Taylor Ta . Ainsi que chaque état d'écoulement dépend du mode de vitesse imposée (lent, modéré ou rapide).

Dans une étude expérimentale, T.T.Lim et Al ont montré que les montées rapides en vitesse modifient de façon notable la structure de l'écoulement, notamment, la taille des cellules et probablement le nombre d'onde azimutale ; en particulier l'écoulement tourbillonnaire peut basculer vers la première instabilité de Taylor mais avec une longueur d'onde axiale plus petite [5].

I.3. Formulation mathématique du problème de Taylor-Couette :

I.3.1. Description du Problème physique :

Ce travail s'intéresse à l'étude de champ des vitesses et à la distribution de pression d'un écoulement pour un fluide newtonien contenu dans un espace annulaire formé de deux cylindres coaxiaux horizontaux, dont l'un est en mouvement de rotation. Le cylindre intérieur

de rayon R_1 est mis en rotation avec une vitesse angulaire Ω_1 et le cylindre extérieur de rayon R_2 étant immobile [9].

L'anneau entre les deux cylindres est rempli d'un fluide incompressible (généralement de l'huile) qu'est caractérisé par des propriétés physiques (densité ρ et viscosité dynamique ν) constantes.

I.3.2. Hypothèses simplificatrices :

Le traitement du problème physique nécessite l'utilisation du principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces équations régissent le phénomène physique étudié. La géométrie impose le choix normal des coordonnées cylindriques tel que :

$X = (r, \theta, z)$, et $U = (u, v, w)$, qui dénotent les composantes radiale, azimutale, et axiale des coordonnées et de la vitesse respectivement.

Afin de simplifier l'étude du problème on utilise les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La longueur de l'espace annulaire est supposée suffisamment grande par rapport aux autres dimensions de façon à ce que les effets de bords deviennent négligeables. Ceci ramène l'étude alors à un problème bidimensionnel (plan).
- L'écoulement engendré par la rotation du rotor est supposé laminaire, stationnaire, bidimensionnel et à symétrie axiale.
- Le fluide considéré est supposé newtonien et incompressible.
- Le travail induit par les forces de gravités est négligeable.
- Les propriétés physiques du fluide sont considérés constantes et sont évaluées à la température et à la pression de référence.

I.3.3. Les équations de conservation :

Dans cette section, on établit les équations de base régissant l'écoulement considéré comme suit :

I.3.3.1. Conservation de la quantité de mouvement :

Les équations générales du mouvement du fluide sont les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{g} - \overrightarrow{grad} \left(\frac{P}{\rho} \right) + \nu (\nabla^2 \vec{U}) \quad (I.9)$$

Dont la projection sur les axes d'un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) , ou z est pris le long de l'axe des cylindres, donne :

I.3.3.1.1. Direction radiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + g_r \end{aligned} \quad (I.10)$$

I.3.3.1.2. Direction tangentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \\ - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g_\theta \end{aligned} \quad (I.11)$$

I.3.3.1.3. Direction axiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \\ g_z \end{aligned} \quad (I.12)$$

I.3.3.2. Equation de continuité :

Alors que l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) = 0 \quad (I.13)$$

Dans ces équations : u, v, w : Représentent respectivement les composantes radiale, tangentielle et axiale du vecteur vitesse.

I.3.4. Equations du mouvement en régime laminaire stable :

Tenant compte des hypothèses précédentes c.-à-d., si l'on se limite à l'étude du régime laminaire stable, l'écoulement est ortho-radial et les lignes de courant sont des cercles concentriques. On a donc $u = 0$ et $w = 0$. Pour un écoulement permanent, on a aussi

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Et en négligeant l'effet de la gravité, les équations précédentes se simplifient comme suit [9]:

Equation de continuité devient:

$$\frac{\rho}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow v = v(r) \quad (I.14)$$

Ce qui montre aussi que la seule composante de vitesse non nulle est une fonction de r seulement.

Les deux équations de NAVIER-STOKES se simplifient à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \underbrace{v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right)}_{s'exprime\ en\ fonction\ de\ r} \end{array} \right. \quad (I.15)$$

I.3.5. Conditions aux limites :

Pour $r = R_1 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \Omega_1 R_1 \\ w = 0 \end{cases}$

$$r = R_2 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = \Omega_2 R_2 \\ w = 0 \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho \cdot r \cdot C(r) \quad (I.16)$$

Et par intégration de cette équation on trouve que : $p = (\rho \cdot r \cdot C(r)) \cdot \theta + F(r)$

$$p = \rho \cdot r \cdot C(r) \cdot \theta + F(r) \quad (I.17)$$

Les équations sont fortement simplifiées et traduites par la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0 \end{array} \right. \quad (I.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = 0 \end{array} \right. \quad (I.19)$$

La première relation exprime l'équilibre entre la force centrifuge et le gradient de pression qui s'exercent tous deux sur le fluide. La deuxième relation n'est autre que le LAPLACIEN de la vitesse.

Intégration directe de l'équation (I.18) donne :

$$\frac{p}{\rho} = \int_{R_1}^r \frac{v^2}{r} dr + C_1 \quad (I.20)$$

ou $C_1 = p(R_1)/\rho$ Sachant que cette valeur est mesurée ou connue.

La solution classique de l'équation (I.19) s'écrit :

$$v = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) r - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} (\Omega_2 - \Omega_1) \right] \quad (I.21)$$

Elle est de la forme $v = Ar + \frac{B}{r}$ avec :

$$\begin{cases} A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \\ B = \frac{R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2^2 - R_1^2} \end{cases}$$

Pour trouver le champ de pression on introduit l'expression de la vitesse v trouvée précédemment dans l'équation (I.20) et on intègre, cela donne:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{A^2}{2} (r^2 - R_1^2) + \frac{B^2}{2} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) + 2AB \ln \frac{r}{R_1} + C_1 \quad (I.22)$$

$$\begin{aligned} p = p(R_1) + \frac{\rho}{(R_2^2 - R_1^2)} & \left[(\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2)^2 \left(\frac{r^2 - R_1^2}{2} \right) \right. \\ & - 2R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1) (\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2) \ln \frac{r}{R_1} \\ & \left. - \frac{1}{2} R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1)^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] \quad (I.23) \end{aligned}$$

Dans le cadre de cette étude, seul le cylindre intérieur tourne. On a alors une forme plus simple de l'expression du champ de vitesse angulaire et de la distribution de pression :

$$v = \frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \left[(\Omega_1 R_1^2) r - \frac{R_1^2 R_2^2}{r} \Omega_1 \right] \quad (I.24)$$

$$\begin{aligned} p = p(R_1) + \frac{\rho}{(R_2^2 - R_1^2)} & \left[(\Omega_1 R_1^2)^2 \left(\frac{r^2 - R_1^2}{2} \right) \right. \\ & \left. - 2R_1^4 R_2^2 \Omega_1^2 \ln \frac{r}{R_1} + \frac{1}{2} R_1^2 R_2^2 \Omega_1^2 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] \quad (I.25) \end{aligned}$$

Conclusion :

Ce chapitre représente la base principale de notre étude bibliographique où il est entouré de tous les aspects et les propriétés de l'écoulement Taylor-Couette, commençant par une vue d'ensemble sur l'origine ainsi que l'évolution des instabilités dans ce type d'écoulement.

Evidemment on a traité les différents effets et paramètres fondamentaux entrant et affectant ce genre d'écoulement dans sa nature physique ainsi que son évolution.

Naturellement on a examiné certains cas qui distinguent l'écoulement Taylor-Couette et cela pour savoir en plus l'interaction de ce type d'écoulement ainsi que le changement dans sa propre structure.

D'autre part, ce chapitre est la règle primordiale dans notre étude théorique, c'est grâce à la définition et la représentation de ce phénomène du point de vue mathématique, qu'on peut montrer clairement ce mécanisme à travers la formulation, les hypothèses ainsi que les conditions aux limites qui caractérisent ce problème physique.

En fait, l'étude théorique a une grande importance dans le diagnostic et la compréhension du problème de toute nature afin de trouver la solution qui est conforme à la réalité ainsi qu'elle ouvre également la voie à l'étude numérique où on peut modéliser numériquement ce type d'instabilités.

Chapitre -II-
Modélisation
&
Résolution Numérique

Introduction :

La CFD (Computational Fluid Dynamics en anglais) est le calcul numérique appliqué à la mécanique des fluides. Cela consiste à résoudre dans une géométrie donnée les équations fondamentales de la mécanique des fluides, que l'on peut éventuellement coupler aux équations de transfert thermique ou de réaction chimique [14].

L'essor des capacités de calculs au cours des dernières décennies grâce à l'accroissement de la puissance des ordinateurs a permis le développement d'une nouvelle branche de la MDF : la mécanique des fluides numériques (CFD). Ce domaine permet l'étude des écoulements autour d'un objet afin de mieux le profiler, et qui a conduit les chercheurs vers la simulation numérique de divers problèmes rencontrés dans la pratique.

Ce travail décrit des études des problèmes d'actualité pour l'analyse d'instabilité dit de Taylor-Couette et qui a suscité un grand intérêt dont sa résolution numérique a été évalué en utilisant un solveur appelé "FLUENT " basé sur la méthode des volumes finis. Par ailleurs ce problème est traité en imposant une géométrie simple constitué de deux cylindres coaxiaux en considérant le cas où le cylindre intérieur tourne et l'extérieur reste stationnaire. Le poste de travail utilisé pour cette simulation est un PC doté d'un 2 microprocesseur Pentium (R) avec une fréquence d'horloge de 2.1GHz et de 3 Go de mémoire vive (fait deux calculs on parallèle) [5].

Nous faisons ici une présentation des modèles, schémas et méthodes utilisés dans la simulation numérique, présentation qui sera volontairement brève.

II -1. Expérience de validation :

Cette expérience a été effectuée au laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée (L.E.M.T.A) de l'institut nationale polytechnique de Lorraine à Nancy par le Professeur A.Bouabdallah, on donne en ce qui suit un aperçu sur le montage du dispositif Taylor-Couette utilisé.

II -1.1. Description du dispositif expérimentale :

Le système d'écoulement a été réalisé en matériaux isolant et transparents(plexiglass) offrant la possibilité d'un fonctionnement aussi bien avec la méthode polarographique (La méthode polarographique représente un modèle simple de transfert de matière pour pouvoir

faire une observation locale de l'écoulement en vue de préciser le mécanisme et les propriétés des structures rencontrées au cours de son évolution) .

Le cylindre extérieur fixe taillé dans un bloc parallélépipédique a un diamètre intérieur $2R_2 = (110 \pm 0.2) \text{ mm}$ et une hauteur $L = (270 \pm 0.4) \text{ mm}$. Le système a été prévu pour un emploi avec plusieurs cylindres intérieurs interchangeables, et conçus de manière à faciliter les opérations de montage et de démontage. Ce dispositif inclut trois cylindres intérieurs définissant les configurations d'un espace annulaire mince, intermédiaire et large. Pour notre recherche nous nous intéressons pour le deuxième cas (un espace annulaire intermédiaire) pour lequel le rayon du cylindre intérieur $R_1 = 50 \text{ mm}$.

Le cylindre intérieur monté sur un axe en acier inoxydable isolé électriquement par une gaine de plexiglass comprend un évidement à chaque extrémité : l'évidement supérieur joue le rôle de déversoir et limite la hauteur utile du liquide L_u avec :

$L_u = (200 \pm 0.4) \text{ mm}$. L'évidement inférieur permet de réduire le frottement à la base et son influence sur le mouvement.

L'axe tournant, solidaire du cylindre intérieur est aligné par réglage de niveau suivant les deux bases du système d'écoulement ; ces bases sont amovibles et comportent chacune le logement d'un roulement ; cylindrique pour la partie supérieure, conique pour la partie inférieure.

Au niveau supérieur, est disposée une rondelle pour combler l'espace vide ; cette pièce a pour rôle d'éviter la formation de bulles d'air aux hautes vitesses et sert à récupérer le liquide grâce à un système de canaux judicieusement placés.

En position d'utilisation le relevé effectué sur la largeur d'espace annulaire entre cylindres $d = R_2 - R_1$ est déterminée à mieux que 2% près.

Des vérins solidaires de la base inférieure permettent d'assurer le réglage horizontal du système d'écoulement, l'ensemble du montage est installé sur un bâti reposant sur le sol par l'intermédiaire d'isolateurs anti -vibrations désolidarisé du système d'entraînement [7].

Le fluide utilisé pour cette expérience est du Benzène liquide qui représente un fluide visqueux et incompressible.

II -1.2. La transmission du mouvement rotatif :

Elle s'effectue au moyen de jeu de poulies combiné à une association de réducteurs que l'on peut utiliser selon le besoins avec différents rapports de 1/11 à 1/121 dans une large gamme de vitesse.

Un moteur de type PROLABO CONSTANT MC 1000 de puissance 100 Watts (à courant continu), fournit un couple constant dans l'ensemble du domaine de vitesse étudié, ce qui permet d'assurer la stabilité de la vitesse à mieux que 0.5 %. La fréquence de rotation du cylindre intérieur, comprise entre $2/100 t/set$ à $30 t/s$, est déterminée par une cellule photoélectrique liée à un fréquencemètre ROCHAR. La précision de mesure ainsi effectuée est meilleure que 0.2 % [7].

II -2. Description du problème :

Pour cette première étude, nous allons nous concentrer sur la simulation numérique de l'écoulement de Taylor-Couette. Pour cela, nous déterminerons les caractéristiques de la géométrie, cette première opération sera réalisée à l'aide du logiciel GAMBIT. Dans un second temps, nous passons sur FLUENT qui offre un modèle numérique adéquat permettant de modéliser le comportement d'un fluide qui se trouve dans un espace annulaire compris entre deux cylindre concentriques, cette dynamique est engendrée par l'entraînement en rotation du cylindre intérieur pendant que le cylindre extérieur reste immobile.

Avoir une meilleure appréciation des valeurs critiques distinctives pour les divers modes d'instabilités par une modélisation numérique nécessite un maillage qui tient compte de certaines exigences, ainsi que le choix des différents paramètres du code de calcul joue un rôle primordial pour l'obtention d'une solution physique en les sélectionnant judicieusement et avec sollicitude avant de lancer la simulation. Puis on attend à chaque fois la convergence de la solution pour qu'on puisse traiter et interpréter les résultats obtenus.

II .3. Présentation des logiciels :

Un grand choix de logiciels pour la CFD est désormais proposé à l'utilisateur. Parmi les logiciels de CFD, on a GAMBIT et FLUENT qui sont des logiciels qui permettent d'effectuer des simulations en mécanique des fluides allant de l'étape de génération de maillage avec GAMBIT à la résolution des équations instantanées de mouvement et au post traitement avec FLUENT . Les logiciels sont largement réponsés dans l'industrie, en raison

de leurs interfaces graphiques puissantes et de l'abondance de leurs options. Ils permettent de réaliser des simulations sur tout types de géométries complexes (fixes ou mobiles) associés à des maillages fixes ou adaptatifs et avec des modèles physiques variés (diphasique, turbulent,...) [15].

II .4. Construction sous GAMBIT :

La création du modèle géométrique a été accompli dans logiciel Gambit avec le respect de l'ensemble des paramètres utilisés dans l'expérience (la position, la longueur, le diamètre des deux cylindres,... etc.)

II .4.1. GAMBIT :

C'est un modeleur intégré pour l'analyse en CFD et associé à FLUENT. Il est utilisé pour décrire une géométrie et de mailler selon le bon vouloir de l'utilisateur du problème à traiter ainsi l'incorporation des conditions aux limites. Les options de génération de maillage de GAMBIT offrent une flexibilité de choix. La géométrie peut être décomposée en plusieurs parties pour générer un maillage structuré, sinon GAMBIT génère automatiquement un maillage non structuré adapté au type de géométrie construite. Son utilisation est simple, principalement il faut prendre les menus en haut à droite et effectuer les tâches en partant du menu de gauche pour aller jusqu'à celui de droite. Eventuellement, une géométrie dessinée dans un autre logiciel de CAO (conception assisté par ordinateur) peut être importée dans ce modeleur.

Dans le présent travail, GAMBIT offre cette possibilité de définir la géométrie représentant le domaine d'étude et de générer son maillage [15].

II .4.2. Représentation de la géométrie :

La première tâche est de borner le domaine de la simulation. Dans notre cas il s'agit seulement ici de générer une géométrie de révolution constitué de deux cylindres coaxiaux qui représentent le dispositif de Taylor-Couette de sorte que la nature de la géométrie impose tout naturellement une description en coordonnées cylindriques. La colonne annulaire anfractueuse où il circule le fluide d'une largeur $d = R_2 - R_1 = 5\text{mm}$ est délimitée par un cylindre intérieur de rayon $R_1 = 50\text{ mm}$ tournant par une vitesse angulaire Ω_1 , et un cylindre extérieur de rayon $R_2 = 55\text{ mm}$ mis au repos. Cette colonne a une hauteur $H = 200\text{ mm}$ dont ses extrémités supérieure et inférieure sont fermées par des disques terminaux parallèles, et

sont fixées au cylindre extérieur, là où la figure II.1 représente une schématisation de domaine de simulation et ses dimensions [7].

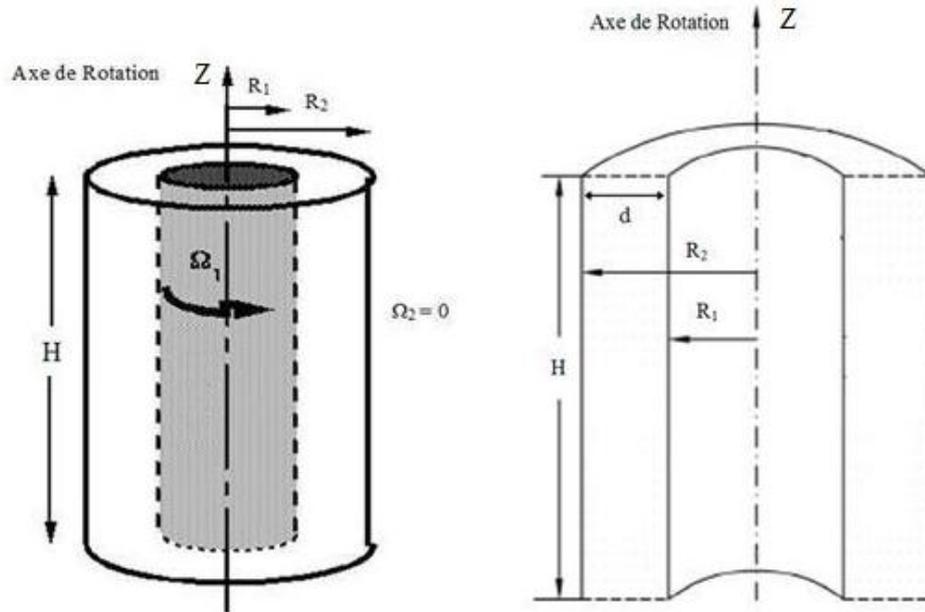


Figure II.1 : configuration géométrique [8].

II .4.3. Le maillage :

L'étape du maillage est une étape clé pour s'assurer de la validité des simulations et garantir la cohérence des résultats et prendre en compte les considérations physiques du cas à étudier. C'est l'étape de découpage du volume étudié en petits volumes élémentaires. Ce maillage est conçu à l'aide de logiciel GAMBIT. Celui-ci permet de construire deux types de maillage, structuré ou non structuré qui sont offerts à notre étude.

Le logiciel GAMBIT assure la création de la géométrie ainsi que son maillage, ce dernier propose des moyens spécifiques et des solutions étendues pour mailler les géométries les plus compliquées.

Dans notre étude et pour avoir une meilleur précision des résultats par le solveur FLUENT, cela nécessite un bon maillage dont sa finesse que nous allons choisir influera directement sur les résultats, par les approximations effectuées pour l'évaluation des gradients sur les facettes de chaque mailles mise en places en particulier, tel que GAMBIT propose un

maillage soit à base de cellules quadrilatères, soit à base de cellules triangulaire (ou à base de cellules hexaédriques ou tétraédriques, pour le 3D) [15].

