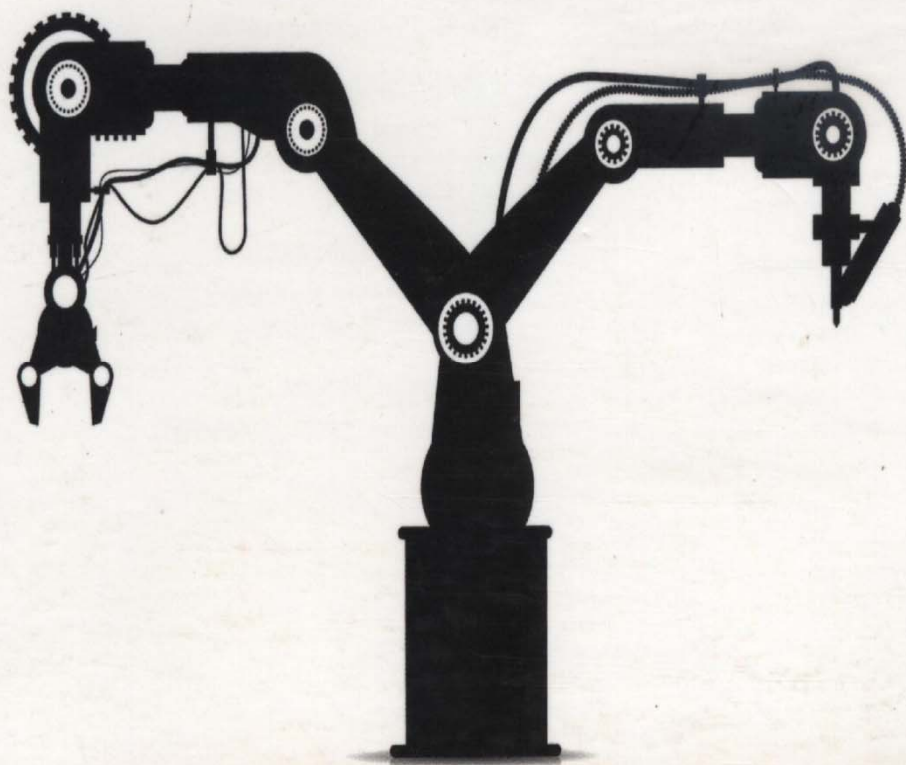


Sous la direction de
Jean Hladik, Pierre-Emmanuel Hladik

QUATERNIONS RÉELS, DUAUX ET COMPLEXES

- Applications en robotique
- Imagerie numérique
- Aérospatiale
- Biomécanique
- Physique relativiste et quantique



ellipses

TABLE DES MATIÈRES

NOTATION	17
I – Fondements mathématiques	21
1. NOMBRES COMPLEXES, DUAUX ET BIRÉELS	23
1.1 Géométrie des nombres complexes	23
1.1.1 Représentation dans le plan complexe	23
1.1.2 Nombre complexe conjugué	24
1.1.3 Norme d'un nombre complexe	24
1.1.4 Rotation d'un nombre complexe dans un référentiel fixe	25
1.1.5 Rotation du référentiel par rapport au plan	25
1.1.6 Représentation matricielle des rotations dans un plan	26
1.2 Construction des nombres complexes	27
1.2.1 Espace vectoriel \mathbb{R}^2	27
1.2.2 Algèbre \mathbb{C} des nombres complexes	28
1.2.3 Notation algébrique cartésienne	28
1.3 Construction des nombres duaux	28
1.3.1 Algèbre des nombres duaux	29
1.3.2 Propriétés des nombres duaux	29
1.3.3 Notation algébrique	29
1.3.4 Définitions et propriétés	30
1.4 Fonctions d'un nombre dual	31
1.4.1 Fonction duale associée à une fonction analytique réelle	31
1.4.2 Fonction duale d'un nombre réel	32
1.4.3 Dérivée d'une fonction duale d'un nombre dual	32
1.4.4 Fonctions trigonométriques agissant sur des angles duaux	33
1.5 Matrices duales	34
1.5.1 Inverse d'une matrice duale	35
1.5.2 Pseudo-inverse d'une matrice duale	35
1.6 Nombres duaux complexes	35
1.6.1 Définitions des opérations entre nombres duaux complexes	35
1.6.2 Vecteurs de base	36
1.7 Nombres biréels et bicomplexes	37
1.7.1 Définitions des nombres biréels	37
1.7.2 Base idempotente de ${}^2\mathbb{R}$	38
1.7.3 Polynômes à racines biréelles	38
1.7.4 Nombres bicomplexes	38
1.8 Nombres hypercomplexes	38

