

Khalid Latrach

# Introduction à la théorie des points fixes métrique et topologique

avec applications et exercices corrigés



**La côte de l'ouvrage : 2-515-358**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et outils de base</b>	<b>1</b>
1.1	Espaces topologiques . . . . .	1
1.2	Espaces métriques . . . . .	6
1.2.1	Généralités . . . . .	6
1.2.2	Suites dans les espaces métriques . . . . .	8
1.2.3	Espaces métriques complets . . . . .	9
1.2.4	Espaces métriques compacts . . . . .	10
1.3	Espaces vectoriels . . . . .	12
1.3.1	Généralités . . . . .	12
1.3.2	Espace vectoriels topologiques . . . . .	14
1.3.3	Espaces vectoriels normés . . . . .	16
1.3.4	Fonctionnelle de Minkowski . . . . .	17
1.4	Topologie faible . . . . .	18
1.5	Espaces réflexifs . . . . .	19
1.6	Algèbres de Banach . . . . .	20
1.7	Quelques résultats d'analyse fonctionnelle . . . . .	21
1.8	Espaces ayant la propriété de Dunford-Pettis . . . . .	24
1.9	Opérateurs de Nemytskii . . . . .	25
1.10	Rétraction d'un espace normé . . . . .	26

<b>2</b>	<b>Théorèmes de points fixes métriques</b>	<b>27</b>
2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Principe des contractions de Banach . . . . .	28
2.2.1	Théorème de Banach . . . . .	28
2.2.2	Principe de continuation . . . . .	32
2.2.3	Convergence des suites de points fixes . . . . .	34
2.3	Applications contractantes . . . . .	36
2.4	Contractions d'Edelstein . . . . .	37
2.5	Contractions de Meir-Keeler . . . . .	44
2.6	Contractions de Kannan . . . . .	46
2.7	Autres extensions . . . . .	49
2.7.1	Contractions de Rakotch . . . . .	49
2.7.2	Contractions non linéaires . . . . .	52
2.7.3	Applications de classe ( <b>scm</b> ) . . . . .	55
2.7.4	Contractions larges . . . . .	56
2.7.5	Opérateurs expansifs . . . . .	57
2.7.6	Contractions de Wardowski . . . . .	58
2.7.7	Contractions de type Reich . . . . .	60
2.7.8	Applications à itérés strictement contractantes . . . . .	67
2.7.9	Applications contractantes sur les orbites . . . . .	69
2.7.10	Applications quasi-contractantes . . . . .	70
2.8	Une réciproque du théorème de Banach . . . . .	73
2.9	Théorème de Caristi . . . . .	78
2.10	Notes bibliographiques . . . . .	81
2.11	Exercices . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Topologie forte et théorèmes de points fixes</b>	<b>109</b>
3.1	Introduction . . . . .	109
3.2	Propriété du point fixe . . . . .	110

3.3	Théorème de Brouwer . . . . .	111
3.4	Théorème de Schauder . . . . .	115
3.5	Quelques conséquences . . . . .	123
3.5.1	Théorème de Mönch . . . . .	123
3.5.2	Théorème de Schaefer . . . . .	124
3.5.3	Théorèmes de type Roth . . . . .	125
3.5.4	Application aux sous-espaces invariants . . . . .	127
3.6	Mesure de non compacité . . . . .	130
3.6.1	Mesure de non compacité : approche axiomatique . . . . .	130
3.6.2	Mesures de non compacité de Kuratowski et de Hausdorff . . . . .	133
3.7	Théorèmes de type Darbo . . . . .	137
3.7.1	Théorème de Darbo . . . . .	137
3.7.2	Quelques théorèmes de type Darbo . . . . .	139
3.7.3	Théorème de Sadovskii . . . . .	145
3.8	Théorèmes de type Leray-Schauder . . . . .	146
3.9	Un théorème de type Furi-Pera . . . . .	149
3.10	Théorèmes de type Krasnosel'skii . . . . .	151
3.10.1	Théorème de Krasnosel'skii . . . . .	152
3.10.2	Quelques extensions . . . . .	154
3.10.3	Cas des algèbres de Banach . . . . .	166
3.11	Théorèmes de type Krasnosel'skii-Leray-Schauder . . . . .	174
3.12	Théorèmes de type Krasnosel'skii-Schaefer . . . . .	179
3.13	Notes bibliographiques . . . . .	181
3.14	Exercices . . . . .	182
<b>4</b>	<b>Topologie faible et théorèmes de points fixes</b>	<b>211</b>
4.1	Introduction . . . . .	211
4.2	Théorèmes de type Tychonoff . . . . .	213
4.2.1	Théorème de Tychonoff . . . . .	213

4.2.2	Applications faiblement séquentiellement continues . . . . .	217
4.2.3	Théorèmes de type Mönch . . . . .	219
4.3	Opérateurs <i>WS</i> -compacts et <i>WW</i> -compacts . . . . .	221
4.4	Mesure de non faible compacité . . . . .	224
4.4.1	Mesure de non faible compacité : approche axiomatique . . . . .	224
4.4.2	Mesure de non faible compacité de De Blasi . . . . .	225
4.4.3	Mesure de non faible compacité de Banaś-Knap . . . . .	229
4.5	Théorèmes de types Darbo et Sadovskii . . . . .	231
4.6	Théorèmes de type Schaefer . . . . .	238
4.7	Théorèmes de type Leray-Schauder . . . . .	239
4.8	Un théorème de type Furi-Pera . . . . .	242
4.9	Théorèmes de type Krasnosel'skii . . . . .	244
4.10	Théorèmes de type Krasnosel'skii-Leray-Schauder . . . . .	261
4.11	Théorèmes de type Krasnosel'skii-Schaefer . . . . .	264
4.12	Quelques variations sur le théorème de Sadovskii . . . . .	269
4.12.1	Mesure de non (faible) compacité . . . . .	269
4.12.2	Théorèmes de type Sadovskii . . . . .	271
4.12.3	Espaces de Banach non réflexifs . . . . .	274
4.13	Notes bibliographiques . . . . .	277
4.14	Exercices . . . . .	279
<b>5</b>	<b>Applications</b> . . . . .	<b>315</b>
5.1	Introduction . . . . .	315
5.2	Equations fonctionnelles non linéaires . . . . .	315
5.3	Equations de type Hammerstein . . . . .	322
5.4	Equation de type Nemytskii généralisée . . . . .	328
5.5	Equations de transport neutronique . . . . .	337
5.5.1	Introduction . . . . .	337
5.5.2	Notations et préliminaires . . . . .	338

---

5.5.3	Résultats de compacité et de compacité faible . . . . .	345
5.5.4	Une mesure de non faible compacité sur $X_1$ . . . . .	352
5.5.5	Résultats d'existence : cas $p \in ]1, +\infty[$ . . . . .	355
5.5.6	Résultats d'existence : cas $p = 1$ . . . . .	359
5.6	Un modèle non linéaire de type Rotenberg . . . . .	364
5.6.1	Introduction . . . . .	364
5.6.2	Notations et préliminaires . . . . .	365
5.6.3	Résultats de compacité faible . . . . .	369
5.6.4	Une mesure de non faible compacité sur $X$ . . . . .	373
5.6.5	Résultats d'existence . . . . .	375
5.7	Notes bibliographiques . . . . .	380
	<b>Bibliographie</b>	<b>381</b>
	<b>Index</b>	<b>391</b>