

Xavier Picamoles

Fondamentaux
de mathématiques
appliquées
pour ingénieurs et techniciens



La côte de l'ouvrage : 2-510-224

Table des matières

I	Généralités : problèmes différentiels et modélisation	1
1	Généralités sur les problèmes différentiels	3
1	Quelques généralités sur les équations différentielles	3
1.1	Forme générale d'une équation différentielle ordinaire	3
1.2	Forme résolue d'une équation différentielle	3
1.3	Lien entre E.D.O. résolue d'ordre $n \geq 2$ et E.D.O. résolue d'ordre 1 . . .	4
1.4	Lien entre système différentiel d'ordre 1 et E.D.O. résolue d'ordre 1 . .	5
1.5	Problème de Cauchy et théorème de Cauchy-Lipschitz	6
2	Solveur numérique de <i>Scilab</i>	7
2.1	Solveur ode	7
2.2	Application 1 : un problème d'éolienne face au vent	8
2.3	Application 2 : équation de Van der Pol	11
2.4	Application 3 : système différentiel de Lokta-Volterra	12
3	Quelques généralités sur les E.D.P.	14
3.1	E.D.P. du premier ordre	14
3.2	E.D.P. du second ordre	16
3.3	Conditions aux limites et conditions initiales	18
3.4	Problème bien posé au sens de Hadamard	20
2	Modélisation de quelques problèmes physiques conduisant à des E.D.P.	23
1	L'équation de transport	23
1.1	Origine de l'équation	23
1.2	L'équation	26
1.3	Phénomène de transport de la solution le long des caractéristiques . .	26
1.4	Solution analytique en domaine non borné	28
1.5	Exemple de solution en domaine non borné	28
1.6	Solution analytique en domaine borné	29
2	L'équation de la chaleur	30
2.1	Origine de l'équation	30
2.2	L'équation	33
2.3	Solution analytique en domaine non borné	34

2.4	Solution analytique en domaine borné	35
2.5	Exemple de solution en domaine borné	39
3	L'équation des cordes vibrantes	40
3.1	Origine de l'équation	40
3.2	L'équation	42
3.3	Lien entre l'équation des ondes et l'équation de transport	44
3.4	Solution analytique en domaine non borné	45
3.5	Exemple de solution en domaine non borné	48
3.6	Solution analytique en domaine borné	49
3.7	Exemple de solution en domaine borné	53
4	Les équations de Laplace et de Poisson	54
4.1	Origine de l'équation de Laplace	54
4.2	Un exemple de problème conduisant à l'équation de Poisson	55
4.3	Les équations	58
4.4	Solution analytique de l'équation de Laplace sur le disque unité	59
4.5	Solution analytique de l'équation de Poisson sur le carré unité	62
5	L'équation des barres	63
5.1	Origine de l'équation	63
5.2	L'équation	66
6	L'équation des poutres en flexion pure et statique	66
6.1	Origine de l'équation	66
6.2	L'équation	70
3	Notions élémentaires liées à l'analyse numérique matricielle	71
1	Quelques généralités sur les matrices	71
1.1	Notations	71
1.2	Matrices creuses, matrices « bandes »	72
1.3	Matrices symétriques et symétriques définies positives	72
2	Normes vectorielles et matricielles	74
2.1	Définition d'une norme	75
2.2	Normes vectorielles sur \mathbb{R}^n	76
2.3	Normes sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	76
2.4	Normes matricielles subordonnées	77
2.5	Norme subordonnée à la norme $\ \cdot\ _\infty$	79
2.6	Cas particulier des matrices symétriques	82
3	Méthode directe de résolution d'un système linéaire	82
3.1	Problématique	82
3.2	Conditionnement d'une matrice	83
3.3	Décomposition « LU » et de Cholesky	86
3.4	Factorisation de Cholesky	88
3.5	Résolution d'un système linéaire à matrice creuse avec <i>Scilab</i>	88