2.	QUATERNIONS	41
2.1	Construction des quaternions	41
2.1.1	Espace vectoriel $\mathbb{R}^4(+, .)$	42
2.1.2	Algèbre des quaternions	42
2.1.3	Base canonique de $\mathbb{R}^4(+, .)$	43
2.1.4	Multiplication entre les vecteurs de base de $\mathbb{R}^4(+, .)$	43
2.1.5	Vecteurs de base de l'algèbre des quaternions	44
2.2	Définitions des propriétés des quaternions.....	45
2.2.1	Conjugaison	45
2.2.2	Norme	45
2.2.3	Inversion et division	45
2.2.4	Produit scalaire	46
2.2.5	Angle entre deux quaternions	46
2.3	Quaternions et vecteurs tridimensionnels	47
2.3.1	Identification aux nombres réels	47
2.3.2	Quaternion pur	47
2.3.3	Quaternion unitaire	47
2.3.4	Quaternion pur unitaire	48
2.3.5	Forme binaire d'un quaternion	48
2.3.6	Produit vectoriel des quaternions	48
2.4	Opérateurs de Hamilton	49
2.5	Dérivation des quaternions	51
2.5.1	Dérivation d'un produit de quaternions	51
2.5.2	Dérivation d'un quaternion composé	51
2.5.3	Dérivée du produit d'un quaternion unitaire par son conjugué	52
2.5.4	Dérivée temporelle d'un quaternion	52
2.6	Théorème d'Adolf Hurwitz	53
3.	INTERPRÉTATION GÉOMETRIQUE DES QUATERNIONS	55
3.1	Espace physique tridimensionnel	55
3.1.1	Produit scalaire	55
3.1.2	Produit vectoriel	56
3.2	Géométrisation des quaternions	56
3.2.1	Obtention des produits scalaire et vectoriel	56
3.2.2	Représentation utilisant les vecteurs de \mathbb{R}^3	57
3.2.3	Pseudovecteur et quaternion pur	57
3.2.4	Formulation vectorielle des propriétés des quaternions	58
3.2.5	Produit des quaternions sous forme vectorielle	58
3.2.6	Quaternions unitaires	59
3.2.7	Forme polaire et forme binaire.....	59
3.2.8	Comparaison entre les vecteurs de base de \mathbb{R}^3 et de \mathbb{H}	60
3.3	Autres modes de représentation	61
3.3.1	Représentation séparant parties scalaire et vectorielle	61
3.3.2	Représentation symplectique	62
3.3.3	Représentation exponentielle	62
3.3.4	Puissance et logarithme d'un quaternion unitaire	63
3.3.5	Hypersphère S^3	63
3.3.6	Quelle représentation choisir ?.....	64
4.	ROTATIONS SPATIALES – MATRICES	65
4.1	Matrices des rotations dans \mathbb{R}^2	65

