

N. PISKOUNOV

Calcul Différentiel et Intégral

TOME 2

1^{ère} Partie



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos à la cinquième édition	13
---	----

CHAPITRE XIII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

§ 1. Position du problème. Equation du mouvement du corps pour un milieu où la résistance est proportionnelle à la vitesse. Equation de la chaînette	15
§ 2. Définitions	18
§ 3. Equations différentielles du premier ordre (notions générales)	19
§ 4. Equations à variables séparées et séparables. Problème de la désintégration du radium	25
§ 5. Equations homogènes du premier ordre	29
§ 6. Equations se ramenant aux équations homogènes	31
§ 7. Equations linéaires du premier ordre	34
§ 8. Equation de Bernoulli	37
§ 9. Equations aux différentielles totales	39
§ 10. Facteur intégrant	42
§ 11. Enveloppe d'une famille de courbes	44
§ 12. Solutions singulières des équations différentielles du premier ordre	51
§ 13. Equation de Clairaut	52
§ 14. Equation de Lagrange	55
§ 15. Trajectoires orthogonales et isogonales	56
§ 16. Equations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales)	62
§ 17. Equation de la forme $y^{(n)} = f(x)$	63
§ 18. Quelques types d'équations différentielles du second ordre se ramenant à des équations du premier ordre. Problème de la deuxième vitesse cosmique	66
§ 19. Intégration graphique des équations différentielles du second ordre	74
§ 20. Equations linéaires homogènes. Définitions et propriétés générales	76
§ 21. Equations linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants	83
§ 22. Equations différentielles linéaires homogènes d'ordre n à coefficients constants	88

§ 23. Equations linéaires non homogènes du second ordre	91
§ 24. Equations linéaires non homogènes du second ordre à coefficients constants	95
§ 25. Equations linéaires non homogènes d'ordre n	101
§ 26. Equation différentielle d'oscillations mécaniques	105
§ 27. Oscillations libres. Représentations complexe et vectorielle des oscillations harmoniques	107
§ 28. Oscillations forcées	110
§ 29. Systèmes d'équations différentielles ordinaires	115
§ 30. Systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants	120
§ 31. Notion sur la théorie de la stabilité de Liapounov. Comportement des trajectoires de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier	127
§ 32. Solution approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler	142
§ 33. Solution approchée des équations différentielles par la méthode des différences finies basée sur l'application de la formule de Taylor. Méthode d'Adams	145
§ 34. Méthode de Runge-Kutta	152
§ 35. Méthode approchée d'intégration des systèmes d'équations différentielles du premier ordre	157
<i>Exercices</i>	162

CHAPITRE XIV

INTÉGRALES MULTIPLES

§ 1. Intégrale double	176
§ 2. Calcul des intégrales doubles	178
§ 3. Calcul des intégrales doubles (suite)	184
§ 4. Application des intégrales doubles au calcul d'aires et de volumes	191
§ 5. Intégrales doubles en coordonnées polaires	193
§ 6. Changement de variables dans une intégrale double (cas général)	200
§ 7. Calcul des aires de surfaces	205
§ 8. Densité de distribution de matière et intégrale double	209
§ 9. Moment d'inertie d'une figure plane	210
§ 10. Coordonnées du centre de gravité d'une figure plane	215
§ 11. Intégrales triples	217
§ 12. Calcul des intégrales triples	218
§ 13. Changement de variables dans une intégrale triple	223
§ 14. Moment d'inertie et coordonnées du centre de gravité d'un corps	227
§ 15. Intégrales dépendant d'un paramètre	229
<i>Exercices</i>	231

CHAPITRE XV

INTÉGRALES CURVILIGNES ET INTÉGRALES DE SURFACE

§ 1. Intégrale curviligne	238
§ 2. Calcul de l'intégrale curviligne	241
§ 3. Formule de Green	248
§ 4. Conditions pour qu'une intégrale curviligne ne dépende pas du chemin d'intégration	250
§ 5. Intégrales de surface	255
§ 6. Calcul des intégrales de surface	257
§ 7. Formule de Stokes	260
§ 8. Formule d'Ostrogradsky	265
§ 9. Opérateur hamiltonien et quelques applications	267
<i>Exercices</i>	271

