

MINISTERE AUX UNIVERSITES ET DE LA RECHERCHE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'AERONAUTIQUE

Thèse de Magister

Spécialité : Aéronautique

Option : Aérodynamique

**DETERMINATION NUMERIQUE DES COEFFICIENTS  
 AERODYNAMIQUES GENERALISES HARMONIQUES  
 DES SURFACES PORTANTES NON-PLANES  
 ET EN INTERFERENCES**

Par

Badereddine Aimad Eddine

Présenté devant le jury constitué de :

- Pr. B. Merzoug (Professeur, U. de Annaba)..... Président
- Dr. A. Souahi (Maître de conférence, U. Blida)..... Rapporteur
- Dr. A. Hammour (Maître de conférence, U. Blida)..... Examineur
- Dr. N. Ait-Messaoudène (Maître de conférence, U. Blida).. Examineur
- Dr. B. Boumeddène (Chargé de cours, U. Blida)..... Examineur

Blida

Mai 1995

**ALGERIE**

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements à:

- Mon promoteur, Monsieur A. Souahi, maître de conférence à l'institut de génie mécanique pour ses judicieux conseils et son aide continue.
- Monsieur B. Merzoug, professeur à l'institut de génie mécanique de l'université de Annaba d'avoir accepté de présider le jury.
- Messieurs, A. Hamour, B. Boumeddane et N. Ait-Messaoudene qui ont accepté d'être membres de Jury.

## SOMMAIRE

Les matrices des coefficients des forces aérodynamiques généralisées de l'équation du flottement sont déterminées à partir du modèle d'écoulement potentiel instationnaire linéaire. Le problème aux limites est transformé en une équation intégrale en utilisant une distribution de doublets. L'intégrale est elle-même déterminée par l'intermédiaire de la méthode de la fonction Kernel et aussi au moyen de la "D.L.M" (Doublet Lattice Method).

Les mérites et/ou les limitations de chaque méthode sont présentés et l'application à différentes voilures - effilées et sans effilement, avec et sans flèches - vibrant suivant la somme de plusieurs modes propres donne des résultats numériques qui sont comparables entre eux et aussi à ceux publiés par d'autres auteurs.

# TABLE DES MATIERES

|  |      |
|--|------|
| REMERCIEMENTS.....   | i    |
| SOMMAIRE.....  | ii   |
| TABLE DES MATIERES.....  | iii  |
| LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX.....   | v    |
| LISTE DES SYMBOLES.....  | viii |
| INTRODUCTION.....  | 1    |
| I. GENERALITES.....  | 3    |
| I.1 Interactions aeroélastiques.....   | 3    |
| I.2 Classification des problèmes aérodynamiques<br>instationnaire.....             | 4    |
| I.3 Types de flottement.....   | 6    |
| I.4 Equation générale du flottement.....   | 7    |
| I.5 Forces aérodynamiques généralisées.....  | 10   |
| II MODELISATION DES ECOULEMENTS INSTATIONNAIRES ET<br>METHODES DE RESOLUTIONS..... | 17   |
| II.1 Principaux modèles aérodynamiques.....  | 17   |
| II.2 Equations fondamentales régissant les<br>écoulements potentiels.....          | 21   |
| II.3 Modèle linéaire de l'écoulement potentiel<br>autour des voilures.....         | 25   |
| II.4 Méthodes de résolutions.....  | 28   |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| III   | DECOMPOSITIONS LINEAIRES ET EQUATION INTEGRALE.....                     | 31  |
| III.1 | Decomposition en problemes d'epaisseur et portant.....                  | 31  |
| III.2 | Modele specifique au probleme de flottement.....                        | 37  |
| III.3 | Equation integrale.....   | 41  |
| IV    | METHODE DE LA FONCTION KERNEL.....                                      | 46  |
| IV.1  | Approximation de la distribution de charge.....                         | 46  |
| IV.2  | Methode de collocation.....   | 49  |
| IV.3  | Methode variationnelle.....   | 52  |
| V     | METHODE DES PANNEAUX "D-L-M".....                                       | 50  |
| V.1   | Formulation mathematique.....   | 50  |
| V.2   | Techniques de resolutions.....  | 59  |
| V.3   | Amelioration apportee a la technique d'Albano et Rodden.....            | 64  |
| V.4   | Idealisation des configurations generales.....                          | 65  |
| V.5   | Comportement de la fonction Kernel.....                                 | 70  |
| VI    | RESULTATS ET DISCUSSIONS.....   | 73  |
| VI.1  | Ailes isolees.....  | 73  |
| VI.2  | Empennage en T.....   | 74  |
| VI.3  | Combinaison "aile et empennage horizontal".....                         | 76  |
|       | CONCLUSIONS.....  | 96  |
|       | REFERENCES.....   | 98  |
|       | ANNEXES.....  | 103 |
| A.    | Derivation des coefficients des forces aerodynamiques generalisees..... | 103 |
| B.    | Derivation de la fonction Kernel.....                                   | 105 |
| C.    | Calcul des integrales infinies $I_1$ et $I_2$ .....                     | 109 |
| D.    | Details concernant le programme de calcul.....                          | 111 |

## LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Fig. I.1:   | Types de problèmes aérodynamiques instationnaires.....   | 4  |
| Fig. I.2:   | Retard de la réponse dynamique.....  | 10 |
| Fig. I.3:   | Quatre positions d'un profil oscillant autour d'un axe fixe de tanguage en écoulement incompressible à faible fréquence réduite..... | 13 |
| Fig. II.1:  | Types de méthodes de résolutions.....  | 28 |
| Fig. III.1: | Coordonnées curvilignes.....   | 32 |
| Fig. III.2: | Décomposition du problème physique.....  | 33 |
| Fig. III.3: | Décomposition du problème portant.....   | 38 |
| Fig. III.4: | Types de modes naturels.....   | 39 |
| Fig. IV.1:  | Coordonnées paramétriques.....   | 47 |
| Fig. V.1:   | Discrétisation de la voilure.....  | 57 |
| Fig. V.2:   | Système de coordonnées locales et globales.....  | 60 |
| Fig. V.3:   | Système de numérotation des nœuds d'une région.....  | 66 |
| Fig. V.4:   | Région typique d'une surface portante discrétisée.....   | 67 |
| Fig. V.5:   | Sens positif de la charge $l$ et de la vitesse normale $\alpha$ en relation avec la topologie du panneau.....                        | 68 |
| Fig. V.6:   | Directions des charges positives associées aux topologies possible.....  | 69 |

|             |   |    |
|-------------|---|----|
| Fig. V.7:   | Comparaisons des fonctions Kernal plane et non plane pour $k=0$ et $M_w=0.6$ .....  | 77 |
| Fig. VI.1:  | Distribution de la différence des coefficients de pression sur l'aile en flèche et effilée en écoulement stationnaire.....          | 85 |
| Fig. VI.2:  | Distribution de charge (due au mode propre de lacet) sur le stabilisateur près de la jonction des deux surfaces (stationnaire)..... | 86 |
| Fig. VI.3:  | Distribution de charge (due au mode propre de lacet) sur la dérive près de la jonction des deux surfaces (stationnaire).....        | 86 |
| Fig. VI.4:  | Distribution de charge sur le stabilisateur due au mode propre de lacet suivant trois stations.....                                 | 87 |
| Fig. VI.5:  | Distribution de charge sur le stabilisateur due au mode propre latéral suivant trois stations.....                                  | 88 |
| Fig. VI.6:  | Distribution de charge sur le stabilisateur due au mode propre de roulis suivant trois stations.....                                | 89 |
| Fig. VI.7:  | Distribution de charge sur la dérive due au mode propre de lacet suivant trois stations.....  | 90 |
| Fig. VI.8:  | Distribution de charge sur la dérive due au mode propre latéral suivant trois stations.....   | 91 |
| Fig. VI.9:  | Distribution de charge sur la dérive due au mode propre de roulis suivant trois stations.....                                       | 92 |
| Fig. VI.10: | Aile en flèche et effilée.....  | 93 |

|             |  |     |
|-------------|--|-----|
| Fig. VI.11: | Aile rectangulaire d'allongement 2.....  | 93  |
| Fig. VI.12: | Empennage en T.....  | 94  |
| Fig. VI.13: | Combinaison "aile-empennage".....  | 95  |
| Fig. D.1:   | Organigramme simplifié du programme de calcul.....   | 112 |
| Tab.VI.1 :  | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de l'aile rectangulaire.....  | 79  |
| Tab. VI.2 : | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de l'empennage en T pour $\nu = 0$<br>(stationnaire).....   | 80  |
| Tab. VI.3 : | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de l'empennage en T pour<br>$\nu = 0.6$ et $M_\infty = 0.8$ .....   | 80  |
| Tab. VI.4 : | Effet de la discrétisation sur les<br>coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de l'empennage en T<br>pour $\nu = 0.6$ et $M_\infty = 0.8$ .....         | 81  |
| Tab. VI.5 : | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de la combinaison "aile-empennage"<br>disposés sur un même plan, $H/b = 0$<br>(pour deux modes propres).....    | 82  |
| Tab. VI.6 : | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de la combinaison "aile-empennage"<br>disposés sur deux plans parallèles décalés de<br>$H/b = 0.6$ .....        | 83  |
| Tab. VI.7 : | Coefficients des forces aérodynamiques<br>généralisées de la combinaison "aile-empennage"<br>disposés sur un même plan, $H/b = 0$<br>( pour quatre modes propres)..... | 84  |



## LISTE DES SYMBOLES

- $(u_1, u_2, u_3)$  : composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}$   
 $(u, v, w)$  : composantes du vecteur de perturbation  
 $c$  : vitesse du son  
 $P$  : pression de l'écoulement  
 $\rho$  : densité de l'écoulement  
 $M$  : nombre de Mach  
 $\bar{\phi}$  : potentiel des vitesses  
 $\varphi$  : potentiel des vitesses de perturbation  
 $\vec{\omega}$  : vorticité (nulle)  
 $C_p$  : coefficient de pression  
 $\Delta C_p$  : différence des coefficients de pression  
 $l$  : charge aérodynamique (égale à  $\overline{\Delta C_p} / 2$ )  
 $\begin{bmatrix} l \end{bmatrix}$  : matrice de charge aérodynamique  
 $Q_{qk}$  : coefficients des forces aérodynamiques généralisées  
 $\begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}$  : matrice des coefficients aérodynamiques généralisées  
 $b$  : longueur de référence  
 $\gamma$  : rapport de chaleur spécifique  
 $R$  : constante du gaz (l'air)  
 $\beta$  : facteur de compressibilité, indique aussi l'angle de flèche du panneau  
 $(x, y, z)$  : coordonnées cartésiennes  
 $(x, s, \zeta)$  : coordonnées curvilignes  
 $i$  : imaginaire ( $\sqrt{-1}$ )  
 $\theta$  : angle d'incidence  
 $\zeta_k$  : kème mode propre de vibration  
 $f_k$  : kème amplitude du mode propre  $k$  (adimensionnelle)  
 $W_n$  : vitesse normale à la surface portante  $S$   
 $\alpha$  : vitesse normale à la surface portante adimensionnelle  
 $\omega$  : fréquence circulaire  
 $\nu$  : fréquence réduite  
 $K$  : fonction Kernel  
 $r$  : rayon vecteur

S : surface portante (planon~~ne~~)

c : corde

s : semi-envergure

$\int$  : integrale singuliere

[ U ] : matrice des coefficients d'influence pour la methode de la fonction Kernel (collocation)

[  $\psi$  ] : matrice des coefficients d'influence pour la methode de la fonction Kernel (**variationnelle**)

[ D ] : matrice des coefficients d'influence pour la methode des panneaux

Nc : Nombre de panneaux selon la corde

Ns : Nombre de panneaux selon la semi-envergure

Re : reel

Im : imaginaire

| | : module d'une fonction complexe

$\angle$  : argument d'une fonction complexe

#### EXPOSANTS

s : stationnaire

— : amplitude d'une fonction sinusoidale

' : partie reelie d'une fonction complexe

" : partie imaginaire d'une fonction complexe

#### INDICES

u : extradados

l : intrados

m : cambrure

L : bord d'attaque

T : bord de fuite

p : nombre de modes propre de vibrations

k, q : indiquent les modes propres de vibrations

$\omega$  : indique les caracteristiques de l'ecoulement a l'infini

r, l et i : indices du panneau recepteur

s et j : indices du panneau emetteur

## INTRODUCTION

Le flottement est un problème de stabilité aéroélastique dynamique très redouté où la partie aérodynamique joue un rôle primordial. Parmi les différents types de flottements, nous allons nous intéresser tout particulièrement au flottement des modes couplés.

Le problème du flottement est régi par une équation matricielle à valeurs et vecteurs propres "aéroélastiques" complexes. Seule l'estimation des matrices des coefficients des forces aérodynamiques généralisés nous concerne. Le modèle aérodynamique évaluant ces matrices est régi par une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre dans l'espace et dans le temps qu'on se propose de résoudre par la méthode intégrale.

Dans le premier chapitre, et après avoir donné des généralités sur les interactions aéroélastiques, les problèmes d'aérodynamique instationnaire et les problèmes de flottement, une interprétation physique des phénomènes d'amortissement aérodynamiques faisant apparaître leurs origines et leurs effets sur la stabilité dynamique de la structure est présentée. A partir du principe des travaux et des forces virtuels et en tenant compte des phénomènes d'amortissement, la forme complexe des coefficients des forces aérodynamiques généralisés sont dérivés.

Dans le deuxième chapitre, les différents modèles aérodynamiques instationnaires sont décrits et limités pour des raisons d'efficacité à leurs domaines d'applications. Pour notre part, nous avons adopté le modèle des écoulements potentiels linéarisé largement suffisant pour le cas d'un écoulement entièrement subsonique et pour l'étude du flottement des modes couplés. Les avantages et les inconvénients des méthodes de résolutions sont indiquées dans ce même chapitre.

Vu l'emploi d'un modèle linéaire, le problème aérodynamique qui est une voilure en oscillation harmonique, peut être décomposé en divers problèmes aérodynamiques. Seul, le problème portant instationnaire nous conduit à la détermination des matrices aérodynamiques. En idéalisant la voilure et son sillage par des singularités du type "doublets", le problème aux limites a été transformé en une équation intégrale dont la charge aérodynamique est l'inconnue à déterminer en utilisant la condition sur la paroi. Ceci a fait l'objet du troisième chapitre.

L'équation intégrale a été résolue par l'intermédiaire de deux méthodes numériques différentes : la fonction Kernel et la méthode de panneaux ou "D-L-M". Dans la première méthode, la charge a été remplacée par une série à coefficients complexes constants qui deviennent alors les nouvelles inconnues. Pour cela, nous avons utilisé un code de calcul établi par Davies, limité cependant, pour le cas des ailes planes isolées. La méthode a été développée dans le quatrième chapitre.

La méthode des panneaux est une méthode discrète. Elle consiste à discrétiser la voilure en petites surfaces où la charge est supposée constante. Parmi les variétés de formulations de cette méthode, nous avons adopté la formulation d'Albano et Rodden, et c'est sur la base de cette formulation que nous avons établi un programme de calcul. Notre programme permet de traiter non seulement le cas des ailes planes isolées mais aussi le cas des ailes non planes et les interférences. Les détails concernant la méthode et le modèle de maillage ont été présentés dans le cinquième chapitre.

Enfin, les résultats obtenus ont été validés, aussi bien par le code de Davies que par d'autres auteurs ayant utilisé d'autres formulations. Cependant, il faut noter que pour le cas d'interférences, nous avons rencontré le problème de limitation de la mémoire du micro-ordinateur que nous avons pu surmonter grâce à l'utilisation d'une amélioration numérique efficace. Ce qui nous a permis d'obtenir de bons résultats avec une discrétisation relativement faible.

## CHAPITRE I

### GENERALITES

#### I.1 INTERACTIONS AEROELASTIQUES

L'aéroélasticité est une science aéronautique qui considère les interactions des forces aérodynamiques, élastiques et d'inertie et l'influence de ces interactions sur l'intégrité de la structure et la stabilité de l'avion.

Les problèmes aéroélastiques n'existeraient pas si les structures des avions étaient parfaitement rigides. Malheureusement, elles ne le seront jamais. Les phénomènes aéroélastiques peuvent s'expliquer par le fait que sous l'action des forces aérodynamiques, les déformations de la structure entraînent elles mêmes des changements dans la distribution des charges aérodynamiques. Ces changements de la distribution induisent eux-mêmes d'autres déformations. Au delà d'une certaine vitesse critique ou pression dynamique critique, il y a rupture de la structure.

Si on désigne par:

- "A" Les forces aérodynamiques extérieures
- "I" Les forces d'inertie
- "E" Les forces élastiques intérieures

alors, les phénomènes aéroélastiques peuvent être classés en quatre groupes suivant la combinaison de ces forces:

- E+I Domaine de vibration propre
- A+I Domaine de qualité de vol ( avion rigide )
- A+E Domaine de l'aéroélasticité statique
- A+E+I Domaine de l'aéroélasticité dynamique

A part le domaine de vibration propre, les forces aérodynamiques imposent les défis les plus importants surtout dans le cas de l'aéroélasticité dynamique.

## I.2 CLASSIFICATION DES PROBLEMES AERODYNAMIQUES INSTATIONNAIRES

Les problèmes d'aérodynamique instationnaire [1] peuvent être classés en trois groupes [Fig.I.1]: processus stationnaires, dépendance harmonique du temps et dépendance arbitraire.

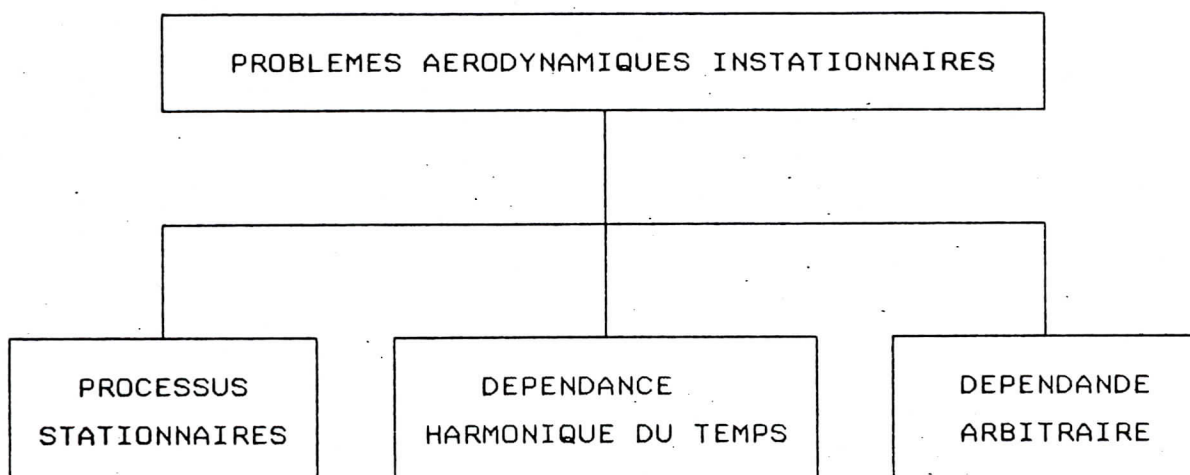


Fig.I.1 Types de problèmes aérodynamiques instationnaires

### I.2.1 Processus stationnaires

Dans cette classe les phénomènes aéroélastiques s'effectuent relativement lentement dans le temps de manière à ce que les forces d'inertie puissent être considérées comme négligeables. Tous les problèmes de ce type appartiennent donc au domaine de l'aéroélasticité statique (divergence, renversement de contrôle, efficacité des gouvernes, distribution de charge et effets aéroélastiques sur la stabilité statique).

Le calcul de stabilité de la boucle de retour des forces aérodynamiques engendrées par les déformations de la structure peut être effectué avec un modèle aérodynamique stationnaire.

### I.2.2 Dépendance harmonique du temps

Dans certains problèmes, les écoulements ont des formes harmoniques en fonction du temps et sont représentés, pour des raisons de calculs de stabilité aéroélastique dynamique, par une dépendance harmonique du temps.

En plus des forces élastiques et aérodynamiques, les forces d'inerties jouent un grand rôle dans la stabilité dynamique de la structure et ce en fonction des déphasages des forces aérodynamiques par rapport aux forces élastiques et d'inerties (flottement). Pour éviter ces problèmes, il est nécessaire de considérer la variation de la fréquence réduite, dans une plage appropriée, à l'intérieur du domaine de vol de l'engin.

Dans le cas où il s'agit d'un modèle aérodynamique linéarisé, comme dans notre cas, la nature harmonique de l'écoulement permet de simplifier grandement le problème par un passage de la résolution du domaine temporel au domaine fréquentiel.

### I.2.3 Dépendance arbitraire du temps

Ce sont les problèmes de l'aéroélasticité dynamique qui évoluent d'une façon arbitraire dans le temps, comme dans l'étude des effets aéroélastiques sur la stabilité dynamique et les réponses dynamiques (violente manoeuvre de l'avion, déflexion brusque des surfaces de contrôles, charges de rafales...).

### I.3 TYPES DE FLOTTEMENT

Les forces aérodynamiques dans le cas du flottement, représentant la boucle de retour, peuvent être considérées comme ayant une dépendance harmonique du temps avec des déphasages caractérisant l'amortissement aérodynamique de la vibration. Au delà d'une certaine vitesse appelée **vitesse critique de flottement**, la boucle de retour peut rendre le système instable. Elle se traduit alors par un mouvement vibratoire divergent de la structure qui peut aller jusqu'à la rupture de cette dernière.

Le flottement peut se manifester sous l'une des formes suivantes [2]:

#### I.3.1 Flottement à fréquence nulle

Le phénomène de divergence est un problème de stabilité statique où les effets d'inertie sont négligeables et ainsi est parfois dénommé flottement à fréquence nulle.

#### I.3.2 Flottement de panneau

Généralement, ce problème apparait en écoulement supersonique, l'interaction des forces aérodynamiques instationnaires avec la vibration d'un panneau dans le sens normal à sa surface, peut entraîner la perforation de la structure.

#### I.3.3 Flottement de décrochage

Ce phénomène se produit à grand angle d'attaque. Il est la conséquence de l'interaction entre la torsion de l'aile et le décrochage de l'écoulement.



### I.3.4 Flottement des modes couplés

Ce phénomène est le plus redouté par les aéroélasticiens à cause de ses conséquences néfastes sur la structure. Le problème s'explique par le couplage de deux ou plusieurs modes propres, vibrant à des fréquences très proches et en déphasage.

Ce type de flottement est celui qui nous intéresse dans cette étude.

### I.4 EQUATION GENERALE DU FLOTTEMENT

Le phénomène de flottement peut être traduit mathématiquement par une équation matricielle à valeurs et vecteurs propres aéroélastiques complexes. Elle est dérivée à partir du principe de Lagrange et du principe de superposition des modes propres naturels avec une matrice modale tronquée [3].

Pour un système non conservatif discret d'ordre  $n$ , les équations différentielles de Lagrange prennent la forme suivante:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] - \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \right] + \left[ \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k} \right] = Q_k \quad ; \quad k=1, n \quad (I-1)$$

avec :

$$L = T - \Pi_p$$

$$\dot{q}_k = (\partial q_k / \partial t)$$

$L$  : fonction de Lagrange

$T$  : énergie cinétique du système

$\Pi_p$  : énergie potentielle du système

$R$  : énergie de dissipation (amortissement structurale)

$Q_k$  :  $k^{\text{ème}}$  force aérodynamique généralisée

$q_k$  :  $k^{\text{ème}}$  coordonnée généralisée

Les déformations et/ou mouvements vibratoires de la voilure sont exprimés comme une combinaison linéaire d'un nombre limité  $p$  de ces modes propres naturels et/ou des modes propres libres de l'engin.

Finalement les différenciations des expressions finales de l'équation de Lagrange et de la dissipation donnent l'équation générale du mouvement.

$$\left( \left[ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \end{matrix} \right] \left\{ \ddot{q} \right\} + \left[ \begin{matrix} \omega_N^2 \\ \vdots \end{matrix} \right] \left\{ q \right\} + \frac{g}{\omega} \left[ \begin{matrix} \omega_N^2 \\ \vdots \end{matrix} \right] \left\{ \dot{q} \right\} \right) b^2 = \left\{ Q \right\} \quad (\text{I-2})$$

où :

$\left[ \begin{matrix} \omega_N^2 \\ \vdots \end{matrix} \right]$  : matrice spectrale; matrice carrée diagonale ( $p \times p$ ) des fréquences naturelles

$\left\{ Q \right\}$  : vecteur groupant les  $p$  forces aérodynamiques généralisées

Pour un mouvement sinusoïdal on prend:

$$\left\{ q \right\} = \left\{ \overline{q} \right\} e^{i\omega t} \quad (\text{I-3})$$

avec:

$\left\{ \overline{q} \right\}$  : vecteur des coordonnées généralisées

$\omega$  : fréquence circulaire de l'oscillation harmonique

L'une des formes de l'équation du flottement est donc:

$$\left( \left[ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \end{matrix} \right] - \Omega \left[ \begin{matrix} \omega_N^2 \\ \vdots \end{matrix} \right] + \rho \frac{b^3}{v^2} \left[ \begin{matrix} Q \\ \vdots \end{matrix} \right] \right) \left\{ \overline{q} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (\text{I-4})$$

avec :

$$\Omega = \frac{1+ig}{\omega^2}$$

$$\nu = \frac{\omega b}{V_\infty}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$\Omega$  : valeur propre aéroélastique complexe

$g$  : facteur d'amortissement structural

$\omega$  : fréquence circulaire de l'oscillation harmonique

$\rho$  : masse volumique de l'écoulement libre (infini amont)

$\nu$  : fréquence réduite ou paramètre de fréquence

$V_\infty$  : vitesse de l'écoulement libre (non perturbé)

$[Q]$  : matrice des coefficients aérodynamiques généralisés

Notre étude est consacré à l'évaluation des coefficients des forces aérodynamiques généralisées.

## I.5 FORCES AERODYNAMIQUES GENERALISEES

### I.5.1 Phénomène d'amortissement

Pour une aile immergée dans un écoulement instationnaire causé par une variation de l'incidence de l'aile, la réponse de l'écoulement apparaît toujours avec un certain retard. Pour visualiser ces phénomènes de retard, considérons une aile bidimensionnelle [4] soumise à une variation d'incidence en échelon [Fig.I.2]:

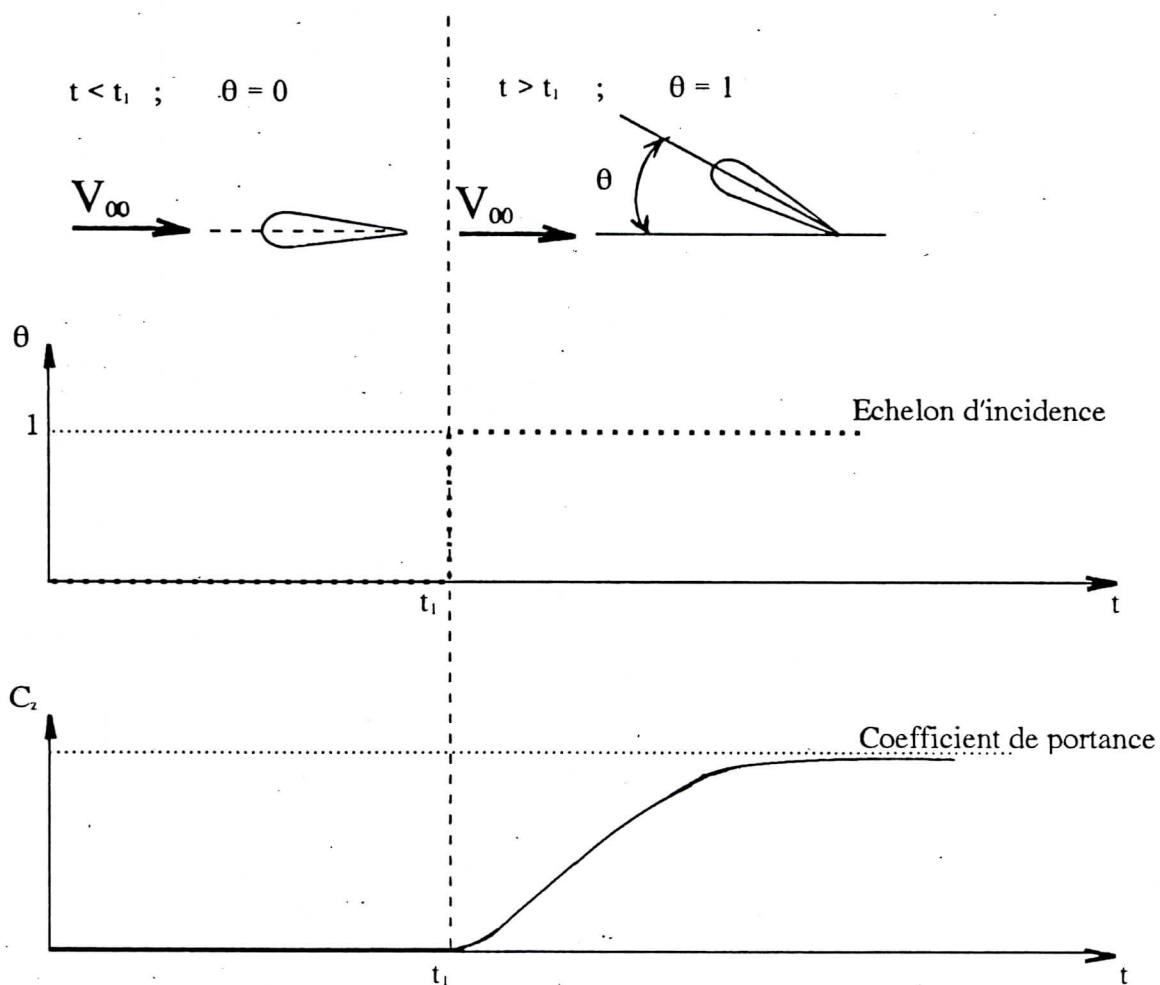


Fig.I.2 Retard de la réponse aérodynamique

On remarque, comme le montre la figure ci-dessus, que si l'on effectue un échelon d'incidence, la portance n'atteint pas instantanément la valeur stationnaire mais y tend progressivement.