4.1.1	Matrice de rotation d'un vecteur dans \mathbb{R}^2	65
4.1.2	Matrice de rotation d'un référentiel dans un plan	66
4.1.3	Rotations successives d'un référentiel	66
4.2	Matrices des rotations dans \mathbb{R}^3	66
4.2.1	Conventions pour les référentiels tridimensionnels	66
4.2.2	Matrices de rotation d'un vecteur autour des axes principaux	67
4.2.3	Matrices de rotation du référentiel autour des axes principaux	67
4.3	Angles d'Euler	68
4.3.1	Théorème d'Euler	68
4.3.2	Séquences de rotations extrinsèques d'Euler	69
4.3.3	Equivalence entre rotations extrinsèques et intrinsèques	70
4.4	Matrices de séquences de rotations d'Euler	70
4.4.1	Propriétés des matrices de rotation	71
4.4.2	Matrice d'une séquence de rotations extrinsèques	71
4.5	Recherche de l'angle et de l'axe de rotation	72
4.5.1	Angle de rotation	73
4.5.2	Axe de rotation	73
4.6	Recherche de la matrice de rotation	75
4.6.1	Méthode algébrique	75
4.6.2	Formule de Cayley	75
4.6.3	Vecteur propre de la matrice de rotation	76
4.6.4	Paramètres de Rodrigues	77
4.6.5	Matrice de rotation	78
4.6.6	Méthode par rotations autour des axes principaux	80
5.	ROTATIONS SPATIALES – QUATERNIONS	81
5.1	Opérateurs de rotations spatiales	81
5.1.1	Opérateur R_q de rotation d'un vecteur	81
5.1.2	Développement de l'opérateur $R_q(v)$	82
5.1.3	Propriétés de l'opérateur R_q	82
5.1.4	R_q est bien un opérateur de rotation	83
5.1.5	Observateur définissant le sens de rotation	85
5.1.6	Opérateur de rotation R_{q^*}	85
5.2	Rotations $R(\alpha, u)$	85
5.2.1	Opérateur $R_q(v)$ en fonction de l'angle et de l'axe de rotation	86
5.2.2	Rotation autour de l'axe Z	86
5.3	Rotations successives	87
5.3.1	Opérateur de rotation R_{pq}	87
5.3.2	Quaternion du produit de deux rotations	87
5.3.3	Opérateur de rotation $R_{(qp)^*}$	88
5.4	Matrices de rotation	88
5.4.1	Matrice de rotation de l'opérateur $R_q(v)$	89
5.4.2	Utilisation de la matrice de rotation	90
5.4.3	Trace de la matrice de rotation	91
5.4.4	Matrice de rotation de l'opérateur $R_{q^*}(v)$	91
5.5	Matrices de rotations successives	91
5.6	Conversions en quaternions	92
5.6.1	De la matrice de rotation au quaternion	93
5.6.2	D'une séquence d'angles d'Euler au quaternion	93
5.6.3	Produit d'exponentielles représentant un quaternion	94
5.7	Quaternion rotation instantanée d'un solide	95
5.7.1	Tenseur rotation instantanée d'un solide	95
5.7.2	Vecteur rotation instantanée d'un solide	96

5.7.3	Quaternion associé au vecteur rotation instantanée	96
5.7.4	Relation entre $q(t)$ et ω_0	97
5.7.5	Relation entre $q(t)$ et ω_s	98
5.7.6	Identité de $q(t)$ dans les deux bases	99
5.8	Interpolation	99
5.8.1	Interpolation linéaire circulaire entre vecteurs unitaires	99
5.8.2	Interpolation linéaire sphérique entre quaternions unitaires	100
5.8.3	Interpolation entre quaternions non unitaires	101
5.8.4	Autre notation pour l'interpolation <i>Slerp</i>	101
6.	QUATERNIONS COMPLEXES	103
6.1	Définition des quaternions complexes	103
6.1.1	Algèbre des quaternions complexes	103
6.2	Représentation des quaternions complexes	104
6.2.1	Décomposition en somme de quaternions	104
6.2.2	Vecteurs de base de l'algèbre des quaternions complexes	104
6.2.3	Expression tensorielle	105
6.2.4	Représentation scalaire et vectorielle	105
6.2.5	Algèbre des quaternions complexes	106
6.3	Propriétés des quaternions complexes	106
6.3.1	Conjugaison	106
6.3.2	Norme et inverse	107
6.3.3	Produits	107
6.4	Semi-quaternions complexes	108
6.4.1	Définition	108
6.4.2	Produit des semi-quaternions complexes	108
7.	OCTONIONS ET SÉDÉNIONS	111
7.1	Les octonions	111
7.1.1	Groupe des octonions	111
7.1.2	Algèbre des octonions	112
7.2	Propriétés des octonions	112
7.2.1	Base naturelle	112
7.2.2	Table de multiplication des octonions de base	113
7.2.3	Représentations	113
7.2.4	Propriétés diverses	113
7.3	Les sédénions	114
7.3.1	Théorème d'Albrecht Pfister	115
7.3.2	Construction des sédénions	115
7.3.3	Limites de la méthode de Cayley-Dickson	116
8.	QUATERNIONS DUAUX	117
8.1	Vecteurs duaux	117
8.1.1	Espace vectoriel des vecteurs duaux	117
8.1.2	Autre définition d'un vecteur dual	118
8.1.3	Vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{D}^n(+, \cdot)$	118
8.1.4	Produit scalaire euclidien	118
8.1.5	Espace vectoriel dual $\mathbb{D}^3(+, \cdot)$	119
8.1.6	Produits scalaire et vectoriel des vecteurs duaux de $\mathbb{D}^3(+, \cdot)$	119
8.2	Définition des quaternions duaux	119
8.2.1	Décomposition en somme de quaternions	120

