

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BLIDA

INSTITUT D'AERONAUTIQUE

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE



*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état en
Aéronautique*

Option : *STRUCTURE*

Thème

*Influence de la longueur de délaminage
et de sa position verticale sur la charge critique
des plaques composites à base de fibres*

Présenté par :

BOULAHIA Ahmed

Proposé et dirigé par :

Mr. R.TIBERKAK

Promotion 2001

Thème

*Influence de la longueur de délaminage
et de sa position verticale sur la charge critique
des plaques composites à base de fibres*

RESUME

Un simple modèle unidirectionnel d'un délaminage par flambement dans une plaque composite sous l'effet d'une charge de compression axiale est exploité en vue de prédire la charge critique associée à cette plaque. L'effet de couplage membrane-flexion à été complètement examiné par une étude détaillée.

Le présent travail est basé essentiellement sur l'étude analytique d'un stratifié délaminé sans distribution élastique, ainsi que la solution mathématique de l'équation statique du flambement qui nous a conduit à la résolution de l'influence de la longueur et de la position du délaminage sur la charge critique.

Un programme de calcul basé sur des solutions analytiques a été développé dans le but de calculer les charges critiques des plaques composites en fonction de la longueur et de la position du délaminage.

NOMENCLATURE

a	longueur de délaminage
\bar{a}	variable adimensionnelle ($\bar{a} = a/L$)
[A]	matrice de rigidité du stratifié en membrane
[B]	matrice de couplage membrane-flexion
[D]	matrice de rigidité du stratifié en flexion
c	cosinus de l'angle que fait l'orientation des fibres avec l'axe x de référence
s	sinus de l'angle que fait l'orientation des fibres avec l'axe x de référence
E_1	module d'élasticité longitudinale
E_2	module d'élasticité transverse
G_{12}	module de cisaillement
ν_{12}	coefficient de Poisson (nommé 'Mu12' dans la partie programmation)
h	distance entre le délaminage et la face supérieur du stratifié (épaisseur de la zone 3)
\bar{h}	variable adimensionnelle ($\bar{h} = h/t$)
l	distance entre le délaminage et l'extrémité gauche du stratifié
\bar{l}	variable adimensionnelle ($\bar{l} = l/L$)
L	longueur totale du stratifié (suivant la direction x)
t	épaisseur total du stratifié
H	distance entre le délaminage et la face supérieur du stratifié (épaisseur de la zone 2)
\bar{H}	variable adimensionnelle ($\bar{H} = H/t$)
$[k^{(i)}]^2$	constante ($[k^{(i)}]^2 = - N_0^{(i)}/\Delta$)

$\{M\}$	vecteur des moments
$\{N\}$	vecteur des forces en membrane
$N_0^{(i)}$	efforts internes dans chaque région ($i=1,2,3,4$)
P	charge de compression appliquée
P_{cr}	charge critique sans délaminage
$q_z(x,y)$	distribution des charges transversales
$[Q]$	matrice de rigidité
$[\bar{Q}]$	matrice de rigidité de chaque pli dans les axes principaux
$[T]$	matrice de passage des contraintes du repère global au repère local
$[T']$	matrice de passage des déformations du repère global au repère local
u	déplacement longitudinal suivant l'axe x
v	déplacement longitudinal suivant l'axe y
w	déplacement transversal
$\{V\}$	vecteur des forces de cisaillement transverse
(x,y)	axes liés au stratifié
$(1,2)$	axes principaux liés au pli
θ	orientation des axes $(1,2)$ par rapport aux axes (x,y)
γ	déformation angulaire
ε	déformation linéaire
σ	contrainte normale
τ	contrainte de cisaillement

TABLE DES MATIERES

Introduction générale.....	1
Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites	
I.1. Introduction.....	5
I.2. Définitions d'un matériau composite.....	5
I.3. Les éléments constituants.....	6
I.3.1. La matrice	6
I.3.2. Les éléments de renfort (Les fibres)	7
I.3.3. Les additifs	7
I.4. Différents types des matériaux composites.....	8
I.4.1. Les stratifiés (multicouche)	8
➤ Stratifié symétrique	9
a : Equilibré	10
b : non équilibré.....	11
➤ Stratifié anti-symétrique.....	11
➤ Stratifié orthogonal.....	12
I.4.2. Les matériaux Sandwichs.....	12
I.5. Avantages d'utilisation des matériaux composites	14
I.6. Inconvénients d'utilisation des matériaux composites	14
I.7. L'utilisation des matériaux composites dans	
le domaine aéronautique	15
I.8. Introduction à la théorie des matériaux composites.....	17
I.9. Calculs des caractéristiques mécaniques des matériaux composites	
(fibre/matrice).....	18

1.9.1. Module d'élasticité longitudinale (E_1^l)	19
1.9.2. Module d'élasticité transversale (E_1^t)	20
1.9.3. Module de cisaillement ou de glissement (G_{12})	20
1.9.4. Coefficient de poisson (ν_{12}) et (ν_{21})	21
1.9.5. Masse volumique (ρ)	22
I.10. Hypothèses fondamentales des stratifiés	22
1.10.1. Champ de déplacement u , v et w	22
1.10.2. Comportement mécanique du stratifié	22
a : Tenseur de contraintes	22
b : Tenseur de déformation	24
I.11. Relation déformations-déplacements	25
I.12. Relations contraintes-déformations	27
1.12.1. Effort de membrane	27
1.12.2. Moments résultants	28
I.13. Loi de comportement du stratifié	28
I.14. Cas particuliers	31
1.14.1. Stratifié doté de la symétrie miroir	31
1.14.2. Stratifié équilibré	31
1.14.3. Stratifié équilibré symétrique	31
I.15. Matrice de rigidité	32

Chapitre II : Etude analytique de délaminage par flambement

II.1. Introduction	33
II.2. Présentation du phénomène de délaminage par flambement	34
II.3. Mode de travail	35
II.3.1. Travail en membrane	35
II.3.2. Travail en plaque	35
II.4. Flexion des plaques	35

II.5. Flexion combinée avec des charges transversales réparties	36
II.6. Equation différentielle pour la déformée.....	37
II.7. Flexion combinée avec un changement transversal et un changement plan.....	38
II.8. Equation différentielle pour la déformée	38
II.9. Hypothèses fondamentales et équations principales.....	38
a : Appuis simples.....	42
b : Encastrement (Extrémité fixe)	43
II.10. Technique de perturbation.....	44
II.10.1. Equations d'équilibres.....	44
II.10.2. Conditions aux limites.....	45
II.10.2.1. Conditions aux limites du pré-flambement	46
II.10.2.2. Conditions aux limites du flambement	46
II.10.3. Conditions auxiliaires.....	47
II.11. Etat de pré-flambement	49
II.12. Etat de flambement	52
II.13. Procédure de solution.....	52