L'emploi d'un maillage non structuré induirait un surplus du nombre des cellules par rapport à un maillage structuré, d'où le besoin de plus de ressources et de temps de calcul.

Le domaine à étudier (cavité cylindrique) est de forme très simple ou l'écoulement suit pratiquement la forme de la géométrie dont son découpage est fait à l'aide d'un maillage structuré (cellules quadrilatères et hexaédriques) afin de minimiser les risques de l'erreur numérique, ainsi qu'il est économique en nombre d'éléments. Par ailleurs sa conception ne génère aucune difficulté particulière, avec une distribution uniforme des éléments comme il est schématisé sur la figure (II.2).

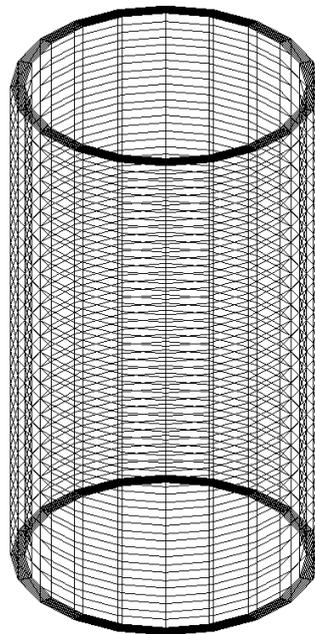


Figure II.2 : Maillage du domaine de simulation

II .4.4. Conditions aux limites :

Au niveau des extrémités du domaine à simuler, certaines variables doivent être fixées qui changent en fonction de problème à traiter. Pour le cas de notre simulation il s'agit ici de définir le type des différentes limites du système ainsi que la nature du (des) domaine(s) décrit(s) globalement. Ici l'écoulement de fluide est délimité par quatre frontières qui sont considérées comme des parois solides, imperméables et indépendantes. Une paroi intérieure (rotor) tournante avec une vitesse donnée et une paroi extérieure étant immobile (stator), les deux autres représentent la paroi supérieure 'couvercle ' et la paroi inférieure 'fond' qui sont

fixées à la paroi extérieure et ont des vitesses nulles. Par ailleurs la nature de domaine du système maillé est de type fluide qui est incompressible et visqueux (*Benzène liquide*) [7] dont ses propriétés physiques sont :

La masse volumique $\rho = 875 [kg/m^3]$.

Et sa viscosité dynamique $\nu = 0.000587 [kg/m.s]$.

Ces paramètres ont été retirés de l'expérience de A.BOUABDALLAH par aux quelles nos travaux sont validés.

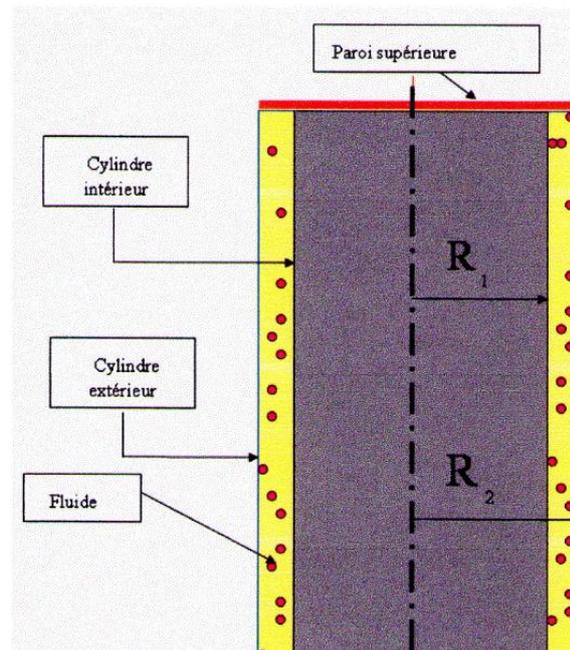


Figure II.3 : condition aux limites [5].

II .5. La résolution par le solveur :

C'est le domaine du numéricien qui représente la partie numérique du code de calcul consacrée à la mise en place des conditions physiques, la résolution proprement dite du système d'équations discrétisées couplées aux modèles choisis ainsi que la visualisation des résultats. Plus le solveur est puissant, moins l'utilisateur a besoin d'intervenir. Mais on peut éventuellement agir manuellement sur le solveur en modifiant le pas de temps ou le facteur de sous-relaxation afin d'assurer la convergence de la simulation pour avoir une solution physique. Le suivi de cette convergence est assuré par le calcul des résidus qui seront parfois vérifiables à partir des résultats proposés s'ils dépassent le seuil choisi [15].

II .5.1. Présentation de "Fluent" :

Le code FLUENT est un programme de simulation numérique des écoulements de fluide compressible, incompressible, stationnaire ou instationnaire impliquant divers phénomènes physiques tels que le transfert de chaleur, la turbulence, les réactions chimiques, les écoulements dans les machines tournantes, moteurs thermiques, et ce pour des géométries industrielles très complexes.

"Fluent" est écrit en langage de programmation C et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offertes par ce langage (allocation de la mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui lui permet de s'exécuter en tant que plusieurs processus simultanés sur le même poste de travail ou sur des postes séparés, pour une exécution plus efficace.

Ce code de calcul emploie la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation. Les équations intégrales qui gouvernent l'écoulement, tels que l'équation de continuité, l'équation de conservation de la masse, celle de l'énergie ainsi que d'autres scalaires, comme la turbulence, sont résolues par cette méthode numérique. Ce code permet également le raffinement du maillage en fonction des conditions aux limites [17].

II .5.2. Méthode des Volumes Finis :

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et celle des éléments finis.

Contrairement à la méthode des différences finies qui met en jeu des approximations des dérivées, les méthodes des volumes finis et des éléments finis exploitent des approximations d'intégrales. Toute fois, la méthode des volumes finis requiert dans un premier temps une partition du domaine de calcul qui est issue du maillage initial constitué d'éléments finis et puis la résolution du système d'équations par différentes méthodes de résolution numériques directes et itératives [22].

L'équation aux dérivées partielles est résolue de manière approchée à l'aide d'un maillage constitué de volumes finis qui sont des petits volumes disjoints (en 3D, des surfaces en 2D, des segments en 1D) dont la réunion constitue le domaine d'étude. Les volumes finis peuvent être construits autour de points d'un maillage initial, mais ce n'est pas une nécessité.

Les méthodes de volumes finis ont été initialement mises au point pour des lois de conservation hyperboliques, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques.

Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. En utilisant le théorème de flux-divergence, les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface et ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour élaborer une approximation des flux aux interfaces. Puisque le flux entrant dans un volume donné est égal au flux sortant du volume adjacent donnant une approche très physique (bilan de flux), cette méthode est conservative (par sa formulation), donc parfaitement adaptées à la résolution de lois de conservation.

Un autre avantage de la méthode des volumes finis c'est qu'elle est facilement utilisable avec des maillages non-structurés car, en matière de discrétisation des lois de conservation, sa formulation ne tient aucun compte de la complexité du maillage et qui s'adapte à une géométrie quelconque d'où tous les codes généralistes en Mécanique des Fluides se basent sur cette méthode [22].

II .5.3. Procédure sous "Fluent" :

Au chargement du maillage sous "Fluent", il faut définir l'échelle appropriée à la géométrie (mètre, centimètre ou millimètre). Le logiciel permet aussi de réordonner les nœuds, les surfaces et les cellules en mémoire, de telle façon qu'ils aient la même disposition dans la grille et dans la mémoire, pour améliorer les performances du calcul et l'efficacité de l'accès à la mémoire.

II .5.3.1. Simple précision ou double précision :

"Fluent" offre deux modes de calcul: le mode "double précision" et le mode "simple précision".

Dans le mode "double précision", les nombres à virgule flottante sont représentés en utilisant 64 bits, alors que le mode "simple précision" utilise une représentation à 32 bits. Le revers de cette précision est que le premier mode requiert beaucoup plus de mémoire. En outre, Le mode "double précision" est recommandé pour les écoulements impliquant des longueurs d'échelles très disparates [15].

II .5.3.2. Choix de la formulation du solveur :

En démarrant "Fluent" on peut choisir entre plusieurs formulations du solveur:

- La formulation "Pressure based ", ou isolée (implicite): Cette formulation résout les équations de continuité, de quantité de mouvement et quand c'est nécessaire celle de l'énergie, séquentiellement, c'est-à-dire ils sont découplés les uns des autres (implicite par défaut). Le solveur isolé est classiquement employé pour les écoulements incompressibles à modérément compressibles. De ce fait, c'est la formulation choisie pour notre problème.
- La formulation "Density based", ou couplée soit implicite ou explicite: Cette option permet aux équations gouvernantes d'être résolues simultanément, c'est-à-dire couplées les unes avec les autres. Cependant, ce mode a été conçu pour les écoulements compressibles à grandes vitesses et n'est conseillé que pour les écoulements instationnaires [16].

II .5.3.3. Schémas de discrétisation :

Sous "Fluent", les variables stockées au centre de la cellule doivent être interpolées aux faces du volume de contrôle. Il est possible de choisir entre différents schémas de discrétisation pour les termes convectifs des équations gouvernantes, alors que les termes visqueux sont automatiquement discrétisés au second ordre pour plus de précision. Il reste que la discrétisation au premier ordre procure une meilleure convergence. Alors que le "Second Order Upwind Scheme" est de rigueur pour les écoulements non alignés au maillage.

Il existe aussi d'autres schémas de discrétisation:

- Le schéma "QUICK" (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinetics): Il procure une meilleure précision que le schéma au second ordre pour les écoulements rotationnels et tourbillonnaires (Swirling) avec un maillage régulier. Cependant, il ne s'applique pas à un maillage triangulaire.
- Le schéma "Power Law" est plus précis que le "First Order Upwind Scheme" pour les écoulements à très bas nombres de Reynolds ($Re < 5$). Sinon, il procure en général le même degré de précision [15].

II .5.3.4. Choix du schéma d'interpolation de la pression :

Pour la plupart des cas, le schéma "Standard" est acceptable. Pour des écoulements spécifiques, on peut choisir parmi les options suivantes:

- Le schéma force de volume pondéré "Body-Force-Weighted" est recommandé pour les écoulements impliquant d'importantes forces de volume (ex. convection naturelle à haut nombre de Rayleigh).
- Le schéma "PRESTO" (Pressure Staggering Option): est approprié pour les écoulements hautement tourbillonnaires, à grande vitesse de rotation ou les écoulements dans des domaines fortement courbés
- Le schéma au second ordre est utilisé pour les écoulements compressibles et pour améliorer la précision en écoulements incompressibles.
- Le schéma linéaire "Linear" est disponible comme alternative au cas où les autres options ont des difficultés de convergence ou génèreraient des comportements non physiques.

Les résolutions effectuées, ici, utilisent la variante du schéma « second order » pour la pression [5]. Ce schéma d'ordre 2 est assez stable et précis, et le schéma QUICK est recommandé pour la quantité de mouvement puisque est plus précis.

variables	pression	Quantité de mouvement
Schémas d'interpolation	second ordre	QUICK

Tableau II.1: schéma d'interpolation.

II .5.3.5. Choix de la méthode de couplage Pression-Vitesse :

Le couplage Vitesse-Pression est traité en résolvant les équations de quantité de mouvement et une équation pour la pression dérivée d'une combinaison de l'équation de continuité et celles de quantité de mouvement. "Fluent" propose trois méthodes pour le couplage pression-vitesse (seulement avec la formulation "isolé"):

Les deux premières, très similaires, sont la méthode "SIMPLE" et la méthode "SIMPLEC", plus une autre méthode qui s'appelle PISO.

❖ Méthode SIMPLE

C'est l'abréviation de (Semi-Implicit Method for a Pressure Linked Equations). Pour initialiser le calcul à l'aide de SIMPLE, nous devons donner, en utilisant en premier lieu un champ de pression P estimé. Les équations de quantité de mouvement discrétisées sont ensuite résolues en utilisant le champ de pression P pour obtenir les composantes de vitesse U et V [15].

❖ La méthode SIMPLEC

La méthode SIMPLEC Consistant. Elle a été introduite par DOORMAL et RAITHBY en 1984. Cette méthode se distingue de la méthode SIMPLE par le fait qu'on peut lui assigner un facteur de relaxation (correction) proche de 1, ceci accélère la convergence dans la plupart des cas, mais peut conduire à des instabilités de la solution [15].

❖ Méthode "PISO"

« Pressure-Implicit with Splitting of Operators » a été proposée par ISSA en 1986. Cette méthode fait partie des algorithmes de la famille "SIMPLE". Elle est recommandée pour les écoulements instationnaires ou pour les maillages contenant des cellules très obliques "highly skewed". Elle consiste en une étape de prédiction et deux étapes de corrections. Elle peut être vue comme étant une extension de SIMPLE avec des étapes de correction supplémentaires.

Donc, pour notre cas, on se limitera à l'utilisation de la méthode "PISO" qui est la plus robuste, offrant le plus de garanties pour la convergence de la solution.

La solution du système d'équations qui découle de l'intégration sur chaque volume de contrôle des équations initiales est recherchée selon une procédure séquentielle dont chaque itération comporte les étapes suivantes :

- 1) L'équation de la composante azimutale est résolue en supposant connues les deux autres composantes de vitesses u, w .
- 2) Les équations de mouvements portant sur les composantes u et w sont résolues en même temps (u suppose w nulle, et inversement).
- 3) L'équation de continuité est ensuite utilisée pour apporter les corrections nécessaires au champ de pression (initialement nul).

Ces étapes sont répétées avec une précision de 10^{-4} jusqu'à ce que l'erreur faite dans chaque équation de conservation, à l'intérieur de chaque volume de contrôle et donc sur le domaine entier soit réduite à la valeur souhaité [17].

II .5.3.6. Facteurs de relaxation :

Dans les méthodes itératives le contrôle du changement produit durant chaque itération d'une variable de l'écoulement est nécessaire, où on peut intervenir dans le processus de convergence en changeant les facteurs de relaxation. Une valeur inférieure à un facteur de relaxation permet de ralentir l'évolution de la valeur des variables d'une itération à l'autre, mais ce paramètre ne doit pas être trop faible car la solution risque alors d'être gelée et la convergence ne sera jamais atteinte.

Le code de calcul offre les meilleures valeurs des facteurs de relaxation pour une large gamme d'écoulements. Néanmoins, si on voit qu'au cours du calcul les résidus commencent à s'amplifier, il est préférable de réduire ces derniers. Par contre, si on observe une convergence très lente mais sûre là, on pourra les augmenter prudemment, surtout le facteur de relaxation lié à l'équation de continuité [5].

Les facteurs de sous-relaxation utilisés pour cette simulation sont présentés dans le tableau II.2, qui ont permis l'accélération de la convergence de processus itératif.

Variables	Facteurs de sous-relaxation
Pression	0.3
densité	1
Force de volume	1
Quantité du mouvement	0.7

Tableau II.2: Facteurs de sous-relaxation.

II .5.3.7. Initialisation :

Dans la méthode des volumes finis, il faut mettre toujours des hypothèses de départ pour que le calcul itératif puisse commencer. Pour cela on initialise l'ensemble des quatre variables à calculer sur tous les points de maillage, c'est-à-dire, la pression ainsi que les trois composantes de la vitesse. Comme l'on cherche une solution stationnaire dans notre étude, l'initialisation a été faite en imposant des valeurs constantes pour les variables cités précédemment (il est recommandé pour le cas des écoulements laminaires d'initialiser ces

variables par la valeur 0 puisque il s'agit d'un écoulement stationnaire qui n'évolue pas en fonction du temps), ceci permet de calculer les grandeurs qui caractérise l'écoulement(vitesse, pression) pour les itérations qui se suivent afin de ne pas trop éloigner de la solution espérée.

Conclusion :

Cette partie représente la description de l'étude numérique dans ses divers aspects, au début on a commencé à représenter le logiciel Gambit ; comme on a pris en compte son principe de fonctionnement, afin d'avoir un aperçu sur son rôle essentiel pour préparer un maillage conforme et approprié à la simulation numérique par le code de calcul Fluent.

Cependant, la géométrie disposée à l'étude a été décrite en détail ainsi que les conditions aux limites car elles influent directement sur l'ensemble des résultats obtenus.

En revanche on a abordé le code de calcul Fluent dans tous ses aspects par l'accès à la formulation du solveur. Les schémas d'interpolations et de discrétisations ainsi que les différentes règles de base montrent bien qu'ils sont le noyau optimal du code numérique.

On note que l'élaboration d'un bon maillage ainsi que le bon choix des paramètres échéant dans la partie simulation permet d'obtenir des résultats au niveau requis comparativement à l'expérience achevée.

Chapitre -III-
Résultats & Discussions

Introduction :

L'étape ultime consiste à valider les résultats de simulation après la fixation des paramètres de la modélisation numérique et le choix du maillage. Cette étape demeure indispensable car elle permet d'interpréter l'ensemble des résultats obtenus par la simulation, cette somme d'informations résultantes étant toujours extrêmement importantes.

A cet effet, on va procéder dans ce chapitre à l'étude numérique. Celle-ci se focalise sur la visualisation de la variation des contours des pressions et de la vitesse axiale obtenus à partir d'un accroissement graduel de nombre de Taylor, pour qu'on puisse effectuer une analyse qualitative pour apprécier la solution, sachant que cette étude de simulation a été établie pour le cas d'un écoulement de la première instabilité (vortex de Taylor) dans le dispositif de Taylor-Couette.

Afin d'avoir une meilleure visualisation, on signale que les résultats sont systématiquement stockés dans des fichiers qui sont exploités en utilisant d'autres logiciels tels que TECPLOT.

III. 1. Effet de maillage :

Avoir une meilleure précision des résultats par le solveur Fluent nécessite une étude de sensibilité au maillage, de sorte que la solution soit indépendante de ce dernier. Cela consiste à faire plusieurs tests avec un nombre de mailles différent jusqu'à obtenir le nombre de maille adéquat et qui donne un résultat numérique stable et plus proche de la valeur critique de nombre de Taylor évaluée expérimentalement par A.Bouaballah.

Les résultats des tests effectués sont récapitulés dans le tableau suivant :

Maillage dans la direction : radiale, axiale, tangentielle.	Nombre de mailles	<i>Ta</i> critique
5 × 86 × 172	73960	46.3
5 × 92 × 182	83720	44.05
5 × 98 × 190	93100	43.73
6 × 105 × 208	131040	42.4
6 × 116 × 230	160080	42.03
7 × 120 × 240	201600	41.33
7 × 130 × 270	245700	41.33

Tableau III.1 : Représentation du *Ta* critique en fonction du nombre de maille.

L'étape de raffinement du maillage est un point très sensible à prendre en considération, et nécessaire pour toutes les simulations, car elle influe directement sur les résultats, ainsi qu'un bon maillage peut fournir un compromis entre la précision et le coût de calcul, c'est pour quoi on a réalisé cette série de tests, dont les résultats sont représentés sous forme d'un graphe, et cela dans le but de fixer la taille du maillage approprié pour lancer le calcul.