8.2.2	Algèbre des quaternions duaux	120
8.2.3	Vecteurs de base de l'algèbre des quaternions duaux	121
8.2.4	Expression tensorielle des quaternions duaux	121
8.3	Propriétés des quaternions duaux	122
8.3.1	Conjugaison	122
8.3.2	Norme duale	123
8.3.3	Inversion	123
8.3.4	Produit scalaire euclidien et produit vectoriel	124
8.3.5	Table de multiplication des quaternions duaux de base	124
8.4	Représentation scalaire et vectorielle	125
8.4.1	Notation conventionnelle des quaternions duaux	125
8.4.2	Algèbre des quaternions duaux	126
8.4.3	Produit scalaire	126
8.4.4	Produit vectoriel des quaternions duaux purs	127
8.4.5	Multiplication des quaternions duaux	127
8.4.6	Conjugaison	128
8.4.7	Norme duale	128
8.4.8	Inversion	128
8.5	Quaternions duaux unitaires	129
8.5.1	Quaternion dual unitaire	129
8.5.2	Quaternion dual pur unitaire	130
8.5.3	Forme polaire d'un quaternion dual unitaire	130
8.5.4	Forme binaire d'un quaternion dual unitaire	131
8.5.5	Forme exponentielle d'un quaternion dual unitaire	131
8.5.6	Hypersphère duale	132
8.6	Autres représentations	133
8.6.1	Représentation comme couple de quaternions	133
8.6.2	Représentation comme quadruplet de nombres duaux	133
8.7	Opérateurs de Hamilton	133
8.7.1	Définition	134
8.7.2	Propriétés	134
8.8	Interpolations	135
8.8.1	Interpolation linéaire	135
8.8.2	Interpolation linéaire sphérique entre quaternions duaux	135
8.8.3	Autre notation pour l'interpolation <i>dualSlerp</i>	136
9.	TRANSLATIONS ET ROTATIONS – MATRICES	137
9.1	Translations spatiales	137
9.2	Champ de vecteurs équiprojectif	138
9.2.1	Champ antisymétrique	138
9.2.2	Champ des vitesses d'un corps rigide	139
9.3	Déplacements d'un corps rigide	140
9.3.1	Translation	140
9.3.2	Rotation	140
9.3.3	Déplacement hélicoïdal	141
9.3.4	Déplacement quelconque d'un solide rigide	142
9.3.5	Degrés de liberté des déplacements d'un solide rigide	142
9.4	Conventions de notation	142
9.4.1	Transformation des coordonnées et déplacement	142
9.4.2	Transformation des coordonnées homogènes	143
9.4.3	Valeur propre et vecteur propre d'une matrice de rotation	143
9.5	Théorème de Chasles : déplacement plan	144
9.5.1	Matrices équivalentes	144