Chapitre III : Présentation du programme

III.1. Introduction.....	57
III.2. Méthode de calcul des charges critiques des plaques délaminées.....	57
III.2.1. Introduction.....	57
III.2.2. Détermination des charges critiques des plaques délaminées.....	58
III.3. Organigramme de calcul.....	59
III.4. Exécution du programme.....	63

Chapitre IV : Applications et interprétations des résultats

IV.1. Introduction.....	66
IV.2. interprétations des graphes obtenus	66
IV.2.1. Influence des conditions aux limites sur la charge critique	66
IV.2.2. L'influence de l'épaisseur de la région (3) sur la charge critique.....	68
IV.2.3. L'influence de la symétrie miroir.....	69
IV.2.4. Répartitions des graphes obtenus.....	71
Conclusion générale.....	73

Références bibliographiques

Annexe A

INTRODUCTION GENERALE

Les matériaux occupent une place très importante dans la vie humaine et jouent un grand rôle dans l'évolution industriel technique ou économique. Actuellement, les développements de la science ont contribué à la mise au point de véritables modernes matériaux obtenus à partir des produits naturels ou synthétiques et qui sont engendrés dans le but de répondre à des besoins industriels de plus en plus exigeants.

La connaissance approfondie des propriétés physico-chimiques de la matière a permis la fabrication des matériaux qui répondent à des objectifs et à des performances bien précises et bien déterminées. Dans cette catégorie s'inscrivent notamment les matériaux composites qui comme leur nom l'indique, sont composés de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités du produit désiré, spécialement ses propriétés mécaniques, physiques et thermiques.

Les principales caractéristiques des pièces composites se résument à un gain de masse important (notamment l'économie du carburant), une bonne tenue en fatigue (augmentation de la durée de vie du matériau résultant) et avec une absence de corrosion.

Dans l'aviation, les expériences prouvées par les Américains (les avions **F14** et **F18 Hornet**) et confirmées par les Français (les avions **Mirage2000** et **Rafale**) représentent la meilleure garantie pour l'application des matériaux composites dans des domaines stratégiques vraiment très sensibles. (l'aéronautique et l'aérospatial).

Néanmoins, comme tout autre matériau usuel, celui-ci ne peut s'échapper aux différentes causes de dégradations. Le type de détérioration le plus souvent rencontré dans une structure en composite stratifiée est la rupture inter laminaire que l'on appelle **délaminage**.

En effet, ce type de rupture localisée intervient lorsque les sollicitations appliquées se traduisent par des contraintes interlaminaires soient importantes, provoquant de ce fait la propagation de défauts induits au cours de la mise en œuvre ou lors de la sollicitation située dans la région interlaminaire et par suite la séparation des couches qui nous ramène à un dédoublement du matériau ou des couches constituantes.

Le problème de la croissance du délaminage dans les composites a attiré les intentions dans ces dernières années, plus récemment le phénomène du délaminage par flambement a été pris en charge par plusieurs chercheurs qui sont l'étudié juste après l'utilisation des composites dans des domaines vraiment sensibles.

Un simple modèle mathématique a été développé par **S.Sallam** [1] et **G.J.Smitses** [2] dans le but de traiter le problème de délaminage par flambement dans les structures composites soumises a une force de compression uniformément répartie le long des deux extrémités de la plaque délaminée, c'est à dire les charges sont appliquées sur la largeur de la plaque composite. Son modèle unidirectionnel a été développé pour prédire les charges critiques pour les plaques délaminées avec les deux cas : encastrement et appuis simples.

Cependant, pour le cas du couplage flexion-torsion seulement les conditions aux limites encastrees-encastrees seront considérées. Les appuis simples ne peuvent pas nécessairement supporter le moment fléchissant normal

pour garder la plaque plane après flambement, par conséquent les déformations transverses dues au pré-flambement prennent naissance.

Sheiman et ses collaborateurs [3] ont basé leurs études sur un modèle de délaminage unidirectionnel dans une poutre dépourvue de la symétrie miroir et soumise à des forces axiales et transversales. L'effet de délaminage sur la stabilité des stratifiés a été l'objectif principal de leurs études. La résolution des équations différentielles non linéaires a été déterminée par la méthode de 'Newton' en utilisant un modèle des différences finis.

Vu la complexité du comportement mécanique des pièces composites, les outils informatiques jouent un rôle très important dans l'analyse de ce type de matériaux et de structures. Dans ce cadre, plusieurs programmes de calcul, basés sur la théorie classique des stratifiés, ont été développés pour le traitement microscopique et macroscopique des empiles.

Le présent travail traite le problème de délaminage par flambement et sa croissance. Pour cela, un modèle simple unidirectionnel a été choisi afin de prédire la charge critique d'une plaque composite avec des extrémités fixes (encastrées ou simplement appuyées).

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Une présentation des matériaux composites a été effectuée dans le premier chapitre, qui a été consacré à la discussion générale de ce domaine d'utilisation, ces avantages et leurs inconvénients. Ainsi qu'une étude élastique du stratifié qui a pour but de déterminer les équations fondamentales des stratifiés (champ de déplacements, de déformations et des contraintes), ainsi que la connaissance approfondie des lois de comportement élastique du composite.

Dans le deuxième chapitre, le phénomène de délaminage par flambement dans les plaques composites a été étudié, dans le but de déterminer les équations différentielles gouvernant ce problème sans distribution élastique.

Le troisième chapitre a été consacré au développement d'un programme de calcul traité par le `MATLAB`, dans le but de calculer la charge critique de la plaque stratifiée étudiée.

Dans le quatrième est le dernier chapitre, les résultats ont été exprimés sous formes de courbes représentant la variation des charges critiques en fonction de la longueur du délaminage et de son position des quelques plaques stratifiées. Ces courbes sont exprimées dans le but d'arriver à un meilleur choix d'un stratifié délaminé capable de résister à des charges de compression élevées.

Finalement, ce travail est achevé par une conclusion générale représente essentiellement un résumé sur les étapes qui permettent d'expliquer et de résoudre le phénomène de délaminage par flambement.