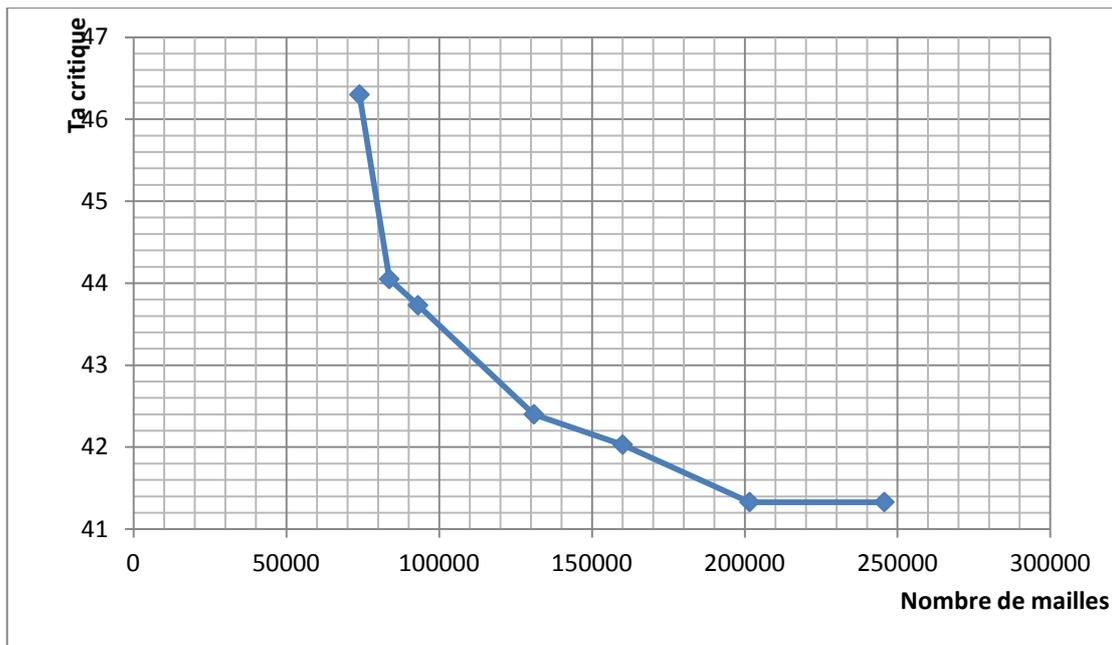


Figure III.1. L'évolution du nombre de Taylor en fonction du nombre de mailles.

Ce graphe montre que le nombre de Taylor critique varie en fonction de nombre de mailles, cette variation est inversement proportionnelle. Au début, le nombre de Taylor était élevé ($Ta = 46.3$) pour un faible nombre de mailles, puis commence dans une diminution graduelle avec l'augmentation de nombre de mailles jusqu'à la valeur $Ta = 41.33$ qui correspond à un nombre de mailles égale à 201600, c'est la valeur à partir de laquelle qu'on constate une stabilité entre le nombre de Taylor et le nombre de mailles même s'il augmente, et qui reflète le bon maillage donnant un résultat numérique proche de celui évalué expérimentalement, et qui facilite les opérations prévues par le programme d'ordinateur.

III.2. Validation des résultats numérique :

Après avoir imposé les conditions aux limites, le type de fluide, la précision, le choix des schémas et l'algorithme, on initialise l'ensemble des variables. Ensuite on gère la progression du calcul itératif par le biais du suivi des résidus des équations se rapportant à chacune des variables. Et puis on lance la première série d'itérations.



Figure III.2.A: résultat expérimental [7] **Figure III.2.B:** résultat numérique

Pour cette étude on a trouvé une valeur de nombre de Taylor critique (numériquement) égale à $Tc_1 = 41.33$ et qui est proche de la valeur expérimentale estimée par A.BOUABDALLAH [25] et qui est égale à $Tc_1 = 41.2$ avec un taux d'erreur égale à 0.3%.

On signale que cette valeur a été obtenue après avoir varié les différents paramètres pour chaque simulation jusqu'à obtenir les bons algorithmes de discrétisation, en jouant également sur le critère de convergence.

III.3. Etude de la première instabilité :

Dans la présente étude, la configuration géométrique utilisée est de type ROTOR-STATOR dont sa description a été décrite en détaille dans le chapitre précédent.

Pour ce cas, et dans le but de chercher et mettre en évidence la valeur critique de la vitesse de rotation qui correspond à l'établissement de la première instabilité (laminaire perturbé), on effectue une variation de façon lente et progressive de la vitesse de rotation de cylindre intérieur à partir de l'état de base qui définit l'écoulement de Couette jusqu'à l'apparition des cellules de Taylor en notant les évolutions dans ce système.

Le tableau suivant résume les valeurs de vitesse de rotation du cylindre intérieur, ainsi que leurs nombre de Taylor et leurs nombre de Reynolds correspondants.

<i>Vitesse de rotation du cylindre interne $\Omega_I(\text{rad/s})$</i>	<i>Nombre de Taylor</i>	<i>Nombre de Reynolds</i>
0.068382	07.38	23.36923
0.085144	10.00	31.62255
0.127716	15.00	47.43383
0.170288	20.00	63.24511
0.212860	25.00	79.05638
0.255433	30.00	94.86766
0.298005	35.00	110.6789
0.306519	36.00	113.8412
0.315034	37.00	117.0034
0.323548	38.00	120.1657
0.332062	39.00	123.3280
0.338022	39.70	125.5415
0.340577	40.00	126.4902
0.341428	40.10	126.8064
0.342705	40.25	127.2808
0.343131	40.30	127.4389
0.343983	40.40	127.7551
0.349091	41.00	129.6525
0.349943	41.10	129.9687
0.350794	41.20	130.2849
0.351646	41.30	130.6011
0.351990	41.33	131.6969

Tableau III.2 : Représentation de la vitesse de rotation, nombre de Taylor et Nombre de Reynolds.

Il est important de signaler que ces valeurs sont en bon accord avec celles utilisées dans le travail expérimental, permettant d'effectuer une simulation numérique à haut degré de précision.

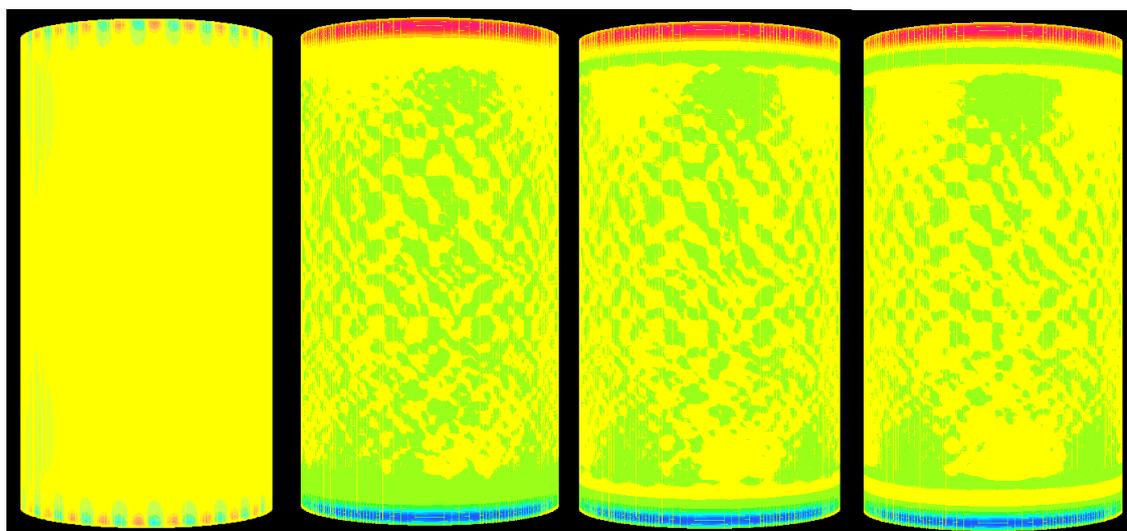
III.3. 1.Champ de vitesse Axiale :

III.3.1.1.Evaluation des cellules de Taylor et des couches d'Eckman :

Lors du passage d'un état statique (le repos) vers un état dynamique, via un accroissement graduel de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, commençant par un très faibles nombre de Taylor $Ta = 05$ qui correspond au régime laminaire, on aperçoit une homogénéité parfaite de l'écoulement sans présence d'une aucune structure particulière, sauf des petites perturbations au niveau des extrémités qui sont dues aux effets de bords.

En continuant à augmenter la valeur de nombre de Taylor, on observe des petits tourbillons qui s'installent au voisinage des bords supérieure et inférieure de l'espace annulaire (les parois terminales), cette opération continue jusqu'à la valeur ($Ta = 36$), c'est la valeur pour la quelle qu'on voit une génération totale des couches d'Eckman dans les bornes, et pour que son émergence soit net et claire, ces couches sont à l'origine du développement des cellules de Taylor dans l'entrefer.

Augmentant encore d'avantage la vitesse de rotation et en constatant à chaque fois l'évolution de l'écoulement, on remarque la superposition d'autres tourbillons formés de la même façon que les tourbillons précédents, cette formation continue à persister jusqu'à l'occupation entière de tout l'espace annulaire, et pour que ces tourbillons s'empilent le long de la hauteur des deux cylindres, et cela pour $Ta = 41.33$ qui correspond à l'installation de la première instabilité hydrodynamique de l'écoulement Taylor-Couette.

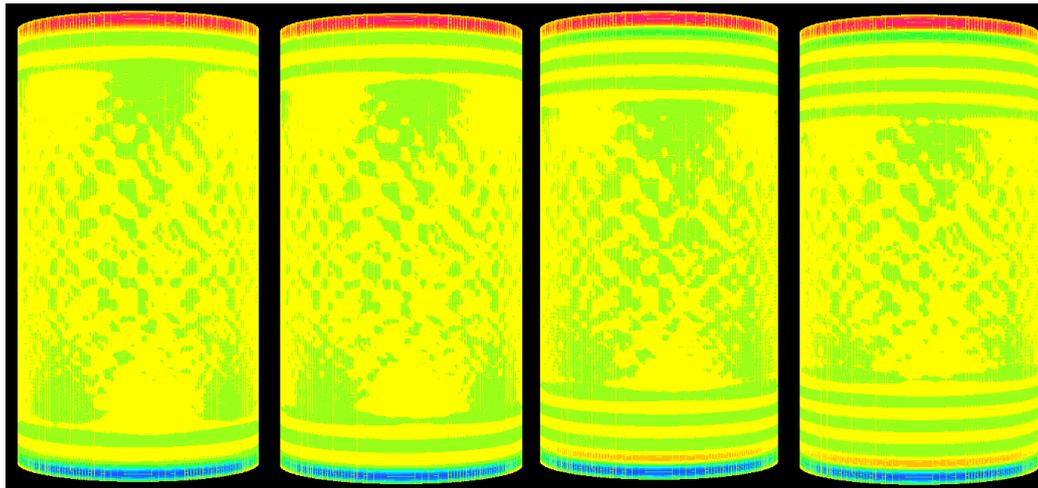


Ta=7.38

Ta=10

Ta=15

Ta=20

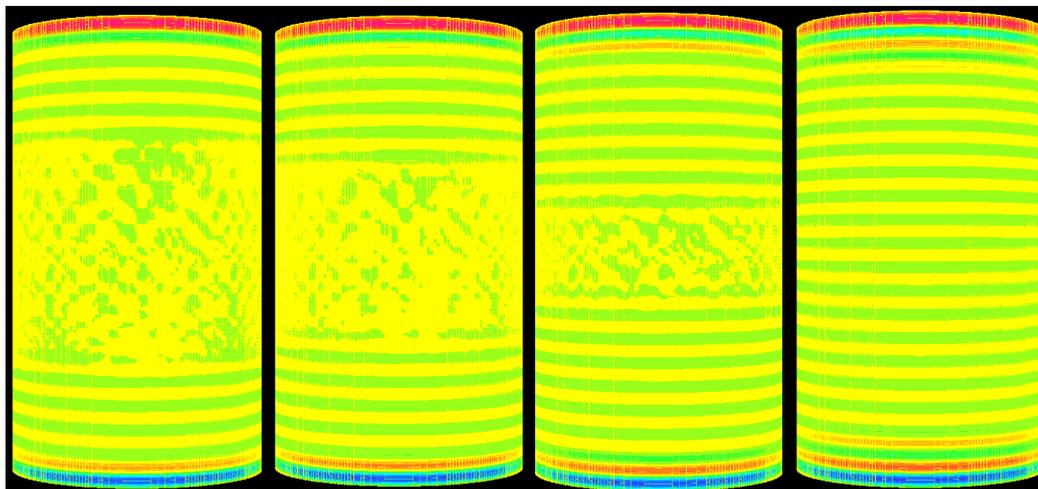


Ta=25

Ta=30

Ta=35

Ta=36

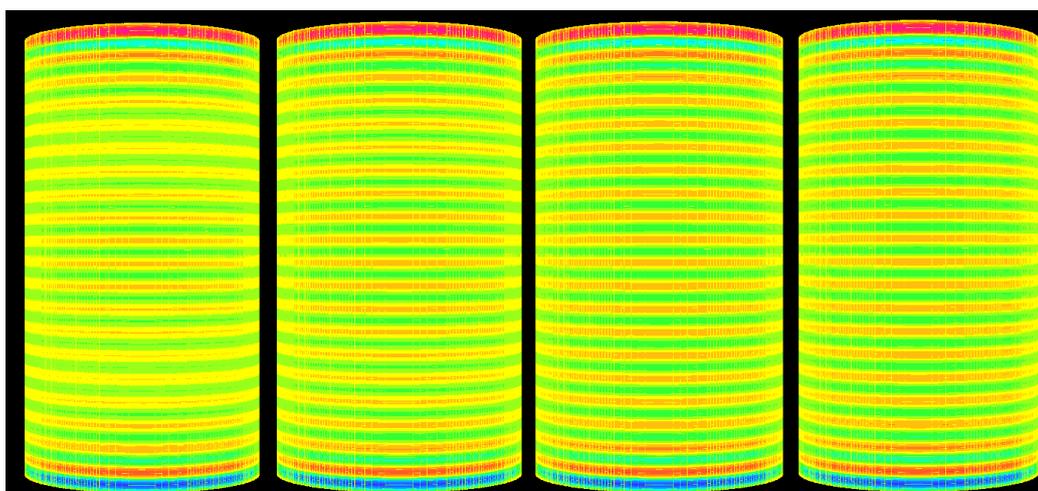


Ta=37

Ta=38

Ta=39

Ta=39.7

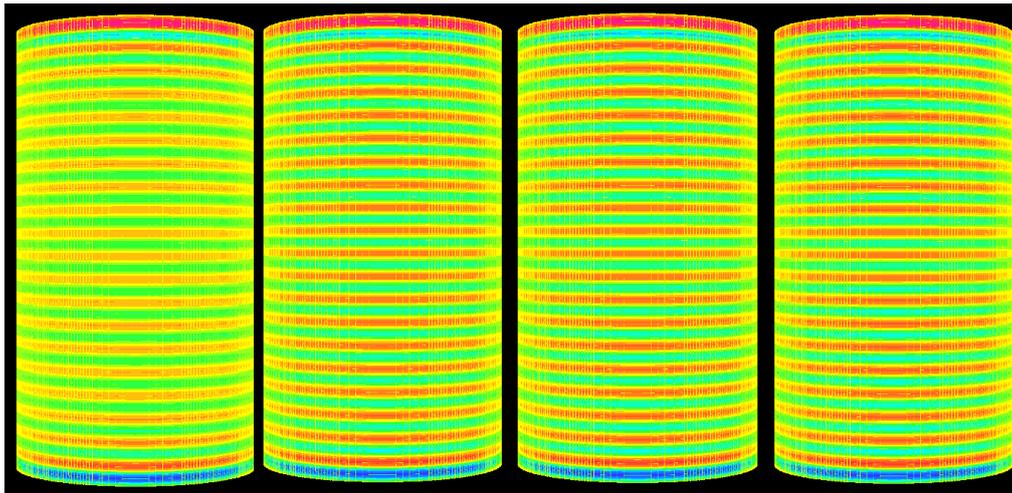


Ta=40

Ta=40.1

Ta=40.25

Ta=40.3

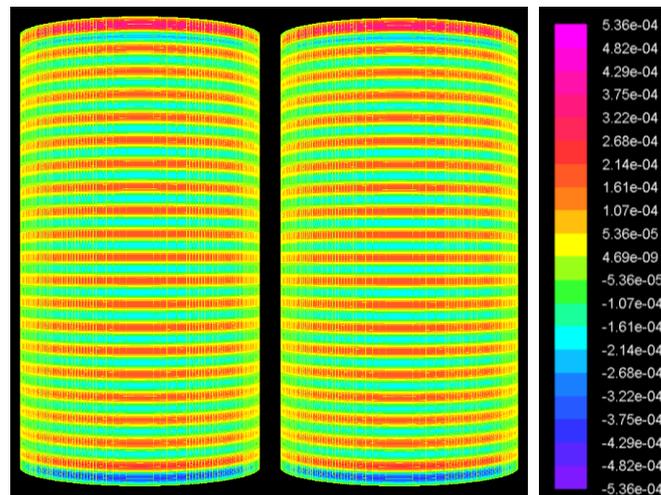


Ta=40.4

Ta=41

Ta=41.1

Ta=41.2



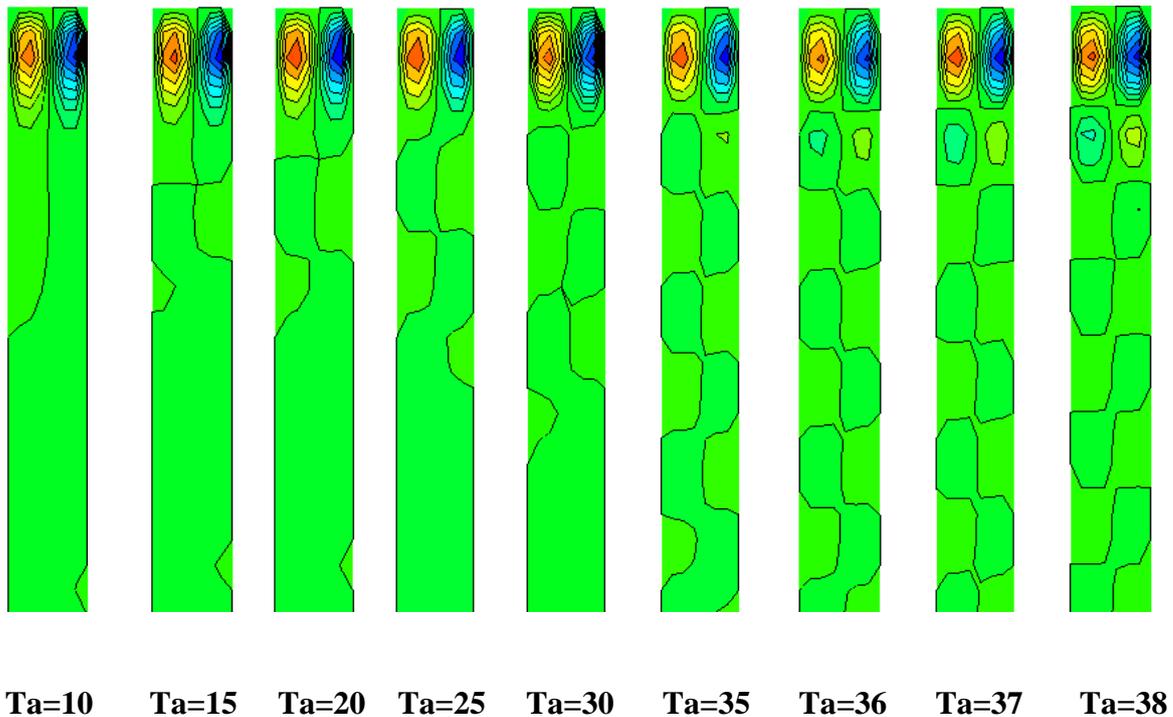
Ta=41.3

Ta=41.33

Figure III.3: Processus de développement de la première instabilité (Champ de vitesse axiale).

Cependant, la visualisation du contour de la vitesse axiale dans le plan méridien (r, z) comme il est montré dans la figure (III.4), expose clairement ce développement de l'écoulement dans la colonne fluide, où on observe le déclenchement des cellules d'Eckman pour $Ta = 10$, ces cellules prennent dans l'éclaircissement jusqu'on atteint $Ta = 36$. Cette situation se poursuivra par la formation progressive d'autres cellules au fur et à mesure que le nombre de Taylor augmente, afin d'effectuer le remplissage total par ces tourbillons dans toute la cavité annulaire, et qui aura lieu pour $Ta = 41.33$, où la propagation s'effectue en allant des bornes jusqu'on arrive au milieu de l'entrefer.

