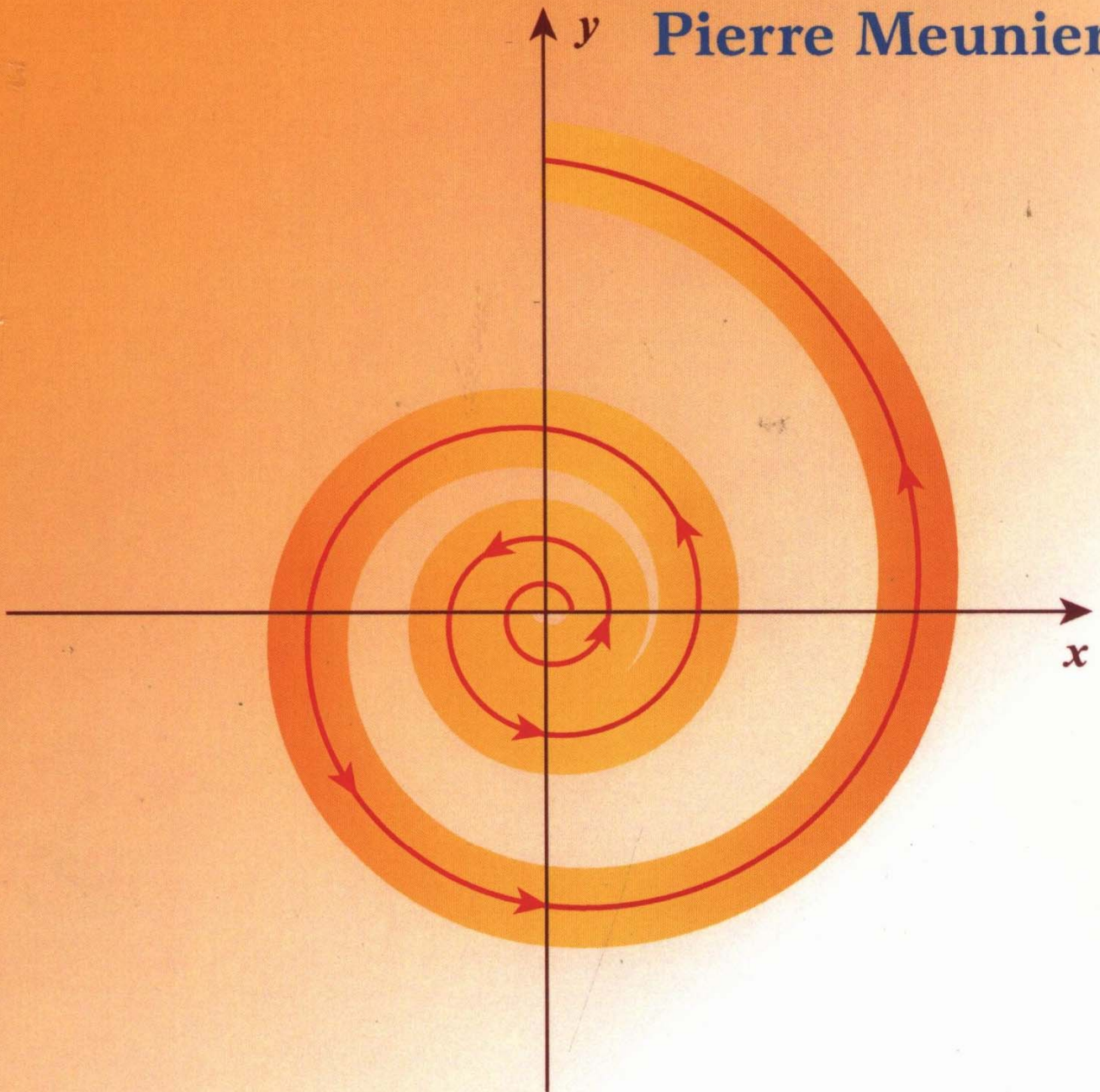


# COURS ET EXERCICES D'ANALYSE : LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Mathématiques spéciales MP - MP\* - PSI\* - CAPES - Agrégation