Chapitre 1

GENERALITES SUR LES MATERIAUX COMPOSITES

1.1. Introduction

Provoquée par les besoins des secteurs stratégiques militaire ou bien civil, l'utilisation des matériaux composites en vue de répondre à des objectifs bien précis et avec haute performance qui ne pouvaient être atteints en état actuel avec des matériaux traditionnels disponibles à eux retombées industrielles très bénéfiques. Maintenant, les composites sont présentés presque dans tous les secteurs de l'économie. Ainsi que sa forte présence dans les domaines de transport comme l'aéronautique, l'aérospatial, la marine et le chemin de fer. Ils sont utilisés aussi dans la conversion de l'énergie et de son stockage tel que les piles à combustibles, les panneaux solaires et les pièces des réacteurs ou des missiles.

1.2. Définitions d'un matériau composite

On entend par matériau composite, un matériau constitué de deux ou de plusieurs matériaux de natures différentes de manière à améliorer l'ensemble des performances par rapport à celui de chaque matériau ni séparément. Les constituants du composite qui sont généralement au nombre de deux (renfort et matrice), sont destinés à remplir des rôles précis dans l'utilisation du produit obtenu.

Les matériaux composites obtenus par l'assemblage des constituants sont très nombreux, mais le choix de fabrication est guidé par la définition des

meilleurs compromis légèreté-rigidité et de sa résistance à la traction, à la compression, à la torsion et à la corrosion ainsi qu'au vieillissement et Leur tenue en fatigue sans oublier par ailleurs le facteur économique.

1.3. Les éléments constituants

Les constituants du composite, sont destinés à remplir des rôles précis dans l'utilisation future du produit obtenu ; Les fibres auront à supporter la sollicitation appliquée alors que la matrice servira de support de protection aux fibres, tout en transmettant les contraintes d'une fibre à l'autre.

1.3.1. La matrice

La matrice joue un rôle complexe vis à vis de la structure composite :

- Elle a comme fonction essentielle de transmettre aux éléments de renfort (les fibres), les efforts qui s'exercent sur la structure.
- Elle maintient les distances et les orientations mutuelles des fibres, ce qui participe à la cohésion et à la rigidité de la structure finale.
- Elle doit assurer une excellente quantité de l'adhérence à l'interface fibre matrice.
- Enfin, elle a comme fonction aussi, la protection contre l'attaque des produits chimiques. L'humidité et les chocs mécaniques. Ces derniers étant mal supportés par les éléments de renfort.

On peut donc dire que la matrice joue un rôle indispensable dans les composites, elle a pour but essentiel d'assurer:

- _ La liaison des fibres renforts entre eux.
- _ La répartition des efforts (résistance à la compression ou à la flexion)
- _ La protection chimique.

Les matériaux de la matrice qui souvent utilisés, peuvent être regroupés en trois grandes catégories qui sont:

- * Les résines thermodurcissables (époxy, polyester, phénolique)
- * Les résines thermoplastiques telle que le polyamide, qui sont également utilisées mais d'une façon restreinte.
- * Ainsi que les résines métalliques.

1.3.2. Les éléments de renfort (Les fibres)

Comme leur nom l'indique, ils servent à renforcer la structure et à la rendre résistante et rigide. Les fibres ont pour tâche essentielle de supporter les sollicitations appliquées sur la structure composite, ceci est rendu possible grâce à leurs caractéristiques mécaniques élevées.

On rencontre dans le domaine industriel plusieurs natures de fibre, tel que les fibres de verre, de carbone, de bore, l'Aluminium.

Elles sont très variées, outre les différentes longueurs possibles il existe :

- _ Des ensembles linéaires (fils – mèches)
- _ Des ensembles surfaciques (tissus simples)
- _ Des ensembles multidirectionnels (tresses, tissus complexes)
- _ Des tissages à trois dimensions.

Généralement, les charges renforçantes se divisent en deux grandes catégories :

- * Charges sphériques renforçantes se présentent sous forme de sphères ou de microbilles pleines ou creuses.
- * Charges renforçantes non sphériques.

1.3.3. Les additifs :

Se sont des éléments non renforçant servant à améliorer le comportement chimique et l'aspect extérieur de la structure.

1.4. Différents types des matériaux composites

Il est fondamental de prévoir et de connaître aussi précisément que possible les caractéristiques géométriques et mécaniques d'un mélange « renfort - matrice », qui représente la structure de base des pièces composites.

Le mono-couche (fig.1.1) représente l'élément de base de la structure composite. Les différents types des monocouches sont caractérisés par la forme du renfort à :

- _ Fibres longues (unidirectionnelles UD, réparties aléatoirement).
- _ Fibres tissées.
- _ Fibres cortès.

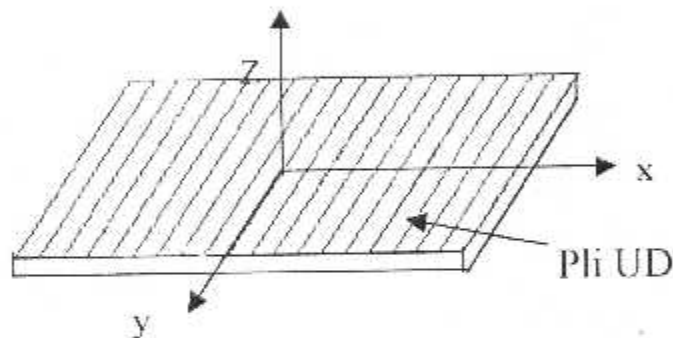


Figure 1.1 : Pli unidirectionnel

1.4.1. Les stratifiés (multicouche)

On entend par stratifié (Fig.1.2), le résultat de la superposition de plusieurs couches ou plis de matériau composite, suivant des orientations et des séquences définies aux préalables en fonction des propriétés mécaniques demandées. La couche élémentaire est le produit de l'association d'une matrice et des fibres qui se présentent sous différentes formes.

- Fibres unidirectionnelles.
- Fibres longues tissées.

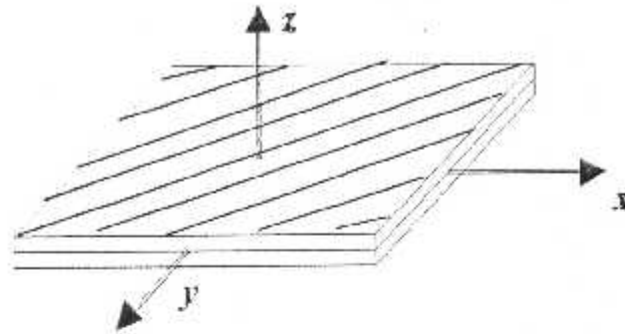


Figure 1.2 : Stratifié multicouche

L'étude élastique de stratifié revient en premier lieu à faire l'étude élastique de la couche élémentaire, qui bien étendue joue un rôle important sur les propriétés mécaniques globales de stratifié.