Par ailleurs, l'analyse descriptive de processus du développement de cette figure montre l'existence d'une périodicité alternante de la vitesse axiale le long de l'entrefer, cette dernière est due à l'effet des cellules contrarotatives, et que ces cellules sont représentées par deux couleurs, couleur jaune liées aux zones à forte vitesse et couleur bleu liées aux zones à faible vitesse, et qui traduisent la présence d'un transport de fluide entre le rotor et le stator et inversement, où l'écoulement s'arrange pour former des tourbillons associés par paire comme le prévoit la théorie ainsi que les mesures expérimentales. Ces tourbillons, dits de Taylor, sont contrarotatifs. C'est-à-dire qu'une phase de transfert du fluide du rotor vers le stator est toujours encadrée par deux phases de transfert du fluide du stator vers le rotor. On est en quelque sorte en présence de pompes alternées qui engendrent l'instabilité de l'écoulement.



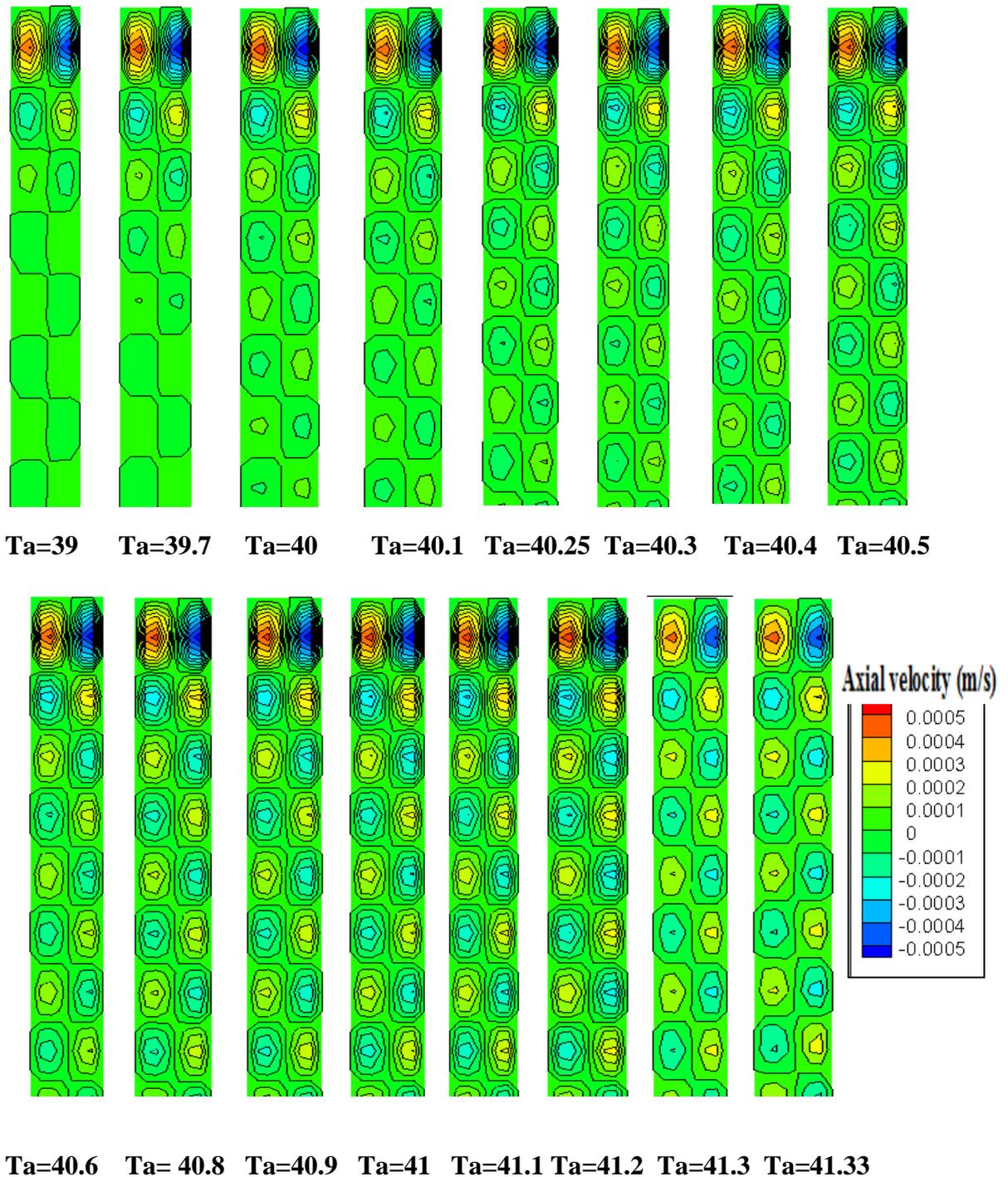


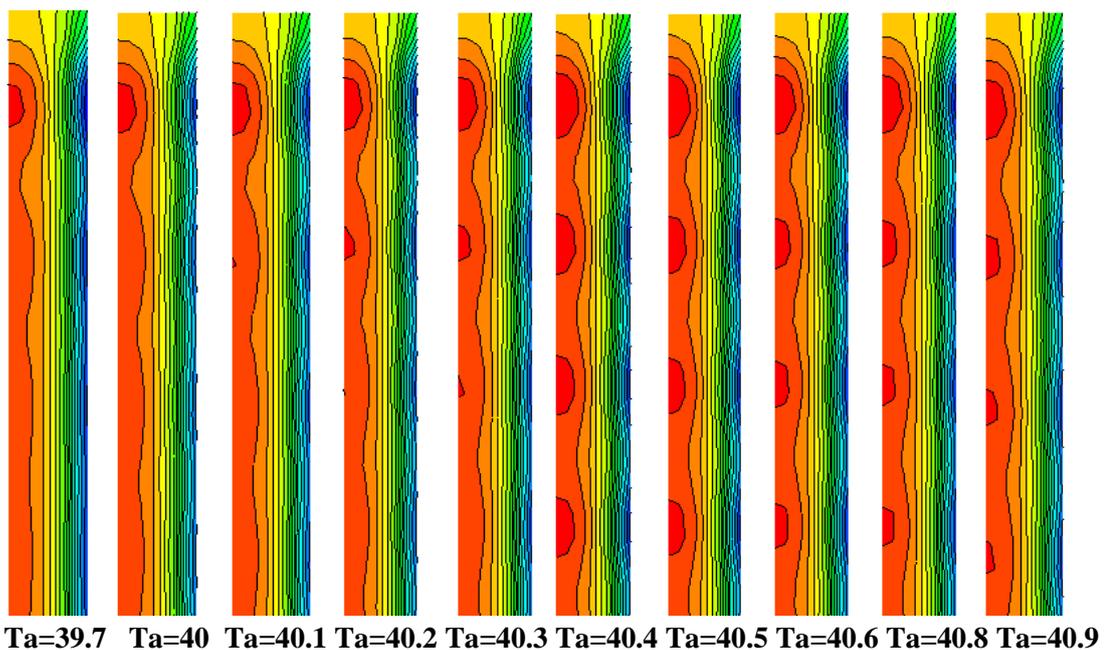
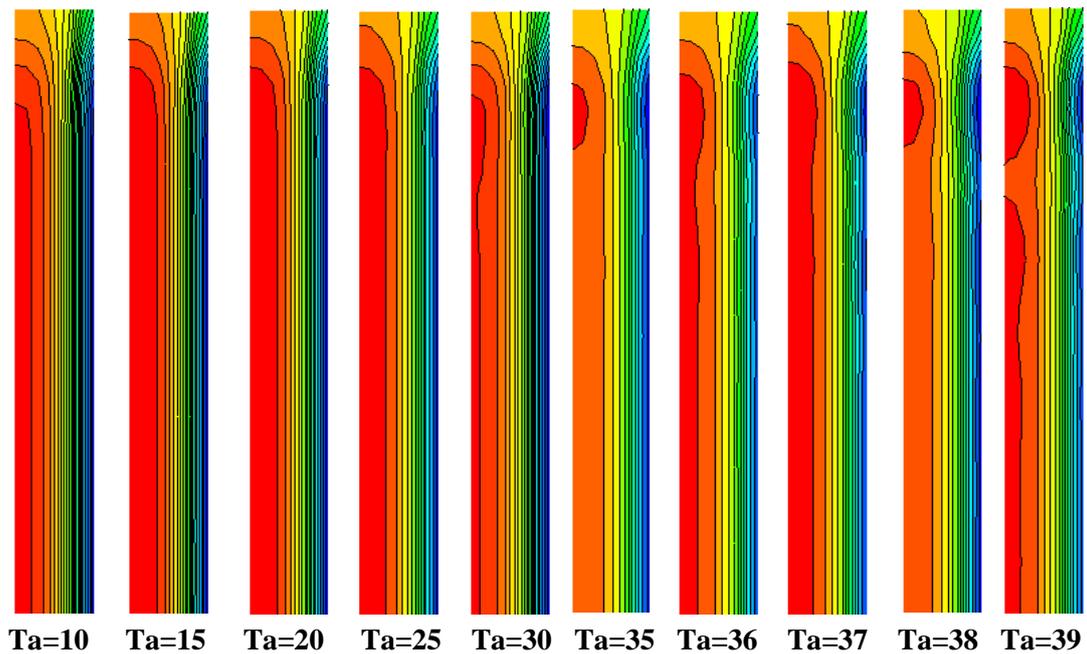
Figure III.4 : Champ de vitesse axiale dans le plan(r, z).

III.3. 2.Champ de pression statique :

La représentation des résultats pour le champ de pression dans une coupe transversale c.-à-d. le plan (r, z) (Figure III.5), permet d'identifier les changements pouvant avoir lieu lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur conduisant à l'apparition des cellules de Taylor qui se manifestent par des zones avec des couleurs différentes, ce sont les zones de couleur bleu qui traduisent les domaines à faibles valeurs de pression statique (zone de dépression), qui correspondent

aux champs de fortes vitesses de rotation liées à l'entraînement par le rotor, à l'opposé des zones avec de couleur rouge qui représentent les domaines à fortes valeurs de pression statique (zone de surpression) qui est due au fait que les vitesses ont des valeurs faibles ou nulles.

De plus, on remarque la création d'une troisième zone intermédiaire occupe le domaine entre les deux zones citées précédemment et qui prend des valeurs moyens en pression conduisant à l'apparition de ces cellules de Taylor grâce à la circulation contrarotative des particules pour chaque deux cellules voisines.



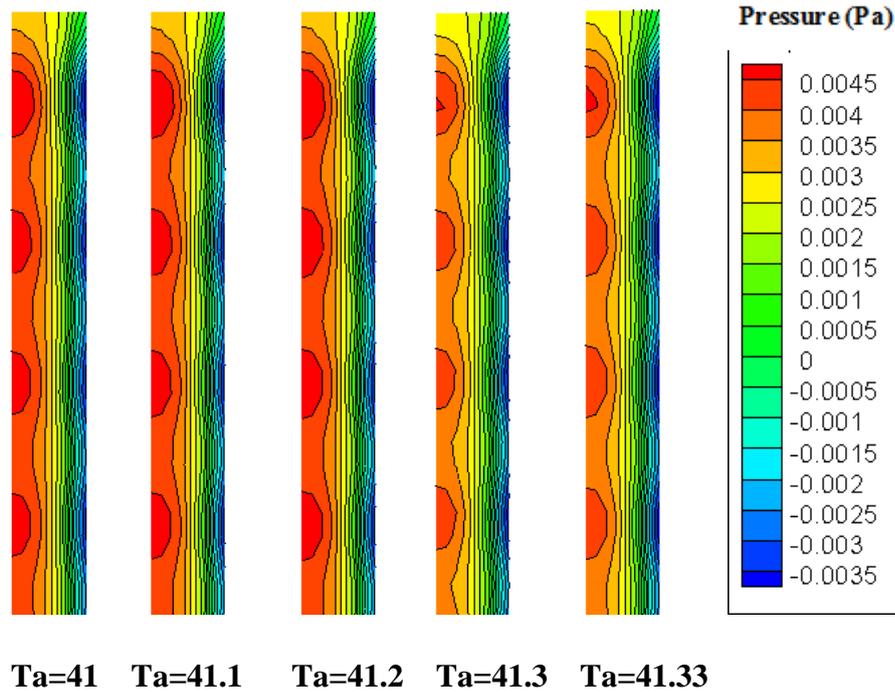
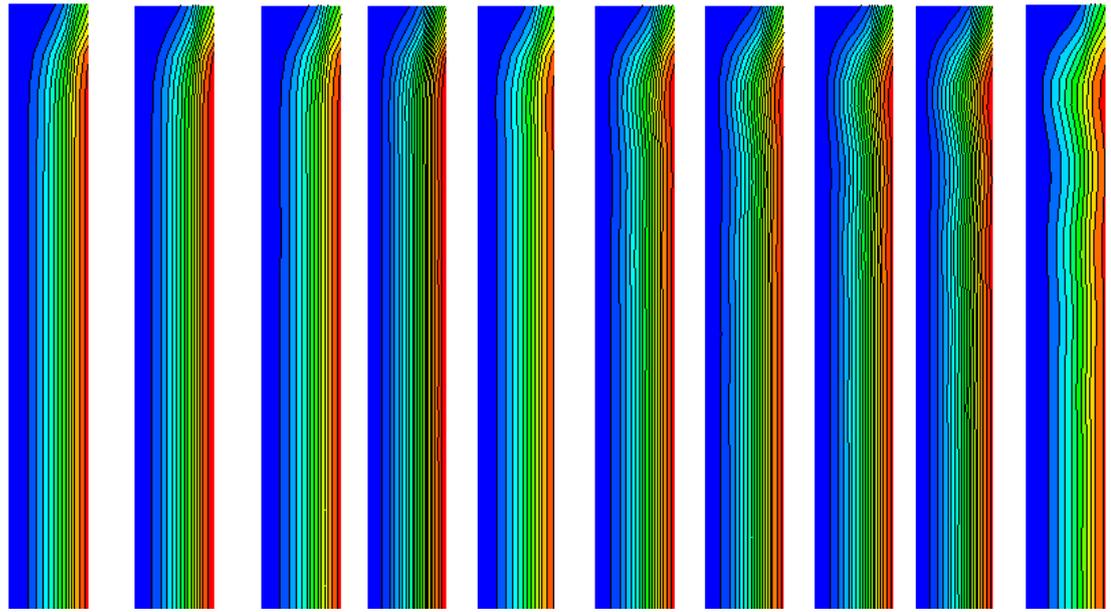


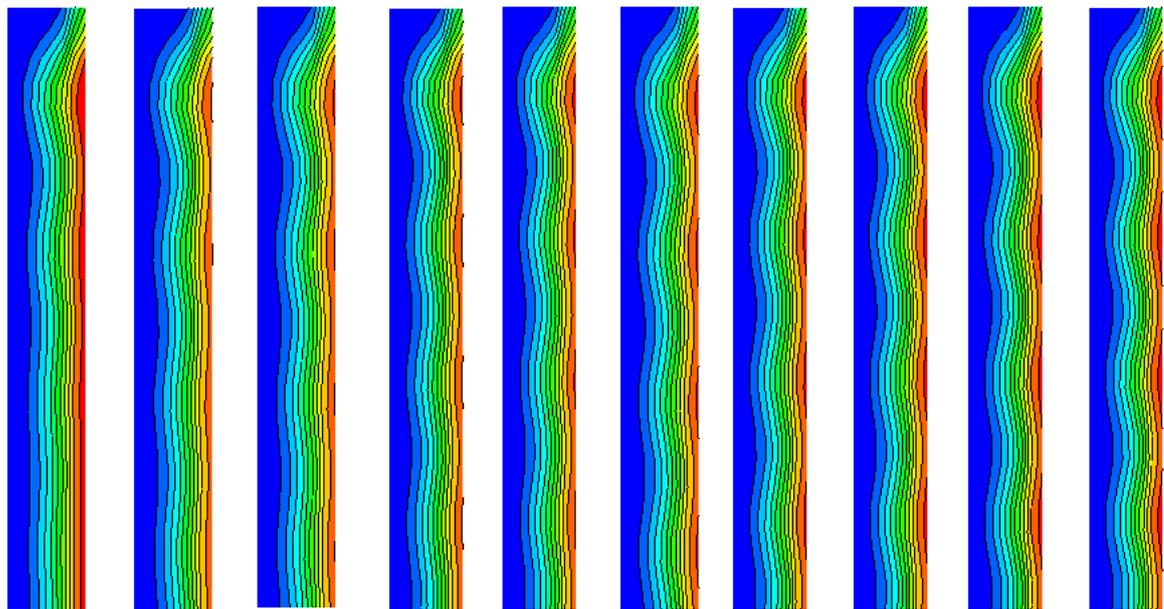
Figure III.5 : Champ de pression statique dans le plan (r, z) .

III.3. 3.Champ de pression dynamique :

On constate que le champ de pression dynamique présente des lignes qui sont courbées aux bornes, et verticales de forme droite au milieu, et ça pour des faibles valeurs de nombre de Taylor, puis ces lignes commencent à prendre une nature ondulatoire avec l'augmentation de ce paramètre de contrôle montrant une périodicité alternante des zones de surpression ; avec de couleur rouge correspond à des régions à haute perturbation entraînées par des vitesses de rotation importante, et des zones de dépression avec de couleur bleu correspond aux autres régions de faibles perturbations, là où la vitesse est faible ou nulle, et cela inversement par rapport au champ de pression statique.



Ta=10 Ta=15 Ta=20 Ta=25 Ta=30 Ta=35 Ta=36 Ta=37 Ta=38 Ta=39



Ta=39.7 Ta=40 Ta=40.1 Ta=40.2 Ta=40.3 Ta=40.4 Ta=40.5 Ta=40.6 Ta=40.8 Ta=40.9

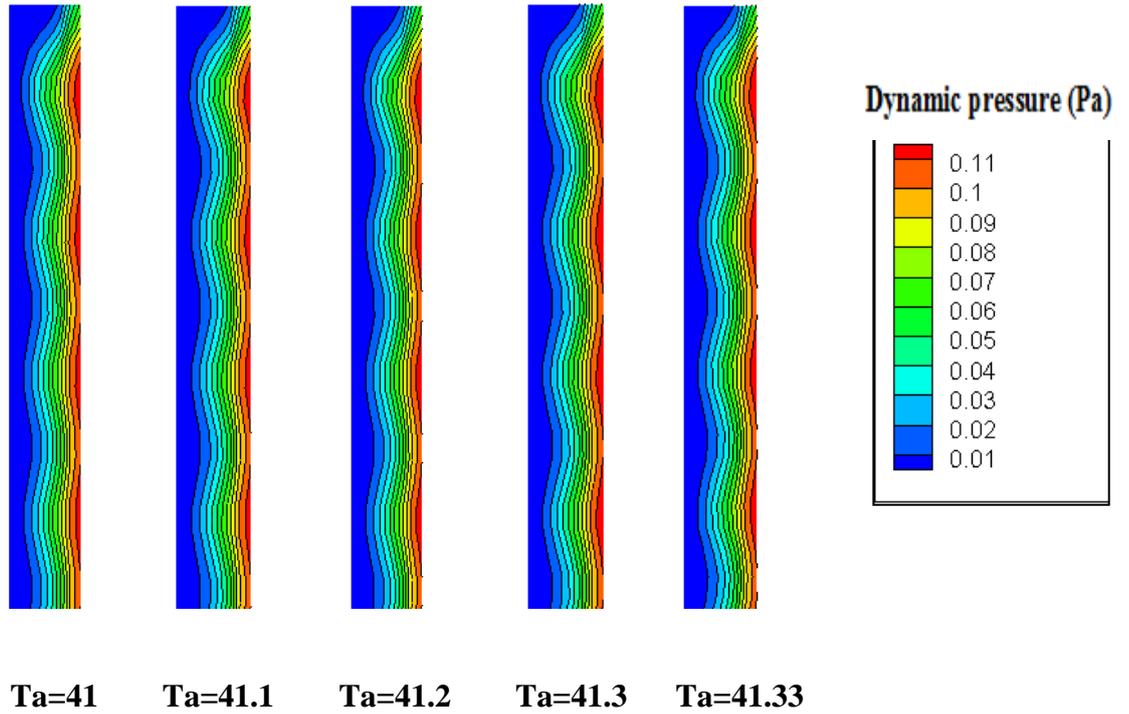


Figure III.6. Champ de pression dynamique dans le plan(r, z).