Dans le cas d'une variation harmonique de l'entrée  $\vartheta$ , ce retard est représenté par un déphasage entre l'entrée

$$\vartheta(t) = \overline{\vartheta} e^{i\omega t} \quad (I-5)$$

et la sortie

$$\Delta P(x,t) = \Delta P(x) e^{i(\omega t + \varphi(x))} \quad (I-6)$$

où:

$$\Delta P(x,t) = (\Delta P_1(x) + i \Delta P_2(x)) e^{i\omega t} \quad (I-7)$$

avec:

$\Delta P(x,t)$  : la variation de pression qui entraîne la portance instationnaire

$\varphi(x)$  : déphasage entre l'entrée et la sortie

on constate que les coefficients aérodynamiques deviennent complexes et dépendent de la pulsation et de la position sur l'aile. La matrice des coefficients aérodynamiques généralisés sera exprimée sous la forme:

$$\begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q' \end{bmatrix} + i\nu \begin{bmatrix} Q'' \end{bmatrix} \quad (I-8)$$

où :

$[Q']$  : matrice de rigidité aérodynamique ayant pour éléments les coefficients réels des forces aérodynamiques

$[Q'']$  : matrice d'amortissement aérodynamique ayant pour éléments les coefficients imaginaires des forces aérodynamiques généralisées par unité de fréquence réduite.

Le phénomène d'amortissement est expliqué par l'introduction des effets de mémoire pendant l'écoulement instationnaire, cet effet provient de la vitesse induite par le sillage instationnaire. Pour plus de détail [5], nous allons considérer une aile bidimensionnelle en oscillation de tanguage harmonique dans un écoulement incompressible et nous allons prendre quatre positions remarquables de cette aile [Fig.I.3].

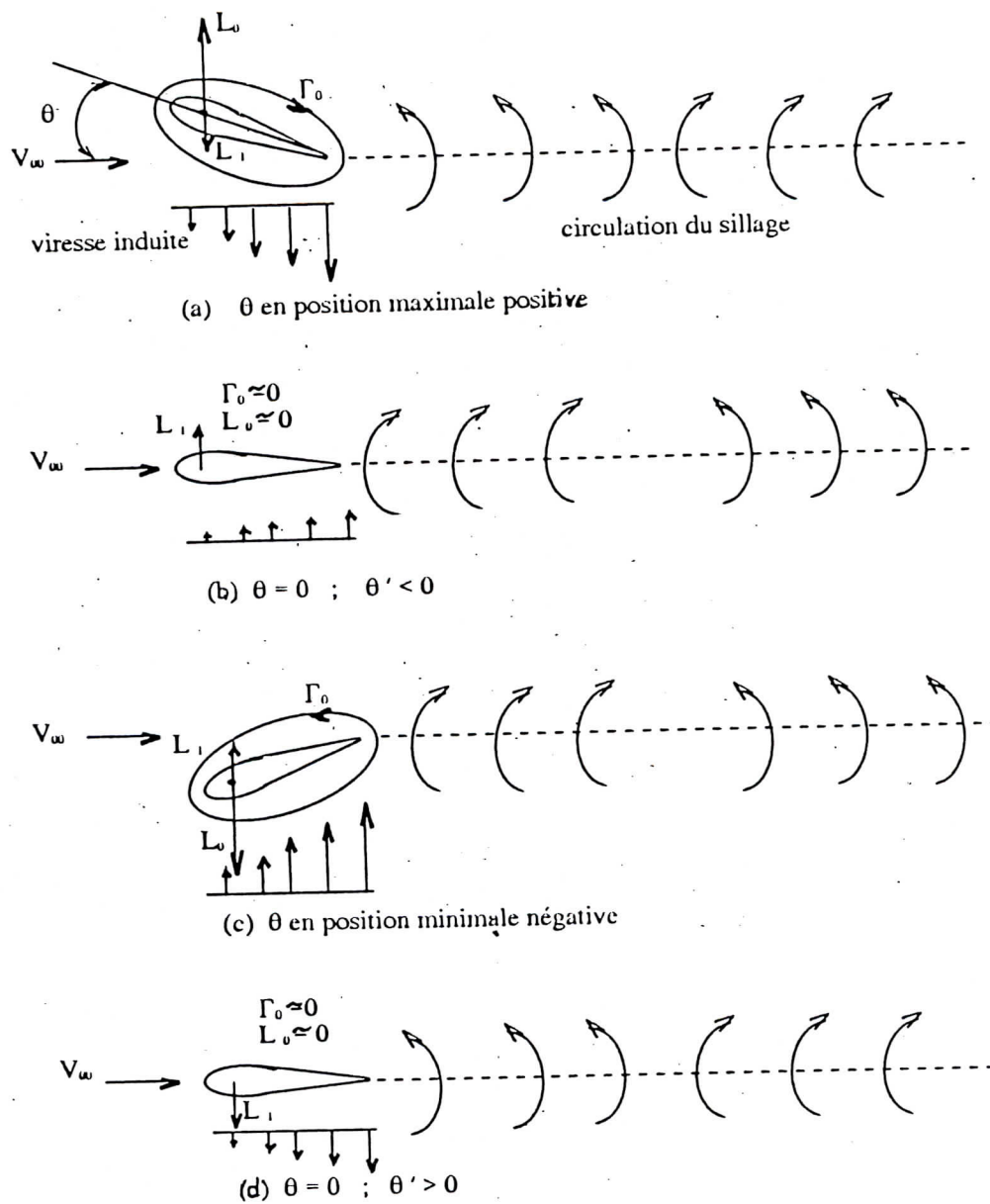


Fig. I.3 Quatre positions d'un profil oscillant autour d'un axe fixe de tangage en écoulement incompressible à faible fréquence réduite [5]

où:

$\vartheta$  : angle d'incidence

$\dot{\vartheta}$  : vitesse angulaire

$\Gamma_0$  : circulation entourant le profil

$L_0$  : la portance

$L_1$  : portance induite par le sillage

Considérons une faible variation de l'angle d'incidence et une faible fréquence réduite pour les quatre positions déphasées de 90 degrés l'une par-rapport à l'autre.

Notons que:

- La portance principale  $L_0$  due à l'incrémentatation de l'angle d'attaque est en phase avec  $\vartheta$  et s'applique au " 1/4 " de la corde (position du centre aérodynamique). Cette portance est associée avec sa circulation  $\Gamma_0$  entourant l'aile dont le sens est indiqué dans chaque position de la figure.

- Puisque  $\Gamma_0$  varie avec le temps et comme la circulation totale doit rester constante, ses altérations sont réfléchies par une apparition de contrecirculations continues de même intensités. Ces contrecirculations sont créées à partir du bord de fuite et s'élancent en aval avec la vitesse  $V_\infty$  à l'infini.

- Des angles d'attaque (ou vitesses) induits le long du profil par les circulations du sillage, causent une charge aérodynamique de faible fréquence et déphasée par rapport à l'angle  $\vartheta$  ce qui justifie l'apparition d'une portance additionnelle  $L_1$  s'appliquant au " 1/4 " de la corde. Le moment due à la portance additionnelle peut être dans le sens contraire avec  $\vartheta$  [Fig.I.3], comme il peut être dans le même sens, selon le cas, il ya un transfert d'énergie de l'aile vers l'air ou inversement, on parle alors d'amortissement positif ou d'amortissement négatif.

Le problème de flottement se pose lorsque le transfert d'énergie se fait de l'air vers la structure. le mouvement de la structure devient alors instable et se manifeste par un amortissement négatif dans l'équation I-4 du flottement.



### I.5.2 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées

Comme il était déjà supposé [§.I.4], la structure se déplace en combinaison linéaire d'un nombre limité de modes propres. Les déplacements normaux de chaque point  $P(x,y,z)$  de la structure au temps  $t$  peut être écrite de la manière suivante:

$$\zeta(x,y,z,t) = b \sum_{k=1}^p f_k(x,y,z) q_k(t) \quad (I-9)$$

A titre indicatif, il faut noter que, pour plusieurs raisons, le maillage du modèle structural est différent du maillage du modèle aérodynamique. Il est donc nécessaire d'interpoler et/ou d'extrapoler les modes propres définis aux noeuds structuraux en déplacements des noeuds aérodynamiques. L'opération inverse est effectuée si les charges aérodynamiques doivent être exprimées aux niveaux des noeuds structuraux.

Pour pouvoir utiliser simultanément les logiciels d'aérodynamique et de structure, on doit développer un autre logiciel d'interpolation [6].

Les éléments des matrices aérodynamiques ou coefficients des forces aérodynamiques généralisées ont comme expression [annexe A]:

$$Q_{qk} = \frac{1}{b^2} \int \int_S f_q(x,y,z) l_k(x,y,z) dS \quad ; \quad q,k = 1,p \quad (I-10)$$

où :

$\int \int_S$  : intégration sur la surface  $S$  de la voilure

$l_k(x,y,z)$  : charge aérodynamique adimensionnelle au point  $P(x,y,z)$

## CHAPITRE II

### MODELISATION DES ECOULEMENTS INSTATIONNAIRES ET METHODES DE RESOLUTIONS

Les principaux modèles aérodynamiques sont présentés en faisant apparaître leurs avantages et leurs inconvénients. Pour notre cas, qui est une voilure en oscillation harmonique, nous allons adopter le modèle des écoulements potentiels linéarisé. De plus, nous allons donner un aperçu général sur les différentes méthodes de résolutions en indiquant leurs domaines d'applications.

#### II.1 PRINCIPAUX MODELES AERODYNAMIQUES

Les problèmes de la mécanique des fluides et en particulier les problèmes d'aérodynamique, sont régis par des équations aux dérivées partielles fortement non linéaires (équation de continuité, équations du mouvement, équation d'énergie) et par une équation d'état. Heureusement, pour un problème réel donné, les paramètres physiques n'ont pas le même degré d'importance. Il est donc souvent raisonnable d'adopter des hypothèses qui simplifient grandement la nature des équations à résoudre et, par conséquent, réduisent le coût en temps de calcul sur ordinateur sans pour autant diminuer sensiblement la précision des résultats.

Une première hypothèse est qu'en aérodynamique les forces de volumes peuvent être considérées comme négligeables. De plus, le champ d'écoulement est divisé pendant la modélisation en deux zones [7]:

- une zone d'écoulement non visqueux, où l'effet de la viscosité est négligeable
- une zone d'écoulement visqueux, où les effets de la viscosité ne peuvent pas être négligeables, tels que dans les couches limites et près des sillages

L'utilisation de la méthode des zones est avantageuse pour réduire la complexité des équations exigées pour chaque zone et l'espace mémoire nécessaire à toute la procédure [8].

### II.1.1 Modélisation des écoulements visqueux

La modélisation des écoulements visqueux apporte, d'une part, certaines corrections aux résultats obtenus quand les écoulements sont supposés simples, et est, d'autre part, nécessaire pour les cas d'écoulements complexes où l'hypothèse d'écoulements non visqueux est fortement erronée. Naturellement elle est le seul moyen pour la détermination des traînées de frottements. Les quelques phénomènes suivants sont des exemples où l'hypothèse d'écoulements non visqueux donne des résultats insuffisants:

Dans les cas de surfaces de contrôles (ailerons, gouvernes...), les corrections apportées par les effets de la viscosité sont nécessaires pour une bonne estimation des moments de charnières même dans les cas d'écoulements complètement subsoniques ou supersoniques [9].

En écoulement transonique, les effets de la viscosité peuvent altérer la position et l'intensité de l'onde de choc. Ces changements de distribution de pressions autour de la surface de l'aile entraînent des influences sur les caractéristiques aéroélastiques de cette dernière [10].

Dans le cas de fortes turbulences, on rencontre souvent les phénomènes de Buffeting sur l'aile ou plus fréquemment sur les empennages horizontales et les surfaces de contrôles, de plus ces phénomènes peuvent apparaître dans le cas de déplacements d'ondes de choc qui poussent les surfaces de contrôles à vibrer en provoquant l'instabilité "buzz transonique". Ces phénomènes nécessitent l'utilisation des modèles d'écoulements visqueux et parfois très compliqués [11].

En aéronautique, la nature des couches limites est tellement turbulente, à un nombre de Reynolds élevé, que l'aspect laminaire se limite aux régions près des bords d'attaques [12]. Dans ce cas, le passage à la modélisation de la turbulence est indispensable.

Les modèles à zéro équation de transport sont les plus utilisés de la turbulence. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse de la longueur de mélange pour représenter la viscosité tourbillonnaire, tels que les modèles de Prandtl et Von-Karman [13].

Les modèles à une et à deux équations de transports, tels que les modèles de "Bradshaw" et " $k-\epsilon$ ", et les modèles algébriques qui sont tous basés sur les équations de Navier-Stokes moyennées sur un long intervalle de temps comparé aux fluctuations turbulentes, ont rendu possible l'étude numérique de certains problèmes bidimensionnels, le buffeting par exemple [14], où ont été obtenus d'excellents résultats.

Bien que ces modèles présentent un problème sérieux au point de vue du coût de calcul, ils sont les seuls moyens de simulation numérique de certains problèmes aérodynamiques et aéroélastiques [15].

### II.1.2 Modélisation des écoulements non visqueux

La modélisation de la zone non visqueuse est accomplie en négligeant les termes visqueux dans les équations de Navier-Stokes. Une autre simplification souvent apportée aux équations de base régissant les écoulements autour d'ailes et de fuselages est la négligence des termes de transfert de chaleur (modèle d'Euler et encore plus simplifié celui des écoulements potentiels).

- modèle d'Euler

Un arrangement est apporté aux équations classiques de continuité, de mouvements et d'énergie de manière à obtenir le modèle écrit sous la forme conservative suivante [16]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-1})$$

où H, E, F et G représentent les quantités correspondantes aux cinq équations de bases:

$$\begin{aligned} H &= (\rho_{\infty}, \rho_{\infty} u_1, \rho_{\infty} u_2, \rho_{\infty} u_3, \rho_{\infty} e_t)^t \\ E &= (\rho_{\infty} u_1, p + \rho_{\infty} u_1^2, \rho_{\infty} u_1 u_2, \rho_{\infty} u_1 u_3, (\rho_{\infty} e_t + p) u_1)^t \\ F &= (\rho_{\infty} u_2, \rho_{\infty} u_2 u_1, p + \rho_{\infty} u_2^2, \rho_{\infty} u_2 u_3, (\rho_{\infty} e_t + p) u_2)^t \\ G &= (\rho_{\infty} u_3, \rho_{\infty} u_3 u_1, \rho_{\infty} u_3 u_2, p + \rho_{\infty} u_3^2, (\rho_{\infty} e_t + p) u_3)^t \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

Ces équations donnent de bon résultats pour un maillage raffiné des champs d'écoulements tridimensionnels [17]. Cependant, le coût de calcul reste assez élevé et leur application est généralement réservée aux cas bidimensionnels [18].

- modèle des écoulements potentiels

Ce modèle a connu une grande application aussi bien pour les écoulements subsoniques [19] et supersoniques [20] que pour les écoulements transoniques tridimensionnels [21]. Cet avantage est due à une simplicité relative des algorithmes de résolutions et de l'économie en temps de calcul d'une part, et à la précision plus que satisfaisante des résultats obtenus comparés à ceux obtenus par le modèle d'Euler d'autre part.

En plus des hypothèses citées auparavant, le modèle potentiel, ou isentropique, est basé sur l'hypothèse supplémentaire des écoulements irrotationnels qui entraînent l'existence d'une fonction potentielle  $\Phi(x,y,z,t)$ . Les équations de bases seront condensées alors en une seule équation dite équation du potentiel de vitesse.

Dans sa forme linéaire, l'équation du potentiel de vitesse prend la forme classique suivante:

$$(1-M_{\infty}^2)\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \frac{2M_{\infty}}{c_{\infty}}\Phi_{xt} - \frac{1}{c_{\infty}^2}\Phi_{tt} = 0 \quad (\text{II-3})$$

où  $M_{\infty}$  et  $c_{\infty}$  sont respectivement le nombre de Mach et la célérité du son de l'écoulement libre.

L'avantage de la forme linéaire permet de représenter la solution totale par une superposition de solutions particulières. Dans le cadre de notre projet nous nous intéressons à la solution particulière permettant de déterminer la matrice des coefficients des forces aérodynamique généralisées.

## II.2 EQUATIONS FONDAMENTALES REGISSANT LES ECOULEMENTS POTENTIELS

En vue de l'obtention de la simplicité et la condensation de la procédure, nous allons utiliser la représentation vectorielle pendant la formulation mathématique des écoulements potentiels [22].

En effet, l'hypothèse de l'existence d'une fonction potentielle  $\Phi(x,y,z,t)$ , ou tout simplement  $\Phi$ , permet d'écrire:

$$\vec{v} = \nabla\Phi \quad (\text{II-4})$$

En utilisant l'équation de continuité,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II-5})$$

et d'après l'équation II-4, nous pouvons écrire:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla^2 \Phi \quad (\text{II-6})$$

L'équation de continuité devient donc:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{II-7})$$

En utilisant l'équation de la quantité de mouvement,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = - \nabla \int \frac{dP}{\rho} \quad (\text{II-8})$$

la dérivée totale du membre de gauche de l'équation II-8 peut être développé en:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) - \vec{V} \times \vec{\omega} \quad (\text{II-9})$$

L'hypothèse de l'écoulement irrotationnel se traduit par l'annulation de la vorticité  $\vec{\omega}$ . De plus, par l'intermédiaire de l'équation II-4, la dérivée locale du vecteur vitesse prend la forme suivante:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (\text{II-10})$$

en tenant compte des équations II-8, II-9 et II-10, l'équation de la quantité de mouvement prend la forme:

$$\nabla \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} + \int \frac{dP}{\rho} \right) = 0 \quad (\text{II-11})$$

En intégrant l'équation ci-dessus entre deux positions en prenant comme position initiale les conditions de l'écoulement libre, on peut déduire l'équation de Bernoulli:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overline{V}^2 - \overline{V}_\infty^2) + \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (\text{II-12})$$

où  $V_\infty$  et  $P_\infty$  sont respectivement la vitesse et la pression de l'écoulement libre.

L'utilisation de l'équation de la célérité du son,

$$\frac{dP}{d\rho} = c^2 \quad (\text{II-13})$$

nous permet d'écrire:

$$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (\text{II-14})$$

Pour pouvoir combiner entre les trois équations (II-7), II-12 et II-14, on utilise la règle de Leibnitz, pour la différentiation d'une intégrale définie, suivante:

$$\frac{d}{dP} \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{II-15})$$

d'où:

$$\frac{d}{dt} \int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} \quad (\text{II-16})$$

En appliquant la dérivée totale à l'équation de Bernoulli et par substitutions dans l'équation II-16 nous obtenons après utilisation de l'équation II-14:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\overline{V}^2}{2} \right) \quad (\text{II-17})$$



Finalement, par simple substitution dans l'équation II-7 et un arrangement du membre de droite de l'équation ci-dessus, on aboutit à l'équation exacte de l'écoulement potentiel,

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^2) + \nabla \Phi \cdot \nabla \left( \frac{\nabla \Phi^2}{2} \right) \right) = 0 \quad (\text{II-18})$$

Le problème revient donc à chercher la solution de l'équation II-18 qui représente une fonction scalaire  $\Phi(x,y,z,t)$  au lieu d'une fonction vectorielle  $\vec{V}$ .

En plus du champs de vitesse, le champs de pression, comme inconnu principal en aéroélasticité, peut être exprimé en fonction de la fonction du potentiel de vitesse. Pour cela nous allons formuler l'expression du coefficient de pression local qui peut-être défini comme:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \quad (\text{II-19})$$

Pour un écoulement isentropique d'un gaz parfait, l'équation de la célérité du son prend alternativement les formes suivantes:

$$\frac{dP}{dt} / \frac{d\rho}{dt} = c^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \gamma R T = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (\text{II-20})$$

où  $\gamma$  est le rapport de chaleur spécifique, supposé constant.

En tenant compte de l'équation d'énergie pour un écoulement isentropique et de l'équation ci-dessus on peut avoir:

$$\int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = \int_{c_\infty}^c \frac{d(c^2)}{\gamma - 1} = \frac{1}{\gamma - 1} (c^2 - c_\infty^2) \quad (\text{II-21})$$

Par combinaison de l'équation de Bernoulli II-12 avec les équations II-20, II-21 et II-22 on obtient finalement:

$$C_p = \frac{2}{\gamma M^2} \left( \left[ 1 - \frac{\gamma - 1}{c^2} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi^2 - \vec{v}_\infty^2) \right] \right]^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right) \quad (\text{II-22})$$

L'équation ainsi déduite est donc l'expression exacte du coefficient de pression locale pour un écoulement isentropique.

Pour les applications pratiques, l'équation du potentiel de vitesse n'est pas utilisée dans sa forme exacte mais elle est simplifiée en ne gardant que les termes linéaires pour les écoulements complètement subsoniques ou supersoniques, et les termes linéaires plus les termes non linéaires prépondérants uniquement pour les écoulements transoniques. Pour le coefficient de pression, l'utilisation exacte de son expression est possible dans le cas stationnaire et/ou dans le cas de résolution par la méthode des champs, pour les problèmes instationnaire avec résolution par les méthodes intégrales, la linéarisation de l'expression du coefficient de pression est indispensable.

### II.3 MODÈLE LINEAIRE DE L'ÉCOULEMENT POTENTIEL AUTOUR DES VOILURES

En tenant compte de l'hypothèse des petites perturbations pour un écoulement complètement subsonique ou supersonique autour d'engins, l'équation du potentiel de vitesse peut être soumise à une linéarisation totale [§.II.1] en aboutissant à sa forme donnée par l'équation II-3. On néglige les termes non linéaires même dans l'expression du coefficient de pression.

Dans ce qui suit nous allons supposer que l'écoulement du fluide privé de toute source de perturbation se compose d'un courant avec une vitesse uniforme  $V_\infty$  parallèle à l'axe des  $x$ . Il est donc commode d'utiliser un potentiel de perturbation  $\phi(x,y,z,t)$  qui sera lié au potentiel de vitesse par la relation suivante:

$$\bar{\phi}(x,y,z,t) = V_{\infty} x + \phi(x,y,z,t) \quad (\text{II-23})$$

avec:

$$\begin{cases} u = \phi_x \\ v = \phi_y \\ w = \phi_z \end{cases} \quad (\text{II-24})$$

Donc:

$$\begin{cases} u_1 = V_{\infty} + u \\ u_2 = v \\ u_3 = w \end{cases} \quad (\text{II-25})$$

avec:

$$u \ll V_{\infty} ; v \ll V_{\infty} ; w \ll V_{\infty}$$

Privé du potentiel d'écoulement uniforme à l'infini, l'écoulement perturbé par l'engin comme source de perturbation sera donc gouverné par l'équation suivante:

$$(1-M_{\infty}^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} - \frac{2M}{C_{\infty}}\phi_{xt} - \frac{1}{C_{\infty}^2}\phi_{tt} = 0 \quad (\text{II-26})$$

avec:

$$C_p = -\frac{2}{V_{\infty}}\phi_x - \frac{2}{V_{\infty}^2}\phi_t \quad (\text{II-27})$$

Pour pouvoir résoudre l'équation II-26 pour les cas d'écoulements autour des voilures, trois conditions aux limites sont nécessaires pour que la solution du problème soit unique [9].

#### a - Imperméabilité de la surface

Puisque l'écoulement est supposé sans décollement, les lignes de courant d'air embrassent la configuration de l'engin et pour chaque point (x,y,z) de la surface en vibration, la vitesse normale à la surface est égale à la vitesse de l'écoulement dans la même direction.

La condition exacte est donc qu'à la surface

$$S(x,y,z,t) = 0 \quad (\text{II-28})$$

de la configuration, les particules de fluide sont assignés à se mouvoir selon la loi suivante:

$$\frac{DS}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \nabla \right) S = 0 \quad (\text{II-29})$$

#### b - Conditions à l'infini

Quelque soit la nature de la perturbation produite par l'engin, elle doit s'atténuer de plus en plus qu'on s'éloigne de l'engin et on doit retrouver l'écoulement uniforme non perturbé. Cette condition se traduit par l'annulation du potentiel de perturbation et de ses dérivées à l'infini:

$$\psi = 0 \quad ; \quad \psi_t = 0 \quad ; \quad \nabla \psi = 0 \quad (\text{II-30})$$

De plus, dans le cas de résolution par les méthodes des singularités, il faut ajouter la condition de Sommerfeld qui exige que la solution instationnaire soit formée d'ondes se dilatant vers l'infini en partant de leur source (engin).

#### c - Condition de Kutta

La condition que la pression soit finie et continue au bord de fuite se traduit par l'annulation de la différence de pression entre l'intrados et l'extrados:

$$\Delta C_{p_T}(x,y,z,t) = 0 \quad (\text{II-31})$$

L'équation II-26 aux dérivées partielles avec les conditions aux limites citées ci-dessus représentent le problème aux limites qu'on se propose de résoudre par la méthode intégrale. La distribution de pression autour des voilures qui est l'inconnue principale du problème sera déterminée par l'intermédiaire de l'équation II-27.

## II.4 METHODES DE RESOLUTIONS

Les méthodes proposées peuvent être classées en trois groupes [Fig.II.1]: méthode des champs, méthode des singularités et la méthode de Morino.