On pourra avoir plusieurs types de stratifié :

➤ Stratifié symétrique

Stratifié comportant des couches disposées symétriquement (Fig.1.3) par rapport à un plan moyen ($\theta(z) = \theta(-z)$).

De plus, un stratifié est doté de la symétrie miroir, lorsque les empilements des plis de part et d'autre du plan moyen sont identiques.

La réalisation de la symétrie miroir a pour but d'éviter les phénomènes de voilement et de gauchissement créés par des contraintes d'origine thermique, ce but doit être réalisé grâce à la symétrie miroir qui les rend équilibrés.

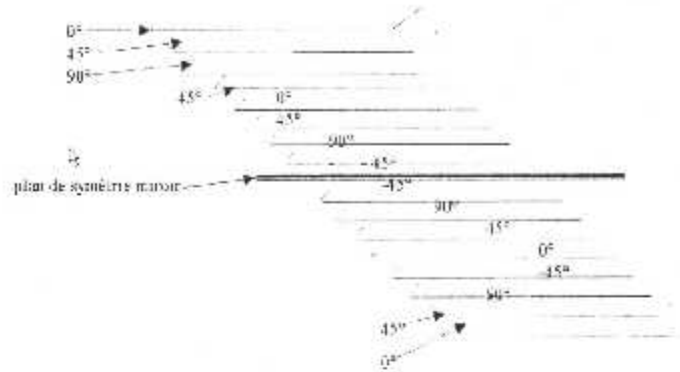


Figure 1.3 : stratifié symétrique (symétrie miroir)

a : Equilibré

On entend par Stratifié équilibré (fig.1.4), un stratifié comprenant autant de couches orientées suivant la direction (+ θ) que de couches orientées suivant la direction (- θ) dans la partie symétrique.

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

$$B_{ij} = 0$$

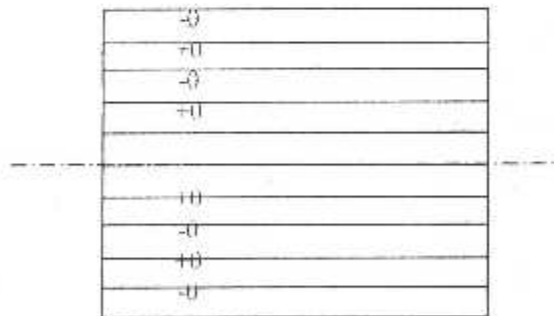


Figure 1.4 : stratifié équilibré

b : non équilibré

Un stratifié dit non équilibré (fig.1.5), quand les orientations des fibres de ses plaques sont complètement différentes ($\alpha \neq \beta \neq 0$).

Avec :

$$B_{ij} = 0$$

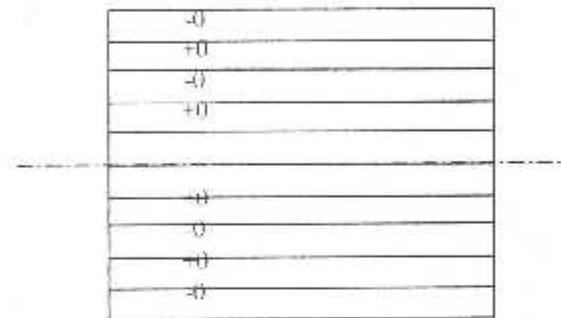


Figure 1.5 : stratifié équilibré

► Stratifié anti-symétrique

On dit qu'un stratifié est anti-symétrique (fig.1.6) lorsque les empilements des plis, de part et d'autre du plan moyen sont d'orientations directement opposées en signes ($\theta(z) = -\theta(-z)$).

On remarque que l'anti-symétrie entraîne automatiquement un équilibrage du stratifié. c'est à dire :

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

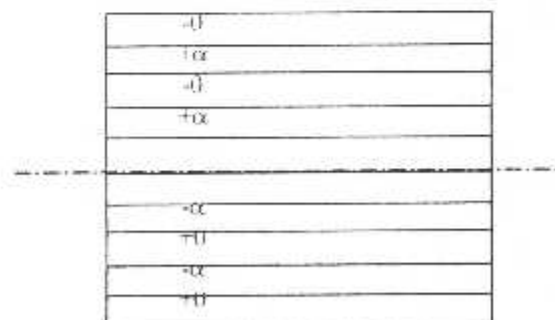


Figure 1.6 : stratifié antisymétrique

$$D_{16} = D_{26} = 0$$

Et

$$B_{ij} = 0$$

sauf $B_{16} \neq 0$ et $B_{26} \neq 0$

On peut résumer les types précédents dans le tableau récapitulatif suivant :

Angle - ply	Stratifié non équilibré	Stratifié non équilibré
Symétrique $\theta(z) = \theta(-z)$	$B_{ij} = 0$ $A_{16} = A_{26} = 0$	$B_{ij} = 0$
Anti-symétrique $\theta(z) = -\theta(-z)$	$B_{ij} = 0$ sauf B_{16}, B_{26} $A_{16} = A_{26} = 0$ $D_{16} = D_{26} = 0$	
Non symétrique	$A_{16} = A_{26} = 0$	

➤ Stratifié orthogonal

Stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .

1.4.2. Les matériaux Sandwichs

Matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et faible résistance, l'ensemble forme une structure d'une grande légèreté.

Le matériau sandwich (Fig.1.7) possède une grande légèreté en flexion et c'est un excellent isolant thermique.

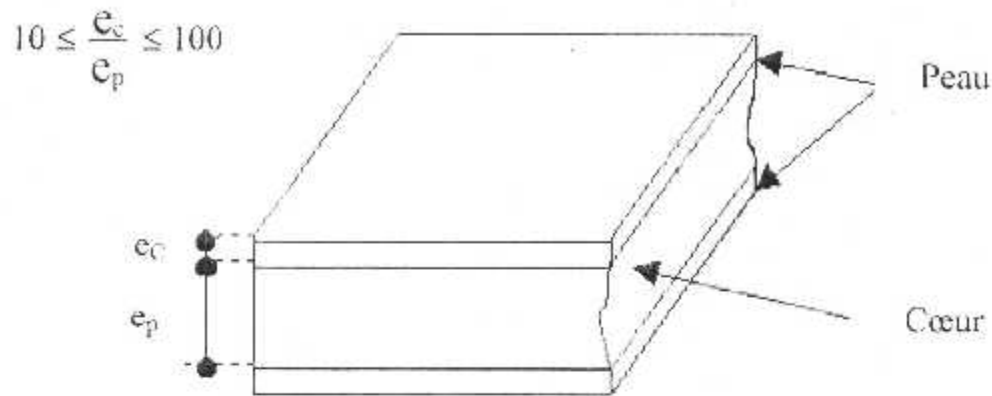


Figure 1.7 : Matériau sandwich

On trouvera les sandwichs dans toutes les applications où le rapport (rigidité / masse volumique) apparente de la structure doit être le plus élevé et la fiabilité doit être prioritaire sans que le coût soit une donnée élémentaire.