III.4. 1.Profil de vitesse axiale :

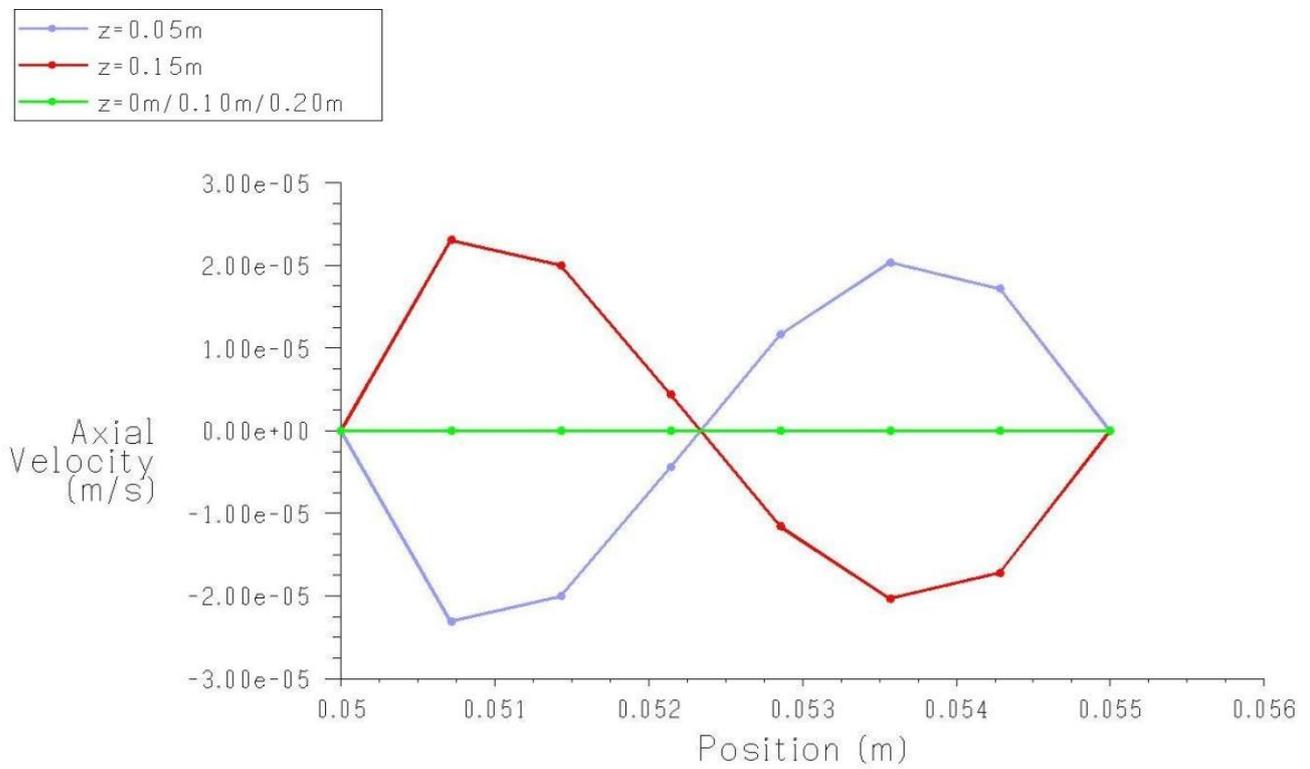


Figure III.7 : profil de la vitesse axiale selon la direction radiale ($Ta = 41.33$)

Le comportement dynamique du fluide à l'intérieur de l'entrefer est donné dans la Figure III.7 qui montre le profil de la vitesse axiale en fonction de la position x pour différents niveaux de la hauteur Z . Dans les niveaux $Z = 0\text{ m}$ et $Z = 0.20\text{ m}$ qui représentent les bornes supérieure et inférieure de l'espace annulaire, on voit que la vitesse des particules fluide est pratiquement nulle, et cela est dû à l'effet de la viscosité du fluide qui est en adhérence avec les parois terminales, ce contact entre les parois et le fluide génère une force de frottement importante qui entrave le déplacement des particules et conduit au repos.

On note que pour les hauteurs $Z = 0.05\text{ m}$ et $Z = 0.15\text{ m}$ on obtient des profils de vitesse axiale qui suivent une variation périodique sous forme sinusoïdale en parfait accord avec la variation de cellules de TAYLOR, et avec opposition de phase (des signes différents) du fait de l'alternance et de la contrarotativité des tourbillons. C'est-à-dire quand la vitesse axiale prend des valeurs positives pour $Z = 0.15\text{ m}$ les valeurs de vitesse pour $Z = 0.05\text{ m}$ seront négatives et inversement, ce qui confirme l'existence de deux tourbillons symétriques (par rapport au milieu) et contrarotatifs, là où on peut dire d'une manière générale que les valeurs de la vitesse axiale varient positivement et négativement le long de la direction radiale pour n'importe quelle hauteur Z , dont le signe dépend du sens de rotation de tourbillon.

Au milieu de l'espace annulaire dans $Z = 0.1\text{ m}$, on note que la vitesse du fluide est très faible et qui tend vers zéro, c'est le résultat d'interaction entre deux forces importantes, c'est la force de pression ainsi que la force centrifuge.

Le profil de la vitesse axiale nous permet de visualiser la périodicité axiale de l'écoulement, due à la persistance des cellules de TAYLOR, là où l'alternance des vitesses positives et négatives de la composante axiale constitue une caractéristique des tourbillons contrarotatifs, indiquant le sens inverse des deux cellules décrivant l'écoulement tourbillonnaire à l'intérieur de l'entrefer dans le sens horizontal suivant x .

III.4. 2. Profil de pression statique :

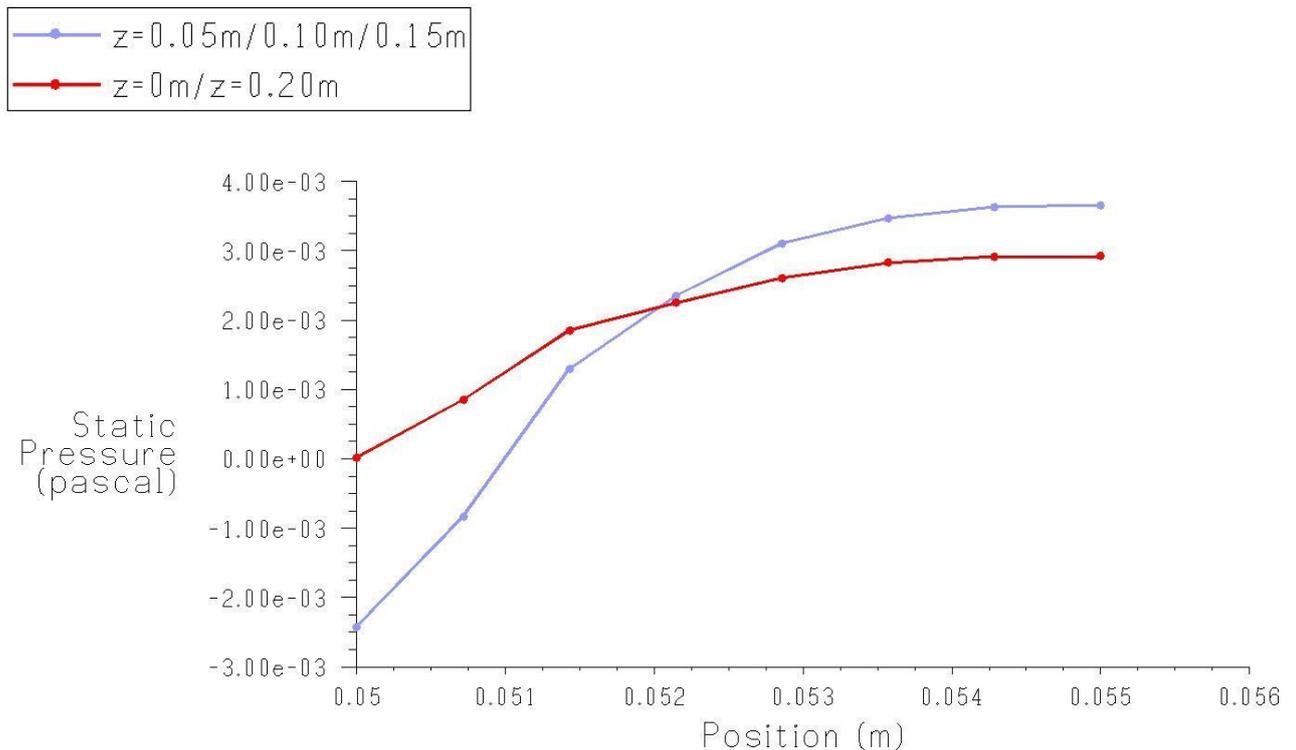


Figure III.8 : L'évolution de la pression statique le long de l'entrefer pour ($Ta = 41.33$)

La figure III.8 représente l'évolution de la pression statique en fonction de la direction radiale pour différentes positions sur l'axe (OZ), on remarque que les courbes pour Z égale à 0.05m , 0.10m , et 0.15m sont parfaitement confondues, et il est de même pour $Z = 0\text{m}$ et $Z = 0.2\text{m}$ ce qui montre l'uniformité de la pression le long de l'axe mais avec un petit changement au niveau des extrémités qui provoquent une force de friction pariétale additionnelle, cette dernière est à l'origine de cette différence.

On distingue, aussi, que la pression prend des valeurs faibles au voisinage du rotor, puis elle commence à s'accroître graduellement le long de la direction radiale en s'éloignant de cette zone jusqu'à elle atteint sa valeur maximale au niveau du stator, ce qui indique la présence de deux parties, une soumise à une dépression, et l'autre soumise à une surpression, cette différence de pression est la cause principale de la circulation tridimensionnelle et qui est due, d'une part à la force centrifuge créée par la rotation du cylindre intérieur, et d'autre part à l'effet de viscosité du fluide, ce qui induit un frottement avec la paroi du cylindre extérieur, cette circulation se rompt à différent niveau de l'entrefer par un flux radial engendré par la force centrifuge conduisant à la naissance des tourbillons contrarotatifs .

III.4. 3.Profil de pression dynamique :

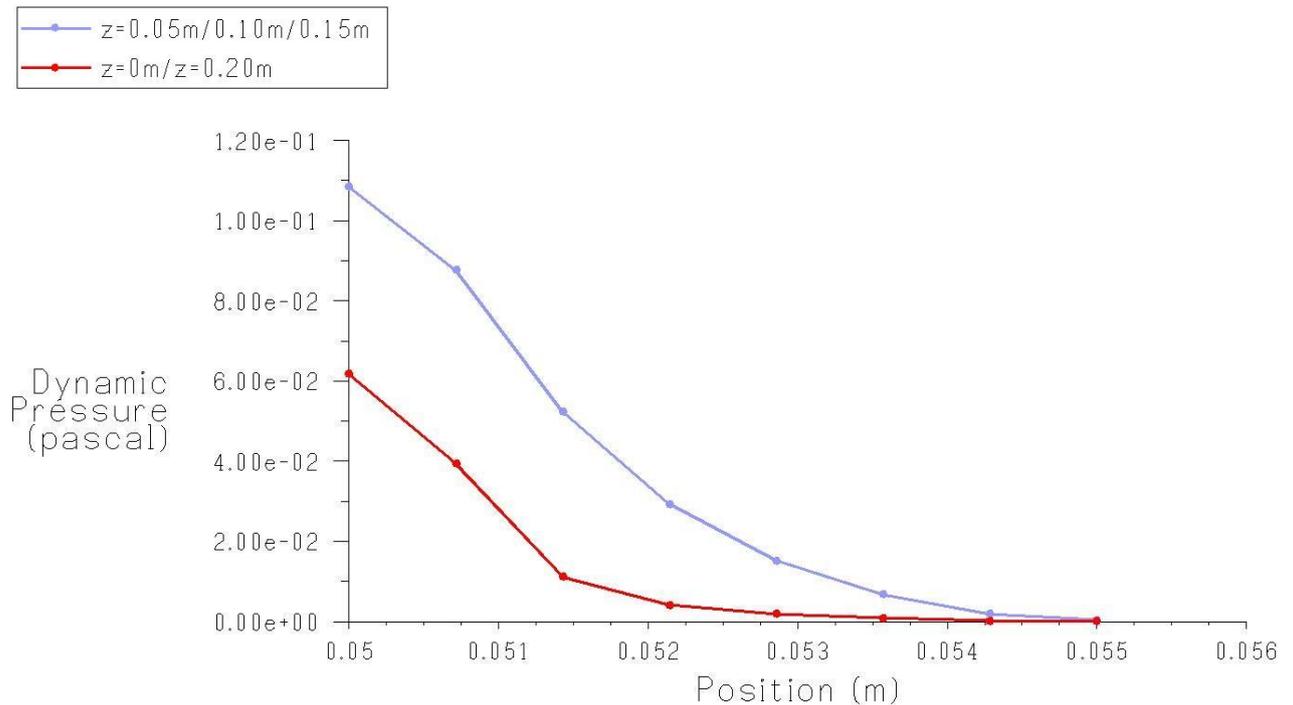


Figure III.9: évolution de la pression dynamique selon la direction radiale ($Ta = 41.33$)

On représente dans ce qui suit, le profil de la pression dynamique à l'intérieur de l'entrefer pour différents hauteurs Z (Figure III.9).

On observe que l'allure générale des deux courbes a la même forme avec un petit changement au niveau des parois terminales. Similairement au profil de la pression statique on trouve une superposition parfaite des courbes qui correspond aux extrémités ainsi que pour les hauteurs qui se situent entre les bornes.

On constate, aussi, que la pression dynamique est plus élevée et prend des fortes valeurs près de cylindre intérieur pour $X = 0.05 \text{ m}$. En revanche, elle commence à s'affaiblir graduellement quand on rapproche du cylindre extérieur pour $X = 0.055 \text{ m}$ jusqu'à elle devient nulle, on est en quelque sorte en présence des deux zones, une zone de surpression qui caractérise le cylindre intérieur, et zone de dépression qui caractérise le cylindre extérieur, et cela peut être interpréter par le fait que le cylindre intérieur est soumis à une vitesse importante qui engendre une force centrifuge pour faire mouvoir les particules fluides et qui mène à l'augmentation de la pression dynamique, par contre le cylindre intérieur est maintenu fixe d'un côté, plus l'effet de viscosité d'un autre côté qui engendre une force de frottement

permettant d'empêcher la circulation du fluide au voisinage de cette paroi menant à l'indolence des particules fluides et par conséquent la diminution de la pression dynamique dans cette zone.

On note aussi que pour les hauteurs $Z = 0m$ et $Z = 0.2m$ c.-à-d. au niveau des parois terminales la pression dynamique prend des valeurs pratiquement faibles comparativement aux valeurs des hauteurs $Z = 0.05m$ et $Z = 0.015m$. Ceci s'explique par le fait que ces extrémités sont considérées être des parois fixes, ce qui induit un frottement local supplémentaire diminuant sa vitesse et par conséquent sa pression.

Conclusion :

L'étude qui a été faite dans ce chapitre a permis de savoir de près un monde très vaste qui est la simulation numérique, pour pouvoir valider des résultats obtenus expérimentalement.

La génération du maillage c'est l'étape qui précède chaque simulation, dont un raffinement est toujours indispensable, où on a trouvé que le nombre de Taylor évolue proportionnellement avec le nombre de mailles et cela dans une gamme limitée.

L'analyse et le traitement des résultats contribuent à la description de comportement du fluide qui se trouve dans une cavité annulaire, et ont permis aussi de suivre l'évolution du champ d'écoulement qui le caractérise pour différentes valeurs de la vitesse de rotation.

***Chapitre -IV-
Résolution par L'approche
Hamiltonienne***

Introduction :

Depuis l'arrivée de la mécanique quantique, les méthodes Hamiltonienne ont joué un rôle de plus en plus important dans la mécanique classique et quantique des particules et des champs. Par comparaison, l'introduction des méthodes Hamiltonienne en mécanique des fluides a été tardive.

En revanche, dans les systèmes mécaniques généraux, les équations Lagrangiennes ou Hamiltoniennes du mouvement sont des équations couplées régissant les emplacements et les vitesses des particules massives ou des corps rigides. Ces équations couplées ne peuvent pas être généralement résolues pour toute partie des variables dépendantes, sans aussi trouver toutes les autres variables dépendantes. Par contre, les équations conventionnelles du transport de fluide sont des équations pour la vitesse, la densité et l'entropie (la pression est considérée comme une fonction prescrite de la densité et l'entropie) qui peut en principe être résolu classiquement sans trouver aussi la trajectoire de chaque particule fluide [21].

De plus, si le champ de vitesse est connu, la trajectoire des particules peut toujours être déduite en résolvant l'équation du mouvement avec cette nouvelle méthode. La symétrie d'un écoulement permet d'appliquer cette approche pour un écoulement bidimensionnel comme c'est le cas de notre étude.

Dans ce chapitre on donne une formulation générale de l'approche Hamiltonienne applicable à une répartition de vorticité et de valider cette méthode en l'appliquant à l'étude du comportement des tourbillons localisés dans un entrefer, sachant que des recherches ont confirmé que pour les systèmes qui représente une dynamique tourbillonnaire, la fonction du courant se manifeste dans un problème d'une description du mouvement des singularités bidimensionnelles comme quelque chose similaire à l'Hamiltonien, cette analogie est utile et largement utilisée[21].

IV.1. Approche Hamiltonienne en mécanique :

La notion Hamiltonien, ou encore la fonction de Hamilton provient d'une formulation très puissante des équations de la mécanique analytique. Les équations de Hamilton sont fondamentales et utiles de par leur rôle général en physique, car elles permettent un changement de point de vue radical, et offrent des simplifications importantes pour pouvoir résoudre un certain nombre de problèmes de physique appliquée [19].

IV.1.1. Hamiltonien :

L'Hamiltonien, dénoté H , est défini à partir du Lagrangien L de la façon suivante :

$$H = \sum_{\alpha=1}^n p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} - L \quad (IV.1)$$

p_{α} : représente les quantités de mouvement ou impulsions généralisées.

\dot{q}_{α} : vitesse généralisées où le point désigne la dérivation totale de la coordonnée précédente

par rapport au temps tel que : $\dot{q}_{\alpha} = \frac{dq_{\alpha}}{dt} \quad (IV.1.a)$

Il convient de l'écrire comme une fonction des coordonnées généralisées q_{α} et des quantités de mouvement ou impulsions généralisées p_{α} . Pour cela il faut éliminer les vitesses généralisées \dot{q}_{α} de l'équation (IV.1) en utilisant les équations de Lagrange [19] tel que :

$$p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \quad (IV.1.b)$$

On peut alors écrire H sous la forme :

$$H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \quad (IV.2)$$

Et plus brièvement $H(p_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$.

IV.1.2. Equations de Hamilton :

En fonction de l'Hamiltonien, on peut écrire les équations du mouvement de façon symétrique :

$$\begin{cases} \dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} \\ \dot{q}_{\alpha} = \frac{\partial H}{\partial p_{\alpha}} \end{cases} \quad (IV.3)$$

C'est ce que l'on appelle les équations de Hamilton. On voit sur ces équations que p_α et q_α jouent des rôles semblables dans une formulation générale des principes de la mécanique.

IV.1.3. Transformation canoniques :

La facilité avec laquelle on peut traiter un problème est liée au choix particulier de coordonnées généralisées qui a été fait. Il est donc souhaitable d'étudier le passage d'un système de coordonnées à un autre.

