

Abderrahmane Ouagga

Analyse

Fonctions d'une à plusieurs
variables réelles



La côte de l'ouvrage : 2-515-350

Résumé

Cet ouvrage regroupe l'essentiel des outils nécessaires pour l'étude des fonctions à variables réelles. Les premiers chapitres introduisent les théorèmes fondamentaux sur la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle, ainsi que les méthodes usuelles d'intégration et de résolution d'équations différentielles ordinaires. Ces chapitres sont suivis de la construction des courbes planes en paramétriques et en polaires. Le chapitre intuitif sur la topologie ouvre le champ pour l'étude de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables réelles et des intégrales multiples, en mettant l'accent sur les processus qui permettent de passer d'une à plusieurs variables. L'étude géométrique des surfaces illustre les concepts abordés. Ce livre est le fruit de plusieurs années d'expérience d'enseignement devant des étudiants des trois années de la licence de mathématiques et de physique. Il peut aussi intéresser les étudiants préparant les concours des grandes écoles ainsi que toutes celles et ceux qui désirent approfondir leurs connaissances en analyse.

Table des matières

1	Limites de fonctions	1
1.1	Limites	1
1.2	Opérations algébriques sur les limites	6
1.3	Formes indéterminées	8
1.4	Exercices	11
2	Suites numériques	13
2.1	Généralités	13
2.2	Limite d'une suite	14
2.3	Opérations algébriques sur les limites	16
2.4	Théorèmes sur l'ordre	18
2.5	Etude de quelques suites	19
2.6	Suites de Cauchy	21
2.7	Suites adjacentes et segments emboîtés	22
2.8	Suites extraites	25
2.9	Exercices	26
3	Continuité	29
3.1	Fonctions continues	29
3.2	Opérations algébriques sur la continuité	29
3.3	Prolongement par continuité	30
3.4	Continuité uniforme	30
3.5	Suites et continuité	32
3.5.1	Caractérisation de la continuité par les suites	32
3.5.2	Théorème de Heine	34
3.5.3	Théorème du maximum	35
3.5.4	Théorème des valeurs intermédiaires	36
3.5.5	Fonctions réciproques	38
3.5.6	Suites récurrentes	41
3.6	Exercices	43

4	Dérivation	45
4.1	Notion de dérivation	45
4.1.1	Définition et exemples	45
4.1.2	Interprétation géométrique (tangente)	47
4.1.3	Extension de la notion de dérivée	47
4.1.4	Dérivation et continuité	48
4.1.5	Règles de calcul	49
4.2	Propriétés	50
4.2.1	Extrema locaux	50
4.2.2	Théorème de Rolle	52
4.2.3	Formule des accroissements finis	52
4.2.4	Variations d'une fonction	53
4.2.5	Règle de l'Hospital	54
4.3	Dérivées d'ordre supérieur	55
4.3.1	Définition	55
4.3.2	Règles de calcul	55
4.3.3	Fonctions de classe \mathcal{C}^k	56
4.3.4	Formules de Taylor et développement limité	56
4.3.5	Existence d'un extremum local et points d'inflexion	61
4.3.6	Fonctions convexes	61
4.4	Exercices	63
5	Fonctions usuelles	65
5.1	Fonctions trigonométriques	65
5.1.1	Fonction cosinus	65
5.1.2	Fonction Arc cosinus	66
5.1.3	Fonction sinus	67
5.1.4	Fonction Arc sinus	67
5.1.5	Fonction tangente	69
5.1.6	Fonction Arc tangente	69
5.2	Exponentielle et logarithme	71
5.2.1	Fonction exponentielle	71
5.2.2	Fonction logarithme	73
5.2.3	Croissances comparées	74
5.2.4	Fonctions puissances	76
5.3	Fonctions hyperboliques	77
5.3.1	Trigonométrie hyperbolique	77
5.3.2	Etudes des fonctions hyperboliques	79
5.3.3	Fonctions réciproques	82
5.4	Exercices	84

6	Intégration	87
6.1	Primitives ou intégrales indéfinies	87
6.1.1	Définition	87
6.1.2	Tableau des primitives usuelles	88
6.1.3	Linéarité de l'intégration	89
6.1.4	Intégration par parties	89
6.1.5	Intégration par changement de variable	89
6.1.6	Intégration d'une fonction rationnelle	91
6.1.7	Intégration d'une fonction rationnelle trigonométrique	95
6.1.8	Intégrales abéliennes	96
6.1.9	Exercices	99
6.2	Intégrales définies	100
6.2.1	Définition	100
6.2.2	Interprétation géométrique	101
6.2.3	Intégration par parties	101
6.2.4	Propriétés de l'intégrale	101
6.2.5	Quelques inégalités classiques	103
6.2.6	Intégration par changement de variable	103
6.2.7	Fonctions définies par des intégrales	104
6.2.8	Exercices	106
7	Equations différentielles	109
7.1	Généralités sur les équations différentielles	109
7.2	Equations différentielles d'ordre 1	109
7.2.1	Equation à variables séparées	110
7.2.2	Equation homogène	111
7.2.3	Equation différentielle linéaire	113
7.2.4	Equation de Bernoulli	115
7.2.5	Equation de Riccati	116
7.2.6	Equation de Clairaut	118
7.2.7	Equation de Clairaut-Lagrange	120
7.2.8	Exercices	121
7.3	Equations différentielles d'ordre 2	123
7.3.1	Equations incomplètes	123
7.3.2	Equations homogènes en y , y' et y''	124
7.3.3	Equations différentielles linéaires	125
7.3.3.1	Généralités	125
7.3.3.2	Equation à coefficients constants	128
7.3.3.3	Equations linéaires à coefficients non constants	137
7.3.4	Exercices	141