II	Méthode des différences finies et applications	91
4	Introduction à la méthode des différences finies pour quelques E.D.O.	93
1	Introduction à la méthode des différences finies	93
1.1	Notations et vocabulaire	93
1.2	Formule de Taylor-Lagrange	94
2	Schéma numérique d'Euler	95
2.1	Approche par quotient aux différences finies	95
2.2	Approche par quadrature	98
3	Schéma numérique du point milieu	100
3.1	Approche par quotient aux différences finies	100
3.2	Approche par quadrature	102
3.3	Les formules de Runge-Kutta	103
4	Deux variantes du schéma d'Euler	104
4.1	Un schéma numérique implicite à un pas	104
4.2	Un schéma numérique explicite à deux pas	106
5	Aspects théoriques pour les schémas explicites à un pas	107
5.1	Objectifs	107
5.2	Définition d'un schéma numérique explicite à un pas	108
5.3	Erreur de consistance	109
5.4	Précision ou ordre d'un schéma	111
5.5	Consistance	114
5.6	Une condition suffisante de consistance	114
5.7	Stabilité	117
5.8	Convergence	119
5.9	Lien entre consistance, stabilité et convergence	119
6	Application : un problème d'éolienne face au vent	121
6.1	Rappel du problème	121
6.2	Schémas numériques	121
6.3	Algorithmes	122
6.4	Simulations numériques dans le cas d'un vent constant	123
6.5	Simulations numériques dans le cas d'une rafale de vent	128
5	Introduction à la méthode des différences finies pour quelques E.D.P.	129
1	Introduction	129
1.1	Objectifs	129
1.2	Discretisation du domaine : le maillage	130
1.3	Discretisation des dérivées partielles : quotients aux différences finies	131
2	Différences finies pour l'équation de transport	135
2.1	Le problème	135
2.2	Maillage du domaine	136
2.3	Schéma numérique décentré à droite en espace	136
2.4	Schéma décentré à gauche en espace	140
2.5	Diffusion numérique pour le schéma décentré à gauche	145
2.6	Schéma numérique de Lax-Wendroff	148

2.7	Comportement des schémas avec une condition initiale non continue	152
3	Différences finies pour l'équation de la chaleur	152
3.1	Le problème	152
3.2	Le maillage du domaine	153
3.3	Construction d'un schéma numérique explicite	154
3.4	Simulations numériques pour le schéma explicite	158
3.5	Schéma numérique implicite	160
3.6	Schéma semi implicite de Crank-Nicolson	163
3.7	Schéma <i>saute-mouton</i>	165
4	Différences finies pour l'équation des cordes vibrantes	166
4.1	Le problème	166
4.2	Le maillage du domaine	166
4.3	Construction d'un schéma numérique explicite	166
4.4	Autre approche de construction d'un schéma numérique	168
5	La méthode de Newmark	169
5.1	Les problèmes concernés	169
5.2	Principe de la méthode de Newmark	169
5.3	Schéma implicite de Newmark classique	171
5.4	Propriétés du schéma	171
6	Aspects théoriques	171
6.1	Forme générale d'un schéma numérique à un pas	171
6.2	Consistance, stabilité, convergence	173
6.3	Lien entre stabilité, consistance et convergence : théorème de Lax	176
7	Étude théorique des schémas pour l'équation de transport	177
7.1	Schéma de Lax-Wendroff	177
7.2	Schéma explicite décentré à gauche	183
8	Étude théorique des schémas pour l'équation de la chaleur	184
8.1	Le schéma explicite	185
8.2	Le schéma implicite	190
8.3	Le schéma de Crank-Nicolson	192
III Méthode des éléments finis et applications		195
6	Introduction à la méthode des éléments finis : aspects théoriques	197
1	Introduction	197
1.1	Historique	197
1.2	Notations	198
2	Introduction à la formulation faible pour un problème elliptique	199
2.1	Exemple d'une barre en traction-compression	199
2.2	Exemple d'une poutre en flexion pure	203
2.3	Exemple d'une membrane en tension	206
3	Existence et unicité d'une solution faible	208
3.1	Le théorème de Lax-Milgram	208
3.2	Problème de la barre	209

