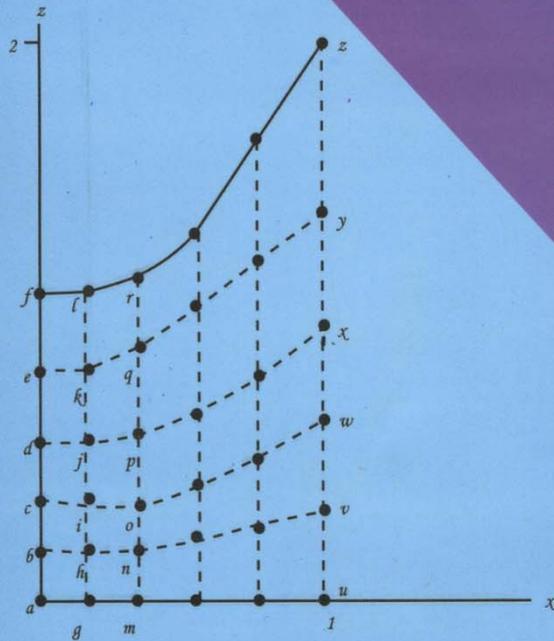


SOUDANI Azeddine

# CALCUL NUMÉRIQUE

Partie I:

Cours d'Analyse Numérique



$$S_1 = \frac{h_1}{2} (f_a + 2f_b + 2f_c + 2f_d + 2f_e + f_f),$$

$$S_2 = \frac{h_2}{2} (f_g + 2f_h + 2f_i + 2f_j + 2f_k + f_l),$$

$$S_3 = \frac{h_3}{2} (f_m + 2f_n + 2f_o + 2f_p + 2f_q + f_r),$$

⋮

$$S_6 = \frac{h_6}{2} (f_u + 2f_v + 2f_w + 2f_x + 2f_y + f_z).$$



OFFICE DES PUBLICATIONS UNIVERSITAIRES

# SOMMAIRE

AVANT PROPOS	03
--------------	----

## CHAPITRE 1 Introduction Générale

1.2 Essai de définition de l'analyse numérique	06
1.5.1 Définition générale	06
1.5.2 Définition mathématique	06
1.1.3 Définition algorithmique	06
1.1.4 Champs d'application	06
1.6 Analyse numérique et ordinateurs	07
1.6.1 Analyse numérique avant les ordinateurs	07
1.6.2 Analyse numérique avec les ordinateurs	07
1.6.3 Avantages et contraintes de l'ordinateur	08
1.6.4 Complexité algorithmique et ordinateurs actuels	08
1.6.5 Apport des méthodes numériques à la résolution des problèmes de l'ingénieur	09
1.6.6 Classification des problèmes numériques de l'ingénieur	09
1.7 Résolution d'un problème scientifique et rôle de l'ordinateur	10
1.7.1 Notion de modèle	10
1.7.2 Traitement d'un problème à l'aide de l'ordinateur	11
1.8 FONDAMENT DES METHODES NUMERIQUES	12
1.8.1 Formules de récurrence	12
1.8.2 Approximations successives	14
1.8.3 Discrétion d'un phénomène continu	15
1.4.4 Discrétisation des opérateurs différentiels	16
1.9 Exercices et problèmes	18
1.6 Devoir a domicile	21

## CHAPITRE 2 RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

2.1 Espaces vectoriels – vecteurs – matrices	23
2.1.1 Rappels	23
2.1.2 Matrice carrée:	24
2.2 Déterminants – opérations matricielles élémentaires	25
2.2.1 Déterminant d'une matrice carrée	25