8	Courbes paramétrées	143
8.1	Les différentes représentations	143
8.1.1	Représentation cartésienne implicite	143
8.1.2	Représentation cartésienne explicite	143
8.1.3	Représentation paramétrique	144
8.1.4	Exercices	145
8.2	Etude locale d'une paramétrisation	145
8.2.1	Rappels sur les fonctions vectorielles	145
8.2.2	Points simples et points multiples	146
8.2.3	Points réguliers et points singuliers	147
8.2.4	Changement de paramètre	147
8.2.5	Tangente en un point	148
8.2.6	Plan osculateur	152
8.2.7	Exercices	154
8.3	Propriétés métriques des courbes	156
8.3.1	Longueur d'un arc	156
8.3.2	Paramétrage normal et abscisse curviligne	159
8.3.3	Courbure	161
8.3.4	Repère de Frenet	164
8.3.5	Torsion	164
8.3.6	Système de Serret-Frenet	165
8.3.7	Calcul direct de la courbure et de la torsion	166
8.3.8	Développée et développantes	168
8.3.9	Exercices	171
8.4	Tracé des courbes planes	173
8.4.1	Tracé des courbes paramétrées	174
8.4.1.1	Méthode de construction	174
8.4.1.2	Symétries	175
8.4.1.3	Asymptotes	177
8.4.1.4	Tangente en un point	178
8.4.1.5	Concavité et points d'inflexion	178
8.4.1.6	Tableau de variations	179
8.4.1.7	Exercices	181
8.4.2	Tracé des courbes en polaires	182
8.4.2.1	Equation polaire	183
8.4.2.2	Éléments de symétrie	183
8.4.2.3	Asymptotes et branches spirales	184
8.4.2.4	Tangente en un point	185
8.4.2.5	Concavité et point d'inflexion	185
8.4.2.6	Tableau de variations	186
8.4.2.7	Exercices	187

9	Topologie	189
9.1	Espaces métriques	189
9.1.1	Distances	189
9.1.2	Equivalence métrique (au sens de Lipschitz)	191
9.2	Espaces vectoriels normés	191
9.2.1	Normes	191
9.2.2	Distance définie par une norme	192
9.2.3	Sous-ensembles particuliers des espaces métriques	193
9.2.4	Equivalence topologique	193
9.2.5	Exercices	194
9.3	De la distance à la topologie	197
9.3.1	Ouverts et fermés d'un espace métrique	197
9.3.2	Espaces topologiques	199
9.3.3	Espaces séparés	200
9.3.4	Intérieur et adhérence	201
9.3.5	Points d'accumulations et points isolés	203
9.3.6	Exercices	204
9.4	Espaces métriques complets	205
9.4.1	Limite d'une suite	205
9.4.2	Valeurs d'adhérence d'une suite	206
9.4.3	Suites de Cauchy	206
9.4.4	Exercices	207
9.5	Continuité	208
9.5.1	Limite d'une application	208
9.5.2	Continuité	209
9.5.3	Usage des suites	211
9.5.4	Continuité uniforme	212
9.5.5	Continuité des fonctions de plusieurs variables réelles	213
9.5.6	Homéomorphisme	214
9.5.7	Exercices	214
9.6	Compacité	217
9.6.1	Cadre général	217
9.6.2	Cadre métrique	220
9.6.3	Cadre vectoriel	222
9.6.4	Applications continues et compacité	222
9.6.5	Exercices	224
9.7	Connexité et connexité par arcs	226
9.7.1	Espaces connexes	226
9.7.2	Applications continues et connexité	229
9.7.3	Connexité par arcs	230
9.7.4	Exercices	232