CHAPITRE XVI

SÉRIES

§ 1. Série. Somme d'une série	277
§ 2. Condition nécessaire de convergence d'une série	280
§ 3. Comparaison des séries à termes positifs	283
§ 4. Règle de d'Alembert	285
§ 5. Règle de Cauchy	289
§ 6. Comparaison avec une intégrale	290
§ 7. Séries alternées. Théorème de Leibniz	294
§ 8. Séries à termes de signes quelconques. Convergence absolue et semi-convergence	296
§ 9. Séries de fonctions	300
§ 10. Séries majorables	301
§ 11. Continuité de la somme d'une série	303
§ 12. Intégration et dérivation des séries	306
§ 13. Séries entières ou séries de puissances. Intervalle de convergence	309
§ 14. Dérivation des séries entières	314
§ 15. Séries de puissances de $x - a$	315
§ 16. Séries de Taylor et de Maclaurin	316
§ 17. Exemples de développement de fonctions en séries	318
§ 18. Formule d'Euler	320
§ 19. Formule générale du binôme	321
§ 20. Développement de la fonction $\text{Log}(1 + x)$ en série entière. Calcul de logarithmes	324
§ 21. Application des séries au calcul d'intégrales définies	326
§ 22. Application des séries à l'intégration d'équations différentielles	328
§ 23. Equation de Bessel	331
§ 24. Séries à termes complexes	336
§ 25. Séries entières d'une variable complexe	337

§ 26.	Résolution de l'équation différentielle du premier ordre par la méthode des approximations successives (méthode d'itération)	339
§ 27.	Démonstration de l'existence de la solution d'une équation différentielle. Evaluation de l'erreur d'une solution approchée . . .	341
§ 28.	Théorème d'unicité de la solution de l'équation différentielle	346
	<i>Exercices</i>	347

CHAPITRE XVII

SÉRIES DE FOURIER

§ 1.	Définition. Position du problème	356
§ 2.	Exemples de développement de fonctions en séries de Fourier	360
§ 3.	Une remarque sur le développement des fonctions périodiques en séries de Fourier	366
§ 4.	Séries de Fourier des fonctions paires et impaires	368
§ 5.	Séries de Fourier des fonctions de période $2l$	369
§ 6.	Sur le développement en série de Fourier d'une fonction non périodique	371
§ 7.	Approximation en moyenne d'une fonction donnée au moyen de polynômes trigonométriques	373
§ 8.	Intégrale de Dirichlet	379
§ 9.	Convergence d'une série de Fourier en un point donné	381
§ 10.	Quelques conditions suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier	383
§ 11.	Analyse harmonique numérique	386
§ 12.	Série de Fourier sous forme complexe	387
§ 13.	Intégrale de Fourier	389
§ 14.	Forme complexe de l'intégrale de Fourier	393
§ 15.	Série de Fourier suivant un système orthogonal de fonctions	396
§ 16.	Notion d'espace fonctionnel linéaire. Analogie entre le développement de fonctions en séries de Fourier et la décomposition des vecteurs	398
	<i>Exercices</i>	403

CHAPITRE XVIII

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1.	Principaux types d'équations de la physique mathématique . . .	405
§ 2.	Etablissement de l'équation pour des cordes vibrantes. Formulation du problème aux limites. Etablissement de l'équation pour des oscillations électriques dans un conducteur	406
§ 3.	Résolution de l'équation des cordes vibrantes par la méthode de séparation des variables (méthode de Fourier)	410
§ 4.	Equation de la propagation de la chaleur dans une barre. Enoncé du problème aux limites	413

§ 5.	Propagation de la chaleur dans l'espace	416
§ 6.	Résolution du premier problème aux limites pour l'équation de la chaleur par la méthode des différences finies	419
§ 7.	Propagation de la chaleur dans une barre infinie	421
§ 8.	Problèmes conduisant à l'étude des solutions de l'équation de Laplace. Enoncé des problèmes aux limites	427
§ 9.	Equation de Laplace en coordonnées cylindriques. Résolution du problème de Dirichlet pour un anneau avec des valeurs constantes de la fonction recherchée sur les circonférences intérieure et extérieure	432
§ 10.	Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle	434
§ 11.	Résolution du problème de Dirichlet par la méthode des différences finies	437
	<i>Exercices</i>	440

CHAPITRE XIX

CALCUL OPÉRATIONNEL ET APPLICATIONS

§ 1.	Original et image	444
§ 2.	Image des fonctions $\sigma_0(t)$, $\sin t$, $\cos t$	446
§ 3.	Image des fonctions à échelle modifiée de la variable indépendante. Image des fonctions $\sin at$, $\cos at$	447
§ 4.	Propriété de linéarité de l'image	448
§ 5.	Théorème du déplacement	449
§ 6.	Image des fonctions $e^{-\alpha t}$, $\operatorname{sh} \alpha t$, $\operatorname{ch} \alpha t$, $e^{-\alpha t} \sin at$, $e^{-\alpha t} \cos at$	450
§ 7.	Dérivation de l'image	451
§ 8.	Image des dérivées	453
§ 9.	Dictionnaire d'images	454
§ 10.	Equation auxiliaire d'une équation différentielle donnée	456
§ 11.	Théorème de décomposition	460
§ 12.	Exemples de résolution des équations différentielles et des systèmes d'équations différentielles par la méthode du calcul opérationnel	461
§ 13.	Théorème de convolution	463
§ 14.	Equations différentielles des oscillations mécaniques. Equations différentielles de la théorie des circuits électriques	466
§ 15.	Résolution de l'équation différentielle des oscillations	467
§ 16.	Etude des oscillations libres	469
§ 17.	Etude des oscillations harmoniques amorties dans le cas d'une force extérieure périodique	469
§ 18.	Solution de l'équation des oscillations dans le cas de la résonance	471
§ 19.	Théorème du retard	473
§ 20.	La fonction delta et son image	474
	<i>Exercices</i>	477