3.3	Problème de la poutre	216
3.4	Problème de la membrane	217
4	Méthode de Galerkin : formulation faible et discrétisation	219
4.1	Méthode de Galerkin	219
4.2	Discrétisation du problème faible	219
4.3	Convergence de la méthode de Galerkin	221
4.4	Espaces d'approximation	223
4.5	Interpolation de Lagrange et de Hermite	224
4.6	Le problème de l'intégration numérique	225
4.7	Quelques mots à propos du maillage	226
5	Étude de l'erreur	227
5.1	Lemme de Céa	228
5.2	Ordre de convergence dans le cas d'intégration exacte	229
5.3	Ordre de convergence dans le cas d'intégration numérique	229
6	Exemple : résolution du problème de la barre (interpolation de degré 1)	230
6.1	Rappel du problème	230
6.2	Espaces d'approximation	230
6.3	Forme discrétisée de la formulation faible	234
6.4	Résolution du problème discrétisé	236
6.5	Lien avec la méthode des différences finies	236
6.6	Algorithme et application numérique	237
7	Exemple : résolution du problème de la barre (interpolation de degré 2)	239
7.1	Espaces d'approximation	239
7.2	Forme discrétisée de la formulation faible	242
7.3	Algorithme et application numérique	244
8	Exemple : résolution du problème de la poutre (interpolation de degré 3)	246
8.1	Rappel du problème	246
8.2	Espaces d'approximation	246
8.3	Forme discrétisée de la formulation faible	249
7	La méthode des éléments finis : aspects pratiques	251
1	Stratégie locale de discrétisation et éléments finis	251
1.1	Définition d'un élément fini et exemples	251
1.2	Relations élémentaires	254
1.3	Assemblage des relations élémentaires	255
1.4	Prise en compte des conditions aux limites essentielles	255
2	Description de quelques éléments finis	256
2.1	Éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange (1D)	256
2.2	Éléments finis \mathbb{P}_2 de Lagrange (1D)	257
2.3	Éléments finis \mathbb{P}_3 de Hermite (1D)	261
2.4	Élément fini \mathbb{T}_3 de Lagrange (2D)	264
2.5	Éléments finis \mathbb{Q}_4 de Lagrange (2D)	266
2.6	Notion d'isoparamétrie	267
3	Exemple d'utilisation d'éléments finis \mathbb{P}_1 de Lagrange : problème de la barre	269
3.1	Construction des éléments finis	270
3.2	Calcul des relations élémentaires	273

3.3	Assemblage des relations élémentaires	276
3.4	Ce qu'il faut retenir des relations élémentaires	280
3.5	Prise en compte des conditions aux limites et résolution	280
3.6	Interpolation de la solution approchée	281
4	Exemple d'utilisation d'éléments finis \mathbb{P}_2 de Lagrange : problème de la barre	281
4.1	Construction des éléments finis	282
4.2	Calcul des relations élémentaires	283
4.3	Assemblage des relations élémentaires	286
4.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution	287
5	Exemple d'utilisation d'éléments finis \mathbb{P}_3 de Hermite : problème de la poutre	288
6	Exemple d'utilisation d'éléments finis \mathbb{T}_3 de Lagrange : problème de la membrane	288
6.1	Simplification du modèle et construction des éléments	288
6.2	Calcul des relations élémentaires	290
6.3	Assemblage des relations élémentaires	294
6.4	Prise en compte des conditions aux limites et résolution	296
8	Quelques applications de la méthode des éléments finis	297
1	Éléments finis « barre » et application aux treillis plans	297
1.1	Description d'une barre en mécanique	297
1.2	Forme discrétisée	298
1.3	Modélisation éléments finis d'une barre	300
1.4	Exemple d'une barre soumise à son poids propre	305
1.5	Élément « barre » en deux dimensions	309
1.6	Application aux treillis plans	313
1.7	Exemple d'application à un problème de thermique	318
2	Éléments finis « poutre », application aux portiques plans	321
2.1	Description d'une poutre en flexion pure	321
2.2	Forme discrétisée	322
2.3	Modélisation éléments finis d'une poutre	324
2.4	Exemples	329
2.5	Prise en compte de la traction compression dans le modèle	337
2.6	Application aux portiques plans	340
2.7	Élément « poutre » de Timoshenko	344
3	Éléments de généralisation en dimensions 2 et 3	346
3.1	Généralités	346
3.2	L'exemple simple des contraintes planes en dimension deux	348
9	Méthode des éléments finis appliquée aux problèmes dynamiques	351
1	La méthode des éléments finis en dynamique	351
1.1	Généralités	351
1.2	Discrétisation partielle en espace	352
1.3	Exemple de l'équation de la chaleur	353
2	Exemple d'étude des vibrations libres d'un système non amorti	355
2.1	Généralités : réponse harmonique et pulsations propres	355
2.2	Exemple d'une barre	357