2.2.2	Mineur	25
2.2.3	Cofacteur	25
2.2.4	Calcul d'un déterminant	25
2.2.5	Nombre d'opérations dans le calcul d'un déterminant	26
2.2.6	Rang d'une matrice	27
2.2.7	Somme de deux matrices	27
2.2.8	Produit matriciel	27
2.2.9	Multiplication d'une matrice par un vecteur	27
2.2.10	Produit scalaire	28
2.3	Matrices particulières	28
2.3.1	Matrices égales	28
2.3.2	Matrices conjuguées	28
2.3.3	Matrice symétrique	29
2.3.4	Matrice adjointe	29
2.3.5	Matrice antisymétrique	29
2.3.6	Matrice diagonale	29
2.3.7	Matrice scalaire	30
2.3.8	Matrice unité	30
2.3.9	Matrice inverse	30
2.3.10	Matrice triangulaire supérieure	30
2.3.11	Matrice triangulaire inférieure	31
2.3.12	Matrice orthogonale	31
2.3.13	Matrice hermitienne	31
2.3.14	Matrice définie positive ( <i>forme quadratique</i> )	32
2.3.15	Matrice à diagonale fortement dominante	32
2.3.16	Matrice augmentée	32
2.3.17	Matrice à diagonale dominante	32
2.3.18	Matrice semi-définie positive	32
2.5	Transformations élémentaires d'une matrice	32
2.4.1	Définitions	32
2.4.2	Opérateurs élémentaires de Perlis	33
2.4.3	Les transformations élémentaires	33
2.4.4	Matrices équivalentes	34
2.5	NORMES	34
2.5.1	Normes vectorielle	35
2.5.2	Normes de Hölder	35
2.5.3	Normes courante	35
2.5.4	Normes matricielles	35
2.5.5	Normes courantes	36

2.6 Valeurs propres – vecteurs propres – rayon spectral	36
2.6.1 Rayon spectral	37
2.6.2 Bornes du rayon spectral	37
2.6.3 Relation entre le rayon spectral et la norme matricielle	38
2.7 CONDITIONNEMENT D'UNE MATRICE	39
2.8 Exercices et problèmes	39
2.9 Devoir a domicile	42

## CHAPITRE 3

### RESOLUTION DES EQUATIONS NON LINEAIRES

3.1 Introduction	45
3.3 Localisation des racines	46
3.2.1 Principe	46
3.2.2 Méthodes algébriques de séparation	47
3.2.3 Méthodes graphiques	47
3.2.4 Considération physiques-positionnement à priori	48
3.3 Methode des substitutions successives	48
3.3.1 Principe	48
3.3.2 Représentation géométrique du processus itératif	49
3.3.3 Convergence de procédé itératif	50
3.3.4 Comportement de l'erreur d'estimation	52
3.3.5 Ordre d'une méthode	52
3.3.6 Arrêt des opérations	53
3.3.7 Convergence de la méthode et ré-écriture de la fonction	54
3.4 Methode du promoteur de convergence de wegstein	55
3.4.1 Principe	55
3.4.2 Représentation géométrique	55
3.4.3 Conclusions sur la méthode de Wegstein	58
3.5 Methode (d'interpolation lineaire) regula-falsi et variantes.	58
3.5.1 Principe	58
3.5.3 Définitions	59
3.5.3 Convergence de la méthode	61
3.5.4 Variantes de la méthode	62
3.6 Methode de newton-raphson	62
3.6.1. Principe	62
3.6.2 Représentation géométrique de la méthode	63
3.6.3 Convergence de la méthode	63
3.6.4 Évolution de l'erreur	64

3.7. Methode de von-mises	64
3.7.1 Principe	64
3.7.2 Représentation géométrique du schéma de calcul.	65
3.7.3 Convergence-effort de calcul	65
3.8 Approximation numérique de la dérive première	65
3.9 Recherche d'une racine complexe par la methode de newton-raphson	65
3.10 Accélérateur de convergence d'aiken	66
3.14 Exercices et problemes	67
3.15 Devoir a domicile	68

## CHAPITRE 4

### RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES PAR LA METHODE DE GAUSS

4.2 Introduction	73
4.2 Utilisation pratique des formules de cramer	74
4.3 Description de la methode de gauss	74
4.3.1 Triangulation	75
4.3.2 Résolution du système triangulaire	76
4.4 Evaluation du nombre d'operations	77
4.5 Cas du pivot nul	77
4.6 Changement de pivot	78
4.7 Decomposition en lu	97
4.8 Méthode de décomposition QR (Méthode De Householder)	81
4.9 Factorisation de Cholesky	81
4.10 Méthodes itératives	81
4.10.1 Méthode de Jacoby	82
4.10.2 Méthode de Gauss-Seidel	82
4.11 Quantification de l'erreur et de précision	83
4.12 Exercices et problemes	84
4.13 Devoir a domicile	86