9.5.2	Centre de rotation instantané d'un déplacement plan	145
9.5.3	Coordonnées homogènes	146
9.5.4	Matrices équivalentes d'un déplacement plan	147
9.6	Théorème de Chasles : déplacement spatial	148
9.6.1	Absence de points fixes	148
9.6.2	Matrices équivalentes : matrice de rotation	148
9.6.3	Matrices équivalentes : matrice de translation	149
9.6.4	Déplacements des référentiels	150
9.6.5	Position de l'axe de vissage	151
10. TRANSLATIONS ET ROTATIONS – QUATERNIONS DUAUX		153
10.1	Lignes de Plücker	153
10.1.1	Coordonnées de Plücker	153
10.1.2	Définition d'une vis représentant un déplacement	154
10.2	Déplacements et quaternions duaux	155
10.2.1	Vecteurs d'une ligne de Plücker sous forme de quaternions	155
10.2.2	Déplacement d'une ligne de Plücker	156
10.2.3	Expression du quaternion de déplacement	156
10.3	Paramètres duaux des déplacements	157
10.3.1	Moment de la ligne de Plücker	157
10.3.2	Calcul de la partie duale	158
10.3.3	Quaternion dual unitaire en fonction de l'angle dual	159
10.3.4	Composantes duales en fonction des paramètres de vissage	159
10.3.5	Déplacement d'un axe de vissage	160
10.4	Déplacements d'un corps rigide	160
10.4.1	Translation suivie d'une rotation	160
10.4.2	Exemple de calcul des paramètres duaux	161
10.4.3	Paramètres de vissage en fonction des paramètres duaux	163
10.4.4	Composition de deux déplacements	163
10.5	Opérateurs duaux de Hamilton	164
10.5.1	Représentation algébrique des quaternions duaux	164
10.5.2	Représentation en somme de deux quaternions	165
10.5.3	Utilisation des opérateurs de Hamilton pour les déplacements	166
10.6	Propriétés des opérateurs duaux de Hamilton	167
10.6.1	Opérateur de Hamilton sous forme d'une somme d'opérateurs	167
10.6.2	Représentation des bases d'un opérateur dual de Hamilton	167
10.6.3	Matrices duales orthogonales	168
10.6.4	Matrice de déplacement d'un axe de vissage	169
10.6.5	Vecteur dual rotation instantané	169
11. QUATERNIONS DUAUX COMPLEXES ET QUATERNIONS BIRÉELS		171
11.1	Nombres et vecteurs duaux complexes	171
11.1.1	Algèbre des nombres duaux complexes	171
11.1.2	Fonctions d'un nombre dual complexe	172
11.1.3	Vecteurs duaux complexes	172
11.1.4	Décomposition des vecteurs duaux complexes	173
11.1.5	Vecteurs de la base naturelle de $\mathbb{C}D^n(+, \cdot)$	173
11.1.6	Produit scalaire des vecteurs duaux complexes	173
11.2	Algèbre des quaternions duaux complexes	174
11.2.1	Définition des quaternions duaux complexes	174
11.2.2	Décomposition des quaternions duaux complexes	174
11.2.3	Produit des quaternions duaux complexes	175

11.2.4	Conjugué et norme duale complexe	175
11.3	Les quaternions biréels	176
11.4	Les quaternions hyperboliques	177
II – Applications		179
AUTEURS DES APPLICATIONS		180
12. DOMAINES D'APPLICATIONS		181
12.1	Premières applications	181
12.2	Ingénierie	182
12.2.1	Cinématique théorique	182
12.2.2	Robotique	183
12.2.3	Biomécanique et ingénierie biomédicale	183
12.2.4	Aéronautique et aérospatiale	184
12.3	Informatique	184
12.3.1	Traitement du signal	184
12.3.2	Production et traitement des images numériques	185
12.3.3	Traitement de l'image couleur	185
12.3.4	Calculs informatiques	185
12.4	Physique	185
12.4.1	Électromagnétisme	186
12.4.2	Relativité restreinte	186
12.4.3	Physique quantique	187
12.4.4	Cosmologie	188
13. ONDELETTES QUATERNIONIQUES POUR L'ANALYSE IMAGE		189
13.1	Signal analytique et ses extensions	189
13.1.1	Rappel sur le signal analytique 1-D	190
13.1.2	La phase du signal analytique quaternionique 2-D	192
13.1.3	Extension de la notion de signal analytique aux images en niveaux de gris	192
13.1.4	Extension de la notion de signal analytique par T. de Fourier quaternionique ..	194
13.1.5	Transformée de Fourier quaternionique pour les images en niveaux de gris	194
13.1.6	Le signal analytique quaternionique 2-D	196
13.2	Ondelettes complexes	198
13.2.1	Principe	198
13.2.2	Déploiement numérique des ondelettes complexes	199
13.3	Ondelettes quaternioniques	201
13.3.1	Principe	201
13.3.2	Expression numérique de la QWT	203
13.3.3	Information associée à la QWT	203
13.4	Exemples d'application de la QWT	205
13.4.1	Flot optique	205
13.4.2	Discrimination de textures	205
13.5	Conclusion	207
13.6	Références	207