10 Calcul différentiel	235
10.1 Préliminaires	235
10.1.1 Continuité des applications linéaires	235
10.1.2 Normes d'applications linéaires continues	237
10.2 Différentiabilité	238
10.2.1 Dérivée d'une fonction à une variable réelle. (Rappels)	238
10.2.2 Vers les fonctions à plusieurs variables réelles	238
10.2.3 Exemples d'applications différentiables	242
10.2.4 Opérations algébriques	243
10.2.5 Exercices	248
10.3 Théorème des accroissements finis	249
10.3.1 Motivation	249
10.3.2 Théorème pour les fonctions numériques	249
10.3.3 Théorème dans le cadre général	250
10.3.4 Théorème sur les convexes	253
10.3.5 Application du TAF	253
10.4 Dérivées partielles	253
10.4.1 Dérivées directionnelles	253
10.4.2 Dérivées partielles	255
10.4.3 Composantes	257
10.4.4 Jacobienne et Jacobien	258
10.4.5 Fonctions de classe \mathcal{C}^1	260
10.4.6 Composition	263
10.4.7 Exercices	265
10.5 Difféomorphismes	268
10.5.1 Définition et exemples	268
10.5.2 Théorèmes d'inversion	269
10.5.3 Exercices	273
10.6 Dérivées supérieures	277
10.6.1 Définitions	277
10.6.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^p	278
10.6.3 Utilisation des dérivées partielles	279
10.6.4 Théorème de Schwarz	280
10.6.5 Exercices	282
10.7 Formules de Taylor	285
10.7.1 Puissances symboliques	285
10.7.2 Formule de Taylor avec reste intégral	286
10.7.3 Formule de Taylor-Lagrange	287
10.7.4 Formule de Taylor-Young	288
10.7.5 Développements limités	290
10.7.6 Exercices	291

10.8	Extrema locaux (ou relatifs)	291
10.8.1	Définitions :	291
10.8.2	Condition nécessaire du premier ordre	292
10.8.3	Condition nécessaire du second ordre	293
10.8.4	Cas particulier : fonctions à deux variables	293
10.8.5	Exercices	294
10.9	Fonctions implicites	296
10.9.1	Problème et définition	296
10.9.2	Exemples	296
10.9.3	Théorème des fonctions implicites	297
10.9.4	Dérivées d'une fonction implicite	299
10.9.5	Exercices	300
11	Surfaces	303
11.1	Surfaces définies par une paramétrisation	303
11.1.1	Nappe paramétrée	303
11.1.2	Surfaces de révolution	303
11.1.3	Plan tangent	304
11.1.3.1	Surfaces régulières	304
11.1.3.2	Plan tangent en un point	305
11.1.3.3	Equations paramétriques du plan tangent	305
11.1.3.4	Equation cartésienne du plan tangent	306
11.2	Surfaces définies implicitement	306
11.2.1	Surfaces régulières	306
11.2.2	Equation du plan tangent	307
11.3	Position relative par rapport au plan tangent	308
11.4	Première forme fondamentale	310
11.4.1	Élément de longueur	310
11.4.2	Première forme fondamentale	311
11.4.3	Élément d'aire	313
11.4.3.1	Normale à la surface et orientation	313
11.4.3.2	Aire d'un parallélogramme	313
11.4.3.3	Construction de l'élément d'aire	314
11.5	Seconde forme fondamentale	315
11.5.1	Différentes notions de courbures	315
11.5.2	Seconde forme fondamentale	316
11.5.3	Calcul effectif des courbures	319
11.5.4	Interprétation géométrique de la courbure de Gauss	320
11.6	Exercices	320

12	Intégrales multiples	323
12.1	Intégrales doubles	323
12.1.1	Intégrales sur un rectangle	323
12.1.2	Intégrale sur un ensemble quarrable	325
12.1.3	Propriétés des intégrales doubles	326
12.1.4	Interprétation géométrique de l'intégrale double	327
12.1.5	Calcul des intégrales doubles (Fubini)	327
12.1.6	Changement de variables	328
12.1.7	Exercices	329
12.2	Intégrales triples	332
12.2.1	Intégrale sur un pavé	332
12.2.2	Intégrale sur un ensemble cubable	332
12.2.3	Propriétés des intégrales triples	333
12.2.4	Calcul des intégrales triples (Fubini)	334
12.2.5	Changement de variables	335
12.2.6	Exercices	336
12.3	Formes différentielles	338
12.3.1	Applications p -linéaires alternées	338
12.3.2	p -formes différentielles	338
12.3.3	Algèbre extérieure des formes différentielles	340
12.3.4	Formes différentielles sur un ouvert de \mathbb{R}^n	341
12.3.5	Différentiation extérieure	342
12.3.6	Lemme de Poincaré	346
12.3.7	Image réciproque (ou transposée) d'une p -forme	348
12.3.8	Une autre démonstration du Lemme de Poincaré	350
12.3.9	Exercices	353
12.4	Intégrales curvilignes, surfaciques et formule de Stokes	355
12.4.1	Intégrales curvilignes	355
12.4.1.1	Définition	355
12.4.1.2	Intégrale d'une forme exacte	355
12.4.1.3	Elément de longueur	356
12.4.1.4	Formule de Green-Riemann	357
12.4.1.5	Application au calcul d'aires	359
12.4.2	Intégrales surfaciques	359
12.4.2.1	Définition et exemple	359
12.4.2.2	Elément d'aire	361
12.4.2.3	Formule d'Ostrogradski	361
12.4.2.4	Formule de Stokes	362
12.4.3	Exercices	363