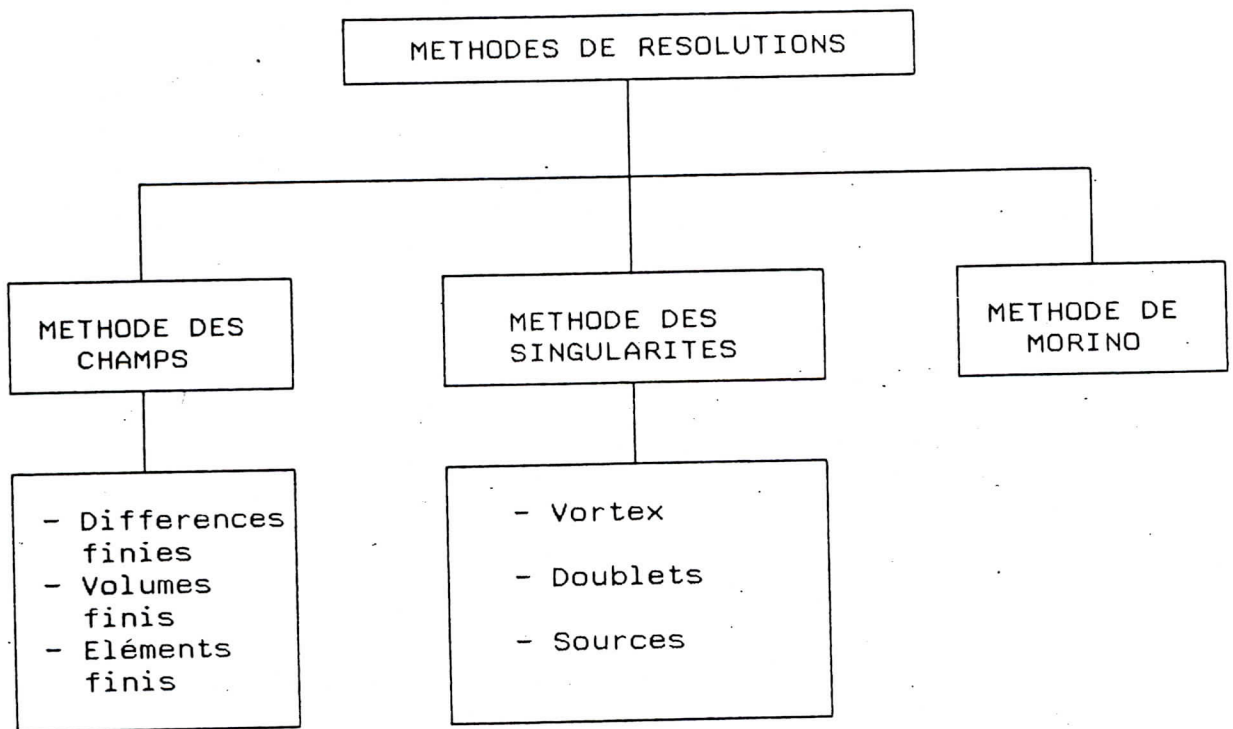


Fig.II.1 Types de méthodes utilisées

### II.4.1 Méthodes des champs

Il est possible d'utiliser ce type de méthodes pour n'importe quel problème d'aéronautiques. Les résultats obtenus sont les plus précis mais nécessitent la discétisation de tout le domaine d'écoulement perturbé, ce qui exige un espace mémoire et un temps de calcul élevés. C'est pour cette raison que l'emploi de tels méthodes est exclusivement pour les modèles non linéaires tels que pour les écoulements visqueux, transoniques et hypersoniques.

#### II.4.2 Méthodes des singularités

Jusqu'à présent, le domaine d'application de ces méthodes se limite aux problèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires [23]. Le principe de base de ces méthodes consiste à couvrir la configuration par des distributions de singularités disposées sur la surface réelle ou moyenne de cette configuration, les intensités de singularités tels que sources, doublets ou vortex, dépendent des équations des conditions aux limites imposées.

La méthode des vortex est utilisée essentiellement pour résoudre les problèmes de surfaces portantes en écoulement stationnaire [24], Son extension aux problèmes instationnaire est effectué en faisant apparaître explicitement l'effet du sillage pour chaque pas de temps [25]. Cette extension se limite aux écoulements incompressibles et aux surfaces portantes parallèles d'une part et aux phénomènes longs, faibles fréquences, d'autre part [26]. De plus, l'effet du sillage exige un espace mémoire et un temps de calcul considérables.

La méthode des doublets est utilisée quelque soit la complexité des configurations portantes, et aussi bien en écoulement stationnaire [27] qu'en écoulement instationnaire [9]. Cependant, la modélisation des surfaces portantes en écoulement stationnaire est généralement effectuée par la méthode des vortex pour des raisons de précision.

La méthode des sources est essentiellement employée, pour les écoulements aussi bien stationnaires qu'instationnaires. pour modéliser des corps non portant complexes [28].

Pour notre cas nous nous intéressons uniquement aux problèmes de surfaces portantes dans un écoulement instationnaire en employant une distribution de doublets sur les surfaces moyennes des ailes et des empennages.

## CHAPITRE III

### DECOMPOSITIONS LINEAIRES ET EQUATION INTEGRALE

La théorie des petites perturbations nous a amené à la linéarisation du modèle des écoulements potentiels qui va nous permettre de séparer le phénomène physique réel en une somme de problèmes élémentaires aérodynamiques. La solution particulière convenable au problème aux limites est déterminée à partir d'une équation intégrale et en utilisant comme type de singularités la distribution de doublets.

#### III.1 DECOMPOSITION EN PROBLEMES D'ÉPAISSEUR ET PORTANT

Pour pouvoir généraliser cette étude aux ailes ayant des angles dièdres  $\lambda$  non nuls [Fig.III.1], nous allons exploiter un système de coordonnées curvilignes  $(x,s,\zeta)$ . Les oscillations sont évidemment de faibles amplitudes et normales à la surface de base ou moyenne  $z_0(y)$  parallèle au courant à l'infini (incidence et cambrure nulles).

Le problème réel qui est une voilure avec une distribution de cambrure et vibrant autour d'une position moyenne à un angle d'incidence  $\theta$  peut être décomposé en [Fig.III.2]:

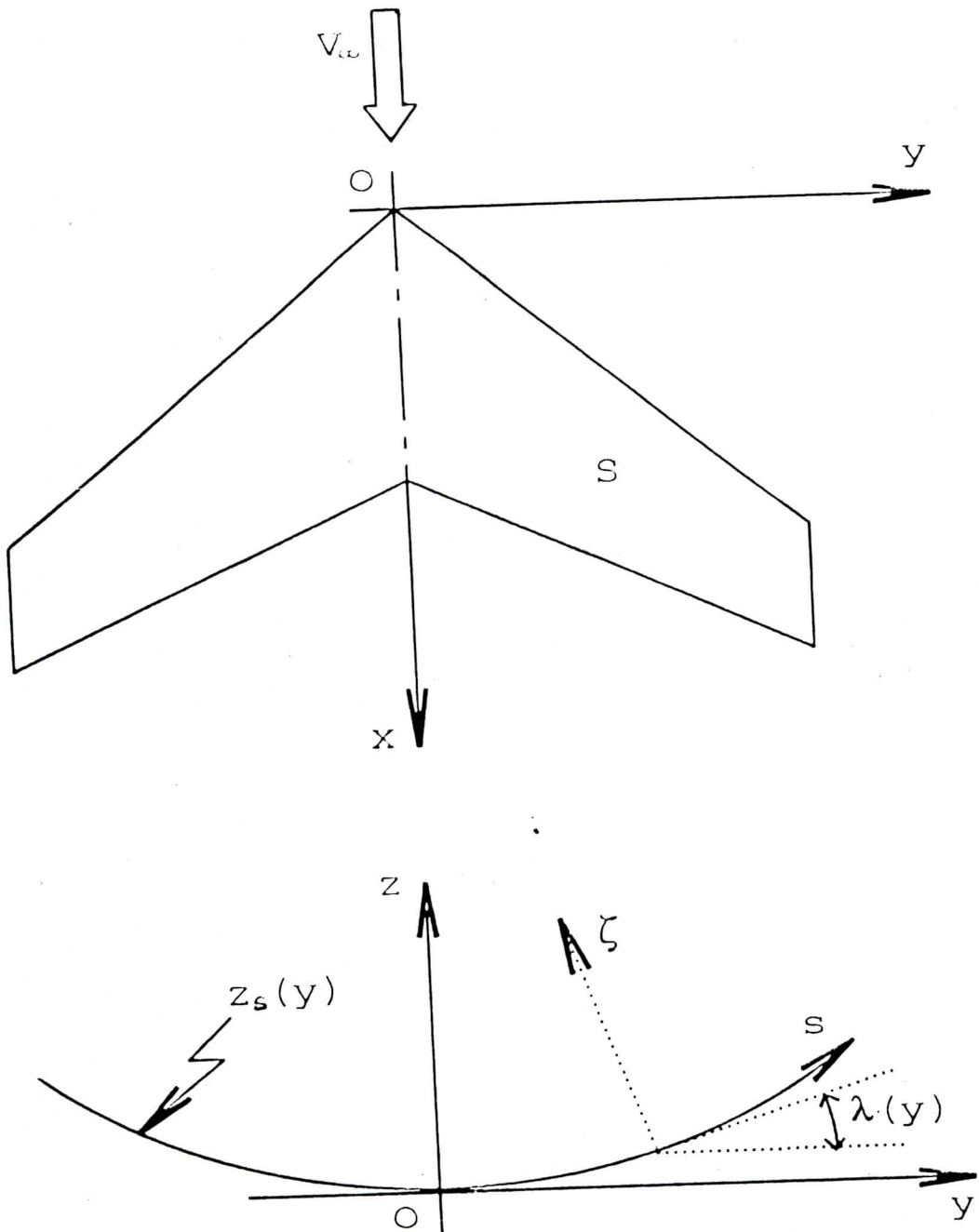


Fig. III.1 Coordonnées curvilignes



un problème d'épaisseur non portant déterminé par la loi d'épaisseur du profil en position perturbée,  
 un problème portant déterminé par la forme du squelette de la voilure et qui est en position perturbée (oscillation).

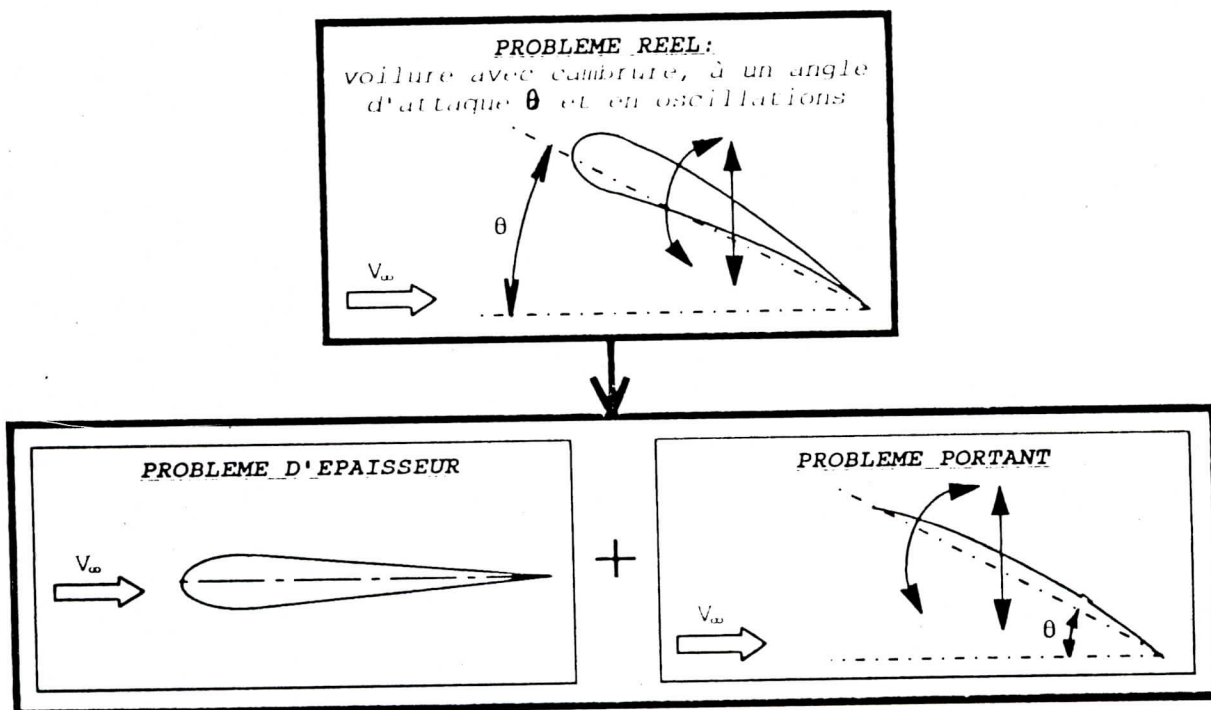


Fig. III.2 Décomposition du problème physique

La décomposition en ces deux effets est intéressante à cause des symétries qui apparaissent. Nous allons préciser les conditions aux limites pour chacun de ces deux problèmes [30].

### III.1.1 Problème d'épaisseur

a - imperméabilité de la surface

Pour la face supérieure, l'équation II-28 prend la forme

suivante:

$$\zeta - \zeta_u(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{III-1})$$

ou

$$\zeta - \zeta_u(x, s, t) = 0 \quad (\text{III-2})$$

Pour des petites perturbations,

$$\left[ \frac{\partial \zeta_u}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_u}{\partial s}, \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \zeta_u}{\partial t} \right] \ll 1 \quad (\text{III-3})$$

Il s'en suit que l'équation II-29 peut être approximée par,

$$W_n(x, s, \zeta_u, t) = \frac{\partial \zeta_u}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \zeta_u}{\partial x} \quad (\text{III-4})$$

avec:

$W_n(x, s, \zeta_u, t)$  : vitesse sur la surface supérieure normale à la surface moyenne.

Pour la face inférieure, l'équation II-28 prend la forme:

$$\zeta - \zeta_l(x, s, t) = 0 \quad (\text{III-5})$$

Pour des petites perturbations,

$$\left[ \frac{\partial \zeta_l}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_l}{\partial s}, \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \zeta_l}{\partial t} \right] \ll 1 \quad (\text{III-6})$$

Il s'en suit que l'équation II-29 peut être approximée par,

$$W_n(x, s, \zeta_l, t) = \frac{\partial \zeta_l}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \zeta_l}{\partial x} \quad (\text{III-7})$$

avec:

$W_n(x, s, \zeta_l, t)$  : vitesse sur la surface inférieure normale à la surface moyenne

Une conséquence directe des équations III-4 et III-7 est que,

$$W_n(x, s, \zeta_u, t) = -W_n(x, s, \zeta_l, t) \quad (\text{III-8})$$

Dans le cas de disposition des panneaux sur la surface moyenne  $z=y$ , l'équation III-8 nous permet d'écrire:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(x, s, 0^+, t) = -\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(x, s, 0^-, t) \quad (\text{III-9})$$

où  $0^+$  et  $0^-$  indiquant respectivement les faces supérieure et inférieure de la surface moyenne de la voilure.

On est donc amené à chercher une solution  $\varphi(x, s, \zeta, t)$  symétrique en  $\zeta$  pour que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$  soit antisymétrique.

De plus à l'extérieur de la surface de base faisant partie des profils symétriques,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$  est nul pour  $\zeta$  égale à zero.

**b - Conditions à l'infini**

A l'infini,

$$\varphi = 0 \quad ; \quad \nabla \varphi = 0 \quad \text{et} \quad \varphi_t = 0 \quad (\text{III-10})$$

**c - Condition de Kutta**

Au bords de fuite, l'équation II-31 devient:

$$\Delta C_{p_T}(x, s, 0, t) = 0 \quad (\text{III-11})$$

La différence de pression est aussi nulle dans toute la surface  $\zeta = 0$ .

### III.1.2 Problème portant

a - imperméabilité de la surface

Sur la cambrure, l'équation II-28 prend la forme suivante:

$$\zeta - \zeta_m(x, s, t) = 0 \quad (\text{III-12})$$

Pour de petites perturbations,

$$\left[ \frac{\partial \zeta_m}{\partial x}, \frac{\partial \zeta_m}{\partial s}, \frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} \right] \ll 1 \quad (\text{III-13})$$

Il s'en suit que l'équation II-29 peut être approximée par,

$$W_n(x, s, \zeta_m, t) = \frac{\partial \zeta_m}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} \quad (\text{III-14})$$

avec:

$W_n(x, s, \zeta_m, t)$  : vitesse sur la cambrure, normale à la surface moyenne

Puisque la face supérieure et la face inférieure ont la même équation, nous pouvons déduire pour le cas de disposition des panneaux sur la surface moyenne:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(x, s, 0^+, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}(x, s, 0^-, t) \quad (\text{III-15})$$

On est donc amené à chercher une solution  $(x, s, \zeta, t)$  antisymétrique en  $\zeta$  pour que  $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$  soit symétrique.

Dans ces conditions  $\varphi$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_z$  sont impairs en  $\zeta$  d'une part et la continuité au sein du fluide d'autre part entraîne, en dehors de la surface portante et du sillage:

Pour  $\zeta = 0$

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \varphi_x = 0 \\ \varphi_z = 0 \end{cases} \quad (\text{III-16})$$

b - Conditions à l'infini

A l'infini,

$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ \nabla\varphi = 0 \\ \varphi_t = 0 \end{cases} \quad (\text{III-17})$$

c - Condition de Kutta

Au bords de fuite de la surface moyenne, l'équation II-31 devient:

$$\Delta C_{p_T}(x,s,0,t) = 0 \quad (\text{III-18})$$

L'annulation de la différence de pression peut être étendue en englobant tout le sillage. Sur la surface portante, la différence de pression représente l'inconnue à chercher.

### III.2 MODELE SPECIFIQUE AU PROBLEME DE FLOTTEMENT

En respectant la condition mathématique qui exige que les solutions doivent être linéairement indépendantes, le problème portant peut être aussi décomposer en un problème portant stationnaire et en un problème portant instationnaire. Ce dernier problème est celui qui nous intéresse pour établir le modèle aérodynamique de flottement.

### III.2.1 Décomposition du problème portant

Le problème portant stationnaire est caractérisé par l'angle d'incidence et par la cambrure privés de tout mouvement et déformation supplémentaires, c'est à dire que ces deux dernières caractéristiques sont indépendantes du temps. En ce qui concerne le problème portant instationnaire nous allons nous intéresser à l'effet des mouvements et des déformations entraînant uniquement une perturbation de portance [Fig.III.3].

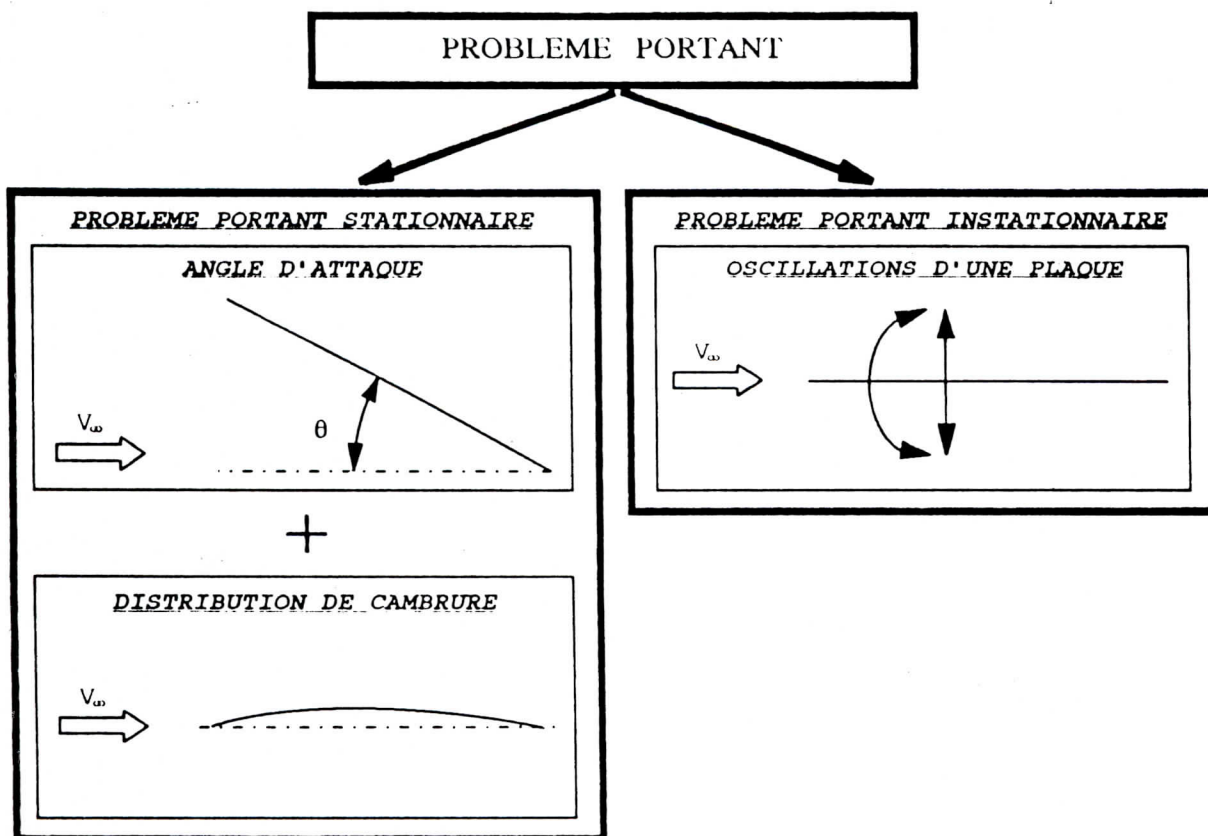


Fig. III.3 Décomposition du problème portant

D'après cette décomposition, deux remarques intéressantes doivent être citées:

Les conditions aux limites pour chacun de ces deux problèmes ne portent rien de spécifique sauf qu'on remplace dans les équations III-14, III-17 et III-18 le déplacement  $\zeta_m(x,s,t)$  par  $\overline{\zeta}_m(x,s)$  pour le cas du problème portant stationnaire et par la somme des modes propres  $\zeta_k(x,s,t)$  pour le cas du problème portant instationnaire.

Le problème portant stationnaire n'est qu'un cas particulier du problèmes portant instationnaire, ceci peut être obtenu en considérant la distribution de cambrure comme étant une amplitude d'un mode propre avec une fréquence de vibration nulle.

### III.2.2 Modèle

L'effet du problème portant instationnaire se traduit par une perturbation de la différence de pression entre l'intrados et l'extrados de la voilure, et puisque le calcul de flottement s'intéresse à la limite de stabilité où l'oscillation est harmonique, on s'attend à ce que le potentiel de perturbation du problème instationnaire et ses dérivées, produits par les surfaces portantes, auront une nature harmonique du temps, en effet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_k(x,s,t) = b f_k(x,s) e^{i\omega t} \\ \varphi(x,y,z,t) = \overline{\varphi}(x,y,z) e^{i\omega t} \\ W_n(x,s,t) = \overline{W}_n(x,s) e^{i\omega t} \\ C_p(x,s,t) = \overline{C}_p(x,s) e^{i\omega t} \end{array} \right. \quad (\text{III-20})$$

Les équations III-20 permettent le passage du domaine temporel [§.III.2] au domaine fréquentiel. Après l'insertion de ces équations dans les équations II-26, II-27, III-14, III-17 et III-18 nous obtenons enfin:

dans la région potentielle;

l'équation gouvernant l'écoulement perturbé devient,

$$(1-M_\infty^2) \overline{\varphi}_{xx} + \overline{\varphi}_{yy} + \overline{\varphi}_{zz} - 2i \frac{\nu}{b^2} M_\infty^2 \overline{\varphi}_x + \frac{\nu^2}{b^2} M_\infty^2 \overline{\varphi} = 0 \quad (\text{III-21})$$

avec:

$$\overline{C_p}(x,s) = \frac{-2}{\nu \omega} \left[ \overline{\varphi}_x + i \frac{\nu}{b} \overline{\varphi} \right] \quad (\text{III-22})$$

sur la surface;

pour chaque mode  $k$ , la condition d'imperméabilité de la surface s'exprime par la forme adimensionnelle suivante:

$$\left[ \frac{W^n(x,s;\nu)}{\nu \omega} \right]_k = \frac{\partial}{\partial(x/b)} f_k(x,s) + i \nu f_k(x,s) \quad (\text{III-23})$$

ou:

$$\alpha_k(x,s;\nu) = \alpha_k'(x,s) + i \nu \alpha_k''(x,s) \quad ; \quad k = 1,p \quad (\text{III-24})$$

à l'infini;

la condition d'atténuation des perturbations se traduit par:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x,y,z) &= 0 \\ \nabla \overline{\varphi}(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

au bord de fuite;

la condition de Kutta se traduit par:

$$\overline{\Delta C_{p_T}}(x,s) = 0 \quad (\text{III-26})$$

### III.3 EQUATION INTEGRALE

La solution analytique du modèle précédent, n'est connue que pour des cas particuliers [30] (cas de l'écoulement bidimensionnel et de l'aile elliptique en subsonique, notamment).



Pour aborder les applications pratiques de surfaces de géométries complexes et d'interférences entre ailes et empennages ou canards, on est donc amené à chercher des formulations susceptibles de donner des solutions numériques approchées. Pour cela, on remplace le problème aux limites par une équation intégrale reliant les vitesses, normales à la surface moyenne, à la distribution de la différence des pressions sur la surface moyenne.

Vue les caractéristiques de la fonction potentielle de perturbation et de ses dérivées [§. III.1], les surfaces portantes et leurs sillages peuvent être remplacés par une distribution de singularités doublets, non portantes sur les sillages, dont les intensités seront déterminées par la condition à la limite de la paroi.

Bien que les équations III-21 et III-22 sont spécifiques au problème portant instationnaire, la nécessité de renforcer la condition de Sommerfeld est la cause de l'utilisation des équations II-26 et II-27, et ce n'est qu'à la fin que les natures harmoniques données par les équations III-20 sont introduites pour aboutir à l'équation intégrale suivante [Annexe.B]:

$$\alpha_k(x_1, s_1; \nu) = \frac{1}{4\pi} \int \int_S K(x_1, s_1; x, s; \nu, M_\infty) l_k(x, s; \nu, M_\infty) dx ds \quad (\text{III-27})$$

avec les conditions aux limites:

$$\alpha_k(x_1, s_1; \nu) = \alpha_k'(x_1, s_1) + i \nu \alpha_k''(x_1, s_1) \quad ; \quad k = 1, p \quad (\text{III-28})$$

$$l_{k,T}(x, s) = 0 \quad (\text{III-29})$$

où:

$$l_k(x, s; \nu, M_\infty) = \frac{1}{2} \overline{\Delta C_p}(x, s; \nu, M_\infty) \quad (\text{III-30})$$

$\int$  : indique qu'il ne s'agit pas de l'intégrale de Riemann, mais de la valeur définie à partir de la primitive

$K$  : fonction noyau de l'intégrale ou fonction **kernel**

$l_k$  : distribution de charges sur l'aile qui représente l'inconnue de base dans l'expression des coefficients des forces aérodynamiques généralisées

L'équation III-27 représente la vitesse normale induite à la surface portante, en un point  $(x, s)$ , par la distribution de pression sur toute les surfaces portantes.

La fonction kernel  $K$  est donnée par Vivian [31] et Landahl [32] sous la forme suivante:

$$K = \exp(-i\omega x_0/V_\infty) (K_1 T_1 + K_2 T_2) / r^2 \quad (\text{III-31})$$

où:

$$T_1 = \cos(\lambda_r - \lambda_s)$$

$$T_2 = (z_0 \cos \lambda_r - y_0 \sin \lambda_r)(z_0 \cos \lambda_s - y_0 \sin \lambda_s) / r^2$$

$$K_1 = I_1 + \frac{M_\infty r}{R} (1+u^2)^{-1/2} \exp(-i\mu u)$$

$$K_2 = -3I_2 - \frac{i\mu M_\infty^2 r^2}{R^2} (1+u^2)^{-1/2} \exp(-i\mu u),$$

$$- \frac{M_\infty r}{R} \left[ (1+u^2)^{-1/2} \frac{B^2 r^2}{R^2} + 2 + \frac{M_\infty r u}{R} \right] (1+u^2)^{-9/2} \exp(-i\mu u)$$

avec:

$$x_0 = x_1 - x \quad ; \quad y_0 = y_1 - y \quad ; \quad z_0 = z_1 - z$$

$$B = (1 - M_\omega^2)^{1/2} \quad ; \quad r = (y_0^2 + z_0^2)^{1/2} \quad ; \quad R = (x_0^2 + B^2 r^2)^{1/2}$$

$$\mu = \frac{\omega r}{V_\omega} \quad ; \quad u_1 = \frac{M_\omega R - x_0}{B^2 r}$$

$$I_1(u_1, \mu) = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\mu u)}{(1+u^2)^{3/2}} du$$

$$I_2(u_1, \mu) = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\mu u)}{(1+u^2)^{5/2}} du$$

$\omega$  : fréquence circulaire d'oscillation

$\lambda_r$  : angle diédre du point récepteur localisé en  $(x_1, y_1, z_1)$

$\lambda_e$  : angle diédre du point émetteur localisé en  $(x, y, z)$

Pour pouvoir évaluer la fonction kernel, les deux intégrales infinies doivent être déterminées. Parmi plusieurs approximations de ces intégrales nous allons adopter, pour des raisons de précision et de simplicité, celle donnée par Albano [33] et qui est utilisée par Waldman [34]. Les détails concernant cette approximation sont représentés dans l'annexe C.

Pour le cas stationnaire l'expression de la fonction kernel prend la forme suivante [34]:

$$K = (K_1^{\bar{}} T_1 + K_2^{\bar{}} T_2) / r^2 \quad \text{(III-32)}$$

où:

$$K_1^a = 1 + \frac{x_0}{R}$$

$$K_2^a = -2 - 3 \frac{x_0}{R} + \left( \frac{x_0}{R} \right)^3$$

$$= \left( \frac{x_1}{R} - 2 \right) \left( \frac{x_1}{R} + 1 \right)^2$$

L'expression de la fonction kernel pour le cas stationnaire est considérablement plus simple que pour le cas instationnaire. C'est pourquoi dans le cas où la fréquence d'oscillation peut être assumée égale à zéro il est avantageux d'utiliser l'équation III-32 au lieu de l'équation III-31.