Il est souhaitable si la forme de la structure n'est pas imposée par des impératifs fonctionnels (aérodynamique, géométrique) de l'optimiser en tenant compte des contraintes qui lui seront imposées.

Dans la même pensée, il faut noter que si les semelles de sandwich sont stratifiées, la matrice et les fibres peuvent être réparties pour répondre elles aussi de façon optimale aux contraintes appliquées.

De nombreuses structures sont possibles pour la réalisation des matériaux sandwichs, mais les plus courantes sont :

- _ Les sandwichs à âme pleine.
- _ Les sandwichs 'nid d'abeilles'.

Les premiers sont utilisés dans les applications de grande diffusion, les seconds surtout en aéronautique.

1.5. Avantages d'utilisation des matériaux composites

Les matériaux composites peuvent être choisis et utilisés en fonction d'impératifs techniques, économiques à satisfaire.

Dans le but d'atteindre le résultat souhaité, on agit principalement sur la nature, la proportion, la disposition des constituants et également sur le mode d'élaboration. En conséquence, les matériaux composites se caractérisent par une grande souplesse de fabrication.

Ainsi il est possible d'utiliser sous forme de renforts dispersés des matériaux dotés de propriétés mécaniques intéressantes, mais qui ne sont pas disponibles ou ne sont pas utilisables sous forme massive. Un matériau de renfort coûteux peut être utilisé en adaptant sa répartition à l'usage envisagé. Enfin, suivant les besoins il est possible d'avoir recourt à une fabrication industrielle ou artisanale, ces quelques notions font apparaître les innombrables possibilités offertes par les matériaux composites.

1.6. Inconvénients d'utilisation des matériaux composites

Les matériaux de base et leur mise en œuvre pour l'élaboration de certains composites peuvent conduire à des coûts de production prohibitifs. De tels matériaux seront alors réservés pour les technologies de pointes qui ne nécessitent pas forcément une production importante de matière comme, l'aéronautique, l'aérospatial, l'armement électronique.

Les matériaux composites sont fréquemment conçus sur mesure, et une pièce en matériaux composites est très difficilement transformable une fois réalisée. En particulier, le matériau composite se prête souvent mal aux usinages, la nature fortement hétérogène du matériau est nuisible au fonctionnement normal des outils, et les propriétés mécaniques des parties usinées peuvent être fortement altérées par l'opération subite.

Un endommagement du matériau lui-même peut en résulter, compromettant la longévité de la pièce obtenue par ce procédé. En outre, les assemblages des matériaux composites entre eux ou avec d'autres types de matériaux posent des problèmes très délicats des réalisations et exigent le développement de technologies nouvelles.

I.7. L'utilisation des matériaux composites dans le domaine aéronautique

Les matériaux composites ont taillé une place prépondérante dans le domaine de l'aéronautique, et notamment l'astronautique.

Cependant, les conséquences d'utilisation des composites dans le domaine aéronautique sont des performances accrues.

- grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf Aluminium-Carbone).
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" comme les graisses, les huiles, les liquides hydrauliques, les peintures, les solvants et le pétrole.
- Grande résistance à la fatigue
- Absence de corrosion.
- Gain de masse.

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise ; et pour cela, la construction des matériaux composites est à la demande de :

- _ La nature, la texture et la forme du renfort
- _ Le taux de renforcement
- _ La nature de la matrice et des charges ou additifs

- _ La qualité de l'interface renfort-matrice
- _ La géométrie de la pièce à réaliser
- _ Le procédé de mise en œuvre utilisé

On cherchera toujours à orienter au mieux les renforts en fonction des efforts auxquels la structure est soumise.

Le principal intérêt de l'utilisation des composites provient de ses excellentes caractéristiques spécifiques (module divisé par la masse volumique).

Ces performances ont motivé l'augmentation des proportions des structures composites dans le domaine de l'aviation, et ceci depuis les deux dernières décennies.

On peut donc constater que pendant ces dernières années, les proportions de masse en composite croissent de façon significative, et par conséquent, les gains de masses occasionnés sont désormais de plus en plus importantes.

La plus part des structures industrielles sont formées d'un assemblage de composantes en forme géométrique simples. Cependant, cet assemblage est souvent complexe ; l'idée de partager l'assemblage en composant simple (sous-structure) rendues indépendantes les unes par rapport aux autres selon certains critères et certaines considérations. On caractérise ensuite à l'aide d'un nombre réduit de paramètres chaque structure en utilisant ainsi en mieux ces propriétés géométriques.

I.8. Introduction à la théorie des matériaux composites

Il est nécessaire pour le concepteur de prévoir et de connaître aussi que possible les caractéristiques géométriques et mécaniques du matériau composite.

Le type de composite employé dans l'industrie aéronautique et spatiale comprend une matrice dans laquelle sont enrobées les fibres, la contrainte appliquée est essentiellement supportée par les fibres, la matrice leur sert de support de protection et transmet les contraintes d'une fibre à une autre. Cette technique permet l'utilisation de matériaux de faibles masse volumique offrent une très grande résistance du fait que leur très faible volume entraîne une réduction des macro défauts qui limitent cette résistance dans les produits de dimensions courantes.

La liaison fibre-matrice doit être prévue pour transmettre les contraintes de cisaillement. Néanmoins, elle doit présenter une ductilité suffisante pour permettre une bonne tenue du composite aux chocs, un mouillage satisfaisant entre fibres matrice est donc indispensable.

L'analyse locale du stratifié est une partie de l'étude de la structure, cette étape représente l'objectif de schématiser le comportement mécanique des plaques.

Pour simplifier l'étude des stratifiés, il faut ramener le problème à trois dimensions (3D) à un problème de deux dimensions (2D) Cette simplification nous conduisons à l'utilisation de les mêmes hypothèses pour la théorie des stratifiés que pour celles de la théorie générale des plaques.