$y$  Pierre Meunier



**Cépaduès**  
ÉDITIONS

## TABLE DES MATIERES

Introduction et rappels de cours.....	9
Chapitre 1 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES : COURS.....	11
1.1 Définitions et premières conséquences.....	11
1.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz local.....	12
Solutions maximales d'une équation différentielle.....	12
1.2.1 Fonction localement lipschitzienne.....	12
1.2.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz local.....	12
1.2.3 Solution maximale d'une ED $y' = f(x, y)$ où $f$ vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz.....	13
1.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz global.....	15
1.4 Comportement aux extrémités de leur domaine de définition des solutions maximales.....	18
1.5 Des cas particuliers où les solutions maximales sont globales.....	20
1.6 Équations différentielles linéaires.....	24
1.6.1 Définitions.....	24
1.6.2 Etude de l'équation linéaire homogène associée ; Wronskien de $n$ solutions.....	25
1.6.2.1 Étant donnée l'EDL (équation différentielle linéaire) :.....	25
1.6.2.2 Wronskien de $n$ solutions de l'EDLHA.....	26
1.6.3 Intégration de l'équation différentielle complète : méthode dite de variations des constantes.....	27
1.7 Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n$ .....	29
1.7.1 Définition.....	29
1.7.2 Wronskien de $n$ solutions de l'ED (**) $y^n - a_1(x)y^{(n-1)} \dots - a_n(x)y = 0$ .....	31
1.8 Equations différentielles linéaires à coefficients constants.....	32
1.8.1 Intégration de l'EDLHA $y' = a(y)$ ( resp. $Y' = AY$ ).....	33
1.8.2 Intégration de l'équation complète $y' = a(y) + b(x)$ .....	35
1.9 Equation différentielle scalaire d'ordre $n$ à coefficients constants.....	36
1.9.1 Intégration de l'EDLHA.....	36
1.9.2 Intégration de l'équation complète : théorème d'Heaviside.....	38

1.10 SYSTEMES DIFFERENTIELS AUTONOMES.....	41
1.10.1 Définitions :.....	41
1.10.2 Cas particuliers des équations scalaires.....	42
1.10.3 Trajectoires associées à une équation autonome.....	43
1.10.4 Cas où $f$ est orthogonal à un champ de gradient.....	44
1.10.5 Cas où une trajectoire admet un point double. ....	44
1.10.6 Etude d'un système autonome autour d'un point d'équilibre : théorèmes de Liapounov et de Hartman-Grobman.....	45
1.10.6.1 Cas linéaire :.....	46
1.10.6.2 Cas non linéaire. ....	46
1.10.7 Le théorème de Poincaré - Bendixson.....	47
1.11 SOLUTIONS APPROCHEES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES.....	50
1.11.1 Rappels théoriques.....	50
1.11.2 Méthode d'Euler d'approximation de la solution.....	51
1.11.3 Méthode d'approximation de $\varphi$ par le protocole de Runge-Kutta :....	53
1.12 Des équations et des techniques à connaître.....	54
1.12.1 Equations différentielles de Bernoulli et de Riccati.....	54
1.12.2 Equation de Riccati :.....	54
1.12.3 Changement de variable dans une ED :.....	54
1.12.4 Un lemme parfois très utile :.....	55
Chapitre 2 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES : EXERCICES.....	57
2.1 Sous-Chapitre A : SYSTEMES-DIFFERENTIELS LINEAIRES.....	58
2.2 Sous-Chapitre B : EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES SCALAIRES.....	91
Chapitre 3 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES - SYSTEMES AUTONOMES.....	165
Annexe au chapitre 3.....	244
3.1 Premier exemple :.....	244
3.1.1 Cas où $c = 0$ .....	244
3.1.2 Cas où $c \in \left[-\frac{4}{27}, 0\right]$ :.....	247
3.1.3 Cas où $c > 0$ :.....	247
3.2 Deuxième exemple.....	249

Chapitre 4 - EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC CONDITIONS AUX LIMITES..... 255

4.1 Etude des solutions de l'ED  $y'' - \mu^2 y = g$  sur  $[0,1]$  telles que  $y(0) = a$ ,  $y(1) = b$ ..... 256

4.1.1 Noyau de Green associé à l'ED ..... 256

4.1.2 Opérateur  $\Phi$  associé au noyau de Green..... 257

4.1.3  $\Phi$  est un opérateur symétrique dans  $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ ..... 260

4.1.4 Valeurs propres de  $\Phi$  :..... 261

4.2 Présentation du problème de Sturm-Liouville..... 264

4.2.1 Introduction et présentation..... 264

4.2.2 Étude d'un opérateur linéaire ..... 265

4.2.3 L'opération  $\Phi_\lambda$  est symétrique défini négatif..... 268

4.2.4 Retour au problème de Sturm-Liouville : l'opérateur symétrique  $\Phi$  de E  
269

4.2.5 Introduction du complété de  $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R}), \langle | \rangle$  ..... 271

4.2.6 Étude sur un exemple des solutions du problème de Sturm-Liouville  
272

4.2.7 Retour au cas général..... 273

4.3 Equations linéaires du second ordre à coefficients périodiques ..... 275

4.3.1 Equations différentielles de Mathieu :..... 277

Index alphabétique..... 281