## CHAPITRE IV

### METHODES DE LA FONCTION KERNEL

La théorie de la surface portante de Multhopp [35] initialement développée pour l'écoulement stationnaire, a été étendue au domaine instationnaire pour des structures en oscillation harmonique à basses et à hautes fréquences aussi bien par le principe de collocation de Multhopp que par le principe variationnel de Flax.

Dans ce qui suit nous allons présenter brièvement les différentes approximations de charges et les différentes méthodes de la fonction Kernel.

#### IV.1 APPROXIMATION DE LA DISTRIBUTION DE CHARGE

La théorie de la méthode de la fonction Kernel exige que la charge soit approximée par une forme polynomiale en coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  qui prennent en considération les comportements singuliers connus de cette charge aux bords de la voilure.

Pour le cas d'une surface plane, nous allons faire apparaître les coordonnées paramétriques  $\xi$  et  $\eta$  en faisant transformer le plan physique de l'aile en un plan d'intégration [Fig.IV.1].

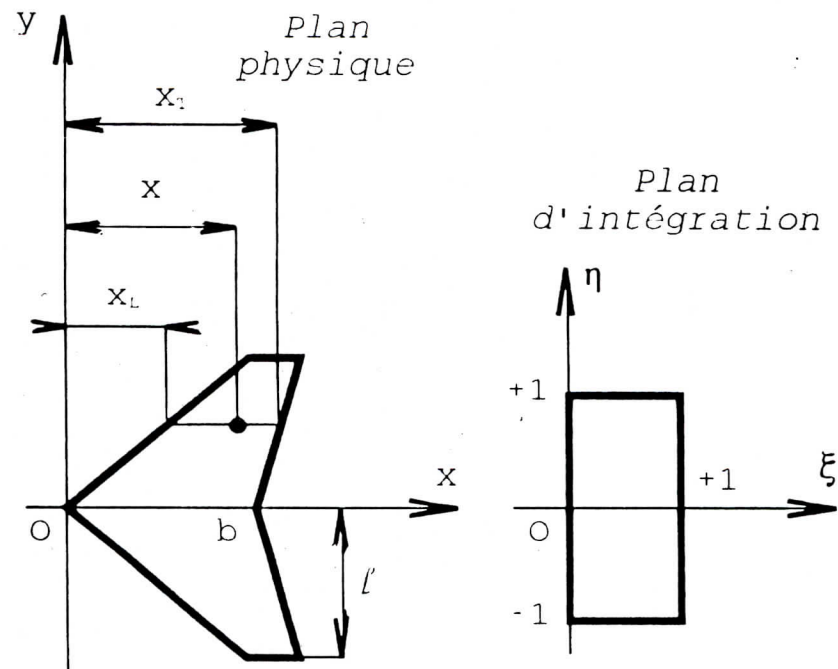


Fig. IV.1 Coordonnées paramétriques

Les coordonnées paramétriques de la projection  $S$  de l'aile sur le plan  $(x-y)$  sont donc données par les formules suivantes:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{c(y)} (x - x_L(y)) \\ \eta = \frac{y}{l} \end{cases} \quad (\text{IV-1})$$

avec:

$$c(y) = x_T(y) - x_L(y) \quad (\text{IV-2})$$

Dans ces conditions, l'équation intégrale et ses conditions aux limites seront écrites sous la forme suivante:

$$\alpha_k(x_1, y_1; \nu) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 c(y) d\eta \int_0^1 K(x_1, y_1; x, y; \nu, M_\infty) \iota_k(x, y) d\xi \quad (\text{IV-3})$$

avec:

$$\alpha_k(x_1, y_1; \nu) = \alpha'_k(x_1, y_1; \nu) + i\nu \alpha''_k(x_1, y_1; \nu) \quad (\text{IV-4})$$

$$z_{k,T}(x, y) = 0 \quad (\text{IV-5})$$

#### IV.1.1 Séries à base de monômes

L'équation intégrale IV-3 n'admet pas une solution unique et la solution ne devient unique que si on impose les conditions de glissements et de Kutta, avec les comportements singuliers des bords latéraux et d'attaque. Nous allons chercher une solution approximative de l'équation intégrale, ayant ces comportements connus aux bords de la surface S, qui permet d'obtenir la matrice des coefficients aérodynamiques généralisés.

Les séries les plus simples approximant la distribution de charge sont celles à base de monômes en  $\xi$  et  $\eta$ :

$$z_k(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^m A_{k;ip} \xi^{i-1} \eta^{p-1} \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \quad (\text{IV-6})$$

La fonction  $\sqrt{1-\eta^2}$  fait tendre la charge vers zéro aux bords latéraux, de plus, la fonction  $\sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}$  exprime la condition du Kutta (charge nulle au bord de fuite, pour  $\xi=1$ , et l'infinie au bord d'attaque pour  $\xi = 0$ ).

La charge inconnue sera donc remplacée par cette série ou les coefficients complexes constants  $A_{k;ip}$  deviennent les nouveaux inconnus du problème.

#### IV.1.2 Séries à base de polynômes orthogonaux

Pour améliorer l'approximation de la charge, l'équation IV-6 sera mise sous une autre forme, qui est plus convenable pour l'évaluation numérique que la forme entraînant des simples monômes. L'une des formes utilisées est:

$$l_k(x,y) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m B_{k;r,s} h_r(\xi) g_s(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \quad (\text{IV-7})$$

où  $h_r(\xi)$  et  $g_s(\eta)$  sont les polynômes d'interpolations basés sur les  $(mn)$  points distincts dans l'intervalle  $[0,1]$  et  $[-1,1]$ :

$$h_r(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n \left[ \frac{\xi - \xi_i}{\xi_r - \xi_i} \right] \quad ; r = 1, n \quad (\text{IV-8})$$

$$g_s(\eta) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq s}}^m \left[ \frac{\eta - \eta_p}{\eta_s - \eta_p} \right] \quad ; s = 1, m \quad (\text{IV-9})$$

Les coefficients inconnus  $A_{k;i,p}$  de la formule IV-6 ont été remplacés maintenant par des nouveaux coefficients inconnus  $B_{k;r,s}$  qui sont des combinaisons linéaires de  $A_{k;i,p}$ .

Le choix des positions des points  $\xi_i$  et  $\eta_p$  est de telle manière à ce qu'il emporte une considérable simplification du point de vue intégration numérique d'une part et d'assurer une bonne distribution des points  $x_i$  et  $y_p$  sur la surface portante. Davies a choisi les expressions suivantes:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2i-1}{2n+1}\pi\right) \right] \quad ; i = 1, n \quad (\text{IV-10})$$

$$\eta_p = \cos\left(\frac{p\pi}{m+1}\right) \quad ; p = 1, m \quad (\text{IV-11})$$

## IV.2 METHODE DE COLLOCATION

Les coefficients inconnus de l'équation IV-7, ou bien IV-6, de la charge  $l_k(x,y)$  peuvent être obtenue en appliquant l'équation intégrale IV-3 pour un nombre  $(nm)$  points de collations en nombre égale au nombre de coefficients. La procédure abouti alors à un système de  $(nm)$  équations linéaires à  $(nm)$  inconnus. Après la déterminations des coefficients, un chemin inverse est procédé pour l'obtention de la charge et les coefficients aérodynamiques généralisés.



L'équation de base engendrant le système d'équations est alors:

$$\alpha_k(x_{ip}, y_{ip}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m B_{k;rs} U_{rs}(x_{ip}, y_{ip}) \quad (\text{IV-12})$$

avec:

$$\alpha_k(x_{ip}, y_{ip}; \nu) = \alpha'_k(x_{ip}, y_{ip}; \nu) + i\nu \alpha''_k(x_{ip}, y_{ip}; \nu) \quad (\text{IV-13})$$

où:

$$U_{rs}(x_{ip}, y_{ip}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 c(y) g_s(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 K(x_{ip}, y_{ip}; x, y) h_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi \quad (\text{IV-14})$$

Sous forme matricielle, les équations ci-dessus nous permettent d'écrire:

$$[\alpha] = [U] [B] \quad (\text{IV-15})$$

où:

[ $\alpha$ ] : matrice des vitesses normales, dont les éléments sont donnés par l'équation IV-13, d'ordre (m $\times$ n $\times$ p)

[ $U$ ] : matrice des coefficients d'influences aérodynamiques, dont les éléments sont donnés par l'équation IV-14, d'ordre (m $\times$ n $\times$ m $\times$ n).

[ $B$ ] : matrice des coefficients inconnus d'ordre (m $\times$ n $\times$ p).

Donc:

$$[B] = [U]^{-1} [\alpha] \quad (\text{IV-16})$$

Une fois la matrice des coefficients  $B_{k;rs}$  est déterminée, la matrice des coefficients aérodynamiques généralisés  $Q_{qk}$  sera obtenu par substitution de la série exprimant la charge dans l'équation I-10, en effet:

$$Q_{qk} = \frac{1}{b^2} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \chi_{q;rs} B_{k;rs} \quad (\text{IV-17})$$

avec:

$$\chi_{q;r_e} = \int_{-1}^1 c(y) g_e(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 \zeta_q(x,y) h_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi \quad (\text{IV-18})$$

Sous la forme matricielle l'équation IV-17 devient:

$$[ Q ] = (1/b^2) [ \chi ] [ B ] \quad (\text{IV-19})$$

où:

[ Q ] : matrice carrée d'ordre (pxp), dont les éléments sont les coefficients aérodynamiques généralisés

[ \chi ] : matrice d'ordre (pxmn), dont les éléments sont donnés par l'équation IV-18

Par substitution de l'équation IV-16 dans l'équation IV-19 nous obtenons la forme finale suivante:

$$[ Q ] = (1/b^2) [ \chi ] [ U ]^{-1} [ \alpha ] \quad (\text{IV-20})$$

Soit  $F_{r_e}(x,y)$  la fonction suivante:

$$F_{r_e}(x,y) = h_r(\xi) g_e(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \quad (\text{IV-21})$$

L'équation matricielle de la distribution de charge est alors:

$$[ \iota ] = [ F ] [ B ] = [ F ] [ U ]^{-1} [ \alpha ] \quad (\text{IV-22})$$

où:

[ \iota ] : matrice de distribution de charge d'ordre (m\eta xp)

[ F ] : matrice carré diagonale d'ordre (mnmn), dont les éléments sont donnés par l'équation IV-21

#### IV.3 METHODE VARIATIONNELLE

Le principe variationnel est une technique mathématique basée sur l'idée de la minimisation des erreurs des intégrales ayant des fonctions poids, telles que les intégrales de la vitesse normale. Ce principe fut appliqué à la méthode des surfaces portantes par Davies [36] pour renforcer la précision de calcul par rapport à la méthode de collocation. Cependant certains arrangements ont été apportés par ce dernier pour des raisons théoriques et numériques, soit en effet:

$$K_1'(x_0, y_0) = (1/b^2) K_1(x_0, y_0) \quad (\text{IV-23})$$

où  $K_1(x_0, y_0)$  est la partie plane de la fonction Kernel.

D'où:

$$\alpha_k(x_1, y_1; \nu) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{b} \int_{-1}^1 \frac{c(y)}{b} d\eta \int_0^1 l_k(x, y) K_1'(x_1, y_1, x, y; \nu, M_\infty) E(x_1, x) d\xi \quad (\text{IV-24})$$

avec:

$$E(x_1, x) = \exp\left[\frac{-i\nu}{b} (x_1 - x)\right] \quad (\text{IV-25})$$

L'approximation de la charge  $l_k(x, y)$  est choisi de la manière suivante:

$$\hat{l}_k(x, y) = \frac{b}{c(y)} \exp\left[\frac{-i\nu x}{b}\right] \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m B_{k; r, s} h_r(\xi) g_s(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \quad (\text{IV-26})$$

Une approximation correspondante  $\hat{\alpha}_k(x_1, y_1; \nu)$  de la fonction  $\alpha_k(x_1, y_1; \nu)$  est obtenue en utilisant l'équation ci-dessus dans l'équation intégrale IV-24, d'où:

$$\hat{\alpha}_k(x_1, y_1) = \frac{1}{b} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m B_{k;r,s} U_{r,s}(x_1, y_1) \exp\left[\frac{-i\nu}{b} x_1\right] \quad (\text{IV-27})$$

où:

$$U_{r,s}(x_1, y_1) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 g_s(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 K_1'(x_1, y_1; x, y) h_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi \quad (\text{IV-28})$$

Par application du principe variationnel, les coefficients  $B_{k;r,s}$  sont déterminés à partir de l'ensemble des  $(mn)$  équations simultanées,

$$\int_{-1}^1 g_p(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 h_l(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \left[ \alpha_k(x_1, y_1) - \hat{\alpha}_k(x_1, y_1) \right] \exp\left[\frac{i\nu}{b} x_1\right] d\xi = 0 \quad (\text{IV-29})$$

Si on substitue  $\hat{\alpha}_k(x_1, y_1)$  donnée par l'équation IV-27 dans l'équation ci dessus on peut écrire l'ensemble des équations linéaires sous la forme suivante:

$$\frac{1}{b} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m \psi_{i,p;r,s} B_{k;r,s} = \vartheta_{k;i,p} \quad (\text{IV-30})$$

avec:

$$\vartheta_{k;i,p} = \int_{-1}^1 g_p(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 h_l(1-\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \alpha_k(x_1, y_1) \exp\left[\frac{i\nu}{b} x_1\right] d\xi \quad (\text{IV-31})$$

$$\psi_{i,p;r,s} = \int_{-1}^1 g_p(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 h_l(1-\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} U_{r,s}(x_1, y_1) d\xi \quad (\text{IV-32})$$

Sous forme matricielle, les équations ci-dessus permettent d'écrire:

$$[ \vartheta ] = \frac{1}{b} [ \psi ] [ B ] \quad (\text{IV-33})$$

d'où:

$$[ B ] = \frac{b}{1} [ \psi ]^{-1} [ \vartheta ] \quad (\text{IV-34})$$

où:

[  $\vartheta$  ] : matrice des vitesses normales, dont les éléments sont donnés par l'équation IV-31, d'ordre (m $\times$ p)

[  $\psi$  ] : matrice des coefficients d'influences aérodynamiques, dont les éléments sont donnés par l'équation IV-32, d'ordre (m $\times$ mn).

[ B ] : matrice des coefficients inconnus d'ordre (m $\times$ p).

L'approximation  $Q_{qk}$  des coefficients aérodynamiques généralisés est donc obtenue à partir de la formule I-10 en remplaçant  $l_k(x, y, \nu, M_\infty)$  par  $l_k(x, y, \nu, M_\infty)$ .

$$Q_{qk} = (1/b) \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^m x_{q;rs} B_{k;rs} \quad (\text{IV-35})$$

avec:

$$x_{q;rs} = \int_{-1}^1 g_s(\eta) \sqrt{1-\eta^2} d\eta \int_0^1 \zeta_q(x, y) \exp\left[-\frac{i\nu}{b} x\right] h_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} d\xi \quad (\text{IV-36})$$

Sous la forme matricielle l'équation IV-17 devient:

$$[ \hat{Q} ] = (1/b) [ x ] [ B ] \quad (\text{IV-37})$$

où:

[  $\hat{Q}$  ] : matrice carrée d'ordre (p $\times$ p), dont les éléments sont les coefficient aérodynamiques généralisés

[ x ] : matrice d'ordre (p $\times$ mn), dont les éléments sont donnés par l'équation IV-36

En substituant l'équation IV-34 dans l'équation IV-37 nous obtenons la forme finale suivante:

$$[\hat{Q}] = [x] [\psi]^{-1} [\phi] \quad (\text{IV-38})$$

Soit  $F_{r_2}(x,y)$  la fonction suivante:

$$F_{r_2}(x,y) = \frac{b^2}{1-c(y)} \exp\left[-\frac{i\nu}{b}x\right] h_r(\xi) g_2(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}} \sqrt{1-\eta^2} \quad (\text{IV-39})$$

L'équation matricielle de la distribution de charge est alors:

$$[\hat{I}] = (1/b) [F] [B] = [F] [\psi]^{-1} [\phi] \quad (\text{IV-40})$$

où:

$[\hat{I}]$  : matrice de distribution de charge d'ordre (mn xp)

$[F]$  : matrice carré diagonale d'ordre (mnmn), dont les éléments sont donnés par l'équation IV-39

Jusqu'ici, on a représenté que les grandes lignes de la théorie. Pour plus de détails tels que le traitement des symétries d'écoulement (symétrie géométriques et vibrations symétriques ou antisymétrique) et les considérations numériques, nous recommandons de consulter l'article Davies [37].

## CHAPITRE V

### METHODE DES PANNEAUX (D-L-M)

La méthode des panneaux est une méthode discrète et, grace au progrès informatique, elle tend de plus en plus à remplacer la méthode de la fonction Kernel.

L'extension de la méthode discrète des vortex "V-L-M" appliquée aux écoulements stationnaires ([24], [38], [39] et [40]) vers les écoulements instationnaires est dite méthode des doublets "D-L-M" ([41], [42], [43], et [44]). Pour notre part nous allons adopter la méthode d'Albano et Rodden [42] qui est la plus efficace [34] en présentant la formulation mathématique et des différentes techniques de résolution et enfin la manière qu'on a choisi pour l'idéalisation d'une configuration générale.

#### V.1 FORMULATION MATHEMATIQUE

L'application de l'équation intégrale III-27 sur la surface portante subdivisée en n petites surfaces appelées panneaux donne:

$$\alpha_k(x_1, s_1; \nu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \int_{S_j} K(x_1, s_1; x, s; \nu, M_\infty) \gamma_k(x, s) dx ds \quad (V-1)$$

avec:

$$\alpha_k(x_1, s_1; \nu) = \alpha_k'(x_1, s_1; \nu) + i\nu \alpha_k''(x_1, s_1; \nu) \quad (V-2)$$

$$\gamma_{k,T}(x, s) = 0 \quad (V-3)$$

où:

$c_j$  : corde moyenne du  $j^{\text{ème}}$  panneau

$\beta_j$  : angle de flèche du  $j^{\text{ème}}$  panneau

$l_j$  : ligne du doublet du  $j^{\text{ème}}$  panneau

$l_k(x_j, s_j)$ : La charge sur le panneau émetteur en mode  $k$ , constante sur chaque panneau.

Le point portant est situé à mi-envergure et au  $1/4$  de la corde du panneau dont le déplacement et la pression moyenne sont supposés en ce point. Comme pour la méthode des vortex, la condition à la limite de la vitesse normale à la surface moyenne est satisfaite au point récepteur ou de collocation.

Notons que l'intégrale [Eq.V-4] devient infinie si le point de collocation est situé sur la ligne du doublet. De plus, la condition de Kutta n'a pas été imposée [Eq.V-3]. Cependant, à partir de l'expérimentation numérique avec cette technique [42], il est devenu clair que la condition de Kutta est satisfaite si chaque point de collocation est situé à mi-envergure et au  $3/4$  de la corde du panneau.

Soient  $D_{ij}$  et  $\alpha_{ik}$  les quantités suivantes:

$$D_{ij} = \frac{1}{4\pi} c_j \cos\beta_j \int_{l_j} K(x_i, s_i; x_j, s_j; \nu, M_\infty) dl \quad (\text{V-5})$$

$$\alpha_{ik} = \alpha_k(x_i, s_i) = \alpha'_{ik} + i \nu \alpha''_{ik} \quad (\text{V-6})$$

L'équation V-2 se réduit alors à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^n D_{ij} l_{jk} \\ \text{avec:} \\ \alpha_{ik} = \alpha_k(x_i, s_i) = \alpha'_{ik} + i \nu \alpha''_{ik} \end{array} \right. \quad (\text{V-7})$$

L'équation intégrale est ainsi transformée en un système d'équations linéaires:

$$[\alpha] = [D] [l] \quad (\text{V-8})$$



où:

$[ \alpha ]$  : Matrice des vitesses normales, adimensionnelles, dont les  $(n \times p)$  éléments sont définis par l'équation V-6

$[ D ]$  : Matrice des coefficients d'influences aérodynamiques, dont les  $(n \times n)$  éléments sont les facteurs des vitesses normales définis par l'équation V-5

$[ l ]$  : Matrice des inconnues, dont les  $(n \times p)$  éléments sont les charges aérodynamiques adimensionnelles

D'où:

$$[ l ] = [ D ]^{-1} [ \alpha ] \quad (V-9)$$

Notons que toutes les matrices du système d'équations sont à éléments complexes.

Il faut remarquer que la détermination des coefficients des forces aérodynamiques généralisés [Eq.I-8] ne doit pas se faire suivant l'équation I-10 mais sous la forme discrète suivante:

$$Q_{qk}(\nu, M_\infty) = \frac{1}{b^2} \sum_{j=1}^n f_{qj} l_{jk} S_j \quad (V-10)$$

Avec:

$f_{qj}$  : déplacement du point portant du  $j^{\text{ème}}$  panneau au  $q^{\text{ème}}$  mode

$l_{jk}$  : charge au point portant du  $j^{\text{ème}}$  panneau au  $k^{\text{ème}}$  mode

$S_j$  : surface du  $j^{\text{ème}}$  panneau

## V.2 TECHNIQUES DE RESOLUTIONS

La résolution de l'équation intégrale présente des difficultés majeures en raison de la forme compliquée de la fonction Kernel d'une part et de la présence des singularités exigeant l'intégration en parties finies d'autre part. Dans ce paragraphe nous allons voir les techniques numériques développées par Waldman [34], Albano - Rodden [42] et Rodden - Geising - Kalman [45].

### V.2.1 Technique de Waldman [34]

La procédure d'intégration utilisée par Waldman est accomplie par l'utilisation d'une variable dépendante désignée par "p", comprise entre 0 et 1. Les variables cartésiennes (x,y,z) pour un élément de courbe sont reliées à "p" par des transformations appropriées. La formule de quadrature de Gauss entre 0 et 1 est alors utilisée pour l'approximation de l'intégrale. Cette procédure est généralement appliquée pour le cas de calculs des intégrales curvilignes.

Dans le cas où l'intégrale présente une singularité dans l'intervalle d'intégration - pour ce type de problème la singularité se présente au point  $p = 0.5$  -, une quadrature spécifique est générée pour l'approximation de ce type d'intégration.

### V.2.2 Technique d'Albano et Rodden [42]

Vu que les panneaux sont supposés de formes planes, Albano et Rodden remplacent le repere curviligne (x,s, $\zeta$ ) par des repères cartésiens locaux placés aux milieux des lignes des doublets, ou segments d'intégrations, et alignés aux surfaces des panneaux. En effet pour chaque panneau émetteur [Fig.V.2] on a:

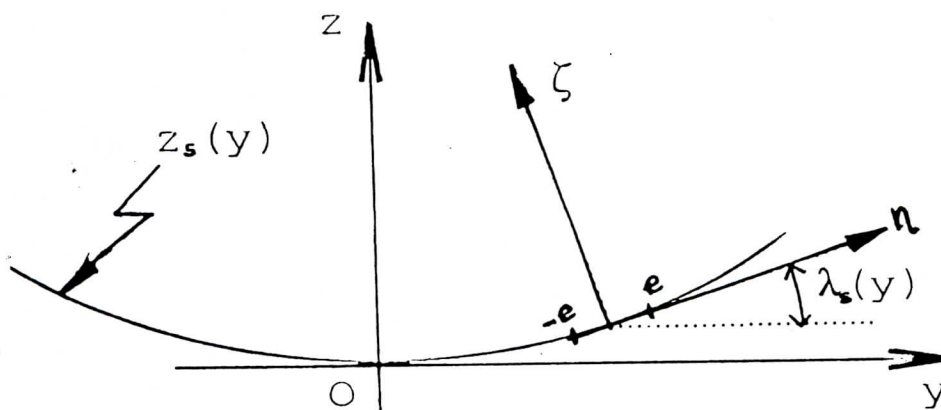


Fig. V.2 systèmes de coordonnées locales et globales

où:

$(x, y, z)$  : coordonnées globales

$(\xi, \eta, \zeta)$  : coordonnées de l'élément ou coordonnées locales

Le nouveau système de coordonnées sera donc défini par les transformations suivantes:

$$\eta = y \cos \lambda_{\underline{e}} + z \sin \lambda_{\underline{e}} \quad (\text{V-11})$$

$$\zeta = -y \sin \lambda_{\underline{e}} + z \cos \lambda_{\underline{e}} \quad (\text{V-12})$$

Dans ces conditions les facteurs de vitesses normales prennent la forme suivante:

$$D_{ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{r^2} E \right]_{ij} d\eta \quad (\text{V-13})$$

où:

$$(r)_{ij} = [(\eta_i - \eta_j)^2 + \zeta_i^2] \quad (\text{V-14})$$

$$(E)_{ij} = \exp[-i\omega(\xi_i - \eta_j \tan \beta_j) / V_{\infty}] \quad (\text{V-15})$$

Les fonctions  $(K_1)_{ij}$ ,  $(T_1)_{ij}$ ,  $(K_2)_{ij}$  et  $(T_2)_{ij}$  subissent aussi un changement de variables dans le nouveau système. Cependant, Albano et Rodden ont évalué la partie stationnaire de l'intégrale par l'intermédiaire de la méthode des vortex (V-L-M) au lieu de la méthode des doublets. L'équation V-13 est évaluée en retranchant puis en ajoutant la partie stationnaire de  $(K_1)_{ij}$  et de  $(K_2)_{ij}$  désignées respectivement par  $(K_{10})_{ij}$  et  $(K_{20})_{ij}$ :

$$(K_{10})_{ij} = 1 + (\xi_i - \eta_j \tan \beta_j) / R_{ij} \quad (\text{V-16})$$

$$(K_{20})_{ij} = -2 - (\xi_i - \eta_j \tan \beta_j) (2 + (B r_{ij}^2 / R_{ij})) / R_{ij} \quad (\text{V-17})$$

Nous obtenons ainsi:

$$D_{ij} = D_{ij}^{(0)} + \Delta D_{ij} \quad (\text{V-18})$$

où les facteurs de vitesses normales stationnaires sont:

$$D_{ij}^{(e)} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{K_{10}T_1 + K_{20}T_2}{r^2} E \right]_{ij} d\eta \quad (V-19)$$

et l'augmentation harmonique des facteurs de vitesses normales est:

$$\Delta D_{ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{(K_1E - K_{10})T_1 + (K_2E - K_{20})T_2}{r^2} \right]_{ij} d\eta \quad (V-20)$$

l'évaluation de l'augmentation harmonique  $\Delta D_{ij}$  est effectuée en approximant son numérateur par un polynôme parabolique  $P(\eta)$  tel que:

$$P(\eta) = A\eta^2 + B\eta + C \approx (K_1E - K_{10})T_1 + (K_2E - K_{20})T_2 \quad (V-21)$$

L'équation V-20 prend alors la forme:

$$\Delta D_{ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \frac{P(\eta)}{(\eta_i - \eta)^2 + \zeta_i^2} d\eta \quad (V-22)$$

Si on prend  $P(-e)$ ,  $P(0)$  et  $P(+e)$  comme valeurs respectivement de début, milieu et fin de  $P(\eta)$  nous aurons:

$$A = [P(-e) - 2P(0) + P(e)]/2e \quad (V-23)$$

$$B = [P(e) - P(-e)]/2e \quad (V-24)$$

$$C = P(0) \quad (V-25)$$

Enfin l'expression finale de l'intégrale est comme suit:

$$\Delta D_{ij} = \frac{c_j}{4\pi} \left\{ \left[ \left( \eta_i^2 - \zeta_i^2 \right) A + \eta_i B + C \right] F + \frac{1}{2} B + \eta_i A G + 2 e A \right\} \quad (V-26)$$

où:

$$F = \frac{1}{|\zeta_i|} \tan^{-1} \frac{2e|\zeta_i|}{\eta_i^2 + \zeta_i^2 - e^2} \quad (\text{V-27})$$

$$G = \log \frac{(\eta_i - e)^2 + \zeta_i^2}{(\eta_i + e)^2 - \zeta_i^2} \quad (\text{V-28})$$

### V.2.3 Technique de Rodden, Geising et Kalman [45]

Bien qu'il a été prouvé que la procédure d'Albano et Rodden est efficace pour le calcul des intégrales singulières, il est à noter que, cependant, le traitement non séparé de la partie plane et la partie non plane de la fonction Kernel dans ce type d'intégration peut être une source d'une mauvaise précision des résultats. La méthode devient alors coûteuse à cause de l'emploi d'un nombre élevé de panneaux. La séparation de la partie plane et la partie non plane de la fonction Kernel permet d'écrire [45]:

$$\Delta D_{ij} = \Delta D_{1ij} + \Delta D_{2ij} \quad (\text{V-29})$$

avec:

$$\Delta D_{1ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{(K_1 E - K_{10}) T_1}{r^2} \right]_{ij} d\eta \quad (\text{V-30})$$

et

$$\Delta D_{2ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{(K_2 E - K_{20}) T_2^*}{r^4} \right]_{ij} d\eta \quad (\text{V-31})$$

où:

$$(T_2^*)_{ij} = (T_2)_{ij} r_{ij}^2 \quad (\text{V-32})$$

De la même manière, en approximant respectivement les numérateurs de  $\Delta D_{1ij}$  et de  $\Delta D_{2ij}$  par des paraboles  $P_1(\eta)$  et  $P_2(\eta)$ , nous obtenons:

$$\Delta D_{1ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \frac{P_1(\eta)}{(\eta_i - \eta)^2 + \zeta_i^2} d\eta \quad (V-33)$$

et

$$\Delta D_{2ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \frac{P_2(\eta)}{\left[ (\eta_i - \eta)^2 + \zeta_i^2 \right]^2} d\eta \quad (V-34)$$

L'intégration de l'équation V-33 en parties finies est donnée par l'équation V-26. La partie non plane définie par l'équation V-34 est traitée en détail dans la référence [45].