Soient q_α et p_α les anciennes coordonnées de position et de quantité de mouvement et Q_α et P_α les nouvelles ; la transformation est :

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \quad , \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t) \quad (IV.4)$$

Ou plus brièvement :

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$$

On se limite aux transformations appelées canoniques pour lesquelles il existe une fonction \mathcal{H} des nouvelles coordonnées telle que les équations du mouvement seront écrites comme suit :

$$\begin{cases} \dot{P}_\alpha = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} \\ \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha} \end{cases} \quad (IV.5)$$

On appelle alors Q_α et P_α des coordonnées canoniques et qui représentent l'espace de phase du système a étudié.

La structure des équations de Hamilton fournit un outil très puissant, elle permet de trouver les invariants d'un système et ainsi de le réduire. On peut aussi trouver la trajectoire de ce système en intégrant les équations précédentes [19].

IV.2. Hamiltonien en mécanique des fluides :

Diverses situations des fluides sont suffisamment décrites par les modèles dans lesquels le mouvement se produit dans un espace en trois dimensions, et qui garde une symétrie parfaite pour laquelle on peut considérer que l'écoulement s'évolue dans un espace à deux dimensions. Un exemple important est celui des fluides tournant tel que l'état du

mouvement tourbillonnaire de la première instabilité rencontré dans les systèmes de Taylor-Couette [20].

Une description mathématique satisfaisante de cet état s'est avérée être l'un des grands défis des mathématiques appliquées permettant de décrire le comportement des tourbillons par un système dynamique simple et qui est le formalisme Hamiltonien.

La raison d'introduire le formalisme Hamiltonien dans la mécanique des fluides c'est que ce système fournit un cadre agréable pour la visualisation, puisque, l'espace de phase du système Hamiltonien est en fait l'espace physique occupé par le fluide [21].

IV.2.1. Hypothèses simplificatrices :

Dans le but de simplifier l'étude on utilise quelques hypothèses simplificatrices :

- L'écoulement de la première instabilité est stationnaire.
- La dynamique engendrée est une dynamique à symétrie de révolution, c.-à-d. si on suit le mouvement d'une particule fluide qui appartienne à la station θ_1 , on trouve que ceci se fait sur un plan (r, z) et il est de même pour d'autres particules qui appartiennent à d'autres stations θ_n ce qui nous permet donc de ramener l'étude de trois dimensions à deux dimensions.
- Le fluide considéré est incompressible.

Ces hypothèses permettent de ramener le problème à un système similaire au formalisme Hamiltonien voulu [20].

IV.2.2. Rappel de la mécanique des fluides :

Nous rappelons qu'en mécanique des fluides deux approches sont utilisées pour l'étude de mouvement de fluide, il s'agit de la description « Eulérienne » et la description « Lagrangienne ».

La première description indique que le champ de vitesse $U = (u, v, w)$ défini comme une fonction des variables d'espace et du temps, tel que ;

$$u = u(x, y, z, t) \quad (IV. 6. a)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (IV. 6. b)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (IV. 6. c)$$

C'est-à-dire qu'on définit ou on mesure dans chaque point de l'espace, et à tout instant, la vitesse du fluide moyennée sur une longueur grande devant les distances intermoléculaires. Du point de vue expérimental, cette description dite "Eulérienne" correspond à une mesure locale de la vitesse du fluide, répétée en un très grand nombre de points de l'écoulement.

Cependant les composantes (u, v, w) sont obtenues en principe par la résolution des équations du transport de la mécanique des fluides décrites en chapitre I.

Si la vitesse est explicitement dépendante du temps, l'écoulement est qualifié instationnaire, dans le cas contraire, là où la vitesse ne dépend pas du temps l'écoulement est stationnaire.

D'autre part, la description Lagrangienne consiste à suivre la trajectoire d'une même particule de fluide au cours du temps.

Ainsi pour un champ donné de vitesse, on suit une particule en résolvant l'ensemble d'équations ordinaires tel que :

$$\dot{x} = u(x, y, z, t) \quad (IV.7.a)$$

$$\dot{y} = v(x, y, z, t) \quad (IV.7.b)$$

$$\dot{z} = w(x, y, z, t) \quad (IV.7.c)$$

La trajectoire d'une particule de fluide est donnée par l'intégration temporelle du champ de vitesse Lagrangien suivant les conditions initiales [19].

IV.2.3.1. Equations de Navier-Stokes :

Dans deux dimensions, et en négligeant l'effet de gravité, les équations de Navier-Stokes, pour les composantes de vitesses $U = (u, v)$, sont :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (IV.8.a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (IV.8.a)$$

IV.2.3.2. Equation de continuité :

En outre, l'équation de continuité (condition d'incompressibilité) pour un fluide incompressible bidimensionnel est donnée par :

$$\operatorname{div} U = 0 \quad (IV.9.a)$$

On peut la réécrire d'une autre manière comme :

$$u_x + v_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (IV.9.b)$$

De cette condition, on peut montrer l'existence d'une différentielle exacte $d\psi$ tels que :

$$u \, dy + v \, dx = d\psi \quad (IV.10)$$

Ce qui permet ainsi de l'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} & (IV.11.a) \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} & (IV.11.b) \end{cases}$$

La fonction $\psi = \psi(x, y, t)$ est nommée la fonction du courant.

Si on emploie la description lagrangienne, on peut alors écrire les équations du mouvement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y, t) & (IV.12.a) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y, t) & (IV.12.b) \end{cases}$$

Ce qui a une structure HAMILTONIENNE, avec ψ jouant le rôle de l'Hamiltonienne et x et y étant les variables canoniques.

Il est intéressant de souligner que cette structure Hamiltonienne provient de l'existence d'une fonction de courant, et qui est une conséquence de la condition d'incompressibilité de l'équation (IV.9.a), et elle est valide si le fluide est visqueux ou non, c.-à-d. qu'elle n'est pas affectée par la présence ou l'absence de la viscosité.

Ainsi, dans deux dimensions, on peut déterminer les chemins des particules fluides en suivant la dynamique de l'espace des phases des équations (IV.12).

La structure dynamique de fluide, bien sûr, dépend de la nature de la fonction du courant ψ . Pour des écoulements stationnaires, ψ elle est indépendante du temps et l'équation (IV. 12) se réduit à ce système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \psi_y(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) & (IV. 13. a) \\ \dot{y} = -\psi_x(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) & (IV. 13. b) \end{cases}$$

La trajectoire de la particule fluide est obtenue donc par intégration temporelle du champ de vitesse Lagrangien écrit sous forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre et couplées en même temps (équation(IV. 13)), où cette intégration est faite dans la plupart des cas par des méthodes numériques [20].

IV.2.4.Modèle considéré:

Le problème en question est étroitement lié à ce qui est connu comme l'écoulement de Taylor-Couette, auquel notre recherche s'intéresse au déclenchement de la première instabilité, c.-à-d.l'apparition des tourbillons de Taylor, qui a été déjà mentionné précédemment, donc stationnaire (ne dépend pas du temps). On veut pratiquement trouver un système dynamique qui est bidimensionnel représentant une Hamiltonienne stationnaire pour laquelle la fonction du courant associée est connue explicitement permettant ainsi de réaliser une simulation pour mieux visualiser.

IV.2.4.1. Champ de vitesse :

Il s'agit d'un champ tourbillonnaire cisailé analytique à divergence nulle, donné par la fonction du courant suivante [23]:

$$\psi = V_0 \cos(x) \cos(y) \quad (IV. 14. a)$$

Tel que : $V_0 = (\Omega_1 \cdot R_1 + \Omega_2 \cdot R_2)$

Dans cette étude seul le cylindre intérieur qui tourne, alors $V_0 = \Omega_1 \cdot R_1$

Dans ce cas là, on peut alors trouver facilement les équations du mouvement d'une particule tel que :

$$\begin{cases} u(x, y) = -V_0 \cos(x) \sin(y) & (IV. 15. a) \\ v(x, y) = V_0 \sin(x) \cos(y) & (IV. 15. b) \end{cases}$$

Si on définit maintenant la fonction H qui représente l'Hamiltonien :

$$H = V_0 \cos(x) \cos(y) \quad (IV.14.b)$$

Alors les équations du mouvement peuvent être écrites sous la forme Hamiltonien comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} & (IV.16.a) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} & (IV.16.b) \end{cases}$$

Cette structure Hamiltonienne permet de trouver la trajectoire des particules fluides à chaque instant, à cet effet on doit résoudre les équations précédentes par intégration temporelle, mais le problème qui se pose c'est qu'il s'agit d'un système d'équations différentielles ordinaires et couplées en même temps dont sa résolution analytique est un peu difficile.

Le calcul numérique par l'utilisation des méthodes d'intégrations comme la méthode traditionnelle de Runge-Kutta à ordre (4) contourne cette difficulté [20].

IV.2.4.2. Condition initiale :

On considère qu'à l'instant $t = 0$, le fluide contenu dans l'espace annulaire est en régime laminaire homogène tel que les positions initiales des particules fluides sont considérées les positions des points du maillage. Ceci se traduit par la condition suivante :

$$t = 0 \begin{cases} X(x, y, 0) = x & R_1 \leq x \leq R_2 \\ Y(x, y, 0) = y & 0 \leq y \leq h \end{cases}$$

IV.2.5. Méthode de Runge-Kutta :

La méthode de Runge-Kutta d'ordre (4) est très couramment utilisée pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (EDO) et parmi les méthodes les plus répandues dans le domaine d'analyse numérique. C'est une méthode à pas unique, directement dérivée de la méthode d'Euler et qui suppose que la solution peut être écrite sous forme de série de Taylor. Elle a l'avantage d'être simple à programmer et d'être assez stable pour les fonctions courantes de la physique. Sur le plan de l'analyse numérique, elle a surtout l'immense avantage de démarrer le calcul à partir des valeurs initiales [18].

Elle a quand même un inconvénient, elle est assez consommatrice en temps de calcul. On peut donc l'employer lorsque le temps de calcul n'est pas trop grand. Dans le cas contraire, il vaut mieux penser à la méthode prédicteur/correcteur (Adams par exemple). Si la précision requise est très importante, on doit choisir la méthode RK4 adaptative [18].

Voici une description brève de la méthode RK4 pour un système couplé indépendant du temps, donc l'algorithme de cette méthode (RK4):

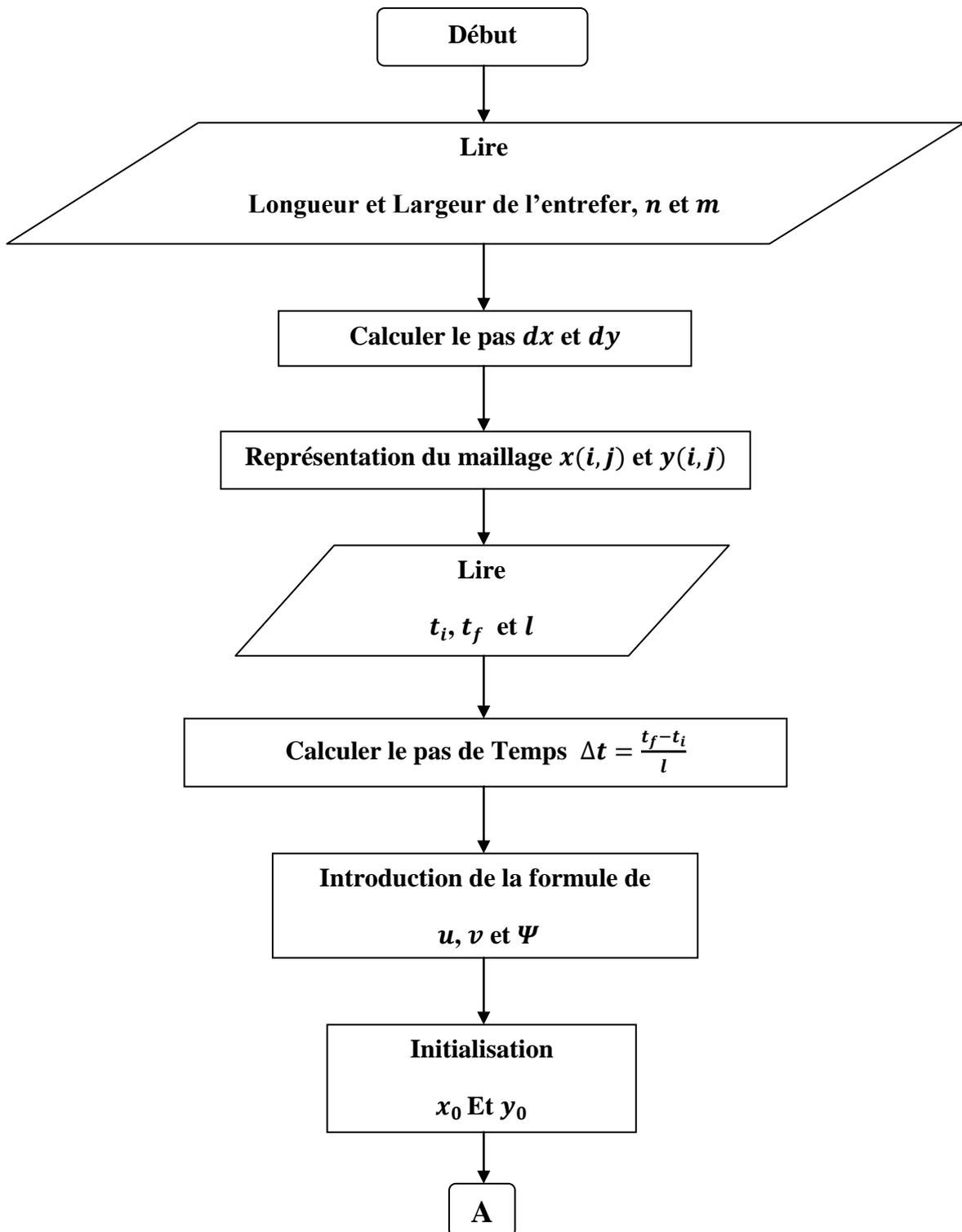
$$(IV.17) \left\{ \begin{array}{l} K_1 = f(x_n, y_n) \\ P_1 = g(x_n, y_n) \\ K_2 = f\left(x_n + \frac{K_1}{2}, y_n + \frac{P_1}{2}\right) \\ P_2 = g\left(x_n + \frac{K_1}{2}, y_n + \frac{P_1}{2}\right) \\ K_3 = f\left(x_n + \frac{K_2}{2}, y_n + \frac{P_2}{2}\right) \\ P_3 = g\left(x_n + \frac{K_2}{2}, y_n + \frac{P_2}{2}\right) \\ K_4 = f(x_n + K_3, y_n + P_3) \\ P_4 = g(x_n + K_3, y_n + P_3) \end{array} \right.$$

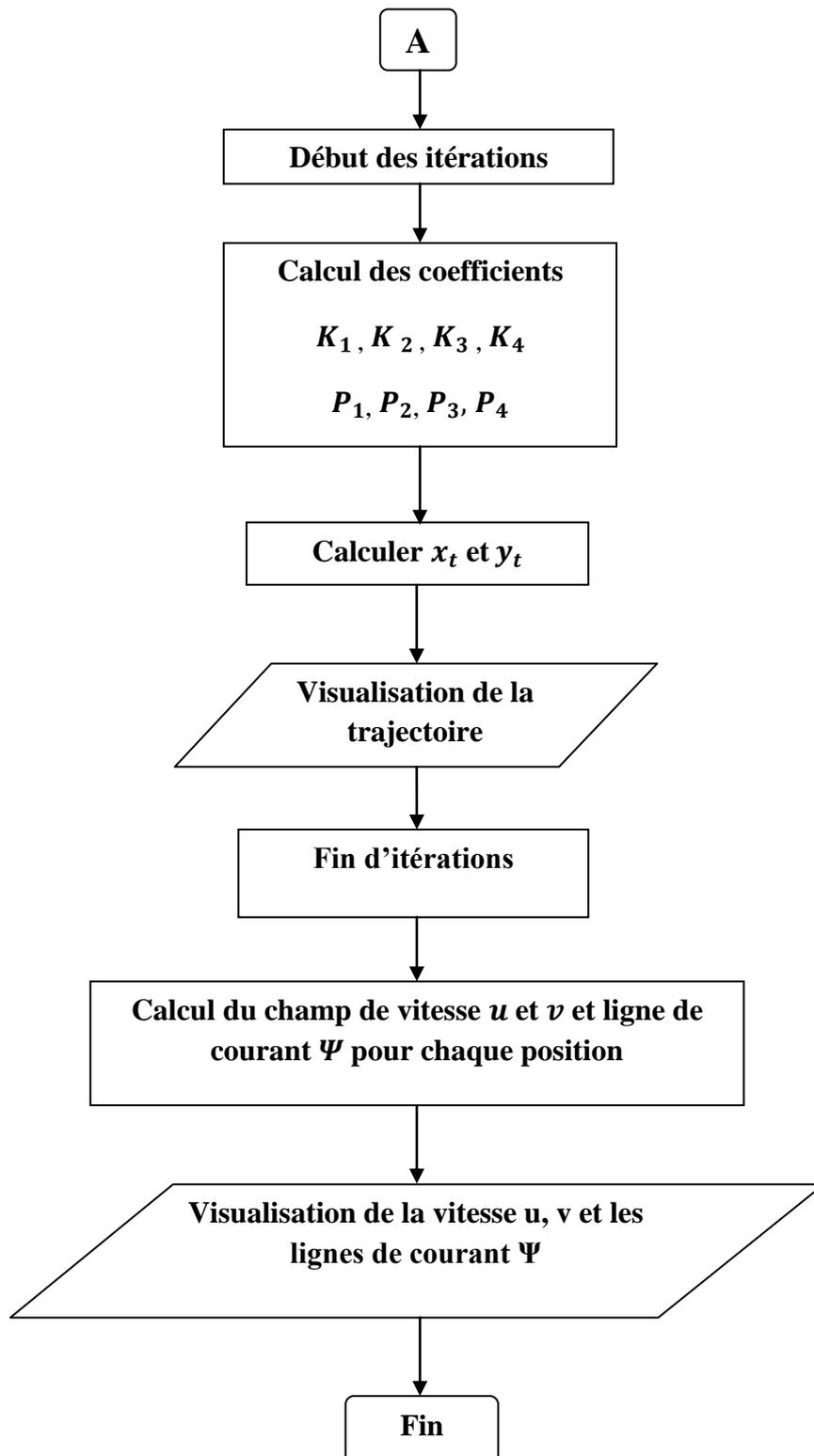
$$(IV.18) \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6} (P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4) \end{array} \right.$$

L'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de Δt^5 , Δt étant le pas d'itération du temps, tandis que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de Δt^4 .

IV.2.6. Organigramme du programme numérique :

Ce programme a été fait en langage de programmation MATLAB, qui offre un environnement de calcul très puissant et donne un niveau très élevé de visualisation.