## CHAPITRE 5

### INTERPOLATION POLYNOMIALE

5.2 Introduction	89
5.2 Interpolation dans le cas des points non equidistants	90
5.2.1 Polynôme de Lagrange	90
5.2.3 Evaluation de l'erreur de la formule de Lagrange	90
5.3 Interpolation dans le cas des points equidistants	91

5.3.1	Différence finie	91
5.3.2	Puissance généralisée	94
5.3.3	Formule d'interpolation de Newton	95
5.3.4	Interpolation inverse pour le cas des points équidistants	98
5.3.5	Evaluation de l'erreur de la formule de Newton	100
5.4	Interpolation dans le cas des fonctions de deux variables	100
5.5.1	Interpolation sur quatre points	101
5.5.2	Interpolation sur un nombre de points $n$ quelconque	102
5.5.3	Interpolation multiple par l'utilisation des différences finies	104
5.5	Exercices et probleme	111
5.6	Devoir a domicile	113

## CHAPITRE 6

### INTERPOLATION PAR FONCTIONS SPLINES CUBIQUES

6.1	Introduction	115
6.2	Fonctions splines d'interpolation	115
6.3	Exemple d'application	119
6.5	Autre forme de la spline cubique	120
6.5	Approximations non polynomiales	122
6.5.1	Approximation par les fractions rationnelles continues	122
6.5.2	Approximation trigonométrique	124
6.6	Exercices et probleme	124
6.8	Devoir a domicile	125

## CHAPITRE 7

### INTEGRATION NUMERIQUE

7.1	Introduction	127
7.2	Position du probleme	127
7.3	Formule de quadrature de precision $N$	128
7.4	Formule de quadrature de Newton-Cotes	129
7.5	Formule des trapezes generalisee	131
7.6	Formule de simpson generalisee	132
7.7	Formule de simpson $3/8$	133
7.8	Formule de quadrature de gauss	133
7.9	Exemples d'application	136
7.10	Integrale multiple	138
7.11	Integrale multiple avec des bornes variables	142

7.13	Integration par application des splines cubiques	145
7.14	Exercices et probleme	147
7.14	Devoir a domicile	150

## CHAPITRE 8

### CALCUL NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES (I)

8.1	Definitions	153
8.2	Probleme de cauchy pour les equations differentielles ordinaires	153
8.2.1	Théorie élémentaire des problèmes de Cauchy: ( <i>condition initiale</i> )	153
8.2.2	Méthode D'Euler	154
8.2.3	Méthode d'Euler modifiée	157
8.2.4	Méthode de Taylor d'Ordre Supérieur à Un	158
8.2.5	Méthodes de Runge – Kutta	160
8.2.6	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4	162
8.2.7	Méthode à Multi-pas	162
8.2.8	Equations Différentielles d'ordre supérieur à 1 et Systèmes d'équations différentielles	165
8.3	Exercices et probleme	167
8.4	Devoir a domicile	169

## CHAPITRE 9

### CALCUL NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES (II)

9.1	Problème de Dirichlet pour les équations différentielles linéaires	171
9.2	Methode des differences finies	171
9.3	Methode de rayleigh-ritz	175
9.7	Methode du tir	178
9.8	Exercices et problemes	180
9.9	Devoir a domicile	181

## CHAPITRE 10

### CALCUL NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

10.1	Introduction	183
10.5	Rappels elementaires sur les problemes aux derivees partielles	183
10.5.1	Définitions	183

10.6	Reduction a la forme canonique d'une equation aux derivees partielles	184
10.3.1	Forme canonique d'une équation aux dérivées partielles	184
10.3.2	Equation des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles	185
10.7	Resolution numerique des equations elliptiques	186
10.8	Resolution numerique des equations paraboliques	190
10.8.1	Schéma explicite	190
10.5.2	Schéma implicite	192
10.9	Resolution numerique des equations hyperboliques	195
10.10	Exercices et probleme	199
10.9	Devoir a domicile	200