### V.3 AMELIORATION APPORTEE A LA TECHNIQUE D'ALBANO ET RODDEN

Dans le cas où les moyens de calculs ne permettent pas l'emploi d'un nombre élevé de panneaux, l'approximation des numérateurs de la fonction Kernel par des paraboles est insuffisante, l'utilisation de polynômes à degrés supérieurs pose un sérieux problème pour l'évaluation des constantes.

La solution qui a été apporté est de subdiviser chaque intervalle d'intégration en plusieurs sous intervalles à approximations paraboliques qui rendent pratiquement négligeables les erreurs d'intégrations sans pour autant poser le problème d'évaluation des constantes. En effet, l'équation V-13 des facteurs de vitesses normales sera évaluée comme suit:

a) Pour  $r_{ij}^2 > 0$  sur l'intervalle d'intégration,

$$D_{ij} = \frac{c_j}{4\pi} \int_{-e}^e \left[ \frac{Q}{r^2} \right]_{ij} d\eta = \frac{c_j}{4\pi} \sum_{m=1}^{B_m} \int_{A_m} \left[ \frac{Q}{r^2} \right]_{ij} d\eta \quad (V-35)$$

avec:

$$Q_{ij} = (K_1 T_1 + K_2 T_2)_{ij} (E)_{ij} \quad (V-36)$$

Où l'intégration est évaluée sur un nombre "s" de sous intervalles entre les points  $A_m(\xi_m^A, \eta_m^A, \zeta_m^A)$  et  $B_m(\xi_m^B, \eta_m^B, \zeta_m^B)$ .

b) Pour  $r_{ij} = 0$  au centre de l'intervalle d'intégration,

Dans ces conditions la subdivision de l'intervalle doit être de telle manière à ce que le point de singularité soit situé au milieu d'un sous intervalle. En effet:

$$D_{ij} = \frac{C_j}{4\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{v-1} \int_{A_m}^{B_m} \left[ \frac{Q}{r^2} \right]_{ij} d\eta + \int_{A_v}^{B_v} \left[ \frac{Q}{r^2} \right]_{ij} d\eta + \sum_{m=v+1}^s \int_{A_m}^{B_m} \left[ \frac{Q}{r^2} \right]_{ij} d\eta \right\} \quad (V-37)$$

Pour une application efficace de la procédure, il est nécessaire que pour les intervalles où les intégrales sont singulières le nombre de sous intervalles "s" doit être relativement plus grand.

#### V.4 IDEALISATION DES CONFIGURATIONS GENERALES

Pour minimiser le temps de calcul durant la génération des panneaux idéalisant une configuration particulière, nous avons utilisé une procédure de maillage automatique

##### V.4.1 Définition des régions de surfaces portantes

Une région de surface portante est composée d'un ou plusieurs panneaux formant un sous ensemble de la configuration idéalisée. Pour notre proposition, un sous ensemble est considéré comme étant l'unité de base qui nous permet de générer des séquences de panneaux compatibles avec les exigences de la méthode des doublets "D-L-M".

Une région est définie par quatre noeuds de référence. La figure V.3 montre le système de numérotation des noeuds associé à la topologie d'une région typique.

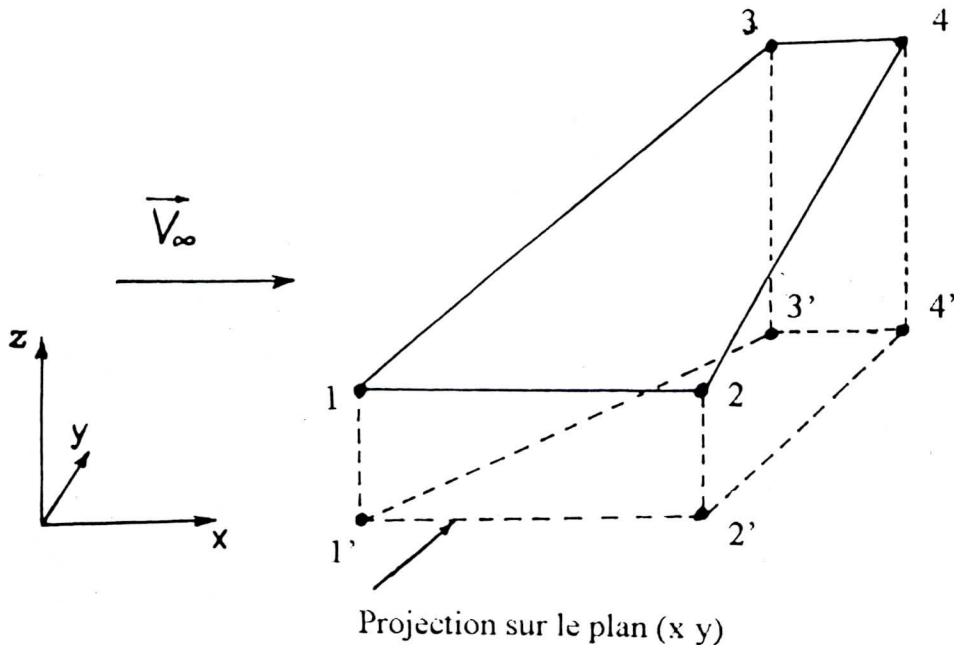


Fig. V.3 Système de numérotation des noeuds d'une région

Le segment reliant les noeuds 1 et 3 définit le bord d'attaque de la région et celui reliant les noeuds 2 et 4 définit le bord de fuite. Cette convention de numérotation définit la topologie de la région. De plus, les segments reliant les noeuds 1 et 2 et les noeuds 3 et 4 doivent être alignés par rapport au courant à l'infini.

La génération de panneaux est automatisée et seules les coordonnées des quatre noeuds de chaque région doivent être fournies avec les nombres considérés de panneaux suivant la corde et suivant l'envergure [Fig.V.4].

Le numéro d'un panneau dans une région est donc déterminé par l'équation suivante:

$$\text{Numéro du panneau} = (J-1) \cdot N_c + I \quad (V-38)$$



avec:

$$1 \leq I \leq N_c$$

$$1 \leq J \leq N_s$$

où  $N_c$  et  $N_s$  représentent respectivement le nombre de panneaux selon la corde et l'envergure de la région considérée.

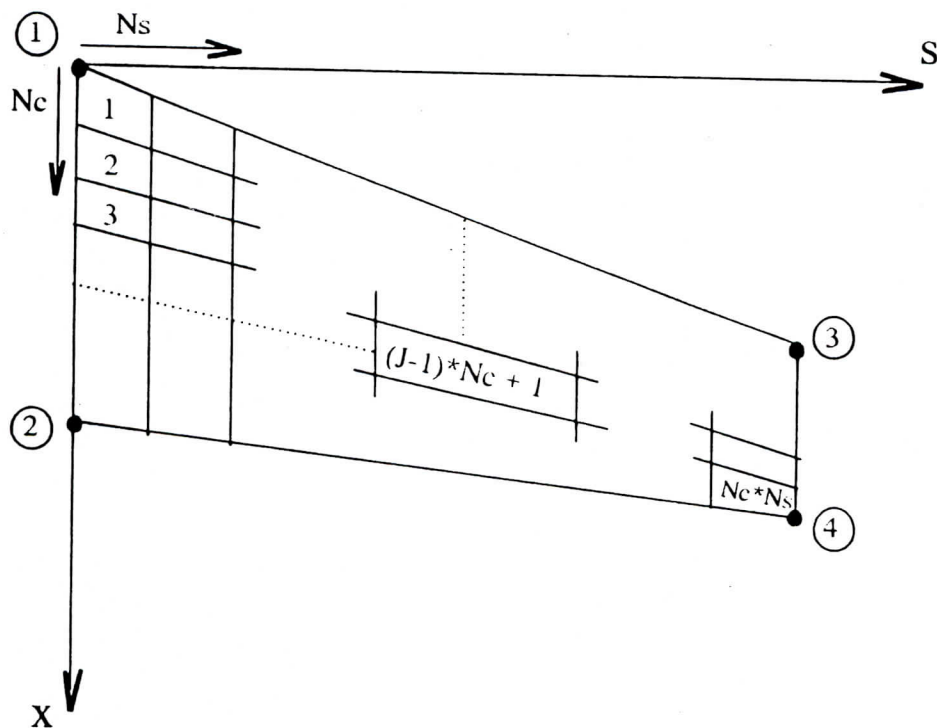


Fig. V.4 Région typique de surface portante discretisée

#### V.4.2 Charge et vitesse normale

La définition des directions positives de la charge et de la vitesse normale agissant sur une région de panneaux est implicite dans la topologie de la région. Notons que la vitesse normale est dans le même sens que celui défini par la topologie pour la charge [Fig.V.5].

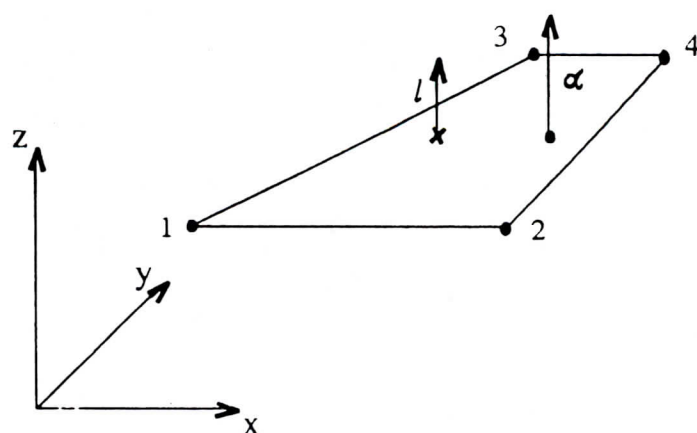


Fig. V.5 Sens positif de la charge  $l$  et de la vitesse normale  $\alpha$  en relation avec la topologie du panneau

La figure ci-dessus montre la charge et la vitesse normale agissant dans leurs sens positifs. La topologie du panneau, représentée par les noeuds 1,2,3 et 4, adopte la topologie de la région à laquelle il appartient.

La figure V.6 montre quelques orientations possibles des panneaux. Les numéros 1 et 3 représentent la topologie de la région à partir de laquelle les panneaux sont dérivés.

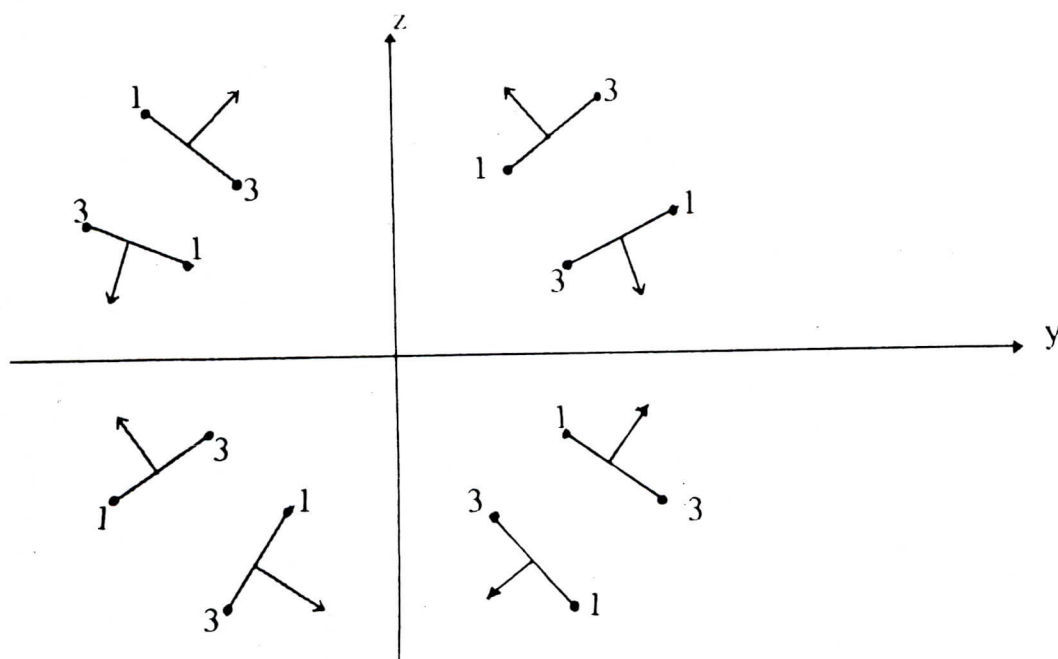


Fig. V.6 Directions des charges positives associées aux topologies possibles

Malgré l'absence de panneaux verticaux et horizontaux, leurs caractéristiques sont déduites par simple projection des panneaux existants sur les axes désirés.

#### V.4.3 Symétrie et plans de réflexions

La majorité des applications aéronautiques sont des configurations avec un ou plusieurs plans de symétrie. Le plan (x-z) est le plan de symétrie pour la plupart des cas et la partie gauche de la surface portante est l'image de la partie droite. Dans d'autres cas, un plan de symétrie additionnel (x-y) existe, c'est le cas d'étude des configurations à la proximité d'une paroi. Les conditions d'écoulement peuvent être alors divisées en parties symétriques et/ou antisymétriques en relation avec les plans de symétries et les types de modes de vibrations. Dans ce cas, une réduction de la taille du système d'équations à résoudre et du temps de calcul des coefficients d'influences peut-être réalisée.

Pour pouvoir exploiter ces symétrie, on doit prendre la réflexion de toutes les régions de surfaces portantes par rapport au plans de symétries correspondants en tenant compte des sens positifs des charges données par la figure V.6. Pour toute région (A) ayant une symétrie (A'), on peut avoir la simplification suivante:

$$\alpha_{ik}^{(A \text{ et } A')} = \sum_{j=1}^L D_{ij}^{(A)} z_{jk}^{(A)} + \sum_{j=1}^L D_{ij}^{(A')} z_{jk}^{(A')} \quad (V-39)$$

avec:

$\alpha_{ik}^{(A \text{ et } A')}$ : vitesse normale au panneau (i) en mode (k) induite par la distribution de doublets sur les panneaux (j) des régions (A) et (A')

$D_{ij}^{(A)}$ : facteur de vitesse normale au panneau (j) de la région (A) induit par le panneau (i)

$D_{ij}^{(A')}$ : facteur de vitesse normale au panneau (j) de la région (A') induit par le panneau (i)

$z_{jk}^{(A)}$  : charge au panneau (j) de la région (A) en mode (k)

$z_{jk}^{(A')}$  : charge au panneau (j) de la région (A') en mode (k)

Selon les conditions d'écoulement symétriques ou anti-symétriques,

$$z_{jk}^{(A')} = \delta^{(A)} z_{jk}^{(A)} \quad (V-40)$$

avec  $\delta^{(A)} = 1$  ou  $-1$

Enfin l'équation V-39 devient:

$$a_k^{(A \text{ et } A')} = \sum_{j=1}^L \left[ D_{lj}^{(A)} + \delta^{(A)} D_{lj}^{(A')} \right] z_{jk}^{(A)} \quad (V-41)$$

On a pu ainsi réduire le nombre d'inconnues à L tout en tenant compte des effets des L panneaux de (A) et des L panneaux de (A').

## V.5 COMPORTEMENT DE LA FONCTION KERNEL

Puisque la nature de la fonction Kernel aura une influence directe sur l'intégration numérique, nous avons jugé utile d'aborder les formes planes et non planes de cette fonction. Il est possible d'étudier le comportement stationnaire de la fonction Kernel puisqu'elle peut se ramener à une approche analytique. De plus, elle peut donner certaines indications sur la fonction Kernel oscillatoire.

D'après l'approche de Berman et al [46], la figure V.7 fournit une comparaison entre la fonction Kernel non plane ( $z_0 \neq 0$ ) et la fonction Kernel plane ( $z_0 = 0$ ). Dans cette figure les valeurs de la fonction Kernel sont représentées en fonction de la variable  $y_0$  au voisinage de  $y_0 = 0$  pour différentes valeurs de la distance verticale  $z_0$  et pour la distance longitudinale  $x_0 = 1$ , les variations longitudinales ne sont pas considérées puisque les deux fonctions Kernel plane et non plane sont similaires suivant la coordonnée  $x_0$  [46].

La figure montre clairement, que la variation latérale de la fonction Kernel non plane au voisinage du point de contrôle est très différente de celle de la fonction Kernel plane, et la singularité de la fonction Kernel non plane au point  $y_0=0$  n'est pas parfaite, c'est à dire malgré que les valeurs deviennent très grandes mais elles restent finies.

Bien que la fonction représentée dans la figure est symétrique par rapport à  $y_0=0$ , ce qui n'est pas le cas pour des combinaisons générales de surfaces portantes non planes et non parallèles, la quantité d'asymétrie qui s'introduit est, cependant, petite en comparaison avec la partie symétrique de la fonction Kernel.

La discussion précédente s'applique aux surfaces portantes non planes, mais coplanaires. Pour le cas général des configurations non planes, il est nécessaire de considérer la variable  $r^2=y_0^2+z_0^2$  au lieu de la variable  $z_0$ , et la difficulté d'intégration en effet se rencontre quand  $r^2$  tend vers zéro.

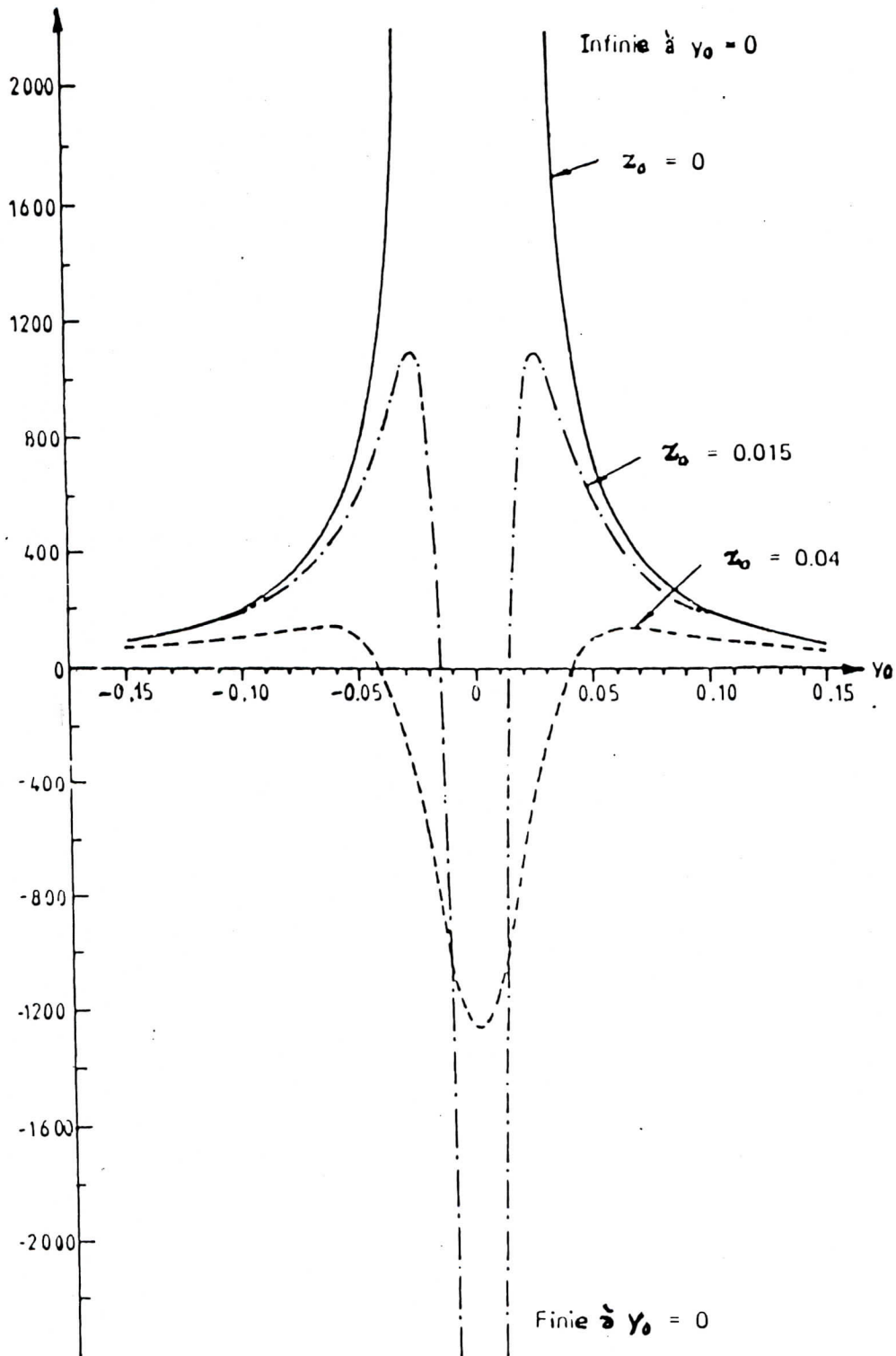


Fig. V.7 Comparaison des fonctions Kernel plane et non plane pour  $\mu = 0$  et  $M_\infty = 0.6$

## CHAPITRE VI

### RESULTATS ET DISCUSSIONS

Pour valider notre programme de calcul, base sur la méthode discrète, avec le code de Davies et ainsi d'autres résultats publiés dans des différents articles, nous avons considéré quatre exemples de surfaces portantes à configurations différentes et avec une variable de valeurs du nombre de Mach et de fréquence réduite.

#### VI.1 AILES ISOLEES

##### V.1.1 Aile plane en flèche et effilée

L'aile en question [Fig.VI.10] dans un écoulement stationnaire ( $\nu=0$ ) et à nombre de Mach 0.8 possède les caractéristiques suivantes:

angle de flèche =  $45^{\circ}$   
allongement = 3  
rapport d'effilement = 0.5  
angle d'incidence =  $4^{\circ}$

Dans la référence [42], Albano et Rodden ont représenté la différence de la distribution de pression  $\Delta C_p$  comme résultats. La distribution de panneaux choisie est la même que celle utilisée par ces auteurs, en effet:

6 panneaux suivant la corde et 8 panneaux suivant la semi-envergure, ou tout simplement  $(N_c \times N_s) = (6 \times 8)$

Les résultats donnés par la figure VI.1, pour les stations à l'emplanture et au près du bord latéral, comparés à l'expérience et aux résultats d'Albano et Rodden montrent bien la validité de nos résultats pour les ailes planes en écoulement stationnaire.

### V.1.2 Aile rectangulaire d'allongement 2

L'aile rectangulaire a un allongement 2 [Fig.VI.11], est supposée vibrer suivant les deux modes symétriques suivantes:

$$f_1 = 1.0 \quad (\text{VI-1})$$

$$f_2 = x/b \quad (\text{VI-2})$$

Dans le premier mode, l'aile effectue un battement au mode libre transversale, dans le second mode, elle effectue un mode propre de tangage par rapport au bord d'attaque.

Les résultats donnés par le tableau VI.1, sont relativement proches pour les deux méthodes utilisées malgré que l'allongement de la voilure est faible et que le nombre de points choisis (4 x 5) pour la première méthode et le nombre de panneaux (35) et le nombre de subdivisions des intervalles d'intégrations (3,5) choisis pour la deuxième méthode sont petits.

### VI.2 EMPENNAGE EN T

La méthode des panneaux, "D-L-M", a été appliquée à un empennage en forme de T dont les deux voilures sont effilées et en flèche [Fig.VI.12]. Cet empennage est analysé premièrement par Stark et qu'elle porte comme particularité l'extension du stabilisateur au delà du bord de fuite de la dérive. La longueur de référence de cette configuration est prise comme étant le semi-envergure du stabilisateur.

Le T de Stark est entrain d'osciller en trois modes rigides qui peuvent être exprimés analytiquement par:

$$f_1(x,y,z) = 3 \cdot ((x/b) + 0.15577) \quad \text{sur la dérive} \quad (\text{VI-3})$$

$$= 0 \quad \text{sur le stabilisateur} \quad (\text{VI-4})$$

$$f_2(x,y,z) = 1. \quad \text{sur la dérive} \quad (\text{VI-5})$$

$$= 0 \quad \text{sur le stabilisateur} \quad (\text{VI-6})$$

$$f_3(x,y,z) = -z/b \quad \text{sur la dérive} \quad (\text{VI-7})$$

$$= (y/b) \quad \text{sur le stabilisateur} \quad (\text{VI-8})$$



La première fonction représente un mode de lacet de l'empennage vertical autour d'un axe vertical passant par le centre de la corde à l'emplanture de ce dernier, tandis que la deuxième et la troisième fonctions représentent respectivement le mode libre latéral de l'empennage vertical et le mode libre de roulis autour de l'intersection des deux empennages.

Le maillage choisi, est constitué de 85 panneaux:

- suivant la corde: 5 panneaux pour l'empennage horizontal et 4 panneaux pour l'empennage vertical;
- suivant l'envergure: 9 panneaux pour l'empennage horizontal et 10 panneaux pour l'empennage vertical.

Les résultats sont comparés à ceux trouvés par d'autres auteurs pour un écoulement stationnaire [Tab.VI.2] et pour un écoulement instationnaire [Tab.VI.3].

Sur le tableau VI.2, seuls les éléments non nuls de la matrice des coefficients des forces aérodynamiques généralisés sont représentés ( $Q_{qk}=0$  quand  $k \neq 1$ , les deuxième et troisième modes ne présentent ni angle d'attaque ni cambrure). Les intégrales présentant des singularités ont bénéficiés d'un plus grand nombre de subdivision des intervalles.

Sur le tableau VI.3, pour  $\nu=0.0$  et  $M_\infty=0.8$ , les valeurs des coefficients des forces aérodynamiques sont représentées en fonction d'une variété de nombre utilisés pour subdiviser les intervalles singulières et non singulières. On peut remarquer que, des nombres de sous-intervalles modérés peuvent donner de bon résultats pour des écoulements stationnaire. La deuxième remarque et la nature oscillatoire de la solution. En effet, au delà de certaines subdivisions des intervalles d'intégrations, les résultats oscillent dans une plage de valeurs très proches de la solution numérique recherchée. Si une plus grande précision est désirée, seul un raffinement du maillage par une augmentation du nombre de panneaux peut améliorer les résultats.

L'efficacité du programme de calculs des coefficients des forces aérodynamiques, tenant compte de la précision des résultats et du temps machine, serait un compromis optimal entre le nombre de panneaux et les nombres de subdivisions des intervalles d'intégration.

Pour ne pas perdre le sens physique du travail entrepris, les distributions de la différence des coefficients de pression ("demi valeurs") près de la jonction des deux empennages sont représentées et comparées à celle de la référence [34] dans les figures VI.2 et VI.3. De plus, les distributions de charge sont représentées suivant trois stations sur le stabilisateur [Fig.VI.4],[Fig.VI.5] et [Fig.VI.6], respectivement pour les trois modes propres, et suivant trois stations sur la dérive [Fig.VI.7], [Fig.VI.8] et [Fig.VI.9], respectivement pour les trois modes propres.