14. ANALYSE D'IMAGES COULEUR PAR APPROCHES QUATERNIONIQUES	209
14.1 Définitions, éléments de base et premières manipulations couleur	210
14.1.1 Codage de la couleur	210
14.1.2 Représentation vectorielle	211
14.1.3 Manipuler des couleurs à l'aide des quaternions	212
14.1.4 Quaternions et espaces couleur	213
14.1.5 Modification couleur à partir des quaternions	216
14.2 Filtrage	217
14.2.1 L'approche quaternionique de Sangwine	217
14.2.2 Détection de contours par max. de gradient quaternionique de saturation	219
14.3 Transformées de Fourier quaternioniques	220
14.3.1 Définition	221
14.3.2 Définition numérique de l'espace de Fourier quaternionique	221
14.3.3 Interprétation du spectre quaternionique	222
14.4 Morphologie mathématique couleur	225
14.4.1 Formalisation des couleurs pour la morphologie	225
14.4.2 Relations d'ordre	226
14.4.3 Opérations de morphologie mathématique couleur quaternionique	227
14.5 Conclusion	228
14.6 Références	229
15. MÉTHODE D'ÉVALUATION DES QUATERNIONS POUR L'ORIENTATION DES SYSTÈMES RIGIDES	233
15.1 Les centrales à inertie	233
15.2 La révolution des « MEMS »	234
15.3 Les principes du calcul	235
15.4 Notation	235
15.5 Méthode d'évaluation à partir d'une mesure ponctuelle	237
15.5.1 Évaluation de l'orientation d'un corps par une méthode algébrique	237
15.5.2 Évaluation du quaternion par une méthode algébrique	239
15.5.3 Évaluation de l'orientation pour un champ de vecteurs	240
15.5.4 Évaluation de l'orientation par composition de quaternions	242
15.6 Estimation dynamique de l'orientation	245
15.6.1 Utilisation de la vitesse angulaire	245
15.6.2 Request	246
15.6.3 Estimation du quaternion à partir de la mesure d'accélération angulaire	247
15.6.4 Estimation du quaternion avec les nouvelles mesures	248
15.7 Mettre en œuvre ces méthodes	250
15.8 Conclusion	250
15.9 Références	251
16. COMPARAISON ENTRE OPÉRATIONS QUATERNIONIQUES ET CLASSIQUES	253
16.1 Calculs quaternioniques des rotations	253
16.1.1 Conversion	254
16.1.2 Rotation	255
16.1.3 Composition et renormalisation	256
16.1.4 Interpolation	256
16.2 Calculs quaternioniques pour les déplacements des corps rigides	257
16.2.1 Représentations d'une rotation et d'une translation	257

16.2.2	Évaluation des performances	258
16.3	Bilan	259
16.4	Références	260
17.	LES QUATERNIONS DUAUX EN ROBOTIQUE	261
17.1	Introduction	261
17.2	Des fonctions primordiales	263
17.3	Utilisation de quaternions duaux pour le contrôle des robots	265
17.3.1	Planification	266
17.3.2	Contrôle	267
17.3.3	Modélisation	269
17.4	Conclusion	270
17.5	Références	271
18.	INTERPOLATION ET APPROXIMATION DES QUATERNIONS DUAUX	273
18.1	Introduction	273
18.2	Interpolation des quaternions duaux	273
18.3	Approximation : courbes de Bézier pour les quaternions duaux unitaires	275
18.3.1	Cas de \mathbb{R}^3	275
18.3.2	Cas des quaternions	276
18.3.3	Cas des quaternions duaux	277
18.4	Approximation : courbes splines pour les quaternions duaux unitaires	277
18.4.1	Cas de \mathbb{R}^3	277
18.4.2	Cas des quaternions duaux	279
18.5	Références	279
19.	MODÉLISATION QUATERNIONIQUE DU LIEN FORME-FONCTION DES SURFACES ARTICULAIRES	281
19.1	Introduction	281
19.2	Surfaces réglées	282
19.2.1	Courbe de striction et point central	283
19.2.2	Plan central	284
19.3	Représentation des surfaces réglées par les quaternions duaux	285
19.3.1	Interpolation des surfaces réglées	285
19.4	Application à l'étude du lien morfo-fonctionnel	286
19.4.1	Surface focale géodésique	286
19.4.2	Axode	288
19.4.3	Lien entre la surface focale géodésique et l'axode	288
19.5	Résultats expérimentaux : acquisition des données morfo-fonctionnelles	289
19.6	Vers une signature morfo-fonctionnelle des pathologies articulaires	292
19.7	Bibliographie	292
20.	GROUPES ET QUATERNIONS	295
20.1	Définitions et propriétés d'un groupe	295
20.1.1	Axiomes de définition d'un groupe	295
20.1.2	Exemples de groupes	296
20.1.3	Propriétés élémentaires des groupes	296