IV.3. Résultats :

IV.3.1. Validation de la méthode :

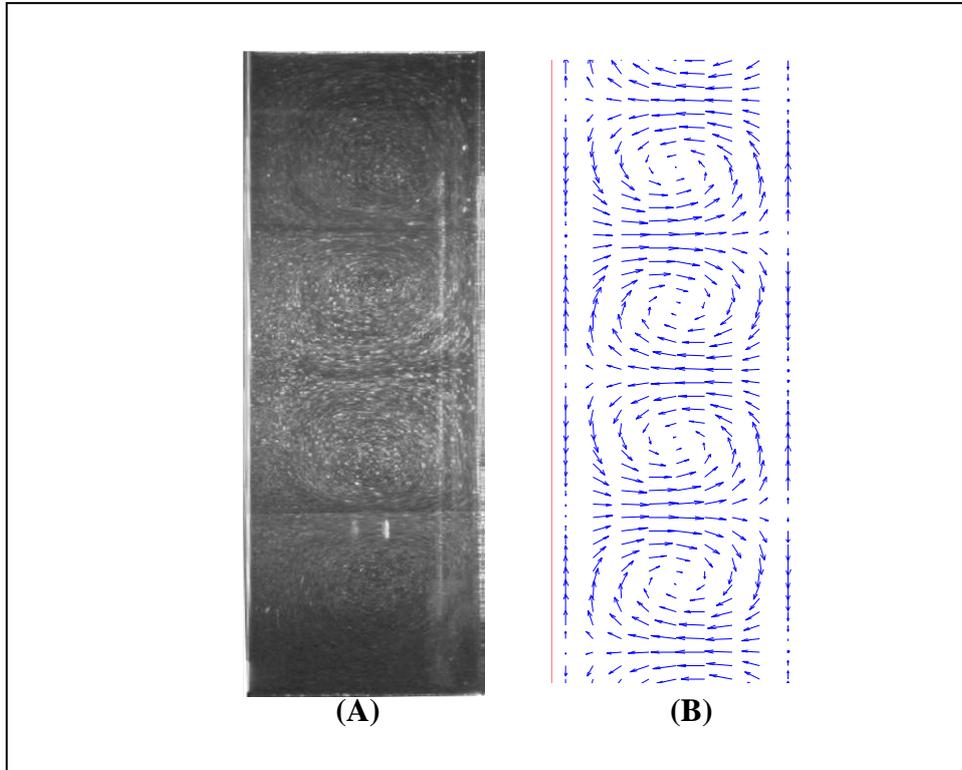


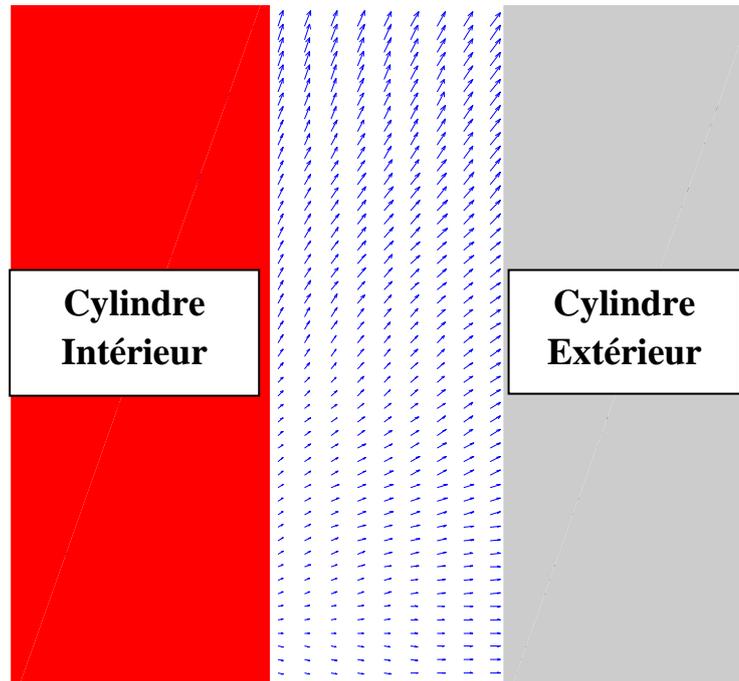
Figure IV.1. Comparaison des résultats : (A)-Visualisation expérimentale [7]

(B)-Résultat théorique.

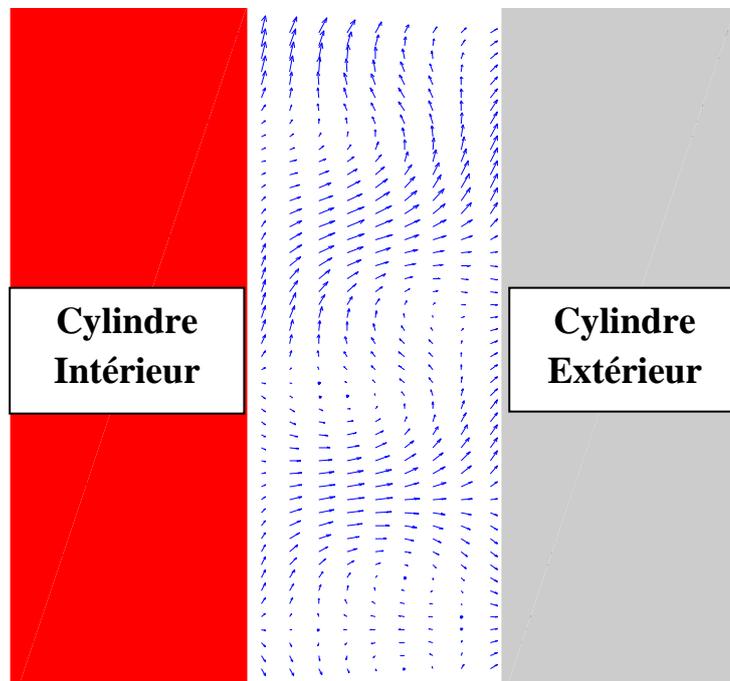
La figure IV.1 : (A) représente une photographie de la section transversale d'espace annulaire pour $Ta = 41.33$, le même comportement est représenté sur la figure IV.1(B) comme résultat théorique.

Après l'établissement de la première instabilité, on a comparé les structures d'écoulement du fluide visualisées expérimentalement avec celles qui sont tracées par cette nouvelle méthode, et on a trouvé une bonne concordance entre les deux représentations, là où les cellules tourbillonnaires pour le cas théorique prennent la même forme des cellules pour le cas expérimental et le même sens de contrarotativité, ceci permet de dire que l'approche Hamiltonienne appliquée dans cette étude fournit un outil mathématique très puissant pour identifier et traiter l'écoulement de la première instabilité rencontré dans le dispositif de Taylor-Couette, montrant un comportement comparable et similaire avec celui de l'expérience.

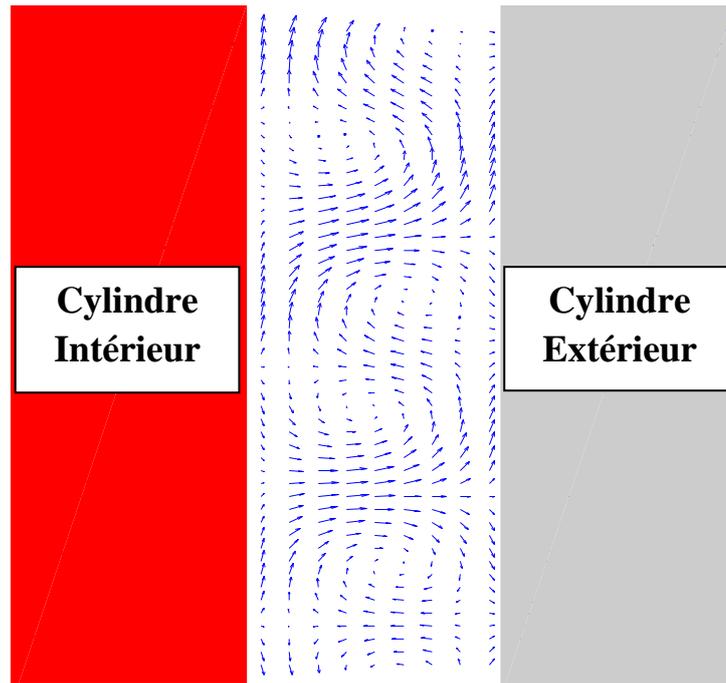
IV.3.2. Trajectoire des particules fluides :



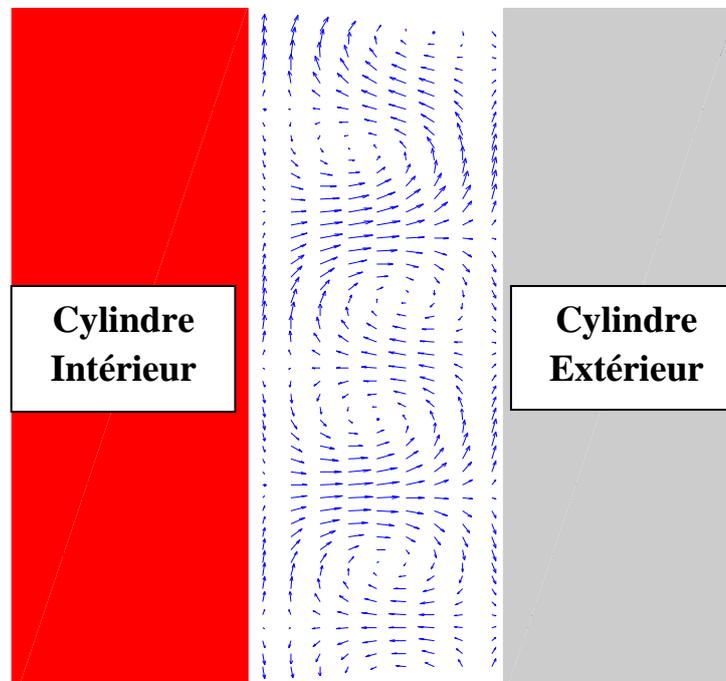
$t_0 = 0s$



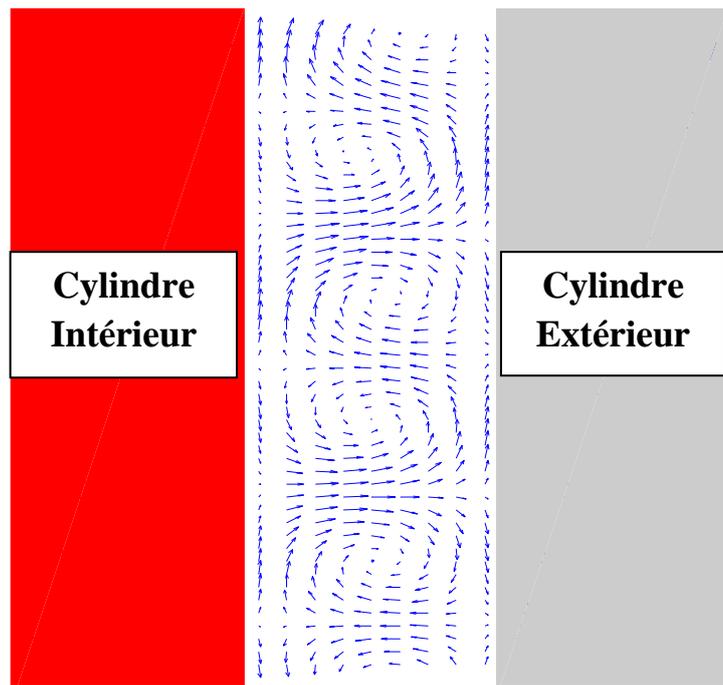
$t_1 = 10s$



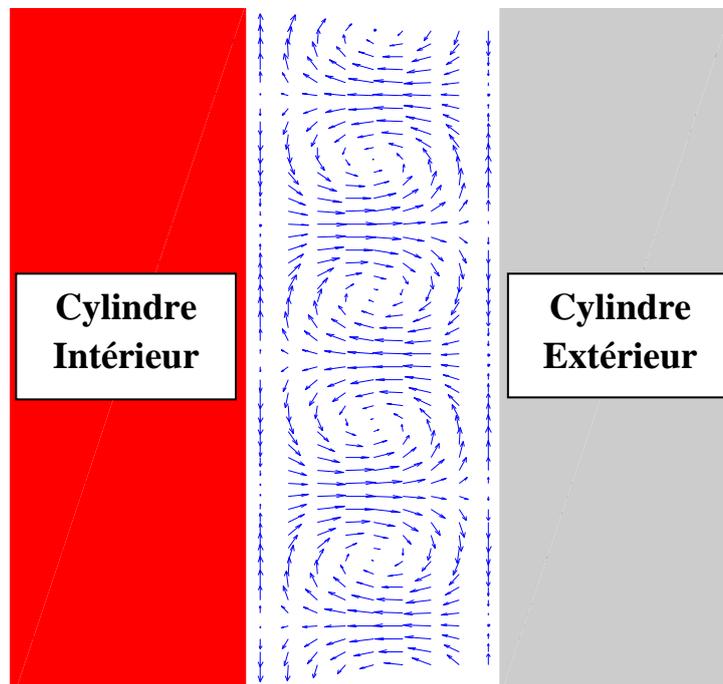
$t_2 = 15s$



$t_3 = 20s$



$t_4 = 25s$



$t_5 = 30s$

Figure IV.2. : Représentation de la trajectoire des particules fluides par l'approche Hamiltonien pour différents temps

IV.3.3. Ligne de courant :

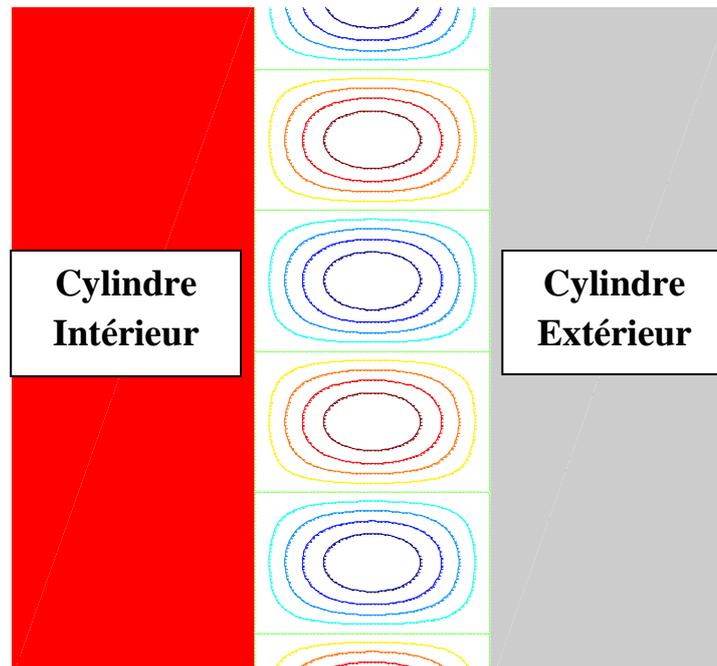


Figure IV.3. : Représentation des lignes de courant.

L'usage et l'application de la méthode de l'Hamiltonien par l'utilisation de l'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre pour l'instabilité de Taylor-Couette nous a permis de déterminer la trajectoire des particules fluides avec une très haute précision tout en confirmant la présence de deux paires de tourbillons contrarotatifs.

On constate, aussi, que ces tourbillons sont superposés l'un sur l'autre pour donner une structure cellulaire pour ce type d'écoulement, là où ils sont représentés par des vecteurs qui indiquent le sens du déplacement des particules, et montrant en même temps leurs contrarotativité.

On remarque également que les tourbillons de Taylor adoptent une forme définitive connue en partant du régime laminaire jusqu'à l'apparition de la première instabilité.

Cette trajectoire est produite par les perturbations résultantes de différentes forces qui affectent le fluide dans l'espace annulaire et qu'ils sont évidemment la force centrifuge due à la rotation du cylindre intérieur compensée avec la force produite par la pression radiale centripète de l'autre côté.

L'Hamiltonien pour ce genre d'instabilité hydrodynamique, permet la représentation claire et simplifiée des lignes de courant ce qui déterminent la trajectoire des particules fluides, tel qu'on observe que ces lignes ce sont des cercles concentriques au centre des tourbillons et prennent la forme d'une section carré tout en éloignant de ces centres.

Elle nous permet également de réfléchir et de tirer des conclusions intéressantes pour ce type d'instabilité du point de vue purement physique.

IV.3.4. Champ de vitesse axiale :

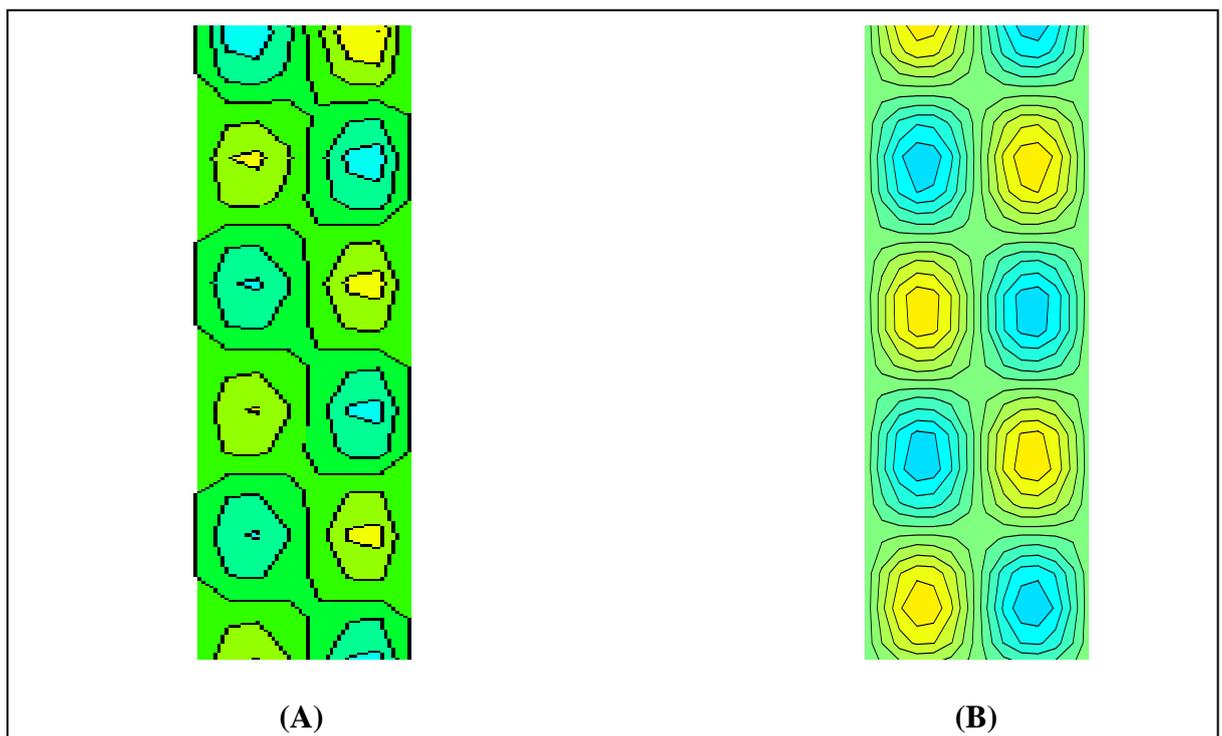


Figure IV.4. : Contour de la vitesse axiale (A) : obtenu par la simulation numérique,
(B) : obtenu par l'approche Hamiltonien.

IV.3.5. Champ de vitesse radiale :

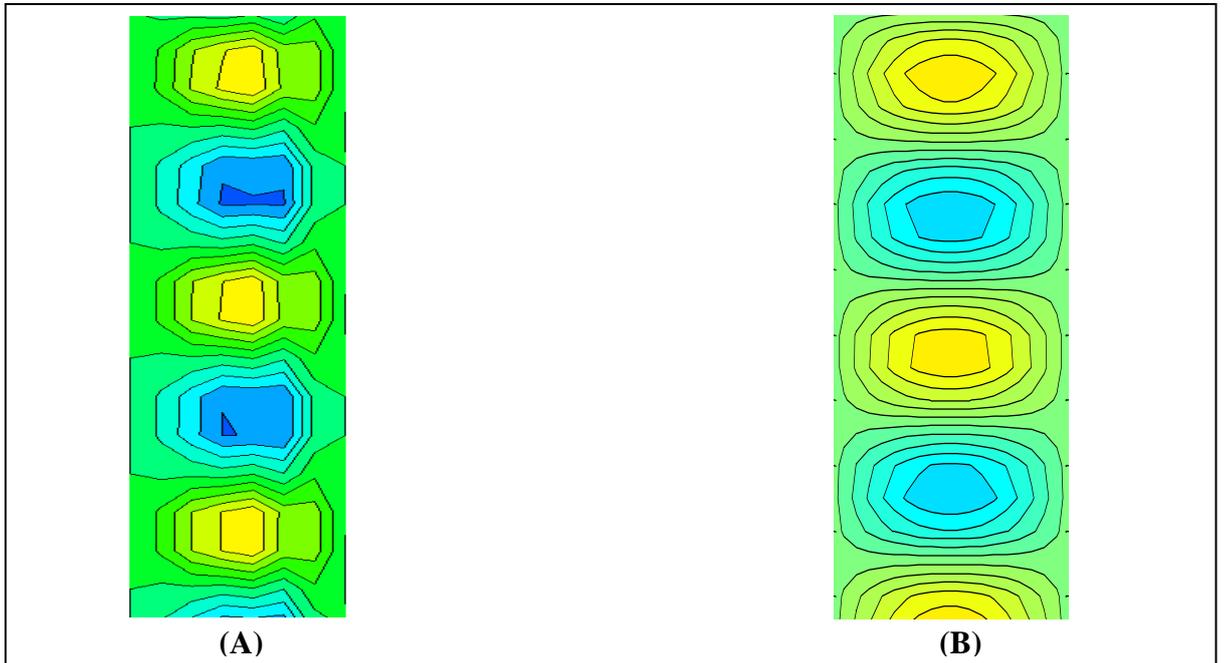


Figure IV.5. : Contour de la vitesse radiale ; (A) : obtenu par la simulation numérique, (B) : obtenu par l'approche Hamiltonien.