I. 9. Calculs des caractéristiques mécaniques des matériaux composites (fibre / matrice)

Les constituants d'un composite sont caractérisés par les constantes suivantes :

➤ Pour les fibres

- E_f^l : Module d'élasticité longitudinale.
- E_f^t : Module d'élasticité transversale.
- G_f : Module de glissement.
- ν_f : Coefficient de poisson.
- ρ_f : Masse volumique.

➤ Pour les matrices

- E_m : Module d'élasticité.
- G_m : Module de glissement.
- ν_m : Coefficient de poisson.
- ρ_m : Masse volumique.

Nous appellerons par la suite :

$$V_f = \frac{\text{volume des fibres}}{\text{volume total}} \quad (\text{fraction de fibre en volume})$$

$$V_m = \frac{\text{volume de la matrice}}{\text{volume total}} \quad (\text{fraction de matrice en volume})$$

Ainsi, on aura :

$$V_f + V_m = 1 \quad (1.1)$$

I. 9.1. Module d'élasticité longitudinale (E_f^l)

D'après la loi de Hooke, les contraintes dans la fibre et la matrice sont :

$$\sigma_{11}^f = E_f \cdot \varepsilon_{11}^f \quad (1.2a)$$

$$\sigma_{11}^m = E_m \cdot \varepsilon_{11}^m \quad (1.2b)$$

Ainsi, les efforts supportés par les fibres et la matrice s'écrivent sous la forme suivante :

$$F_f = E_f \cdot S_f \cdot \varepsilon_{11} \quad (1.3a)$$

$$F_m = E_m \cdot S_m \cdot \varepsilon_{11} \quad (1.3b)$$

N.B: La déformation ε_{11} suivant la direction voulue est identique dans les deux constituants du composite.

$$\varepsilon_{11}^f = \varepsilon_{11}^m = \varepsilon_{11}$$

A noter que S_f et S_m représentent les aires des sections respectivement occupées par les fibres et les matrices.

Pour la section totale de la plaque, on a :

$$F = F_f + F_m \quad (1.4a)$$

Avec :

$$F = S \cdot E_l \cdot \varepsilon_{11} \quad (1.4b)$$

D'où E_f^l est le module de Young global et en tenant compte des relations précédentes :

$$E_f^l = V_f \cdot E_f + V_m \cdot E_m \quad (1.5)$$

I. 9.2. Module d'élasticité transversale (E_t^f)

De la même façon que précédemment, le module d'élasticité transversale E_t^f est obtenu par la relation suivante :

$$E_t^f = E_m \left[\frac{1}{\frac{E_m V_f + (1 - V_f)}{E_f}} \right] \quad (1.6)$$

I. 9.3. Module de cisaillement ou de glissement (G_{12})

Lorsqu'un matériau composite est soumis à un cisaillement, on note que U_f est le déplacement maximal dans les fibres et U_m est le déplacement maximal dans la matrice.

$$U_f = V_f \cdot l \cdot \varepsilon_{12}^f \quad (1.7a)$$

$$U_m = V_m \cdot l \cdot \varepsilon_{12}^m \quad (1.7b)$$

A noter que :

ε_{12}^f et ε_{12}^m sont les distorsions introduites par σ_{12} dans les fibres et dans la matrice.

donc :

$$\varepsilon_{12} = \frac{U_m + U_f}{l} = V_f \cdot \varepsilon_{12}^f + V_m \cdot \varepsilon_{12}^m \quad (1.8)$$

D'après la loi de Coulomb, on peut exprimer la déformation dans les fibres et la matrice par :

$$\varepsilon_{12}^f = \frac{\sigma_{12}}{2 \cdot G_f} \quad (1.9a)$$

$$\varepsilon_{12}^m = \frac{\sigma_{12}}{2 \cdot G_m} \quad (1.9b)$$

$$\varepsilon_{12}^m = \frac{\sigma_{12}}{2 \cdot G_{12}} \quad (1.9c)$$

On déduit que :

$$G_{12} = G_m \left[\frac{1}{\frac{G_m V_f + (1 - V_f)}{G_f}} \right] \quad (1.10)$$

1. 9.4. Coefficient de poisson (ν_{12}) et (ν_{21})

On dispose d'un matériau composite soumis à une contrainte. La matrice est soumise à une contraction orthogonale dans la direction de la contrainte.

$$U_m = \nu_m \cdot \varepsilon_{11} \cdot V_m \cdot l \quad (1.11a)$$

$$U_f = \nu_f \cdot \varepsilon_{11} \cdot V_f \cdot l \quad (1.11b)$$

La contraction totale est représentée par :

$$U_2 = U_m + U_f \quad (1.12)$$

Elle correspond à la déformation ε_{22} au sein du matériau.

$$\varepsilon_{22} = \frac{-U_2}{l} = - (V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m) \cdot \varepsilon_{11} \quad (1.13)$$

On obtient finalement :

$$\nu_{12} = V_f \cdot \nu_f + V_m \cdot \nu_m \quad (1.14)$$

Par symétrie, on peut obtenir :

$$\frac{\nu_{12}}{E_f^1} = \frac{\nu_{21}}{E_f^1} \quad (1.15)$$

I. 9.5. Masse volumique (ρ)

D'après le principe du mélange des deux matériaux (fibre/matrice), la masse volumique ρ du composite est définie par :

$$\rho = \frac{\text{Masse totale}}{\text{Volume total}}$$

$$\rho = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m \quad (1.16)$$

I.10. Hypothèses fondamentales des stratifiés

I.10.1. Champ de déplacement u , v et w

Le déplacement élastique de tout point d'un stratifié rapporté à un repère orthonormé (o, x, y, z) constitue un champ de déplacement (u, v, w) tel que :

u : Déplacement suivant l'axe ox .

v : Déplacement suivant l'axe oy .

w : Déplacement suivant l'axe oz .

I.10.2. Comportement mécanique du stratifié

a : Tenseur de contraintes

L'état de contrainte en un point défini dans le repère (G) par les six composantes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{array} \right\} : \text{Contraintes normales (de traction ou de compression sur le matériau)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{array} \right\} : \text{Contraintes de cisaillement.}$$

➤ Contraintes dans le plan (x, y)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ CS & -CS & C^2-S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.18a)$$

Pour passer du repère (1,2) au repère (x,y) il faut pré-multiplier l'expression (1.18) par $[T]^{-1}$ et on aura :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.18b)$$

$[T]$: matrice de passage du repère (x,y) au repère (1,2).

b : Tenseur de déformation

L'état de déformation en un point est défini dans le repère (G) par les six composantes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \end{Bmatrix} : \text{représentent les déformations normales suivant les axes } x, y \text{ et } z.$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} : \text{représentent les Déformations angulaires.}$$

- **Changement de repère :**

Comme pour les contraintes, connaissant les déformations dans un repère (O, X, Y, Z), il est nécessaire de connaître l'équivalent de ces déformations dans le repère (O, 1, 2, 3) et ceci par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & CS \\ S^2 & C^2 & 0 & 0 & 0 & -CS \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ -2CS & 2CS & 0 & 0 & 0 & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.19a)$$

ou bien :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & CS \\ S^2 & C^2 & -CS \\ -2CS & 2CS & C^2 - S^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1.19b)$$

[T] : matrice de passage du repère (1,2) au repère (x, y)..