10 Aspects pratiques liés à la mise en œuvre de la méthode	359
1 Motivations	359
2 Différents types d'éléments de structure et de thermique	360
2.1 Éléments linéiques	360
2.2 Éléments surfaciques	361
2.3 Éléments volumiques	363
3 Simplifications de modèle	364
3.1 Motivations	364
3.2 Symétrie plane	365
3.3 Symétries de révolution : axisymétrie	366
3.4 Hypothèse des contraintes planes	366
3.5 Hypothèse des déformations planes	367
3.6 Deux exemples de simplification de modèles en thermique	368
4 Un exemple de modélisations multiples	369
4.1 Modélisation 3D	370
4.2 Modélisation 2D	371
4.3 Modélisation 1D	373
4.4 Commentaires	373
5 Exemple d'utilisation d'un logiciel libre	374
5.1 Le logiciel FreeFem++	374
5.2 Un exemple d'utilisation	374
11 Formulaire éléments finis	377
1 Formulation faible abstraite et exemples	377
2 Éléments finis	378
3 Bases nodales sur $[0, L]$	379
4 Matrices de rigidité élémentaires	380
IV Traitement du signal et applications	383
12 Les distributions	385
1 Introduction et historique	385
2 Insuffisance de la notion de fonction	386
3 Définition d'une distribution et premiers exemples	389
3.1 Définition	389
3.2 Premiers exemples	391
4 Distributions régulières et singulières	393
4.1 Distributions régulières	393
4.2 Exemples de distributions régulières	395
4.3 Distributions singulières	396
5 Opérations sur les distributions	397
5.1 Mise au point sur les notations	397
5.2 Opérations élémentaires	397
5.3 Égalité de deux distributions	398
5.4 Support d'une distribution	399
5.5 Distributions périodiques	400

5.6	Produit d'une distribution par une fonction	401
5.7	Dérivée d'une distribution	402
5.8	Propriétés de la dérivation	406
5.9	Valeur principale de $\frac{1}{x}$	410
5.10	Partie finie de $\frac{1}{x}$	412
6	Convergence des suites de distributions	413
6.1	Convergence en norme L^1 , en norme L^2	413
6.2	Convergence faible d'une suite de fonctions	413
6.3	Lien entre convergence en norme et convergence faible	413
6.4	Convergence d'une suite de distributions	414
6.5	Approximation de l'impulsion de Dirac	414
7	Généralisation en dimension deux et trois	415
8	Distributions tempérées	415
8.1	Définition	416
8.2	Exemples de distributions tempérées	417
9	Convolution des distributions	421
9.1	Extension du produit de convolution aux distributions	421
9.2	Deux conditions suffisantes d'existence	423
9.3	Propriétés élémentaires	424
9.4	Le rôle fondamental de la distribution de Dirac	424
10	Algèbre de convolution	426
10.1	Introduction	426
10.2	Inverse de convolution	426
10.3	Algèbre de convolution	426
10.4	Solution élémentaire	427
10.5	Deux exemples simples	428
13	Les transformations de Fourier	431
1	Origine des transformations de Fourier à temps continu et discret	431
2	Transformation de Fourier à temps continu	433
2.1	Transformée et transformation de Fourier	433
2.2	Une condition suffisante d'existence	433
2.3	Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	433
2.4	Transformation sur $L^2(\mathbb{R})$	434
2.5	Exemples de transformées de Fourier	435
2.6	Transformation de Fourier inverse	437
3	Principales propriétés de la transformation de Fourier	438
3.1	Linéarité et continuité	438
3.2	Formules de translation « en t » et « en q »	438
3.3	Formule de « dilatation »	438
3.4	Formule de dérivation « en t », « en q » et régularité de \hat{s}	438
3.5	Régularité de \hat{s}	440
3.6	Limite en $-\infty$ et $+\infty$	441
3.7	Formule d'échange	442
3.8	Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	442
3.9	Spectre d'amplitude, spectre de phase	443