20.2	Représentation d'un groupe	297
20.2.1	Exemple de représentation	297
20.2.2	Définition d'une représentation d'un groupe	297
20.2.3	Représentation matricielle d'un groupe	298
20.3	Groupes des rotations et des quaternions	299
20.3.1	Groupe $SO(2)$: rotations dans un plan	299
20.3.2	Groupe $SO(3)$: rotations spatiales	300
20.3.3	Groupe $SU(2)$: rotations sur une sphère	301
20.4	Matrices infinitésimales	303
20.4.1	Groupe $SO(2)$	303
20.4.2	Groupe $SO(3)$	304
20.4.3	Groupe $SO(4)$	305
20.4.4	Groupe $SU(2)$	306
20.5	Matrices de Pauli et quaternions	308
20.5.1	Propriétés des matrices de Pauli	308
20.5.2	Base de l'espace vectoriel des matrices 2×2	308
20.5.3	Représentation de l'algèbre des quaternions	309
20.6	Bibliographie	310
21.	RELATIVITÉ RESTREINTE — MÉCANIQUE QUANTIQUE	311
21.1	L'espace-temps de la relativité restreinte	311
21.1.1	Les postulats de l'espace-temps	312
21.1.2	Référentiels en translation uniforme	312
21.1.3	Principe de relativité de Poincaré	312
21.1.4	La transformation de Lorentz	313
21.1.5	La transformation de Lorentz comme rotation de l'espace-temps	314
21.1.6	Angle de rotation de l'espace-temps	315
21.2	Quaternions complexes et transformation spéciale de Lorentz	316
21.2.1	Quaternions complexes de l'espace-temps	316
21.2.2	La transformation spéciale de Lorentz quaternionique	316
21.2.3	Du quaternion à la transformation spéciale de Lorentz	317
21.3	Mécanique quantique : spin des particules	317
21.3.1	Mise en évidence expérimentale	318
21.3.2	Théorie de Pauli	318
21.3.3	Représentation symplectique des quaternions	319
21.3.4	Spin quaternionique	319
21.3.5	Physique quantique relativiste	321
21.4	Références	321
22.	GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES	323
22.1	Espaces non euclidiens	323
22.1.1	Espace non euclidien : disque en rotation	324
22.1.2	Espace non euclidien : surface sphérique	324
22.2	Trigonométrie sphérique	325
22.2.1	Triangles sphériques	325
22.2.2	Formules fondamentales	326
22.3	Courbure d'un espace riemannien	327
22.3.1	Notion de courbure d'un espace riemannien	328
22.3.2	Transport parallèle	328
22.3.3	Transport parallèle dans l'espace euclidien	328
22.3.4	Transport parallèle dans l'espace riemannien	329

22.4	Hypersphères riemanniennes	329
22.4.1	Définition d'une hypersphère	329
22.4.2	Représentation quaternionique de l'hypersphère S^3	330
22.5	Bibliographie	331
23.	QUATERNIONS ET ESPACE ELLIPTIQUE	333
	Introduction	333
	Le programme d'Erlangen	334
	L'invariant de distance	334
	Parataxies	335
	Homogénéité de l'espace	336
	Points antipodes	336
	Espace elliptique	337
	Représentation euclidienne de l'espace elliptique	337
	Représentation de l'espace sphérique	338
	BIBLIOGRAPHIE	339