Dans le tableau VI.4, pour  $\nu=0.6$  et  $M_\infty=0.8$  (instationnaire), nos résultats sont comparés à ceux de Farrel (ayant utilisé 90 panneaux) et à ceux de Waldman. Les résultats de ce dernier représentés pour les deux cas différents de nombre de panneaux montre bien les difficultés rencontrées pour la convergence des problèmes instationnaire. La deuxième remarque est que nos résultats s'approchent plus vers ceux donnés par Waldman et aussi par Kalman, Rodden et Geising, et cela grâce à l'emploi d'une subdivision élevée des intervalles d'intégration.

### VI.3 COMBINAISON "AILES ET EMPENNAGE HORIZONTAL"

La combinaison aile-empennage horizontal est représentée dans la figure VI.13. Cette configuration est spécifiée par l'AGARD pour le calcul des coefficients des forces aérodynamiques généralisés.

La configuration est dans un écoulement subsonique avec un nombre de Mach  $M = 0.8$  et elle est entraînée d'osciller avec une fréquence réduite  $\nu$  variable en deux modes antisymétriques, définis analytiquement par:

$$f_1(x,y,z) = (y/b)((x/b) - 2.25|y/b| - 0.85) \quad \text{sur l'aile (VI-9)}$$

$$= (y/b) \quad \text{sur l'empennage (VI-10)}$$

$$f_2(x,y,z) = (y/b)(|y|/b) \quad \text{sur l'aile (VI-11)}$$

$$= ((x/b) - 3.35)\text{sgn}(y/b) \quad \text{sur l'empennage (VI-12)}$$

Le premier mode est une torsion de l'aile autour d'un axe à 38 % de la corde locale, couplé avec un mode libre de roulis de l'empennage. Dans le second mode, l'aile est en oscillation de flexion parabolique couplée avec l'oscillation de tangage de l'empennage.

Pour notre méthode, nous avons utilisés un nombre de panneaux (5 x 9) pour l'aile et (4 x 9) pour l'empennage, et cela pour les deux décalages en hauteurs entre l'aile et l'empennage [Tab.VI.5] et [Tab.VI.6].

Le tableau VI.5, présente les coefficients aérodynamiques pour deux valeurs de fréquences réduites,  $\nu=0$  et  $\nu=1.5$ , pour le cas où l'aile et l'empennage sont coplanaire ( $H/b = 0$ ), les résultats se comparent favorablement avec ceux obtenus par la méthode de la fonction Kernel (Davies et Albano - Perkinson - Rodden) et ceux obtenus par la méthode des panneaux. Particulièrement nos résultats sont très proches de ceux de Waldman.

Le tableau VI.6, présente les résultats des coefficients aérodynamiques pour le cas non plane avec  $H/b=0.6$  pour des fréquences réduites  $\nu=0$ ,  $\nu=0.6$  et  $\nu=1.5$ , encore nos résultats comparés à ceux obtenus par d'autres auteurs justifient bien la validité de notre programme.

Avec la même configuration, et même nombre de Mach et de fréquence réduite, il est possible de déduire les résultats donnant les coefficients aérodynamiques pour d'autres modes propres de vibrations, car ces derniers n'interviennent pas dans le calcul de la matrice des coefficients d'influence ce qui nous a permis de gagner énormément le temps de calcul pour les nouveaux modes propres suivants [45]:

|  |                 |         |
|--|-----------------|---------|
| $f_1(x,y,z) = (y/b)((x/b) - 2.25 y/b  - 0.85)$ | sur l'aile      | (VI-13) |
| $= 0$  | sur l'empennage | (VI-14) |
| $f_2(x,y,z) = (y/b)( y /b)$                    | sur l'aile      | (VI-15) |
| $= 0$  | sur l'empennage | (VI-16) |
| $f_3(x,y,z) = 0$                               | sur l'aile      | (VI-17) |
| $= (y/b)$                                      | sur l'empennage | (VI-18) |
| $f_4(x,y,z) = 0$                               | sur l'aile      | (VI-19) |
| $= ((x/b) - 3.35)\text{sgn}(y/b)$              | sur l'empennage | (VI-20) |

Les deux résultats sont relativement proches malgré le nombre élevé de panneaux, (8 x 12) pour l'aile et (7 x 12) pour l'empennage, employé par Rodden [Tab.VI.7].

D'après la synthèse de tous les résultats obtenus, nous pouvons tirer enfin les remarques suivantes:

- pour une configuration donnée, l'augmentation du nombre de Mach et/ou la fréquence réduite s'accompagne par l'augmentation des charges aérodynamiques, et par suite, l'augmentation des coefficients aérodynamiques généralisés.
- les conditions de Kutta sont bien vérifiées sur toutes les courbes présentées; en effet, les modules des charges tendent vers l'infini au bords d'attaques et s'annulent aux bords de fuite.
- bien que les figures VI.4, VI.5, VI.6, VI.7, VI.8 et VI.9 semblent ne pas être présentées en comparaison avec d'autres auteurs, elles sont validées implicitement par le tableau VI.3.

| $M_\infty = 0.8$<br>$\nu = 1.0$ |            | Méthode de<br>Kernel | Méthode<br>des<br>Doublets |
|---------------------------------|------------|----------------------|----------------------------|
|                                 |            | Partie<br>réelle     | $Q'_{11}$                  |
| $Q'_{12}$                       | -3.3194    |                      | -3.2483                    |
| $Q'_{21}$                       | 0.9672     |                      | 0.9042                     |
| $Q'_{22}$                       | -0.4992    |                      | -0.4885                    |
| Partie<br>imaginaire            | $Q''_{11}$ | -3.2623              | -3.2953                    |
|                                 | $Q''_{12}$ | -3.3237              | -3.4078                    |
|                                 | $Q''_{21}$ | -0.8487              | -0.8376                    |
|                                 | $Q''_{22}$ | -2.1935              | -2.0916                    |

Tab. VI.1 : Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de l'aile rectangulaire

|                  | v 0.0<br>M <sub>∞</sub> 0.0 |                                     |                 |                               | v 0.6<br>M <sub>∞</sub> 0.6 |                                     |                 |  |        |         |
|------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------|--|--------|---------|
|                  | Stark<br>[34]               | Kalman<br>Kodden<br>Geising<br>[34] | Waldman<br>[34] | Nos<br>résultats<br>(5*, 9**) | Stark<br>[34]               | Kalman<br>Kodden<br>Geising<br>[34] | Waldman<br>[34] | Nos résultats<br>1*, 1**, 3*, 5**, 5*, 9** |        |         |
| Q <sub>11</sub>  | -0.6220                     | -0.6095                             | 0.9426          | 0.5502                        | 0.7137                      | 0.7204                              | 0.7169          | 0.7764                                     | 0.7140 | -0.7101 |
| ∠Q <sub>11</sub> | 325.03                      | 326.47                              | 326.21          | 325.37                        | 325.00                      | 325.00                              | 325.24          | 325.00                                     | 325.00 | 325.27  |
| Q <sub>12</sub>  | -0.7813                     | 0.7965                              | 0.8229          | 0.8053                        | 0.7700                      | 0.7700                              | 0.7700          | 0.8070                                     | 0.8046 | 0.8045  |

Tab. VI.2 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de l'empennage en T pour v=0 (stationnaire)

|                  | Davies<br>[34] | Zwan<br>[34] | Farral<br>[34] | Stark<br>[34] | Kalman<br>Kodden<br>Geising<br>[34] | Waldman<br>[34] | Nos<br>résultats<br>(5*, 13**) |
|------------------|----------------|--------------|----------------|---------------|-------------------------------------|-----------------|--------------------------------|
| Q <sub>11</sub>  | 3.2421         | 3.2873       | 2.7470         | 3.0326        | 3.3527                              | 2.8362          | 2.8818                         |
| ∠Q <sub>11</sub> | 260.6          | 259.8        | 260.6          | 258.8         | 261.0                               | 260.3           | 260.6                          |
| Q <sub>12</sub>  | <b>0.3399</b>  | 0.3475       | 0.2799         | 0.3202        | 0.3431                              | 0.2908          | 0.2948                         |
| ∠Q <sub>12</sub> | 328.5          | 327.4        | 328.1          | 323.9         | 329.4                               | 327.5           | 327.2                          |
| Q <sub>13</sub>  | 0.1859         | 0.1865       | 0.1680         | 0.1695        | 0.1836                              | 0.1670          | 0.1720                         |
| ∠Q <sub>13</sub> | 61.5           | 60.8         | 61.6           | 62.4          | 61.9                                | 62.6            | 64.5                           |
| Q <sub>21</sub>  | 4.5670         | 4.5650       | 4.4291         | 4.4628        | 4.6612                              | 4.5025          | 4.5566                         |
| ∠Q <sub>21</sub> | 211.1          | 210.9        | 211.0          | 216.7         | 213.3                               | 211.3           | 211.5                          |
| Q <sub>22</sub>  | 0.7930         | 0.7936       | 0.7815         | 0.7758        | 0.8134                              | 0.7937          | 0.8021                         |
| ∠Q <sub>22</sub> | 282.1          | 281.9        | 282.3          | 281.2         | 283.3                               | 282.5           | 282.5                          |
| Q <sub>23</sub>  | 0.2191         | 0.2183       | 0.2287         | 0.2103        | 0.2269                              | 0.2283          | 0.2279                         |
| ∠Q <sub>23</sub> | 299.0          | 298.9        | 296.6          | 298.2         | 298.3                               | 296.9           | 296.7                          |
| Q <sub>31</sub>  | 1.1154         | 1.1006       | 1.1483         | 1.0772        | 1.1383                              | 1.1467          | 1.1356                         |
| ∠Q <sub>31</sub> | 224.7          | 224.6        | 225.3          | 222.7         | 224.9                               | 225.4           | 225.4                          |
| Q <sub>32</sub>  | 0.1897         | 0.1874       | 0.2000         | 0.1810        | 0.1948                              | 0.2000          | 0.1982                         |
| ∠Q <sub>32</sub> | 299.8          | 299.7        | 300.1          | 297.7         | 299.8                               | 300.2           | 300.6                          |
| Q <sub>33</sub>  | 0.3349         | 0.3349       | 0.3596         | 0.3319        | 0.3523                              | 0.3607          | 0.3658                         |
| ∠Q <sub>33</sub> | 289.6          | 289.6        | 288.8          | 289.8         | 289.4                               | 289.0           | 289.0                          |

Tab. VI.3 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de l'empennage en T pour v=0.6 et M<sub>∞</sub>=0.8 (instationnaire)

|Q<sub>ij</sub>|: module de Q<sub>ij</sub>    ∠Q<sub>ij</sub>: angle de Q<sub>ij</sub>  
 \* Nombre de sous intervalles pour tous les angles en degrés  
 \*\* Nombre de sous intervalles pour tous les angles en degrés

$M_\alpha = 0.8$

|                 |                 | Davies<br>[34]  | Albano<br>Perkinson<br>Rodden [34] | Albano<br>Rodden<br>[34] | Geising<br>Kalman<br>Rodden [34] | Farrell<br>[34] | Waldman<br>[34] | Nos<br>résultats |        |
|-----------------|-----------------|-----------------|------------------------------------|--------------------------|----------------------------------|-----------------|-----------------|------------------|--------|
| $v=0.0$         | $ Q_{11} $      | 0.4403          | 0.4425                             | 0.4554                   | 0.4401                           | 0.4377          | 0.4557          | 0.4543           |        |
|                 | $\angle Q_{11}$ | 359.9           | 359.9                              | 359.9                    | 359.9                            | 360.0           | 360.0           | 360.0            |        |
|                 | $ Q_{12} $      | 0.6202          | 0.6121                             | 0.6655                   | 0.6557                           | 0.6457          | 0.6652          | 0.6597           |        |
|                 | $\angle Q_{12}$ | 180.0           | 180.0                              | 180.0                    | 180.0                            | 180.0           | 180.0           | 180.0            |        |
|                 | $ Q_{21} $      | 0.1046          | 0.1054                             | 0.1107                   | 0.1044                           | 0.1049          | 0.1083          | 0.1100           |        |
|                 | $\angle Q_{21}$ | 180.3           | 180.3                              | 180.3                    | 180.3                            | 180.0           | 180.0           | 180.0            |        |
|                 | $ Q_{22} $      | 0.1759          | 0.1954                             | 0.2237                   | 0.2126                           | 0.2184          | 0.2261          | 0.2206           |        |
|                 | $\angle Q_{22}$ | 180.2           | 180.2                              | 180.2                    | 180.2                            | 180.0           | 180.0           | 180.0            |        |
|                 | $v=1.5$         | $ Q_{11} $      | 1.5865                             | 1.6022                   | 1.5496                           | 1.5688          | 1.4212          | 1.5713           | 1.4917 |
|                 |                 | $\angle Q_{11}$ | 314.2                              | 314.4                    | 311.2                            | 310.7           | 312.3           | 310.8            | 312.2  |
| $ Q_{12} $      |                 | 0.9180          | 0.8910                             | 0.9081                   | 0.9495                           | 0.8752          | 0.9482          | 0.8928           |        |
| $\angle Q_{12}$ |                 | 265.5           | 266.3                              | 267.2                    | 265.4                            | 265.4           | 265.0           | 265.8            |        |
| $ Q_{21} $      |                 | 1.0043          | 1.0099                             | 1.0550                   | 1.0511                           | 0.9507          | 1.0653          | 1.0090           |        |
| $\angle Q_{21}$ |                 | 291.7           | 291.4                              | 287.2                    | 288.5                            | 289.9           | 289.0           | 289.0            |        |
| $ Q_{22} $      |                 | 1.2845          | 1.2386                             | 1.2144                   | 1.2719                           | 1.1448          | 1.2745          | 1.1740           |        |
| $\angle Q_{22}$ |                 | 294.7           | 294.3                              | 293.7                    | 292.9                            | 294.1           | 293.2           | 294.0            |        |

3\*, 5\*\*

5\*, 9\*\*

Tab. VI.5 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de la combinaison "aile-empennage" disposés sur un même plan,  $H/b = 0$  (pour deux modes propres)

$|Q_{ij}|$  : module de  $Q_{ij}$      $\angle Q_{ij}$  : argument de  $Q_{ij}$

- \* : Nombre de sous intervalles pour toute intégrale non singulière
- \*\* : Nombre de sous intervalles pour toute intégrale singulière

|                      |                 | Davies<br>[34] | Albano<br>Perkinson<br>Rodden<br>[34] | Farrell<br>[34] | Waldman<br>[34] | Nos<br>résultats |
|----------------------|-----------------|----------------|---------------------------------------|-----------------|-----------------|------------------|
| $M_x=0.8$<br>$V=0.0$ | $ Q_{11} $      | 0.1470         | 0.1490                                | 0.1374          | 0.1432          | 0.1430           |
|                      | $\angle Q_{11}$ | 359.8          | 359.8                                 | 360.0           | 360.0           | 360.0            |
|                      | $ Q_{12} $      | 0.6402         | 0.6312                                | 0.6661          | 0.6868          | 0.6811           |
|                      | $\angle Q_{12}$ | 180.1          | 180.1                                 | 180.0           | 180.0           | 180.0            |
|                      | $ Q_{21} $      | 0.2404         | 0.2405                                | 0.2527          | 0.2669          | 0.2646           |
|                      | $\angle Q_{21}$ | 180.1          | 180.1                                 | 180.0           | 180.0           | 180.0            |
|                      | $ Q_{22} $      | 0.1619         | 0.1817                                | 0.1958          | 0.2117          | 0.2067           |
|                      | $\angle Q_{22}$ | 180.3          | 180.2                                 | 180.0           | 180.0           | 180.0            |
| $M_x=0.8$<br>$V=0.6$ | $ Q_{11} $      | 0.4001         |                                       |                 | 0.4114          | 0.4003           |
|                      | $\angle Q_{11}$ | 302.7          |                                       |                 | 300.0           | 300.6            |
|                      | $ Q_{12} $      | 0.7020         |                                       |                 | 0.7462          | 0.7349           |
|                      | $\angle Q_{12}$ | 211.8          |                                       |                 | 211.8           | 211.6            |
|                      | $ Q_{21} $      | 0.3726         |                                       |                 | 0.4071          | 0.4007           |
|                      | $\angle Q_{21}$ | 240.4          |                                       |                 | 239.0           | 238.9            |
|                      | $ Q_{22} $      | 0.4670         |                                       |                 | 0.4924          | 0.4670           |
|                      | $\angle Q_{22}$ | 262.1          |                                       |                 | 256.5           | 256.0            |
| $M_x=0.8$<br>$V=1.5$ | $ Q_{11} $      | 1.1009         | 1.1200                                | 0.9780          | 1.0837          | 1.0268           |
|                      | $\angle Q_{11}$ | 301.3          | 301.3                                 | 299.9           | 298.3           | 299.3            |
|                      | $ Q_{12} $      | 1.1342         | 1.1128                                | 1.0735          | 1.1583          | 1.0996           |
|                      | $\angle Q_{12}$ | 251.7          | 251.9                                 | 249.5           | 250.0           | 250.3            |
|                      | $ Q_{21} $      | 0.9072         | 0.9122                                | 0.8259          | 0.9239          | 0.8780           |
|                      | $\angle Q_{21}$ | 278.0          | 277.7                                 | 276.9           | 275.8           | 276.0            |
|                      | $ Q_{22} $      | 1.3867         | 1.3397                                | 1.2082          | 1.3541          | 1.2417           |
|                      | $\angle Q_{22}$ | 289.2          | 288.6                                 | 287.2           | 286.4           | 287.0            |

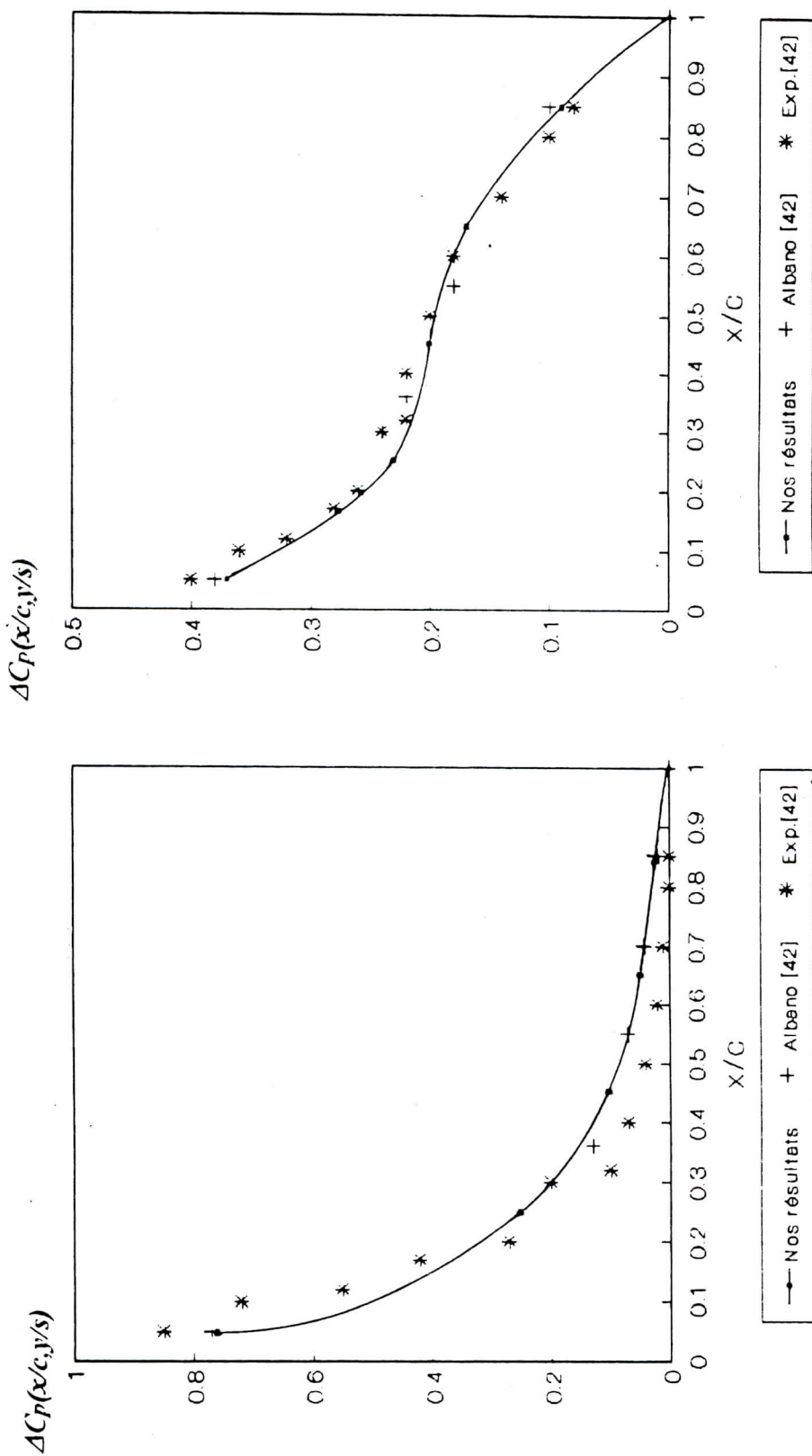
Tab. VI.6 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de la combinaison "aile-empennage" disposés sur deux plans parallèles décalés de  $H/b=0.6$

$|Q_i|$ : module de  $Q_i$        $\angle Q_i$ : argument de  $Q_i$   
 \* Nombre de sous-intervalles pour toute intégrale non-singulière  
 \*\* Nombre de sous-intervalles pour toute intégrale singulière



|               |            | $M_\infty = 0.8$<br>$\nu = 1.5$     |                  |                                     |                  |         |
|---------------|------------|-------------------------------------|------------------|-------------------------------------|------------------|---------|
|               |            | Rodden<br>Geising<br>Kalman<br>[45] | Nos<br>résultats | Rodden<br>Geising<br>Kalman<br>[45] | Nos<br>résultats |         |
| Partie réelle | $Q_{11}^I$ | 0.1649                              | 0.1522           | $Q_{11}^{II}$                       | -0.1878          | -0.1598 |
|               | $Q_{12}^I$ | 0.1288                              | 0.1117           | $Q_{12}^{II}$                       | 0.0342           | 0.0358  |
|               | $Q_{13}^I$ | -0.0101                             | -0.0082          | $Q_{13}^{II}$                       | -0.0058          | -0.0057 |
|               | $Q_{14}^I$ | -0.0254                             | -0.0229          | $Q_{14}^{II}$                       | 0.0096           | 0.0060  |
|               | $Q_{21}^I$ | -0.2255                             | -0.1945          | $Q_{21}^{II}$                       | -0.4126          | -0.3926 |
|               | $Q_{22}^I$ | 0.3385                              | 0.3377           | $Q_{22}^{II}$                       | -0.2228          | -0.2140 |
|               | $Q_{23}^I$ | -0.0187                             | -0.0169          | $Q_{23}^{II}$                       | -0.0086          | -0.0097 |
|               | $Q_{24}^I$ | -0.0396                             | -0.0404          | $Q_{24}^{II}$                       | 0.0194           | 0.0144  |
|               | $Q_{31}^I$ | 0.5505                              | 0.5413           | $Q_{31}^{II}$                       | -0.1593          | -0.1362 |
|               | $Q_{32}^I$ | 0.3995                              | 0.3889           | $Q_{32}^{II}$                       | 0.1317           | 0.1420  |
|               | $Q_{33}^I$ | 0.3178                              | 0.3159           | $Q_{33}^{II}$                       | -0.4406          | -0.4355 |
|               | $Q_{34}^I$ | -0.5786                             | -0.5347          | $Q_{34}^{II}$                       | -0.8065          | -0.7778 |
|               | $Q_{41}^I$ | 0.2755                              | 0.2602           | $Q_{41}^{II}$                       | -0.0368          | -0.0319 |
|               | $Q_{42}^I$ | 0.1846                              | 0.1781           | $Q_{42}^{II}$                       | 0.1004           | 0.0998  |
|               | $Q_{43}^I$ | 0.3024                              | 0.2804           | $Q_{43}^{II}$                       | -0.2065          | -0.2007 |
|               | $Q_{44}^I$ | 0.0108                              | 0.0018           | $Q_{44}^{II}$                       | -0.6783          | -0.6153 |

Tab. VI.7 Coefficients des forces aérodynamiques généralisées de la combinaison "aile-empennage" disposés sur un même plan,  $H/b = 0$  ( pour quatre modes propres)



(a)  $y/s = 0.924$

(b)  $y/s = 0.00$

Fig. VI.1 Distribution de la différence des coefficients de pression sur l'aile en flèche et effilée en écoulement stationnaire

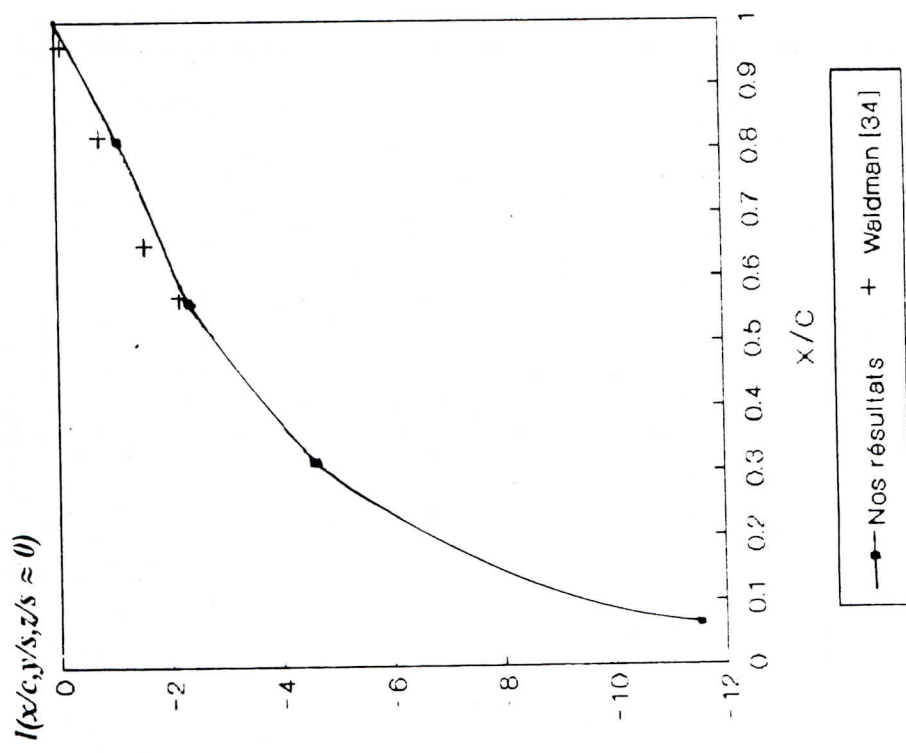
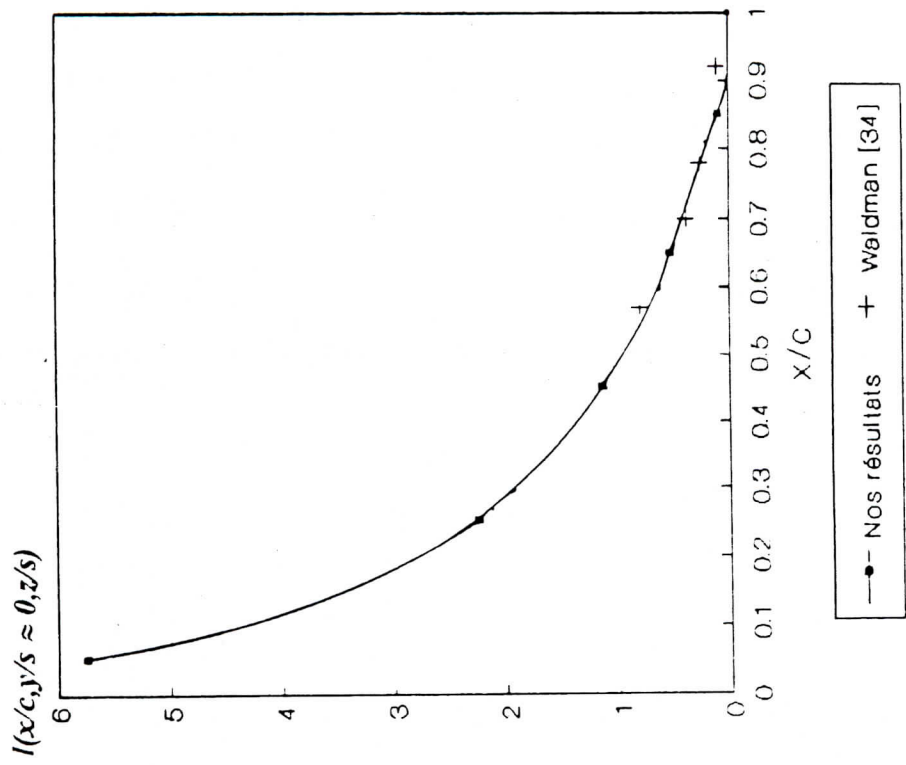