3.10	Énergie d'un signal	443
4	Transformation de Fourier des distributions tempérées	444
4.1	Prolongement de la transformation à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$	444
4.2	Transformation de Fourier inverse	445
4.3	Formules de dérivation et de « retard »	445
4.4	Convolution	447
4.5	Transformée de Fourier d'une distribution à support compact	447
4.6	Exemples de transformées de Fourier au sens des distributions	447
5	Transformation de Fourier à temps discret	450
5.1	Définition	450
5.2	Condition suffisante d'existence	451
5.3	Propriétés élémentaires	451
5.4	Inversion de la transformation de Fourier à temps discret	451
6	Transformation de Fourier discrète	452
6.1	Définition	452
6.2	Transformation inverse	452
7	Inconvénients de la transformation de Fourier	454
8	Principe d'incertitude	455
14	Développement en série de Fourier	459
1	Origine et importance des séries de Fourier	459
2	Développement en série de Fourier des fonctions périodiques	460
2.1	Forme exponentielle du développement	460
2.2	Conditions suffisantes d'existence	460
2.3	Lien avec la transformation de Fourier	462
2.4	Forme trigonométrique et forme polaire du développement	463
2.5	Puissance et énergie d'un signal périodique, formule de Parseval	464
2.6	Spectre d'amplitude, spectre de phase	465
2.7	Principales propriétés des coefficients de Fourier	467
2.8	Exemples de développements en séries de Fourier	469
2.9	Développement en série de Fourier d'une fonction non périodique mais à support borné	471
3	Développement en série de Fourier des fonctions périodiques d'énergie finie	475
3.1	Aspects « géométriques »	475
3.2	Théorème de projection	478
3.3	Interprétation des coefficients et des sommes partielles de Fourier	480
3.4	Convergence des sommes partielles en norme quadratique	481
4	Développement en série de Fourier des distributions tempérées	483
4.1	Un résultat général	483
4.2	Application : développement en série de Fourier du peigne de Dirac	484
15	Les transformations de Laplace et en Z	485
1	Origine des transformations de Laplace et en Z	485
2	Transformation de Laplace des fonctions	486
2.1	Transformée et transformation de Laplace	486
2.2	Lien avec la transformation de Fourier	487

2.3	Quelques conditions suffisantes d'existence	487
2.4	Ensemble des « originaux »	488
2.5	Exemples de transformées de Laplace	489
2.6	Transformation de Laplace inverse	490
2.7	Détermination pratique d'un inverse	491
2.8	Principales propriétés de la transformation de Laplace	492
3	Transformation de Laplace des distributions	496
3.1	Définition	496
3.2	Exemples de transformées au sens des distributions	498
3.3	Quelques propriétés	500
4	Quelques applications de la transformation de Laplace	501
4.1	Résolution d'un problème de Cauchy	501
4.2	Système linéaire « entrée-sortie » et fonction de transfert	502
4.3	Calcul symbolique	503
5	Transformation en Z	504
5.1	Transformée et transformation en Z	504
5.2	Quelques conditions suffisantes d'existence	505
5.3	Ensemble des « originaux »	506
5.4	Exemples de transformées en Z	507
5.5	Transformation en Z inverse	509
5.6	Détermination pratique d'un inverse	510
5.7	Quelques propriétés de la transformation en Z	511
6	Application à la résolution d'une équation aux différences	513
16	Notions de filtrage linéaire	515
1	Signaux analogiques, numériques, causals	516
1.1	Signaux analogiques et numériques	516
1.2	Échantillonnage et quantification	516
1.3	Chaîne d'acquisition de données numériques	517
1.4	Causalité et signaux causals	517
2	Filtrage linéaire	518
2.1	Action d'un filtre sur un signal	518
2.2	Réponse indicielle et impulsionnelle	520
2.3	Filtres analogiques et numériques	521
2.4	Modélisation mathématique d'un filtre	521
3	Caractérisation des filtres linéaires invariants	522
3.1	Relation « entrée-sortie » en termes d'équation différentielle ou d'équation aux différences finies	522
3.2	Relation « entrée-sortie » en termes de réponse impulsionnelle et de convolution	523
3.3	Fonction de transfert	524
4	Filtres causals, stables, réalisables	527
4.1	Filtre stable	527
4.2	Filtre causal	527
4.3	Filtre réalisable	527
5	Classification des filtres numériques	527