L'application de la méthode Hamiltonien en utilisant l'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre pour avoir la représentation du champ de vitesse axiale et la vitesse radiale entre deux cylindres coaxiaux a donné des résultats très intéressants et sont en bon accord avec les résultats obtenus par la simulation numérique.

On voit que le champ de vitesse axiale obtenu par la nouvelle méthode a presque la même forme que le champ obtenu par la simulation numérique, ce champ est constitué de deux zones qui sont voisines et alternées en même temps, montrant une périodicité alternante de cette vitesse le long de l'entrefer, et confirmant l'existence de cellules contrarotatives comme il a été déjà trouvé précédemment par la simulation, ces cellules sont représentées par deux couleurs, jaune liée à forte vitesse et bleue à faible vitesse identiquement avec ce qui est observé en modélisation numérique, ce qui permet de dire que ces zones qui représentent les cellules tourbillonnaires sont aussi superposées les unes par rapport aux autres avec succession.

En revanche, si on passe à la comparaison du champ de vitesse radiale, on constate également que le champ obtenu par la nouvelle approche est représenté de la même façon que

le champ résultant du calcul numérique par le code FLUENT, c.-à-d. il y'a une stratification de deux régions distinctes et qui se succèdent en même temps, généralement ce sont les régions en couleur bleue qui caractérisent les petites vitesses, en compagnie des régions de couleur jaune, qui caractérisent les vitesses importantes, ceci représente une caractéristique de l'écoulement de la première instabilité, là où il y'a un empilement des tourbillons contrarotatifs.

D'une manière générale, l'écart entre les différents domaines qui constituent le champ de vitesse axiale d'une part, et le champ radial d'autre part est dû à la force centrifuge résultante de la rotation du cylindre intérieur qui éjecte le fluide vers l'extérieur d'un côté, en opposition à la force de pression radiale centripète qui l'attire vers l'intérieur d'un autre côté.

Cette similitude entre les deux représentations, a permis de comparer les résultats obtenus, et de confirmer leurs crédibilités, tout en disant que cette nouvelle approche offre un nouveau moyen pour traiter le problème d'instabilité d'un fluide entre deux cylindres coaxiaux conduisant à des solutions très encourageantes.

IV.3.6. profil de vitesse axiale :

Les profils de la composante axiale de la vitesse pour $Ta = 41.33$ au niveau des hauteurs $Z = 0.15 m$ et $Z = 0.05 m$ sont représentés dans les figures IV.6 et IV.7, les valeurs obtenus sont comparées avec celles trouvées par la simulation numérique du chapitre III.

Les résultats acquis par cette nouvelle méthode apparaissent en bon accord avec ceux de la simulation numérique, mais on constate un petit écart entre les deux allures des deux figures qui est vraisemblablement dû à la précision des méthodes utilisées. La comparaison entre ces deux graphes a montré une homogénéisation de la vitesse axiale, en notant aussi une évolution globalement similaire avec une bonne poursuite des deux courbes, cette évolution est de forme périodique sinusoïdale.

Cette constatation constitue un résultat important de la validité de cette approche mettant en relief son apport dans la simplicité et l'efficacité pour pouvoir étudier un phénomène tel que la première instabilité de Taylor-Couette.

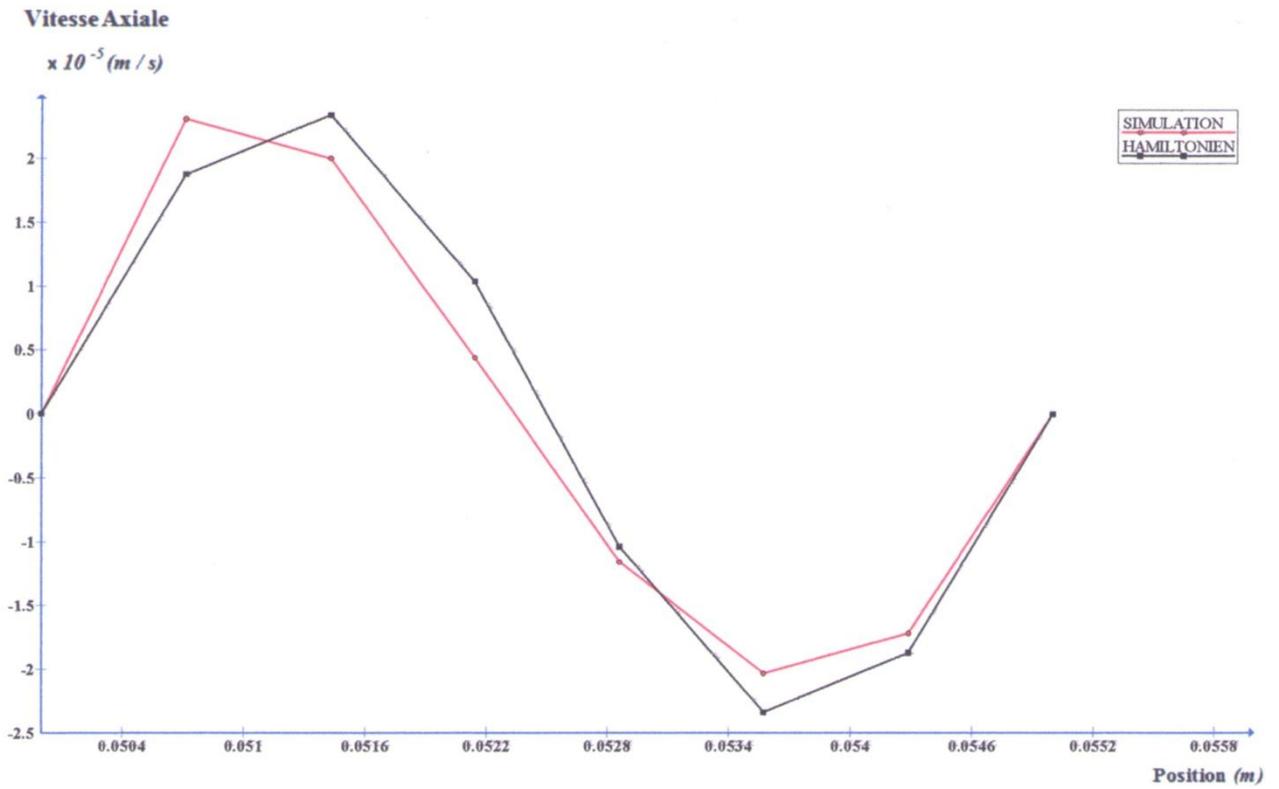


Figure IV.6. : Profil de la vitesse axiale au niveau $Z = 0.15 m$ pour $Ta = 41.33$.

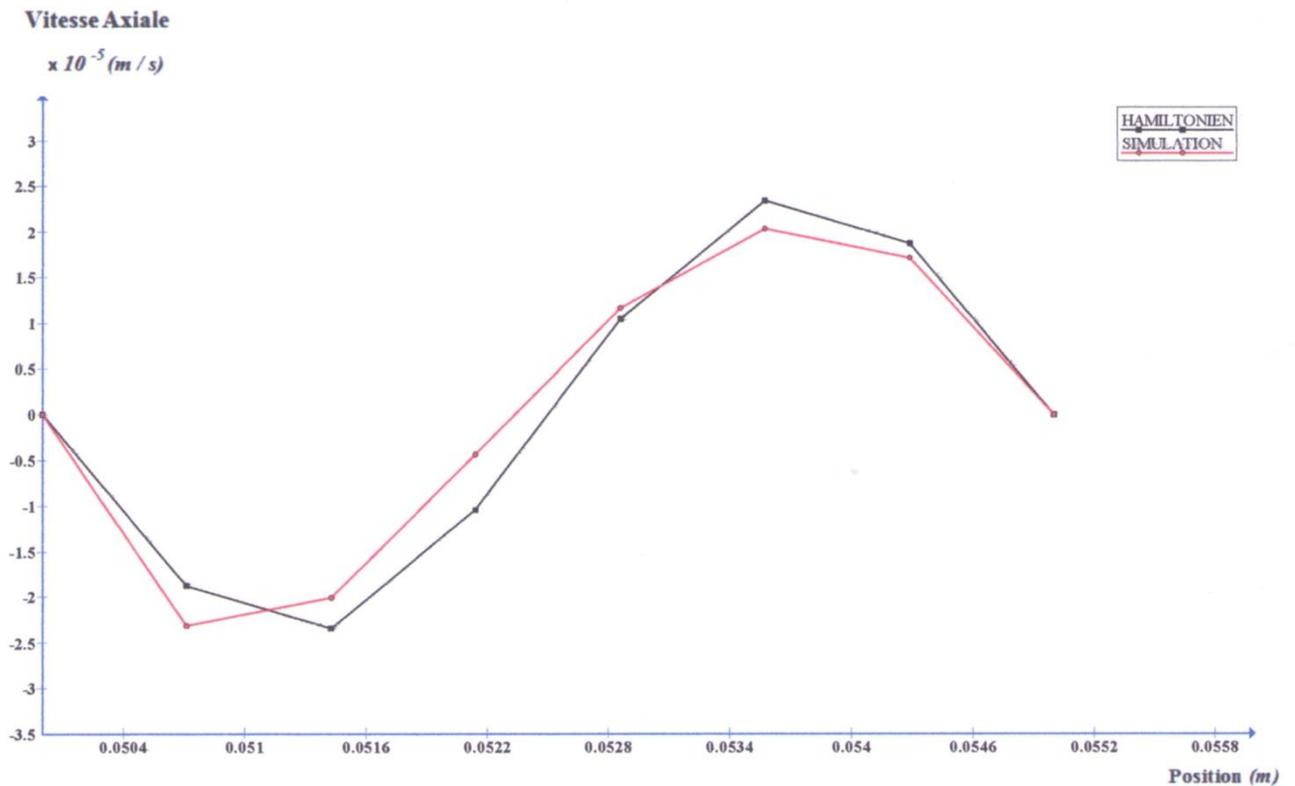


Figure IV.7. : Profil de la vitesse axiale au niveau $Z = 0.05 m$ pour $Ta = 41.33$.

Conclusion :

Dans cette étude, l'approche Hamiltonienne utilisée est prévue pour fournir un modèle raisonnablement précis sur la nature tourbillonnaire de la première instabilité de Taylor-Couette dont les résultats trouvés montrent clairement ce comportement.

L'aspect technique de ce travail, c'est que nous avons dépisté le mouvement des particules fluides dans un domaine à deux dimensions, en faisant une représentation des trajectoires pour fournir une image sur la formation de ces tourbillons.

Cependant, les lignes de courant représentées dans le domaine d'écoulement ayant une forme similaire avec ce qui est trouvé théoriquement, ainsi que les résultats obtenus pour le champ de vitesse axial et radial sont en excellent accord avec les résultats de la simulation numérique.

La simplicité et l'adaptabilité de cette méthode sont des vertus qui rendent cette approche potentiellement proportionnée pour résoudre des problèmes plus complexe en mécanique des fluides.

***Conclusion
Générale***

Conclusion générale :

Cette étude de recherche s'inscrit dans une problématique de modélisation par deux approches différentes pour le développement de la première instabilité rencontrée dans un dispositif de Taylor-Couette avec rotation du cylindre intérieur au moment que le cylindre extérieur est maintenu fixe.

Le travail présenté dans ce mémoire a été scindé en deux parties principales, la première partie porte sur l'étude théorique et numérique pour diverses propriétés de l'écoulement Taylor-Couette, en mettant en évidence la première instabilité en vue de simplifier la compréhension et de démystifier ce genre d'instabilité.

L'étude numérique a été accomplie par l'utilisation des deux logiciels Gambit-Fluent les plus usuels dans la plupart des recherches et d'études en mécanique des fluides numérique.

La simulation a été effectuée à l'aide d'une expérience faite par A.BOUABDALLAH dans le but de pouvoir valider nos résultats.

Naturellement, dans la présente étude, il y'a une élaboration pour diverses contours et profils qui caractérisent ce type d'écoulement dans l'espace annulaire et cela par l'augmentation graduelle du nombre de Taylor.

Les cellules prennent leur forme naturelle et complète pour un nombre de Taylor Ta égale à 41.33 et cela signifie que les résultats obtenus indépendamment de leur importance sont précis en grande partie comparativement avec l'expérience réalisée malgré la difficulté et la complexité du problème d'instabilité qui apparaît. Cette instabilité est marquée par un empilement des cellules contrarotatives le long de la hauteur des deux cylindres. Ces résultats donnent la possibilité de comprendre l'évolution de l'écoulement pour le problème en question.

La seconde partie consiste l'étude de ce type d'instabilité mais en utilisant cette fois ci une autre approche de la mécanique classique désignée par l'Hamiltonien. L'objectif de l'utilisation de cette approche vise à simplifier cette étude comparativement à la simulation numérique.

Dans ce mode d'instabilité on assimile l'Hamiltonien H à la fonction du courant Ψ , cette approche assure la représentation d'une manière très simplifiée de la trajectoire des particules fluides, les lignes du courant et les contours de vitesse en utilisant l'intégration de Runge-Kutta d'ordre quatre, où les résultats obtenus sont très satisfaisants.

Tous les résultats acquis au cours de ce traitement montrent la richesse des phénomènes rencontrés à travers cette étude, ceux-ci font appel à une série de futurs travaux complémentaires pour pouvoir répondre aux nombreuses questions soulevées à travers cette recherche.

Bien que l'étude numérique ait été portée pour le cas de la première instabilité nous envisageons de faire une étude similaire pour les autres modes d'instabilité.

Pour conclure, espérons que l'étude de ce problème par une autre approche dite Hamiltonienne sera bénéfique et utile pour les futurs étudiants, et leurs donner la volonté de bien vouloir s'investir sans aucune crainte dans cette voie de recherche en utilisant cette approche, qui serait peut être judicieux de traiter par exemple le cas de la deuxième instabilité, ainsi que de différents problèmes d'hydrodynamique, et dans les systèmes assez complexe en mécanique des fluides en profitant des divers avantages de cette approche, telle que la rapidité de calcul ainsi que la précision des résultats afin d'obtenir une nouvelle vision pour les différents problème en mécanique des fluides.

Références
Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] Mehel Amine. Etude de l'écoulement de Taylor Couette diphasique. Contribution à l'étude des interactions turbulences cavitation. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes. Spécialité Dynamique des fluides et des transferts-- ED 367 MTGC. p85-223 --20 juin **2006**.
- [2] Christoph Egbers et Gerd Pfister. Physics of rotating fluids -- Springer. Verlag Berlin Heidelberg New York. ISBN3-540-67514-0 -**2000**.
- [3] François Charru. Instabilités hydrodynamiques. ISBN CNRS Editions 978-2-271-06565-0- - ISBN EDP Sciences 978-2-86883-985. Page 124-254. **2007**.
- [4] R.C.DIPRIMA & H.L.SWINNEY. Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence. 2ème ed. Topics in applied physics, vol.45 Springer-Verlag. Pages 139-180. Berlin, **1985**.
- [5] Lebbi.Mohamed. Simulation numérique de l'influence des vibrations radiales sur les instabilités dans le système de Taylor-Couette. Thèse de magister, ECOLE MILITAIRE POLYTECHNIQUE. **2008**.
- [6] Davide Pirrò et Maurizio Quadrio. Direct numerical simulation of turbulent Taylor-Couette. flow European Journal of Mechanics - B/Fluids, Volume 27, Issue 5, Pages 552-566—**2008**.
- [7] Ahcène Bouabdallah. Instabilité et turbulence dans l'écoulement Taylor-Couette. Thèse de doctorat, Institut nationale polytechnique de Lorraine—**1980**.
- [8] R. CHANDRASEKHAR. The stability of more general flows between coaxial cylinders. Cf. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Dover publications, INC. Chap. VIII, pp. 343-381—**2001**.
- [9] R.D Moser, P Moin et A Leonard. A spectral numerical method for the Navier-Stokes equations with applications to Taylor-Couette flow. Journal of Computational Physics, Volume 52, Issue 3. Pages 524-544—**1983**.

Références Bibliographiques

[10] K.C.CHUNG & K.N.ASTILL. Hydrodynamic instability of viscous flow between rotating coaxial cylinders with fully developed axial flow—J. Fluid. Mech, Vol. 81, part 4, pp. 641-655 —**1997**.

[11] A.Mehel, C. Gabillet, et H. Djeridi. Bubble effect on the Structures of Weakly turbulent Couette Taylor Flow-- In Proceedings of FEDSM-- ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting and Exhibition. pp10-121, -- Houston TX, USA. June 19-23, **2005**.

[12] Weisberg, A. Y., Kevrekidis , I. G. et Smits, A. J- Delaying Transition in Taylor–Couette Flow with Axial Motion of the Inner Cylinder. Journal of Fluid Mechanics / Volume 348 /, pp 141-151. October **2000**.

[13] Étienne Guyon, Jean Pierre Hulin, et Luc Petit. Hydrodynamique physique. CRNS Editions ISBN 2.271.05635.7—**2001**.

[14] Dale.A.Anderson, et John .C.Tannehill. Computational Fluid Mecanics and Heat transfer. Second Edition, library of congress cataloging in publication Data ISBN 1-56032 046-x—**1997**.

[15] D. Fedala. Manuel de maillage sous Gambit et de simulation sous Fluent applications. Laboratoire d'Energétique et de Mécanique des Fluides Interne ENSAM, CER de Paris-- octobre **2007**.

[16] Pierre Antoine Dusoulier et Nicolas Charbonnier. Guide complet des CFD. Editeur Laurent Du Mesnil. ISBN 978-2-84001 575 8—**2009**.

[17] Anil W. Date. Introduction to Computational Fluid Dynamics. Cambridge university press. ISBN-10 0-521-85326-5. **2005**

[18] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco et Fausto Saleri. Méthodes Numériques - Algorithmes, analyse et applications. Springer, Library of congress cataloging. ISBN 978.0.470.42329.5—**2007**.

Références Bibliographiques

[19] Murray R. Spiegel et Mc Graw-Hill. Théorie et application de la mécanique générale-- Série schaum. Rensselaer polytechnic institut. ISBN 2.7042.001. Pages 311-359 --**1972**.

[20] Michael Tabor. Chaos and integrability in nonlinear dynamics. 197 library of congress cataloging in publication by John Wiley and Sons. ISBN 0471092622. pages170-197. copyright **1989**.

[21] M.Surhone , Mariam T. Tennoe, et Susan F. Hamiltonian Fluid Mechanics and Hamiltonian Mechanics. Fluid Mechanics Editor VDM Publishing House. ISBN-10: 6131124221. 13 Nov **2010**.

[22] François Dubois. Systèmes hyperboliques de lois de conservation: Application à la dynamique des gaz -volume finie. Edition de l'école polytechnique 91128 palaiseau- ISBN-13: 978-2730212533 - juillet **2005**.

[23] Christophe Romé. Une méthode de raccordement de maillages non-conformes pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Thèse de doctorat. Ecole doctorale de sciences physiques et de l'ingénieur. Université de BORDEAUX I. Juin **2006**.