

Alain Yger

Intégration, espaces de Hilbert et analyse de Fourier

Cours et exercices corrigés



ellipses

Table des matières

Intégration	1
Chapitre 1. L'approche de Bernhard Riemann	3
1.1. Le cadre des fonctions d'une variable réelle	3
1.2. Le cadre des fonctions de plusieurs variables réelles	31
1.3. Dénombrabilité, sous-ensembles négligeables de \mathbb{R}^r	38
1.4. Solutions des exercices du chapitre 1	45
Chapitre 2. Approche ensembliste à la théorie de la mesure	55
2.1. Algèbres de Boole et tribus sur un ensemble abstrait	55
2.2. Mesure positive sur une tribu	61
2.3. Complétion d'une tribu et d'une mesure	65
2.4. La tribu borélienne sur \mathbb{R}^r et sur la droite numérique achevée	67
2.5. Mesure et tribu de Lebesgue	68
2.6. Solutions des exercices du chapitre 2	86
Chapitre 3. Mesurabilité et intégrabilité des fonctions numériques	101
3.1. Introduction	101
3.2. Fonctions \mathcal{I} -étagées réelles sur un ensemble Ω	105
3.3. $(\mathcal{I}, \mathcal{B}_{\mathbf{E}})$ -mesurabilité d'une application	109
3.4. Intégration des fonctions positives $(\mathcal{I}, \mathcal{B})$ -mesurables	112
3.5. Le théorème de convergence monotone et ses conséquences	114
3.6. Intégration des fonctions numériques	121
3.7. Clause de domination et théorème de convergence dominée	127
3.8. Solutions des exercices du chapitre 3	135
Chapitre 4. Les outils de l'intégration pratique	151
4.1. Présentation du chapitre	151
4.2. L'intégration « en famille » au sens de Lebesgue	153
4.3. Changement de variables et intégration	179
4.4. Produits d'espaces mesurés et théorèmes afférents	189
4.5. Solutions des exercices du chapitre 4	204
Chapitre 5. Les espaces fonctionnels L^p et l'opération de convolution	231
5.1. Présentation du chapitre	231
5.2. Les espaces $\mathcal{L}_{\mathbf{E}}^p(\Omega, \mathcal{I}, \mu)$	231
5.3. Inégalités de Hölder et Minkowski ; semi-normes $\ \cdot \ _p$ ($p \in [1, +\infty]$)	234
5.4. Les espaces de Banach $L_{\mathbf{E}}^p(\Omega, \mathcal{I}, \mu)$, $p \in [1, +\infty]$	242

5.5.	Dualité entre espaces de Banach $L^p_{\mathbf{E}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et $L^{p'}_{\mathbf{E}^*}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$	247
5.6.	L'opération de convolution	251
5.7.	La théorie de l'intégration sous l'angle fonctionnel	277
5.8.	Solutions des exercices du chapitre 5	282
Espaces de Hilbert et analyse de Fourier		301
Chapitre 6.	Espaces de Hilbert	303
6.1.	Formes bilinéaires ou sesquilinéaires, produit scalaire	303
6.2.	\mathbb{R} ou \mathbb{C} -espaces préhilbertiens, un formulaire	305
6.3.	Espaces de Hilbert	309
6.4.	Projection orthogonale sur un convexe fermé	310
6.5.	Bases hilbertiennes	315
6.6.	Le théorème de dualité	335
6.7.	Opérateurs d'un \mathbb{K} -espace de Hilbert dans lui-même ; adjonction	338
6.8.	Redondance et algorithmes « gloutons »	350
6.9.	Solutions des exercices du chapitre 6	352
Chapitre 7.	Analyse de Fourier	371
7.1.	L'héritage de Fourier : mathématiques « en situation »	371
7.2.	Transformation de Fourier dans le cadre discret	372
7.3.	La transformation de Fourier dans le cadre continu	389
7.4.	Solutions des exercices du chapitre 7	446
Bibliographie		465
Index		467