5.1	Filtres numériques à réponse impulsionnelle finie	528
5.2	Filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie	528
6	Réponse en fréquence, gain et phase d'un filtre	529
6.1	Filtres analogiques	529
6.2	Filtres numériques	530
7	Exemple d'étude de quelques filtres simples	531
7.1	Un filtre numérique non récursif (à réponse impulsionnelle finie)	531
7.2	Un filtre numérique récursif (à réponse impulsionnelle infinie)	534
7.3	Un filtre analogique	537
17	Analyse spectrale des signaux et calcul approché du spectre	541
1	Spectre d'un signal analogique non périodique	541
2	Spectre d'un signal analogique et périodique	541
2.1	Spectre et spectre d'amplitude	541
2.2	Lien avec les séries de Fourier	543
2.3	Généralisation	544
3	Spectre d'un signal numérique non périodique	544
4	Spectre d'un signal numérique et périodique	545
5	Spectre d'un signal analogique échantillonné : formule de Poisson	546
5.1	Échantillonnage d'un signal analogique	546
5.2	Formule de Poisson	547
5.3	Spectre d'amplitude d'un signal échantillonné	548
6	Recouvrement de spectre et fréquence critique d'échantillonnage	548
6.1	Fréquence critique d'échantillonnage	548
6.2	Conséquence néfaste du recouvrement de spectre	549
6.3	Exemple d'un signal cosinusoïdal amorti	549
7	Reconstruction d'un signal analogique échantillonné : théorème de Shannon	550
8	Spectre d'un signal « fenêtré »	551
8.1	Conséquence du fenêtrage pour un signal quelconque	551
8.2	Conséquence du fenêtrage pour un signal périodique	552
8.3	Exemple d'un signal analogique périodique	553
8.4	Exemple d'un signal analogique non périodique	554
9	Calcul approché du spectre	555
9.1	Problématique	555
9.2	Algorithme de transformation de Fourier rapide (fft)	556
9.3	Mise en œuvre pratique avec <i>Scilab</i>	557
9.4	Cas d'un signal analogique périodique	557
9.5	Cas d'un signal analogique non périodique	561
9.6	Gestion du domaine fréquentiel exploré et de la résolution fréquentielle	562
9.7	Exemples et mise en œuvre pratique	563

18	Formulaire de traitement du signal	571
1	Convolution et distributions	571
2	Transformations de Fourier	573
3	Développement en série de Fourier	574
4	Formules de Parseval	574
5	Transformation de Laplace	575
6	Transformation en Z	576
7	Analyse spectrale	577
19	De la transformation de Fourier aux transformations en ondelettes	579
1	Introduction	579
2	La transformation à fenêtre glissante et la transformation de Gabor	580
2.1	La transformation de Fourier à fenêtre glissante	580
2.2	La transformation de Gabor	582
3	La transformation en ondelettes continue	585
3.1	Une adaptation de la transformation de Gabor	585
3.2	Transformation en ondelettes continue et formule d'analyse	589
3.3	Formules de reconstruction ou de synthèse	590
3.4	Exemple : l'ondelette de Haar	590
20	Transformations en ondelettes discrètes	593
1	Des transformations en ondelettes continues aux transformations discrètes	593
2	Exemple de l'ondelette de Haar	595
2.1	L'ondelette de Haar dans un cas particulier	595
2.2	Décomposition en ondelettes de Haar	598
2.3	Relations à deux échelles	599
2.4	Interprétation en termes de filtres	602
2.5	Mise en œuvre pratique de la décomposition	603
2.6	Interprétation matricielle de la transformation	606
3	Analyse multi-résolution et ondelettes orthogonales	610
3.1	Analyse multi-résolution de L^2	610
3.2	Espaces d'approximation et fonction d'échelle	610
3.3	Ondelette orthogonale et espaces de détail	610
3.4	Décomposition en ondelettes	611
3.5	Interprétation géométrique	612
3.6	Relations à deux échelles	612
4	Décomposition et reconstruction d'un signal	613
4.1	Décomposition d'un signal	613
4.2	Reconstruction d'un signal	615
4.3	Interprétation en termes de filtres	615
5	Ondelettes orthogonales	618
5.1	Un choix pléthorique	618
5.2	Quelques critères caractérisant une ondelette	618
5.3	Deux grandes familles d'ondelettes	618
6	Ondelettes biorthogonales	621
7	Algorithme pyramidal et mise en œuvre pratique	622