CHAPITRE XX

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE LA
STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1.	Événement aléatoire. Fréquence relative d'un événement aléatoire Probabilité d'un événement. Objet de la théorie des probabilités	480
§ 2.	Définition classique de la probabilité et calcul direct des proba- bilités	481
§ 3.	Somme des probabilités. Événements aléatoires contraires . . .	484
§ 4.	Produit des probabilités des événements indépendants	488
§ 5.	Événements dépendants. Probabilité conditionnelle. Probabilité totale	489
§ 6.	Probabilités des causes. Formule de Bayes	493
§ 7.	Variable aléatoire discrète. Loi de distribution d'une variable aléatoire discrète	495
§ 8.	Fréquence relative et probabilité de la fréquence relative au cours des épreuves répétées	497
§ 9.	Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète . . .	502
§ 10.	Variance. Ecart quadratique moyen. Notion de moments . . .	506
§ 11.	Fonction de variables aléatoires	510
§ 12.	Variable aléatoire continue. Densité de probabilité d'une variable aléatoire continue. Probabilité pour qu'une variable aléatoire appartienne à un intervalle donné	511
§ 13.	Fonction de répartition ou loi intégrale de distribution. Loi de distribution uniforme	515
§ 14.	Caractéristiques numériques d'une variable aléatoire continue	518
§ 15.	Loi normale de distribution. Espérance mathématique de la distribution normale	521
§ 16.	Variance et écart quadratique moyen d'une variable aléatoire suivant la loi de distribution normale	524
§ 17.	Probabilité d'appartenance d'une valeur de la variable aléatoire à un intervalle donné. Fonction de Laplace. Fonction de répar- tition de la loi normale	525
§ 18.	Ecart médian	529
§ 19.	Expression de la loi normale en fonction de l'écart médian. Fonction réduite de Laplace	531
§ 20.	Règle des trois sigmas. Echelle des probabilités de distribution des erreurs	532
§ 21.	Erreur arithmétique moyenne	534
§ 22.	Mesure de précision. Relations entre les caractéristiques de dis- tribution des erreurs.	534
§ 23.	Variable aléatoire bidimensionnelle	535
§ 24.	Loi normale de distribution sur le plan	539
§ 25.	Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle normalement distribuée appartienne à un rectangle de côtés parallèles aux axes principaux de dispersion	541

§ 26. Probabilité pour qu'une variable aléatoire bidimensionnelle prenne une valeur appartenant à l'ellipse de dispersion	543
§ 27. Problèmes de la statistique mathématique. Matériel statistique	544
§ 28. Série statistique. Histogramme	545
§ 29. Détermination de la valeur acceptable d'une grandeur mesurée	548
§ 30. Estimation des paramètres de la loi de distribution. Théorème de Liapounov. Théorème de Laplace	550
<i>Exercices</i>	554

CHAPITRE XXI

MATRICES. ÉCRITURE MATRICIELLE DES SYSTÈMES
ET RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
LINÉAIRES

§ 1. Transformations linéaires. Matrice	557
§ 2. Définitions générales liées à la notion de matrice	560
§ 3. Transformation inverse	562
§ 4. Opérations sur les matrices. Addition des matrices	564
§ 5. Transformation d'un vecteur en un autre vecteur à l'aide d'une matrice	569
§ 6. Matrice inverse	570
§ 7. Calcul de la matrice inverse	571
§ 8. Ecriture matricielle d'un système d'équations linéaires et des solutions d'un système d'équations linéaires	573
§ 9. Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode matricielle	574
§ 10. Application orthogonale. Matrices orthogonales	577
§ 11. Vecteur propre d'une transformation linéaire	580
§ 12. Matrice d'une transformation linéaire pour laquelle les vecteurs de base sont les vecteurs propres	583
§ 13. Transformation de la matrice d'une transformation linéaire lors du passage d'une base à une autre	585
§ 14. Formes quadratiques et leur transformation	587
§ 15. Rang d'une matrice. Existence des solutions d'un système d'équations linéaires	589
§ 16. Dérivation et intégration des matrices	591
§ 17. Ecriture matricielle d'un système d'équations différentielles et des solutions d'un système d'équations différentielles à coefficients constants	593
§ 18. Ecriture matricielle d'une équation linéaire du n -ième ordre	598
§ 19. Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients variables par la méthode des approximations successives en utilisant l'écriture matricielle	600
<i>Exercices</i>	604
Annexes	606
Index	609