I.11. Relation déformations-déplacements

De tels composites sont obtenus par la superposition judicieuse des plis. Dans le cas où le composite aurait plusieurs plis est constitué par l'empilement de N plis d'épaisseur (e_k), est aussi dans le cas des petites déformations, ces dernières sont reliées aux déplacements par les relations suivantes :

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (1.20a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1.20b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (1.20c)$$

Donc, on peut alors définir les deux vecteurs $\{\varepsilon^0\}$ et $\{k^0\}$ par :

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad ; \text{ Représente les déformations dans le plan.}$$

$$\{k^0\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad ; \text{ Représente la courbure du plan moyen.}$$

Les (ε_{ij}^0) et (k_{ij}^0) sont défini comme suite :

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (1.21a)$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (1.21b)$$

$$\gamma_{12}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (1.21c)$$

et :

$$k_1^0 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (1.22a)$$

$$k_2^0 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (1.22b)$$

$$k_{12}^0 = -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (1.22c)$$

D'où les relations (1.20a), (1.20b) et (1.20c) peuvent être écrites sous la forme :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0 + z \cdot k_1^0 \quad (1.23a)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0 + z \cdot k_2^0 \quad (1.23b)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + z \cdot k_{12}^0 \quad (1.23c)$$

1.12. Relations contraintes-déformations

Le stratifié est lié au repère $(O, 1, 2, 3)$, la loi de comportement du $k^{\text{ième}}$ pli dans le repère (O, x, y, z) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (1.24)$$

1.12.1. Effort de membrane

L'effort $N(x, y)$ selon la direction (x) est donné par la relation :

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma \cdot dz \quad (1.25)$$

L'effort $N(x, y)$ représente l'effort moyen exercé sur toute l'épaisseur h du stratifié dans la direction (x) et sur une largeur unité. Les plis restant distincts, leurs propriétés étant constantes dans l'épaisseur d'où l'effort $N(x, y)$ sera donné par la relation :

$$N_x = \sum_{k=1}^n \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \sigma_1^k \cdot dz \quad (1.26)$$

De la même manière, les efforts N_y et N_{xy} sont donnés respectivement par les relations :

$$N_x = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{11}^k dz \quad (1.27a)$$

$$N_{xy} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{12}^k dz \quad (1.27b)$$

1.12.2. Moments résultants

Le moment $M(x,y)$ dû à la sollicitation suivant (x) est donné par la relation:

$$M(x,y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} z dz \quad (1.28)$$

N.B : Les remarques de sommation sont identiques à celles faites pour N_1 .

$$M_x = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{11}^k z dz \quad (1.29a)$$

$$M_y = - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \sigma_{22}^k z dz \quad (1.29b)$$

$$M_{xy} = - \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \tau_{12}^k z dz \quad (1.29c)$$

1.13. Loi de comportement du stratifié

Après avoir introduit les efforts membranes $N(x,y)$ et les moments $M(x,y)$ qui sont un système équivalent à l'ensemble des contraintes (σ_i) et (τ_{ij}) de chaque pli, nous allons en déduire une loi de comportement reliant ces efforts et moments aux déformations (ϵ_i) et aux courbures (k_i) du plan moyen du stratifié.

D'après les relations (1.23a), (1.23b), (1.23c) et (1.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^k &= \bar{Q}_{11}^k \cdot \varepsilon_1^0 + \bar{Q}_{12}^k \cdot \varepsilon_2^0 + \bar{Q}_{16}^k \cdot \gamma_{12}^0 + z(\bar{Q}_{11}^k \cdot k_1^0 + \bar{Q}_{12}^k \cdot k_2^0 + \bar{Q}_{16}^k \cdot k_{12}^0) \\
 \sigma_1^k &= \bar{Q}_{12}^k \cdot \varepsilon_1^0 + \bar{Q}_{22}^k \cdot \varepsilon_2^0 + \bar{Q}_{26}^k \cdot \gamma_{12}^0 + z(\bar{Q}_{12}^k \cdot k_1^0 + \bar{Q}_{22}^k \cdot k_2^0 + \bar{Q}_{26}^k \cdot k_{12}^0) \\
 \sigma_j^k &= \bar{Q}_{16}^k \cdot \varepsilon_1^0 + \bar{Q}_{26}^k \cdot \varepsilon_2^0 + \bar{Q}_{66}^k \cdot \gamma_{12}^0 + z(\bar{Q}_{16}^k \cdot k_1^0 + \bar{Q}_{26}^k \cdot k_2^0 + \bar{Q}_{66}^k \cdot k_{12}^0)
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

En utilisant les relations (1.25), (1.26), (1.27a), (1.27b), (1.27c), (1.28), (1.29a), (1.29b) et (1.29c), on aura :

$$\left\{ \begin{aligned}
 N_{xx} &= A_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{16} \cdot \gamma_{xy}^0 + B_{11} \cdot k_x^0 + B_{12} \cdot k_y^0 + B_{16} \cdot k_{xy}^0 \\
 N_{yy} &= A_{12} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{26} \cdot \gamma_{xy}^0 + B_{12} \cdot k_x^0 + B_{22} \cdot k_y^0 + B_{26} \cdot k_{xy}^0 \\
 N_{xy} &= A_{16} \cdot \varepsilon_x^0 + A_{26} \cdot \varepsilon_y^0 + A_{66} \cdot \gamma_{xy}^0 + B_{16} \cdot k_x^0 + B_{26} \cdot k_y^0 + B_{66} \cdot k_{xy}^0 \\
 M_{xx} &= B_{11} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{12} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{16} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{11} \cdot k_x^0 + D_{12} \cdot k_y^0 + D_{16} \cdot k_{xy}^0 \\
 M_{yy} &= B_{12} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{22} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{26} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{12} \cdot k_x^0 + D_{22} \cdot k_y^0 + D_{66} \cdot k_{xy}^0 \\
 M_{xy} &= B_{16} \cdot \varepsilon_x^0 + B_{26} \cdot \varepsilon_y^0 + B_{66} \cdot \gamma_{xy}^0 + D_{16} \cdot k_x^0 + D_{26} \cdot k_y^0 + D_{66} \cdot k_{xy}^0
 \end{aligned} \right. \tag{1.31}$$

avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \tag{1.32a}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \tag{1.32b}$$

$$C_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{1.32c}$$

La relation (1.31) qui définit la loi de comportement du stratifié peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.33)$$

L'équation (1.33) représente l'équation constitutive décrivant le comportement mécanique d'un stratifié avec l'absence de l'effet de cisaillement transverse.

