

Ahmed Lesfari

# Fonctions spéciales de la physique mathématique

Cours et exercices corrigés



**La côte de l'ouvrage : 2-515-353**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Fonctions gamma et bêta d'Euler</b>	<b>9</b>
1.1	Fonction gamma d'Euler . . . . .	9
1.2	Fonction bêta d'Euler . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Solutions holomorphes d'équations différentielles</b>	<b>23</b>
2.1	Théorèmes d'existence et d'unicité . . . . .	23
2.2	Équations linéaires et étude des points singuliers fuchsien	28
<b>3</b>	<b>Fonctions hypergéométriques de Gauss</b>	<b>37</b>
3.1	Équation hypergéométrique de Gauss . . . . .	37
3.1.1	Etude au voisinage de $z = 0$ . . . . .	37
3.1.2	Etude au voisinage de $z = 1$ . . . . .	42
3.1.3	Etude au voisinage de $z = \infty$ . . . . .	42
3.2	Calcul des coefficients de transmission et de réflexion . .	44
<b>4</b>	<b>Fonctions de Legendre</b>	<b>49</b>
4.1	Équation de Legendre . . . . .	49
4.2	Polynômes de Legendre . . . . .	53
4.3	Équation de Legendre généralisée . . . . .	62
4.4	Étude de l'équation de Laplace . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Fonctions de Bessel</b>	<b>69</b>
5.1	Équation de Bessel . . . . .	69
5.2	Résolution de l'équation des ondes . . . . .	81
5.2.1	En coordonnées cylindriques . . . . .	81
5.2.2	En coordonnées sphériques . . . . .	83
5.3	Équation de Helmholtz . . . . .	88
5.4	Équation des télégraphistes . . . . .	89
5.5	Un problème de Bernoulli . . . . .	93

<b>6</b>	<b>Polynômes de Laguerre</b>	<b>97</b>
6.1	Définitions et généralités . . . . .	97
6.2	Étude de l'équation de Schrödinger pour l'atome d'hydrogène . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Polynômes d'Hermite</b>	<b>107</b>
7.1	Définitions et généralités . . . . .	107
7.2	Étude de l'oscillateur harmonique . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Fonctions elliptiques, courbes elliptiques</b>	<b>113</b>
8.1	Courbes elliptiques et hyperelliptiques . . . . .	113
8.2	Fonctions elliptiques . . . . .	120
8.3	Fonction $\wp$ de Weierstrass . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Intégrales elliptiques, fonctions de Jacobi</b>	<b>141</b>
9.1	Intégrales elliptiques . . . . .	141
9.2	Fonctions de Jacobi . . . . .	143
9.3	Le pendule simple . . . . .	151
9.4	Équations d'Euler du corps solide . . . . .	155
<b>10</b>	<b>Fonctions zêta de Riemann et êta de Dirichlet</b>	<b>161</b>
10.1	Fonction zêta de Riemann . . . . .	161
10.2	Fonction êta de Dirichlet . . . . .	170
<b>11</b>	<b>Polynômes de Bernoulli</b>	<b>171</b>
11.1	Définitions et généralités . . . . .	171
11.2	Propriétés . . . . .	173
<b>12</b>	<b>Polynômes de Tchebychev</b>	<b>181</b>
12.1	Polynômes de Tchebychev de première espèce . . . . .	181
12.2	Polynômes de Tchebychev de seconde espèce . . . . .	191
12.3	Polynômes de Tchebychev et interpolation de Lagrange . . . . .	193
<b>13</b>	<b>Fonctions <math>\zeta</math> et <math>\sigma</math> de Weierstrass</b>	<b>199</b>
13.1	Fonction $\zeta$ de Weierstrass . . . . .	199
13.2	Fonction $\sigma$ de Weierstrass . . . . .	203
<b>14</b>	<b>Fonctions diverses</b>	<b>207</b>
14.1	Fonctions d'Airy et de Scorer . . . . .	207
14.2	Polynômes de Jacobi et de Gegenbauer . . . . .	211

14.3	Fonctions de Kummer, de Whittaker et de Macdonald . . .	213
14.4	Fonctions d'erreur, intégrales de Fresnel . . . . .	217
14.5	Exponentielle intégrale, sinus, cosinus et logarithme intégral . . . . .	219
14.6	Fonctions gamma incomplètes . . . . .	221
<b>15</b>	<b>Fonctions thêta</b>	<b>223</b>
15.1	Définitions et propriétés générales . . . . .	223
15.2	Fonctions méromorphes, fonctions thêta . . . . .	226
15.3	Exemples . . . . .	242
<b>16</b>	<b>Solutions méromorphes d'équations différentielles</b>	<b>253</b>
16.1	Existence et unicité des solutions . . . . .	253
16.2	Le corps solide d'Euler revisité . . . . .	261
<b>17</b>	<b>Espaces préhilbertiens</b>	<b>265</b>
17.1	Généralités . . . . .	265
17.2	Orthogonalité . . . . .	275
17.3	Exercices . . . . .	287
<b>18</b>	<b>Appendices (rappels et compléments)</b>	<b>291</b>
18.1	Séries entières, séries de Fourier . . . . .	291
18.2	Fonctions holomorphes et méromorphes . . . . .	304
18.3	Suites, séries de fonctions holomorphes ou méromorphes .	325
18.4	Produits infinis . . . . .	333
18.5	Fonctions définies par une intégrale . . . . .	338
18.6	Surfaces de Riemann compactes . . . . .	346
	<b>Bibliographie</b>	<b>351</b>
	<b>Index</b>	<b>355</b>