7.1	Généralités et illustration	622
7.2	Le problème du calcul sur des suites finies	623
8	Mise en œuvre pratique avec Scilab	624
8.1	Les fonctions <code>wavedec</code> et <code>waverec</code>	624
8.2	Les fonctions <code>dwt</code> et <code>idwt</code>	626
9	Applications	627
9.1	Panorama de quelques applications	627
9.2	Les évolutions des ondelettes	628
9.3	Application au « débruitage » d'un signal mono-dimensionnel	629
9.4	Application à la détection de singularités	631
9.5	Application à la compression de données	632
21	Notions de traitement élémentaire des images	635
1	Généralités sur les images	635
1.1	Description mathématique des images	635
1.2	Utilisation du logiciel <i>Scilab</i> pour manipuler des images	635
2	Transformation en ondelettes d'une image	637
2.1	Adaptation aux image	637
2.2	Interprétation matricielle pour l'ondelette de Haar	639
3	Utilisation du logiciel <i>Scilab</i>	641
3.1	Décomposition en ondelettes sur un niveau puis reconstruction	642
3.2	Décomposition en ondelettes multi-niveaux puis reconstruction	644
4	Application à la compression des images	648
4.1	Principe de la compression par seuillage	648
4.2	Exemple de mise en œuvre de compression par seuillage	648
4.3	Comparaison de plusieurs ondelettes	649
5	Quelques transformations élémentaires d'images	650
5.1	Détection des contours : approche « gradient »	650
5.2	Détection des contours : approche alternative	654
5.3	Détection des contours : filtres de Sobel ou Prewitt	654
5.4	Suppression du bruit par moyenne locale	655
V	Analyse de données : régression linéaire et méthodes factorielles	659
22	Introduction	661
23	Régression linéaire	663
1	Régression linéaire simple	663
1.1	Notations et objectifs	663
1.2	La méthode des moindres carrés	666
1.3	Qualité de la régression	668
1.4	Interprétation	673
1.5	Aspects probabilistes du modèle de la régression linéaire simple	676
2	Régression linéaire multiple	677
2.1	Notations et objectifs	677
2.2	Coefficient de détermination ajusté	682

2.3	Exemple d'interprétation	684
24	A.C.P. : aspects théoriques	687
1	Approche intuitive de l'A.C.P. : objectifs et intérêt	687
2	Notations et conventions	692
2.1	Notations liées à l'A.C.P.	692
2.2	Notations liées aux calculs de statistique élémentaire	692
2.3	Inertie d'un nuage de points	693
2.4	Choix d'une origine : centrage des données	694
2.5	Le problème des unités : réduction des données	695
2.6	A.C.P. normée et matrice des corrélations	696
3	Projections du nuage des individus	698
3.1	Inertie totale du nuage des individus	698
3.2	Inertie selon un axe du nuage des individus	699
3.3	Inertie du nuage des individus par rapport à un plan	702
3.4	Axes et plans factoriels ou principaux	702
3.5	Inertie expliquée par rapport à un axe ou un plan	703
3.6	Contribution des axes à l'inertie	703
3.7	Projections du nuage des individus	703
3.8	Qualités de représentation des projections	704
3.9	Contributions d'un individu à la formation d'un axe factoriel	707
4	Projections du nuage des variables	709
4.1	Distance entre variables	709
4.2	Conséquence de la réduction sur les variables	710
4.3	Lien entre la proximité géométrique et la corrélation	710
4.4	Projections du nuage des variables	711
4.5	Définition des composantes principales	712
25	Analyse en composantes principales	713
1	Conseils généraux pour l'interprétation	713
1.1	Nombres de plans factoriels à étudier	713
1.2	Les variables et l'effet taille	714
1.3	Les individus	715
1.4	Individus et variables supplémentaires	717
2	Étude d'un exemple	717
2.1	Les données	717
2.2	Les valeurs propres et le choix du nombre d'axe factoriel	718
2.3	Études des variables et des composantes principales	720
2.4	Étude des individus	723
26	Analyse factorielle des correspondances	727
1	Introduction	727
1.1	Les données et le champ d'application	727
1.2	Le test d'indépendance	728
2	Aspects théoriques	731
2.1	La transformation des données	732
2.2	Interprétation géométrique et métrique utilisée	732