Fig. VI.3 Distribution de charge (due au mode propre de lacet) sur la dérive près de la jonction des deux surfaces (stationnaire)

Fig. VI.2 Distribution de charge (due au mode propre de lacet) sur le stabilisateur près de la jonction des deux surfaces (stationnaire)

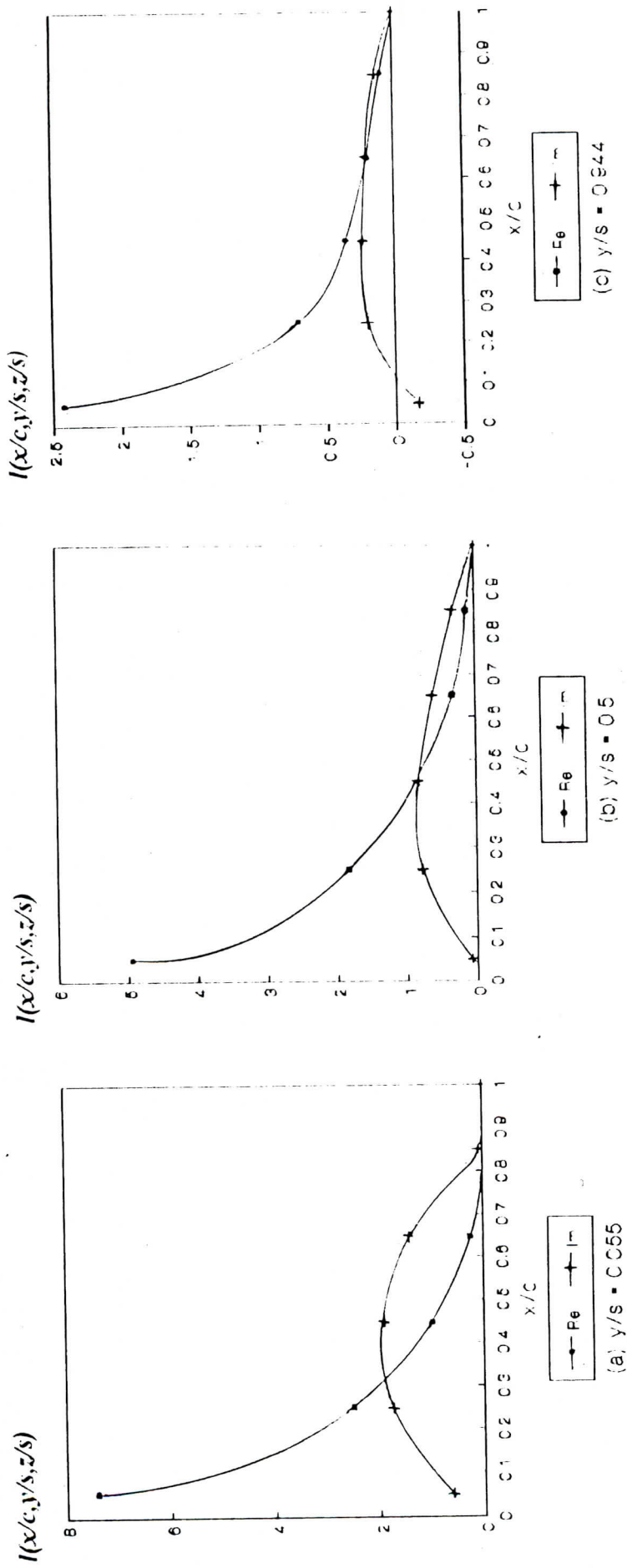


Fig. VI.4 Distribution de charge sur le stabilisateur  
 que au mode propre de lacet suivant trois stations

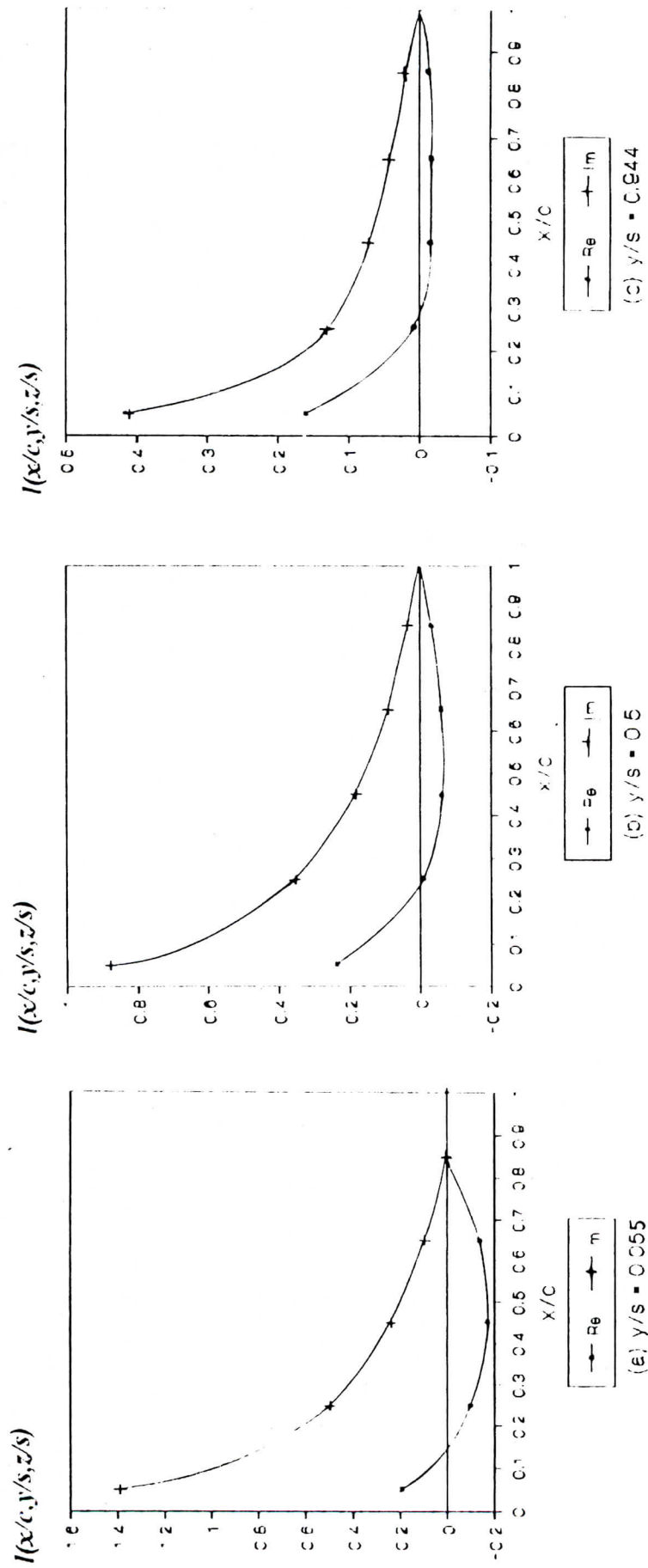


Fig. VI.5 Distribution de charge sur le stabilisateur due au mode propre lateral suivant trois stations

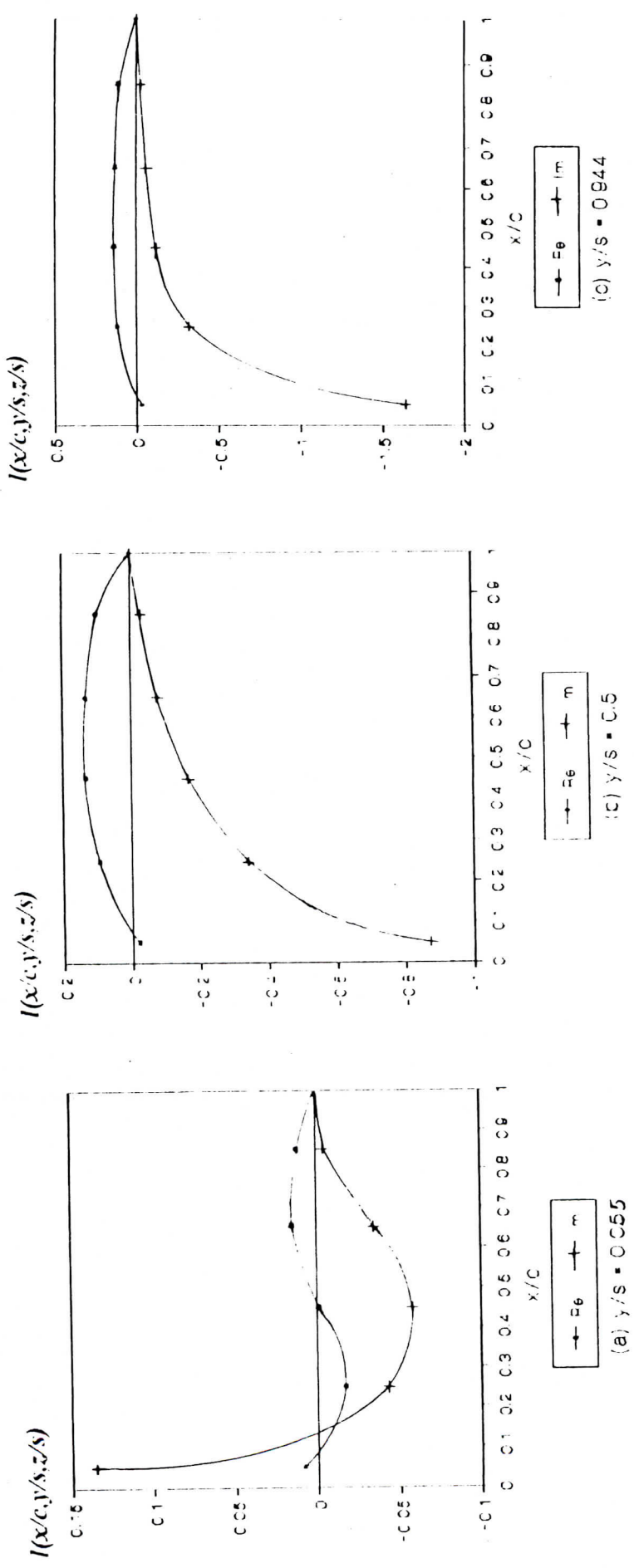


Fig. VI.6 Distribution de charge sur le stabilisateur due au mode propre de roulis suivant trois stations

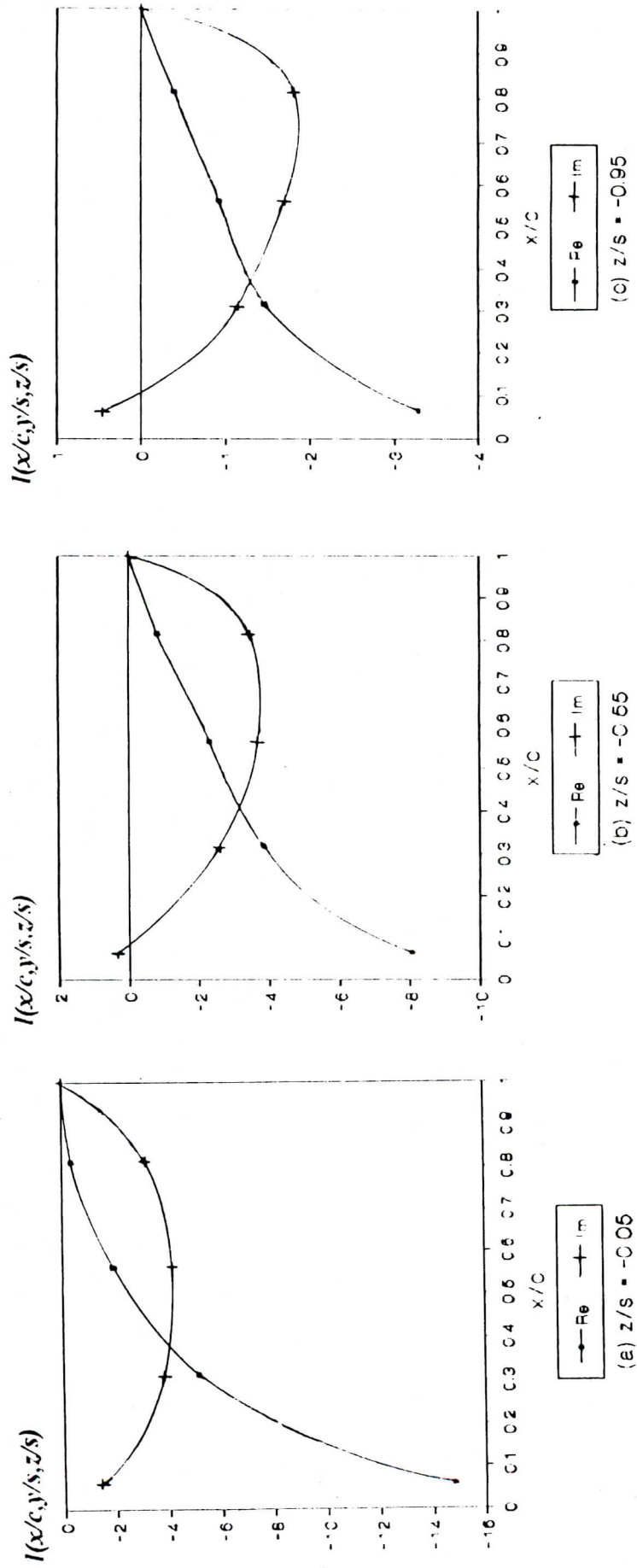


Fig. VI.7 Distribution de charge sur la dérive due au mode propre de lacet suivant trois stations

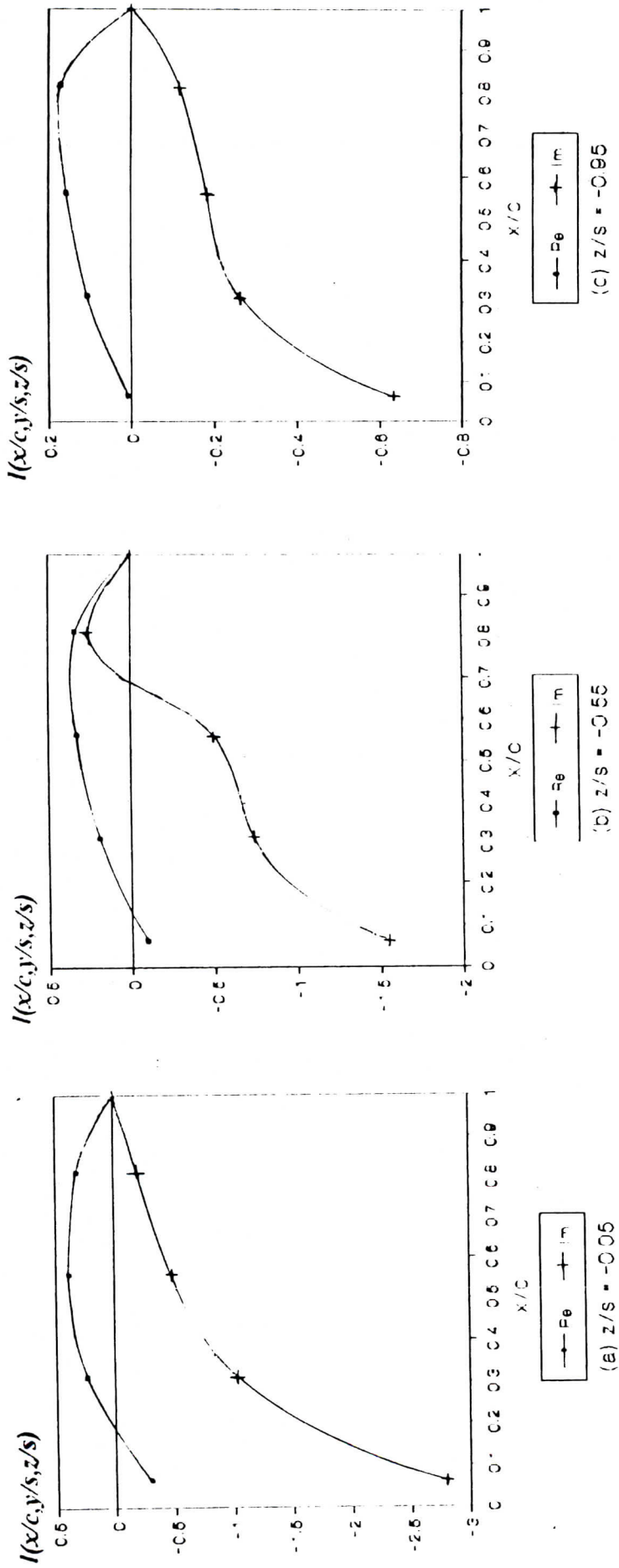


Fig. VI.8 Distribution de charge sur la dérive due au mode propre latéral suivant trois stations



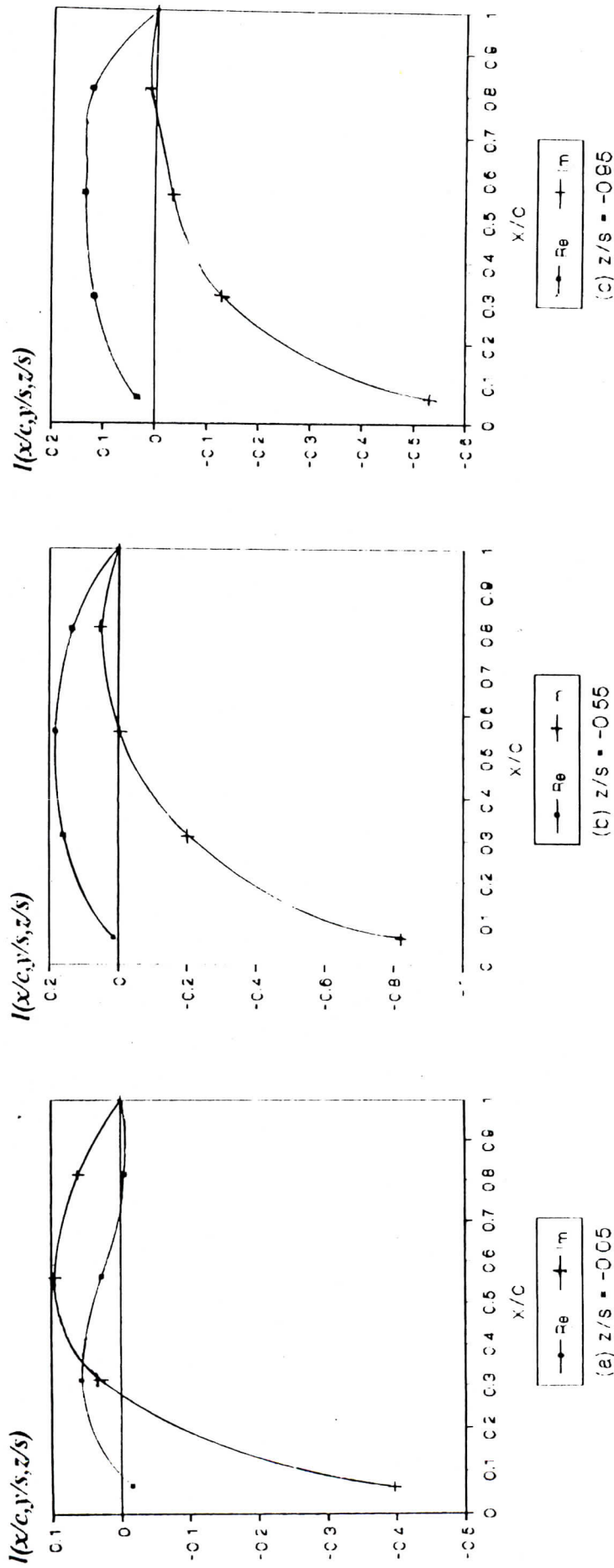


Fig. VI.9 Distribution de charge sur la dérive due au mode propre de roulis suivant trois stations

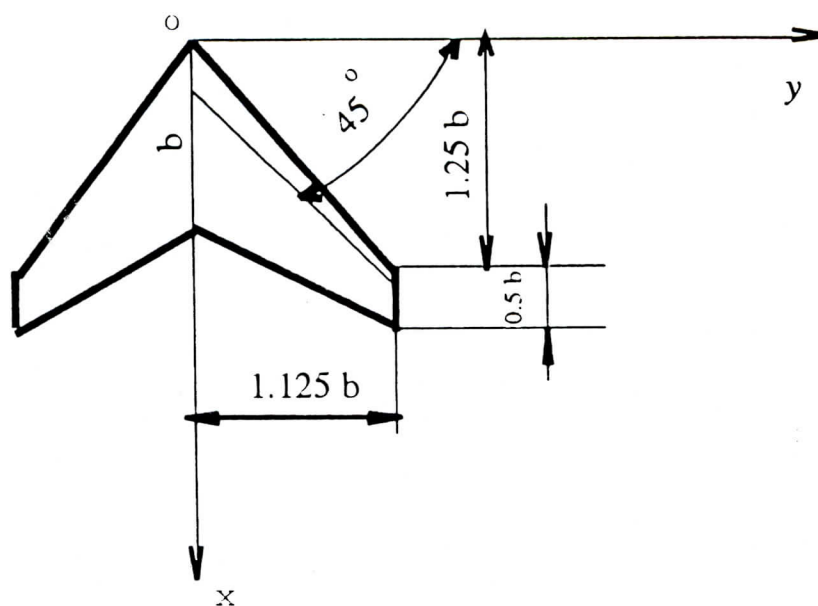


Fig. VI.10 Aile en flèche et effilée

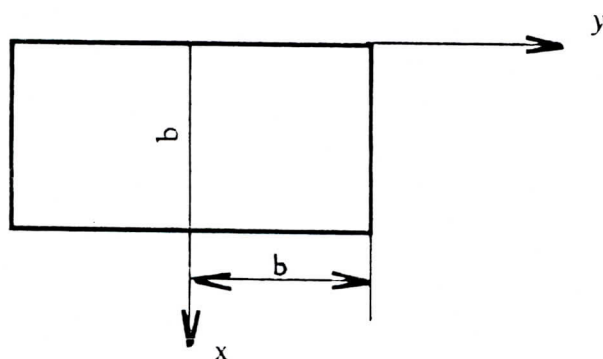


Fig. VI.11 Aile rectangulaire d'allongement 2

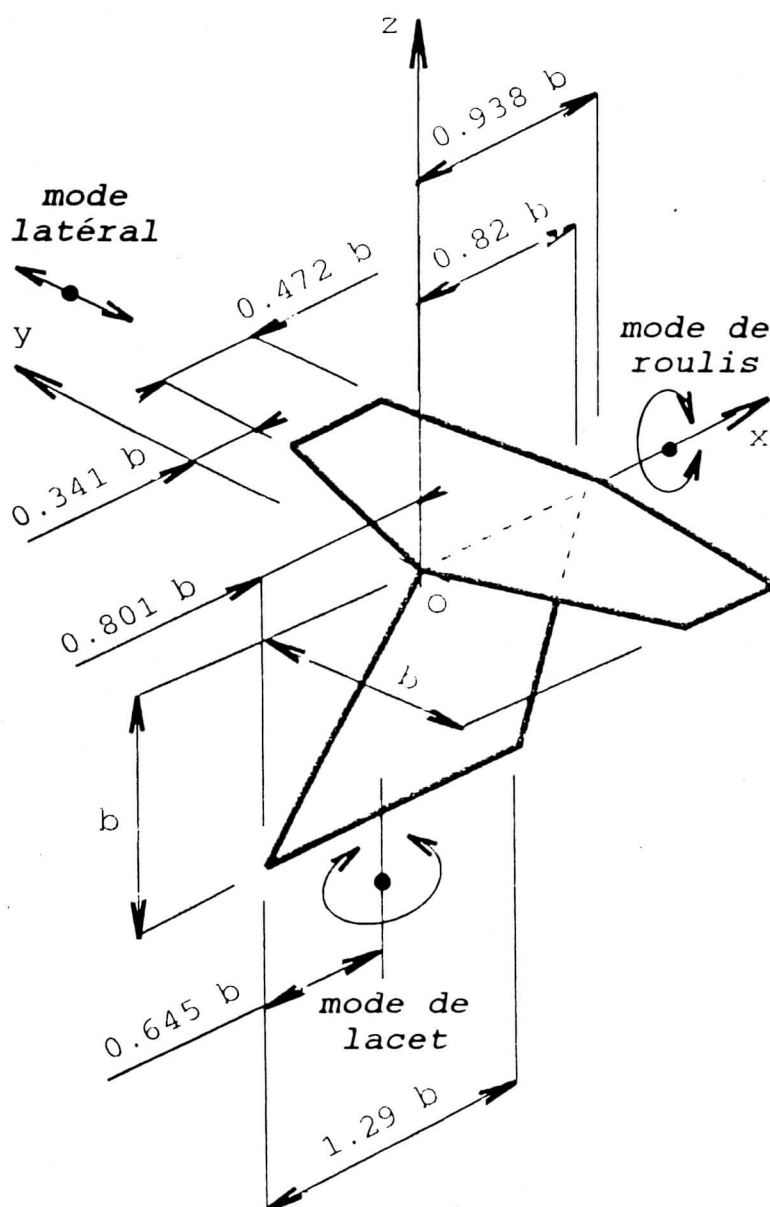


Fig. VI.12 Empennage en T

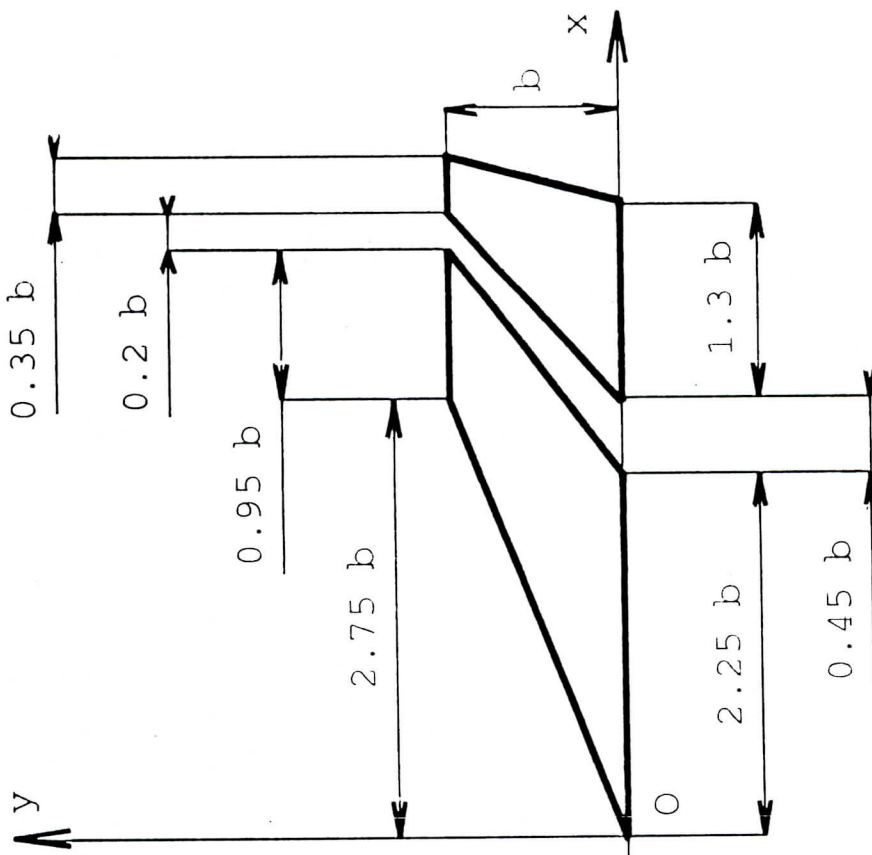


Fig. VI.13 Combinaison "aile-empennage"

## CONCLUSIONS

Quelques conclusions peuvent être tirées de l'étude théorique présentée et des résultats numériques obtenues.

- Premièrement, les deux méthodes présentées, donnent des résultats très similaires. Le raffinement de la discrétisation et le nombre de subdivision des intervalles d'intégration (méthode des panneaux "D-L-M") et le nombre de points choisis (Kernel) ont une influence directe sur le temps de calcul. Apparemment, la méthode de Kernel est plus avantageuse du point de vue du temps de calcul.

- La méthode de la fonction Kernel est limitée par le choix de la série au type de problème à traiter et est difficilement applicable aux problèmes de plusieurs voilures. Par contre les problèmes complexes de voilures à surfaces non-planes et d'interférences entre voilures et les empennages en T et en V peuvent être traités dans un seul programmes par la méthode des panneaux.

