

Ozgür Gün
Sophie Jallais

Introduction à l'algèbre linéaire

QUADRIGE MANUELS



puf

SOMMAIRE

PRÉSENTATION	9
❶ L'omniprésence de l'algèbre linéaire	9
❷ Une approche originale	10
I. Résolution de systèmes d'équations linéaires par la méthode du pivot de Gauss	13
❶ Résolution par substitution	14
❷ La méthode du pivot de Gauss	18
a – La méthode	18
b – Différents types de systèmes carrés	22
c – Cas des systèmes rectangulaires	24
❸ Applications économiques	27
a – Le choix du consommateur dans le modèle de concurrence parfaite	27
b – L'équilibre global du modèle IS-LM	29
Exercices	33
Solutions des exercices	34
II. Matrices et système d'équations linéaires	39
❶ Représentation matricielle d'un système d'équations linéaires	39
❷ Quelques matrices particulières	42
a – Matrices nulles	42
b – Matrices triangulaires	42
c – Matrices diagonales	43

d – Matrices identité d'ordre n	44
e – Matrices symétriques	44
③ Opérations sur les matrices	45
a – Somme de deux matrices	45
b – Produit d'une matrice par un nombre	46
c – Produit d'une matrice par une matrice colonne à droite	47
d – Produit de deux matrices	48
e – Matrice inverse d'une matrice carrée	52
f – Retour sur la méthode du pivot	53
g – Détermination de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot	55
h – <i>Pour en savoir plus</i> – Pivot et produit matriciel	59
④ Application : tableau entrée-sortie de Leontief et matrice structurelle d'une économie	60
Exercices	64
<i>Solutions des exercices</i>	65

III. Rang d'une matrice et existence de solutions d'un système d'équations linéaires 69

① Dépendance ou indépendance linéaire des colonnes d'une matrice	69
a – Dépendance linéaire des colonnes d'une matrice	69
b – Indépendance linéaire des colonnes d'une matrice	71
c – Méthode	72
② Dépendance ou indépendance linéaire des lignes d'une matrice	79
③ Rang d'une matrice	80
a – Définitions	80
b – Propriétés	81
c – Méthode	81

d – Existence de solutions des systèmes d'équations linéaires.	83
Exercices	84
<i>Solutions des exercices</i>	86
IV. Les espaces vectoriels	89
① Structure d'espace vectoriel	89
a – L'exemple de \mathbb{R}^2	89
b – Définition d'un espace vectoriel sur \mathbb{R}	92
c – Les sous-espaces vectoriels	93
d – Systèmes générateurs d'un espace vectoriel	97
② Bases d'un espace vectoriel	104
a – Définition	106
b – Propriétés des bases	106
c – Coordonnées d'un vecteur dans une base.	109
③ Dimension d'un espace vectoriel.	111
a – Définition	111
b – Propriétés	111
c – Dimension, bases et solutions d'un système d'équations linéaires.	116
Exercices	120
<i>Solutions des exercices</i>	122
Annexe.	127
V. Les applications linéaires	131
① Quelques rappels sur les applications.	131
② Définition et propriétés.	133
a – Définition d'une application linéaire	133
b – Image par une application linéaire du vecteur nul	135
③ Représentation matricielle d'une application linéaire	136
a – Principe	136

b – Exemples	138
c – <i>Pour en savoir plus</i> – Autres matrices d'une application linéaire	139
① Rang et noyau d'une application linéaire	144
a – Image d'une application linéaire	144
b – Rang d'une application linéaire	145
c – Noyau d'une application linéaire	150
d – Le théorème des dimensions	153
e – Détermination de $\ker f$ lorsque l'on connaît sa dimension	154
f – Les isomorphismes	156
g – Retour sur la résolution de systèmes d'équations	157
Exercices	158
<i>Solutions des exercices</i>	159
VI. Déterminant d'une matrice carrée	163
① Caractéristique de la fonction déterminant	163
a – Une fonction multilinéaire	163
b – Une fonction alternée	166
② Méthode de calcul du déterminant	168
a – Premières méthodes	168
b – De l'utilité du « pivot »	177
③ Autres propriétés des déterminants	183
a – Déterminant de la transposée d'une matrice	183
b – Déterminant du produit de deux matrices	184
④ La règle de Cramer	185
a – Détermination de la règle de Cramer	185
b – Application : la détermination des multiplicateurs dans le modèle IS-LM	187
⑤ Inverse d'une matrice	189
Exercices	192
<i>Solutions des exercices</i>	193

VII. Diagonalisation de matrices carrées	197
① Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	198
a – Définitions	198
b – Recherche des valeurs propres d'une matrice	199
c – Recherche des vecteurs propres d'une matrice	204
② Matrices diagonalisables	208
a – Présentation	208
b – Méthode et exemples	211
c – Conséquences de la diagonalisation d'une matrice	212
③ Applications	216
a – Matrices productives	216
b – Analyse des systèmes dynamiques linéaires	221
Exercices	227
<i>Solutions des exercices</i>	228
Annexe	236
VIII. Diagonalisation de matrices symétriques	239
① Produit scalaire, norme et orthogonalité de vecteurs	239
a – Le produit scalaire de deux vecteurs d'un même espace vectoriel	240
b – Norme d'un vecteur	241
c – <i>Pour en savoir plus</i> – Interprétation géométrique du produit scalaire	244
d – Vecteurs et espaces vectoriels orthogonaux	246
e – <i>Pour aller plus loin</i> – Bases orthonormées	248
f – Application : le modèle de régression linéaire	250
② Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice symétrique	253
③ Application : l'analyse en composantes principales	259

Exercices	262
<i>Solutions des exercices</i>	263
IX. Formes quadratiques : présentation et applications	267
❶ Les formes quadratiques.....	267
a – Présentation	267
b – Formes quadratiques et matrices symétriques	268
c – Formes quadratiques définies, semi-définies, indéfinies.....	270
d – Exemple de forme quadratique définie positive : les moindres carrés	273
❷ Extrema d'une fonction de plusieurs variables (sans contrainte)	275
a – Condition nécessaire ou condition du premier ordre.....	276
b – Condition suffisante ou condition du second ordre	277
❸ Concavité (convexité) d'une fonction de deux variables.....	282
Exercices	285
<i>Solutions des exercices</i>	286
INDEX	289
BIBLIOGRAPHIE	293