2.3	Le rôle de l'A.C.P	734
3	Aspects pratiques : aide à l'interprétation	735
3.1	Généralités	735
3.2	Les représentations graphiques	736
3.3	Les valeurs propres	737
3.4	Les contributions et les \cos^2	737
3.5	Interprétation des proximités	738
4	Exemple	739
4.1	Les données et le contexte	739
4.2	Le test d'indépendance	740
4.3	Les valeurs propres et le nombre d'axes factoriels	741
4.4	Les qualités de représentation et les contributions relatives	741
4.5	Les représentations graphiques	741
27	Analyse des correspondances multiples	745
1	Introduction, les données et le champ d'application	745
2	Quelques aspects théoriques	746
2.1	La transformation des données	746
2.2	Le rôle de l'analyse factorielle des correspondances	748
3	Aspects pratiques : aide à l'interprétation	748
3.1	Généralités	748
3.2	Inertie du nuage des points colonnes (les modalités)	748
3.3	Les valeurs propres	749
3.4	Représentations simultanées des modalités et des individus	749
4	Exemple	750
4.1	Les données et le contexte	750
4.2	Les valeurs propres et le nombre d'axes factoriels	750
4.3	Les qualités de représentation et les contributions relatives	751
4.4	Étude du premier plan factoriel	753
VI	Annexes et bibliographie	759
A	Notions de calcul différentiel	761
1	Notions de calcul différentiel pour les champs scalaires	761
1.1	Champ scalaire	761
1.2	Développement limité à l'ordre 1	762
1.3	Dérivées partielles premières	764
1.4	Fonctions de classe \mathcal{C}^1	765
1.5	Dérivées partielles secondes	765
1.6	Fonctions de classe \mathcal{C}^2	766
1.7	Théorème de Schwarz	766
1.8	Plan tangent	766
1.9	Gradient d'un champ scalaire	766
2	Divergence et rotationnel d'un champ vectoriel	770
2.1	Champ vectoriel	770
2.2	Divergence d'un champ de vecteurs	770

2.3	Rotationnel d'un champ vectoriel	770
3	Normale à un domaine et dérivée normale	771
4	Théorème de Green-Ostrogradski ou formule de la divergence	772
5	Opérateurs différentiels	773
6	Une formule d'intégration issue de la formule de la divergence	774
B	Espaces fonctionnels	775
1	Espace de fonctions à décroissance rapide, à croissance lente	775
1.1	Espace de fonctions à <i>décroissance rapide</i>	775
1.2	Espaces de fonctions à <i>croissance lente</i>	776
2	Espaces de fonctions régulières au sens classique	776
2.1	Espaces de classe \mathcal{C}^n et \mathcal{C}^∞	776
2.2	Inclusions entre les espaces \mathcal{C}^k	776
2.3	Espace des fonctions test \mathcal{D} et espace de Schwartz \mathcal{S}	776
2.4	Espace des fonctions test \mathcal{D}	777
2.5	Espace de Schwartz \mathcal{S}	777
3	Espaces de fonctions a priori sans régularité	778
3.1	Introduction	778
3.2	Fonctions intégrables, localement intégrables et de carré intégrable	779
3.3	Fonctions égales <i>presque partout</i>	779
3.4	Espaces de Lebesgue	780
3.5	Exemple de fonctions de L^1 , L^1_{loc} et L^2	781
3.6	Lien entre les éléments des espaces $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$	781
4	Espaces de fonctions régulières au sens faible	782
4.1	Dérivation au sens faible	782
4.2	Digression historique	783
4.3	Espaces de Sobolev	783
C	Espaces euclidiens	787
1	Produit scalaire	788
1.1	Définition	788
1.2	Produits scalaires canoniques sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	788
1.3	Autres produits scalaires sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	789
2	Norme euclidienne	789
3	Distances	790
4	Angle orienté entre deux vecteurs non nuls	791
5	Projection sur une droite vectorielle	791
D	Structure hilbertienne	793
1	Espace vectoriel de Hilbert	793
1.1	Complétude	793
1.2	Définition d'un espace de Hilbert	794
1.3	Base hilbertienne	794
2	Espaces de Hilbert utiles	794
3	Espaces de Lebesgue et fonctions égales <i>presque partout</i>	796

E	Convolution	797
1	Convolution des suites	797
1.1	Définition	797
1.2	Propriétés élémentaires	797
1.3	Quelques conditions d'existence	798
1.4	Expression du produit de deux séries numériques	798
2	Convolution des fonctions	798
2.1	Définition	798
2.2	Exemple	799
2.3	Propriétés élémentaires	800
2.4	Quelques conditions suffisantes d'existence	801
2.5	Expression du produit de deux intégrales	802
F	Principe des travaux virtuels	803
G	Formule d'inversion pour la transformation de Fourier	805
	Bibliographie	809
	Index	812