- Au fur et à mesure que la fréquence réduite augmente, la précision de nos résultats diminue malgré l'emploi d'un nombre élevé de sous intervalles. Ceci est dû à l'augmentation du nombre d'ondulations de la fonction Kernel qui entraînent de grandes variations de la charge le long de l'envergure et surtout le long de la corde. La solution est évidemment un plus grand raffinement du maillage et par conséquent la résolution de ce types de problèmes sur ordinateur ou super-ordinateur.

La formulation mathématique, de la méthode des doublets, donnée par l'équation intégrale est aussi valable en écoulement supersonique, pourvu qu'on utilise l'expression appropriée de la fonction Kernel [47] et qu'on prenne en considération les régions d'influence des cônes de Mach engendrés par chaque panneau, ou par chaque point de contrôle s'il s'agit de la méthode de la fonction Kernel. Il est à remarquer, que le traitement numérique du problème supersonique doit tenir compte aussi des singularités supplémentaires causées par les cônes de Mach.

Lorsqu'on se rapproche du régime transonique, on se heurte à deux difficultés. D'une part, le comportement de la fonction Kernel avec ses ondulations très serrées rend l'intégration numérique difficile et, d'autre part, la théorie linéaire elle même représente mal les conditions réelles de l'écoulement où des effets non linéaires très prononcés existent, dues notamment à la présence d'ondes de choc.

En plus des interférences de surfaces portantes, la présence de corps de diverses formes, tels que fuselage, nacelles, missiles ..., peut être rajoutée néanmoins avec une certaine difficulté. Le problème se pose aussi pour le traitement numérique évaluant les perturbations sur les corps en vibration [48]. Pour les avions porteurs de charges extérieures (missiles...), il faut s'attendre à ce que les modes de vibrations soient asymétriques ce qui exige un grand espace mémoire et demande beaucoup de temps de calcul.

## REFERENCES

1. Belotserkovskii, S.M., "Study of the Unsteady aerodynamics of lifting surfaces using the computer", Ann.Rev.Fluid Mech., 1977, pp.469-494.
2. Rahulan, T., "Aeroelasticity", Handout, University of Salford, 1991.
3. Souahi, A., "Aéroelasticité", cours de post-graduation, Université de Blida, institut de Mecanique, Algérie, 1994.
4. Grouas, J., "Dynamique des Structures", ENSICA, 1984.
5. Bisplinghoff, R.L., Ashley, H., and Halfman, "Aeroelasticity" Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955.
6. Souahi, A., "Structural Optimization of lifting surfaces to satisfy flutter requirements", Ph.D.Thesis, Cranfield University, College of Aerospace Vehicle Design, Juin 1986
7. Luis R. Miranda, "Application of Computational Aerodynamics to Airplane Design", J. Aircraft, Vol.21, No.6, June 1984, pp 355-370.
8. Cousteix, J., "Couche limite laminaire", Editions CEPADUES 111, rue Nicolas-Vauquelin 311 Toulouse, Dec.1984.
9. Ashley, H. and Rodden, W.P., "Wing-Body aerodynamic interaction", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.4,1972, pp.431-472.
10. John W. Marsteller, Guru P. Guruswamy, Henri T.Y.Yang, Peter M.Goorjian, "Effects of viscosity and modes on transonic aerodynamic and aeroelastic characteristics of wings", AIAA paper, No. 84-0870, 1984.
11. Steger, J.L. and Bailey, H.E., "Calculation of Transonic Aileron Buzz", AIAA paper 79-0134, Jan. 1979.

12. Cousteix, J., "Turbulence et couche limite", Editions CEPADUES 111, rue Nicolas-Vauquelin 311 Toulouse, sept.89.
13. Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", 7th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1979.
14. Levy, L.L., Jr., "An experimental and Computational Investigation of the Steady and Unsteady Transonic Flow Field about an Airfoil in a Solid-Wall Test channel", AIAA paper 77-678, June 1977.
15. Dean R. Chapman, "Computational Aerodynamics Development and Outlook", 17th Aerospace sciences meeting, New Orleans, La./Jan. 15-17, 1979.
16. John J. Bertin, Michael L. Smith, "Aerodynamics for Engineers", Second edition, Prentice Hall, Inc., 1989.
17. Jameson, A.J. and Baker, T.J. "Solution of the Euler equations for Complex Configurations", AIAA paper 83-1929, July 1983.
18. Clarke, D.K., Salas, M.D., and Hassan, H.A., "Euler Calculations for Multi-element Airfoils Using Cartesian Grids", AIAA Journal, Vol.24, March 1986, pp. 355-358.
19. Woodward, F.A., "Analysis and Design of Wing-Body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds", J. Aircraft, Nov.-Dec. 1968, Vol.5, No.6, pp. 528- 534.
20. Szema, K.Y., W.L. Riba, V. Shankar, and J.J.Gorski, "Computation of Supersonic Flows over Three- Dimensional Configuration", J. Aircraft, Dec. 1985, V.22, No.12, pp. 1079-1084.
21. Bailey F.R., and W.F. Ballhaus, "Comparisons of Computed and Experimental Pressures for Transonic Flows about Isolated Wings and Wing-Fuselage Configurations", Presented in SP-347, Aerodynamic Analyses Requiring Advanced Computers, Part II, NASA, Mar. 1975.



22. Ashley and Landahl, M., "Aerodynamic of Wings and Bodies", Reading Mass., Addison-Wesley, 1965.
23. Carmichael R.L. and Ericson L.L., "PAN-AIR- A high order panel method for predicting subsonic and supersonic linear potential flows about arbitrary configurations", AIAA paper 81-1255, 1981.
24. Rubbert, P.E., "Theoretical characteristics of Arbitrary wings by a non planar Vortex Lattice Method", Report D6-9244, 1964, The Boeing Co. Seattle, Washington.
25. Levin D., and Katz J., "Vortex Lattice Method for the calculation of the non steady Separated Flow over Delta Wings", J. Aircraft, Vol.18, Dec. 1981, pp. 1032-1037.
26. Atta E.H., Kandil O.A., Mook D.T., and Nayfeh A.H., "Unsteady Aerodynamic Loads on Arbitrary Wings Including Wing-Tip Leading-Edge Separation", AIAA paper 77-156, 1977
27. Larguier, R. et Roggero, F., "Calcul aérodynamiques de Configurations Tridimensionnelles Complexes", Onera, No.4, Juillet-Août 1993, pp.25-41.
28. Labrujere, T.E., and Sytsma, H.A., "Aerodynamic Interference Between Aircraft Components: the Possibility of Prediction", ICAS paper, No. 72-49, Aug. 1979.
29. Morino, L., Chen, L.T., and Suciù, E.O., "Steady and Oscillatory Subsonic and Supersonic Aerodynamics Around Complex Configurations", AIAA, Mar. 1975, pp. 368-374.
30. Dat, R., "Vibration aéroélastiques", ENSAE, Toulouse, France, 1978.
31. Vivian, H.T. and Andrew, L.V., "Unsteady Aerodynamics for advanced Configurations", Part I-FDL-TDR-64-152, May. 1965, AFFDL.

32. Landahl, M.T., "Kernel Function for Non Planar Oscillating Surfaces in a Subsonic flow", AIAA, Vol.5, No.5, May. 1967, pp. 1045-1046.
33. Albano, E., Perkinson, F., and Rodden, W.P. "Subsonic lifting-surface theory aerodynamics and flutter analysis of interfering wing/horizontal tail configurations" AFFDL-TR-70-59, Ohio, Sept. 1970.
34. Waldman, W., "Determination of Unsteady Airforces on General Combinations of Interfering Lifting Surfaces Oscillating in Subsonic flow", ARL-Structures Report-412 Aeronautical Research Labs., Melbourne, Australia, Jan. 85
35. Multhop, H., "Methods for calculating the lift distribution of Wings,(Subsonic lifting-Surface theory)", ARCR and M. No.2884, 1950.
36. Davies D.E., "An Application of Flax's Variational Principle to lifting-Surface Theory", ARCR and M., No 3564, 1967.
37. Davies D.E., "Theoretical Determination of Subsonic Oscillatory Airforce Coefficients", RAE Report, R. and M. No. 3804, May. 1976.
38. Dulmovits, J., "A lifting Surface Method for Calculating Load Distributions and the Aerodynamic Influence Coefficient Matrix for Wings in Subsonic flow", Report ADR 04-02-64.1, 1964, GAEC, New york.
39. Hedman, S.G., "Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady State Loadings on Thin Elastic Wings", Report 105, Oct. 1965 , Aeronautical Research Institute of Sweden.
40. Belotserkovskii,S.M., "The theory of thin Wings in Subsonic Flow, Plenum Press, New york, 1967.

41. Landahl, M.T. and Stark, V.J.E., "Numerical Lifting-Surface Theory-Problems and Progress", AIAA, VOL.6, No.11, Nov. 1968, pp. 2049-2060.
42. Albano, E. and Rodden, W.P., "A Doublet- Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows", AIAA, Vol.7, No.2, Feb. 1969, pp. 279-285.
43. Petkas, J.S., "Oscillatory Aerodynamic Representation Using Discrete Load Line Element (DLLE) Method", Unpublished Memorandum, Feb.1969, Lockheed-Georgia.
44. Houbolt, J.C., "Some New Concepts in Oscillatory Lifting Surface Theory", Report AFFDL-TR-69-2, June 1969, US, Air Force Base, Ohio.
45. Rodden, W.P., Geising, J.P. and Kalman, T.P., "New Developments and Application of Subsonic Doublet-Lattice-Method for Nonplanar Configurations", AGARD-CP-80-71, paper No.4, 1971.
46. Berman, J.H., Shyprykevich, P. and Smedfield, J.B. "Unsteady aerodynamic forces for general wing/control-surface configurations in subsonic flow", Part 1, GAEC, R.No ADR 06-01-67-.1, Dec. 1967.
47. Harder R.L. and Rodden W.P., "Kernel function for Non-planar Oscillating Surfaces in Supersonic Flow", J. Aircraft, Vol.8, No 8, Aug. 1971, pp. 667-669.
48. Giesing, J.P., Kalman, T.P. and Rodden,W.P., "Subsonic Steady and Oscillatory Aerodynamics for Multiple Interfering Wings and Bodies", J. Aircraft, Oct. 1972, pp. 693-702.

## ANNEXE A

### DERIVATION DES COEFFICIENTS DES FORCES AERODYNAMIQUES GENERALISEES

Si au temps  $t$  la surface de la voilure se déplace selon un déplacement virtuel  $\delta\zeta$ , la variation du travail virtuel  $\delta W$  provoquée par les forces appliquées est donnée par:

$$\delta W = \int \int_S L(x,y,z,t) \delta\zeta(x,y,z,t) dS \quad (A-1)$$

avec:

$L(x,y,z,t)$  : pression aérodynamique nette s'exerçant au temps  $t$  au point  $P(x,y,z)$  sur un élément de la voilure d'aire  $dS$

A partir de l'équation I-3 et I-9, le déplacement virtuel peut être développé comme suit:

$$\delta\zeta(x,y,z,t) = b \sum_{k=1}^P f_k(x,y,z) \delta q_k(t) \quad (A-2)$$

De plus, dans un déplacement virtuel infinitésimal, le travail virtuel peut être exprimé alternativement en fonction des forces et des déplacements généralisés. En effet,

$$\delta W = \sum_{k=1}^P Q_k(t) \delta q_k(t) \quad (A-3)$$

où  $Q_k(t)$  est la force aérodynamique généralisée du  $k$  ème mode d'oscillation au temps  $t$ .

A partir des équations A-1, A-2 et A-3 et avec une simple substitution et identification, nous pouvons établir la relation donnant la force généralisée

$$Q_k(t) = b \int \int_S L(x,y,z,t) f_k(x,y,z) dS \quad ; \quad k = 1,p \quad (A-4)$$

Comme dans l'équation I-3, l'expression de la charge aérodynamique peut être considérée comme la somme des contributions de chaque mode;

En effet:

$$L(x,y,z,t) = \rho V_\infty^2 \sum_{k=1}^p l_k(x,y,z) q_k(t) \quad (A-5)$$

où  $l_k$  est la charge aérodynamique adimensionnelle provenant de la contribution du mode k.

La substitution de l'équation A-5 dans A-4 nous permet d'écrire:

$$Q_k(t) = \rho V_\infty^2 b \sum_{k=1}^p q_k(t) \int \int_S f_q(x,y,z) l_k(x,y,z) dS \quad ; \quad k = 1,p \quad (A-6)$$

Comme il est plus commode de travailler avec des coefficients adimensionnels, l'expression ci-dessus peut être exprimée sous la forme:

$$Q_k(t) = \rho V_\infty^2 b^3 \sum_{k=1}^p Q_{qk} q_k(t) \quad ; \quad k = 1,p \quad (A-7)$$

où les coefficients des forces aérodynamiques généralisées  $Q_{qk}$  sont données par:

$$Q_{qk} = \frac{1}{b^2} \int \int_S f_q(x,y,z) l_k(x,y,z) dS \quad ; \quad q,k = 1,p \quad (A-8)$$

## ANNEXE B

### DERIVATION DE LA FONCTION KERNEL

La fonction Kernel est dérivée pour le cas des surfaces planes par [37] et généralisée pour le cas des surfaces non planes par Vivian et Andrew [31] et puis par Landahl [32]. Pour des raisons de simplifications nous allons présenter les idées principales pour la compréhension de la démarche.

Soit le repère orthonormé (X,Y,Z) lié à l'écoulement qui peut être lié au repère (x,y,z) par les relations suivantes:

$$\begin{cases} x=X + V_{\infty}t \\ y=Y \\ z=Z \end{cases} \quad (B-1)$$

Dans ce nouveau repère l'équation du potentiel de perturbation II-26 s'écrit sous la forme d'équation d'ondes suivantes:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (B-2)$$

avec:

$$\frac{p-p_{\infty}}{\rho_{\infty}} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (B-3)$$

La vitesse normale à la surface moyenne  $Z=Z(y)$  est donnée par:

$$w_n(x,y,z_{\infty}(y),t) = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} \quad (B-4)$$

et qui est déterminée d'autre part par la condition aux limites suivante:

$$w_n(x,y,z_{\infty}(y),t) = \left( V_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \zeta(x,y,z_{\infty}(y),t) \quad (B-5)$$

La solution de l'équation d'onde peut être obtenue par une distribution de singularité sur les surfaces portantes et les sillages avec la portante sur les sillages est nulle.

Pour notre cas, le type de singularité utilisé est la distribution de doublets qui sera défini par:

$$\varphi(X, Y, Z, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{\mu(t - r/c_\infty)}{r} \right] \quad (B-6)$$

avec:

$$r = \sqrt{(X-X_0)^2 + (Y-Y_0)^2 + (Z-Z_0)^2} \quad (B-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \cos\lambda(Y) \frac{\partial}{\partial Z} - \sin\lambda(Y) \frac{\partial}{\partial Y} \quad (B-8)$$

et  $\mu(t-r/c_\infty)$  qui représente l'intensité du doublet est une fonction différentiable vérifiant l'équation B-2. La quantité  $r/c$  représente le temps nécessaire pour une perturbation avec la vitesse du son  $c_\infty$  partant de sa source  $(X_0, Y_0, Z_0)$  pour parvenir au point  $(X, Y, Z)$

Pour tenir compte de l'effet de toutes les surfaces portantes et les sillages, le potentiel au point  $(X, Y, Z, t)$  est obtenu par superposition intégrale,

$$\varphi(X, Y, Z, t) = \frac{-1}{4\pi} \int \int_{\zeta_0} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{\mu(X_0, Y_0, Z_0(Y), t-r/c_\infty)}{r} \right] \right] dX_0 dS_0 \quad (B-9)$$

où  $(X_0, S_0, \zeta_0)$  représente le repère curviligne rapporté à la surface moyenne de la vibration.

Les intensités des doublets peuvent être obtenues [37] comme étant les différences de potentiels entre l'extrados et l'intrados de la surface moyenne, en effet:

$$\dot{\mu}(X_0, Y_0, Z_0(Y_0), t) = \varphi(X_0, Y_0, Z_0^+(Y_0), t) - \varphi(X_0, Y_0, Z_0^-(Y_0), t) \quad (B-10)$$

En utilisant les deux équations B-3 et B-10 nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(X_0, Y_0, Z_0^+(Y_0), t) - P(X_0, Y_0, Z_0^-(Y_0), t) \\ &= \rho_\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu(X_0, Y_0, Z_0(Y_0), t) \right] \end{aligned} \quad (B-11)$$

d'où:

$$\mu(X_0, Y_0, Z_0(Y_0), t) = \frac{1}{\rho_\infty} \int_{(x_L, y_0) - x_0 / v_\infty}^t \Delta P(X_0, Y_0, Z_0(Y_0), u) du \quad (B-12)$$

En remplaçant le potentiel donné par l'équation B-9 dans l'équation B-4 en tenant compte de l'équation B-12 nous obtenons l'équation intégrale reliant les vitesses normales aux différences des pressions pour un écoulement instationnaire. Cependant pour des oscillations harmoniques on a:

$$\Delta C_p(x, y, z_e(y), t) = \overline{\Delta C_p}(x, y, z_e(y)) e^{i\omega t} \quad (B-13)$$

$$W_n(x, y, z_e(y), t) = \overline{W_n}(x, y, z_e(y)) e^{i\omega t} \quad (B-14)$$

D'où la forme finale de l'équation intégrale:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) = \int \int_S K(x_1, y_1, z_1; x, y, z; \nu, M_\infty) l(x, y, z) dx ds \quad (B-15)$$

avec:

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) = \frac{\overline{W_n}(x, y, z_e(y))}{V_\infty} \quad (B-16)$$

$$l(x, y, z) = \frac{1}{2} \overline{\Delta C_p}(x, y, z_e(y)) \quad (B-17)$$

$$K = \exp\left[-i\omega x_0 / V_\infty\right] \frac{K_1 T_1 + K_2 T_2}{r^2} \quad (B-18)$$



$$T_1 = \cos(\lambda_r - \lambda_e) \quad (B-19)$$

$$T_2 = (1/r^2)(z_o \cos \lambda_r - y_o \sin \lambda_r)(z_o \cos \lambda_e - y_o \sin \lambda_e) \quad (B-20)$$

$$K_1 = r \frac{\partial I_o}{\partial r} \quad (B-21)$$

$$K_2 = r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial I_o}{\partial r} \right] \quad (B-22)$$

$$I_o = \int_{u_1}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega r u / V\omega)}{(1+u^2)} du \quad (B-23)$$

dans laquelle:

$$u_1 = \frac{M_\omega [x_o^2 + (1-M_\omega^2)r^2]^{1/2} - x_o}{(1-M_\omega^2)r} \quad (B-24)$$

L'expression de la fonction Kernel "K" est simplifiée sous la forme donnée par l'équation B-18 par Landahl. Les formules de  $K_1$  et  $K_2$  sont présentées dans le troisième chapitre [Eq. III-31].

Le problème aux limites est donc remplacé par l'équation intégrale B-15 reliant les vitesses normales données par l'équation B-5 et la charge. Cette dernière représente l'inconnue principale dans l'évaluation des coefficients aérodynamiques généralisées.

ANNEXE C

CALCUL DES INTEGRALES INFINIES  $I_1$  ET  $I_2$

Dans le calcul de la fonction Kernel [Eq.III-31] deux intégrales infinies suivantes apparaissent:

$$I_1(u^1, \nu) = \int_{u^1}^{\infty} \frac{e^{-i\nu u}}{(1+u^2)^{3/2}} du \quad (C-1)$$

$$I_2(u^1, \nu) = \int_{u^1}^{\infty} \frac{e^{-i\nu u}}{(1+u^2)^{5/2}} du \quad (C-2)$$

A partir de la référence [45], l'intégration par partie une fois de  $I_1$  et deux fois de  $I_2$  entraîne:

$$I_1(u^1, \nu) = e^{-i\nu u^1} \left[ 1 - \frac{u^1}{(1+u^1{}^2)^{1/2}} - i\nu I_0(u^1, \nu) \right] \quad (C-3)$$

$$3I_2(u^1, \nu) = e^{-i\nu u^1} \left[ (2+i\nu u^1) \left( 1 - \frac{u^1}{(1+u^1{}^2)^{1/2}} \right) - \frac{u^1}{(1+u^1{}^2)^{3/2}} - i\nu I_0(u^1, \nu) + \nu^2 J_0(u^1, \nu) \right] \quad (C-4)$$

avec:

$$I_0(u^1, \nu) = e^{-i\nu u^1} \int_{u^1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{u^1}{(1+u^1{}^2)^{1/2}} \right] e^{-i\nu u^1} du \quad (C-5)$$

$$J_0(u^1, \nu) = e^{-i\nu u^1} \int_{u^1}^{\infty} u \left[ 1 - \frac{u^1}{(1+u^1{}^2)^{1/2}} \right] e^{-i\nu u^1} du \quad (C-6)$$

Les intégrales  $I_0$  et  $J_0$  peuvent être évaluées en utilisant l'approximation de  $u(1+u)^{-1/2}$  développée par Laschka [45] en une forme exponentielle de  $u \geq 0$ :

$$1 - \frac{u}{(1+u^2)^{1/2}} \approx \sum_{j=1}^{11} a_j e^{-jcu} \quad (C-7)$$

où  $c=0.372$  et les  $a_j$  sont données par le tableau C.1.

Les intégrales  $I_0$  et  $J_0$  pour  $u \geq 0$  deviennent donc:

$$I_0(u, \nu) \approx \sum_{j=1}^{11} \frac{a_j e^{-jcu}}{(j^2 c^2 + \nu^2)} \quad (C-8)$$

$$J_0(u, \nu) \approx \sum_{j=1}^{11} \frac{a_j e^{-jcu}}{(j^2 c^2 + \nu^2)^2} \left[ j^2 c^2 - \nu^2 + jcu (j^2 c^2 + \nu^2) - i\nu [2jc + u (j^2 c^2 + \nu^2)] \right] \quad (C-9)$$

Les propriétés de symétrie des intégrales de  $I_1$  et de  $I_2$  ont permis la considération des valeurs non négatives uniquement de  $u$  puisque pour  $u < 0$  nous avons que :

$$I_1(u, \nu) = 2 \operatorname{Re} [I_1(0, \nu)] - \operatorname{Re} [I_1(-u, \nu)] + i \operatorname{Im} [I_1(-u, \nu)] \quad (C-10)$$

$$I_2(u, \nu) = 2 \operatorname{Re} [I_2(0, \nu)] - \operatorname{Re} [I_2(-u, \nu)] + i \operatorname{Im} [I_2(-u, \nu)] \quad (C-11)$$

| j  | $a_j$        |
|----|--------------|
| 1  | + 0,24186198 |
| 2  | - 2,7918027  |
| 3  | + 24,991079  |
| 4  | - 111,59196  |
| 5  | + 271,43549  |
| 6  | - 305,75288  |
| 7  | - 41,183630  |
| 8  | + 545,98537  |
| 9  | - 644,78155  |
| 10 | + 328,72755  |
| 11 | - 64,279511  |

Tab. C.1 Coefficients de Laschka pour l'approximation

## ANNEXE D

### DETAILS CONCERNANT LE PROGRAMME DE CALCUL

Dans le cadre de ce travail, vu la complexité et la dimension du problème traité, l'efficacité et la convergence du programme et la minimisation du temps de calcul a été notre souci majeur d'autant plus que l'estimation des forces instationnaires se fait en parallèle avec un logiciel d'élément fini pour la modélisation de la structure.

A cet égard, nous avons procédé:

- l'utilisation de la génération du maillage se fait par région,
- le traitement des cas de symétries d'écoulement (vibration symétriques ou antisymétrique)
- l'utilisation de la subdivision des intervalles d'intégration en sous-intervalles. Le raffinement d'intégration est plus fin pour les intégrales singulières. Malgré que le choix différent des nombres de sous-intervalles présente des difficultés au point de vue programmation, on a pu surmonter le problème même dans le cas de présence de symétrie d'écoulement et sans pour autant perdre la compacité du programme.

Si pour le cas de changement de modes propres, la configuration géométrique et les conditions d'écoulements sont maintenues inchangée, les résultats peuvent être obtenus directement en utilisant l'ancienne matrice des coefficients d'influences en économisant ainsi énormément de temps [Fig.D.1]. Cette procédure est très efficace dans le cas de modification de l'élasticité de la structure.

Pour des raisons d'économie en espace mémoire, nous avons adopté le dimensionnement dynamique des matrices, les dimensions des matrices utilisés dépendent de la nature du problème et du modèle du maillage, ce qui permet d'attribuer les valeurs exactes des dimensions d'une part et de bien exploiter les tableaux en écrasant les valeurs unitiles.

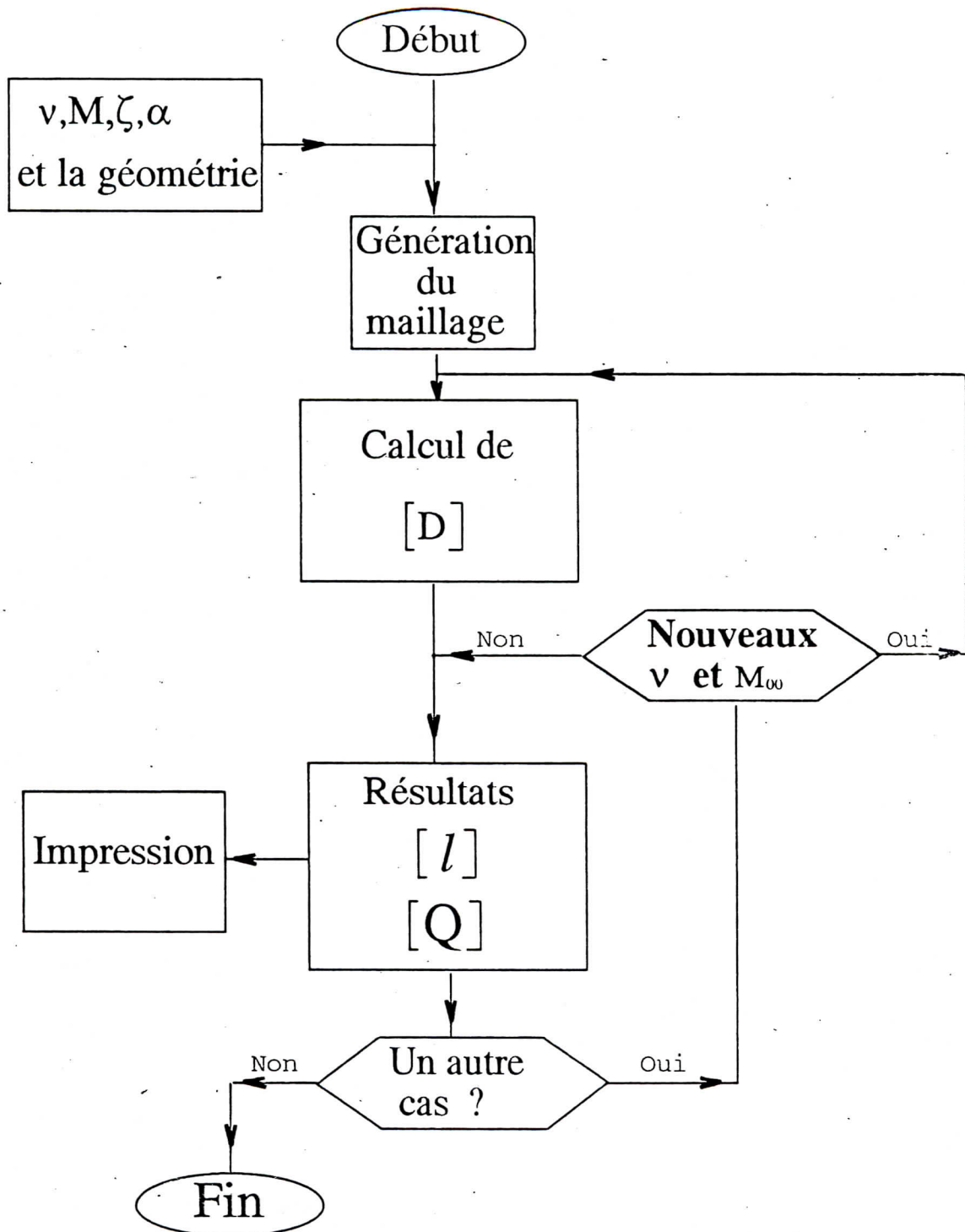


Fig. D.1 Organigramme simplifié du programme de calcul.