La matrice $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ est la matrice de rigidité du stratifié.

[A] : Matrice de rigidité en membrane.

[D] : Matrice de rigidité en flexion.

[B] : Matrice de couplage entre membrane – flexion – torsion.

Les efforts de membranes et les moments résultants dans la relation (1.33) peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^0\} + [B] \{K\} \quad (1.34a)$$

$$\{M\} = [B] \{\varepsilon^0\} + [D] \{K\} \quad (1.34b)$$

Signalons que si le stratifié est doté de la symétrie miroir ($B_{ij} = 0$), la relation (2.33) est découplée et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon^0\} : \text{représente le comportement en membrane} \quad (1.35a)$$

$$\{M\} = [D] \{K^0\} : \text{représente le comportement en flexion} \quad (1.35b)$$

Alors, le comportement en membrane et le comportement en flexion peuvent être traités séparément.

1.14. Cas particuliers

1.14.1. Stratifié doté de la symétrie miroir

Cette condition est caractérisée par :

$$B_{ij} = 0 \Rightarrow [B] = 0 \quad (\text{pas de couplage}).$$

Les relations (1-34a) et (1-34b) deviennent :

$$\{N\}_{xy} = [A] \{\varepsilon_0\}_{xy} \quad (1.36a)$$

$$\{M\}_{xy} = [D] \{k\}_{xy} \quad (1.36b)$$

1.14.2. Stratifié équilibré

$$\text{Dans ce cas} \quad A_{16} = A_{26} = 0 \quad (1.37)$$

1.14.3. Stratifié équilibré symétrique

Dans ce cas, l'équation constitutive sera réduite à :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx}^0 \\ k_{yy}^0 \\ k_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

1.15. Matrice de rigidité

La détermination de la matrice de rigidité nécessite le passage par les étapes suivantes (voir Annexe A) :

- **Etape1:** Calcul des constantes élastiques d'une composite unidirectionnelle (pli) dans le repère (1, 2).
- **Etape2:** Calcul de la matrice de rigidité $[Q_{ij}]_k$ d'un pli dans le repère (1,2)
- **Etape3:** Calcul de la matrice de rigidité $[\bar{Q}_{ij}]_k$ d'un pli dans le repère du stratifié en utilisant les matrices de passage (voir Annexe B) .
- **Etape4:** Calcul des cotes (z_k) et (z_{k+1}) de chaque pli dans le repère du stratifié.
- **Etape5:** Calcul de la matrice de rigidité $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ du stratifié dans le repère (x,y,z).

Chapitre II

ETUDE ANALYTIQUE DE DELAMINAGE PAR FLAMBEMENT

II.1. Introduction

Il est demandé d'avoir des structures plus légères et plus efficaces ; ceci a conduit l'ingénieur en construction à utiliser les composites à fibres renforcées, en même temps l'utilisation des méthodes et de tests sophistiqués s'impose pour l'analyse et la conception et de même pour la fabrication.

Le progrès explosif récent dans la production et l'utilisation des matériaux composites nous a conduit à une possibilité très claire qui est la création humaine de matériaux spécifiques pour des missions spécifiques.

Un témoignage de celui-ci est la forte utilisation des plaques et des coques laminées comme composantes primaires dans les structures, en plus des imperfections géométriques visuelles et courantes dans les plaques métalliques et dans les plaques minces, les géométries délaminées peuvent avoir soit une fibre cassée soit une matrice écrasée lors de la fabrication d'une part et d'autre part la séparation des plis, appelée "délaminage de surface", est due à un mauvais étalement de l'adhésif utilisé entre les plis pour la construction d'un stratifié. Les imperfections qui expriment le délaminage dans une production technologique sont dues à certains facteurs qui entrent en jeu lors de la synthèse du matériau.

Sans se soucier de ses origines et de son emplacement, le délaminage peut réduire la charge critique du matériau et donc affecté la tolérance et l'endommagement du système. Pour cette étude, nous signalons que les deux cas pris en considération sont les suivants :

- *Plaques composites encastrées.*
- *Plaques composites simplement appuyées.*

II.2. Présentation du phénomène de délaminage par flambement

Le délaminage est parmi les modes des ruptures les plus communs. Dans les matériaux composites, il est dû aux imperfections de production ou bien aux effets de certains facteurs, durant sa mise en service comme des impacts contre des objets étrangers, la présence d'un délaminage dans une structure fixée, cause un flambement local influe sur la raideur qui peut conduit à une rupture prématurée.

C'est pour cela qu'un modèle unidimensionnel ne postule que si le délaminage existe tout le long d'un plan parallèle au plan de référence, et qu'il est présent avant l'application de la charge, compressive dans une telle situation, il est observé que le délaminage sépare une plaque en quatre régions comme l'indique la figure (fig 2.1). Pour le but de ce travail, on considérera que le délaminage s'étend sur une longueur (a) inférieure ou égale à la largeur de la plaque (fig 2.2).

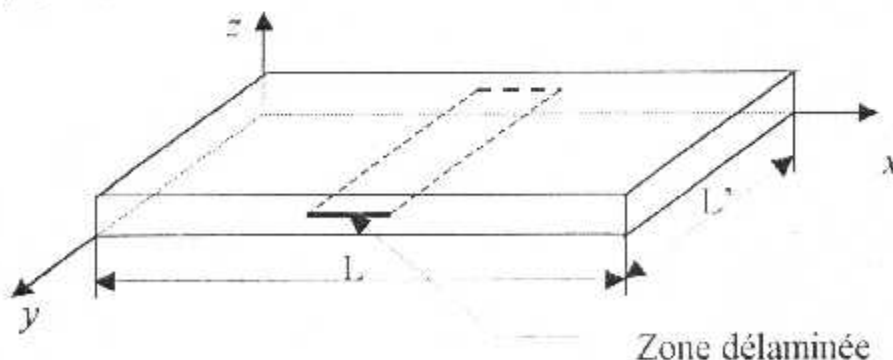


Figure 2.1: Position et orientation de délaminage

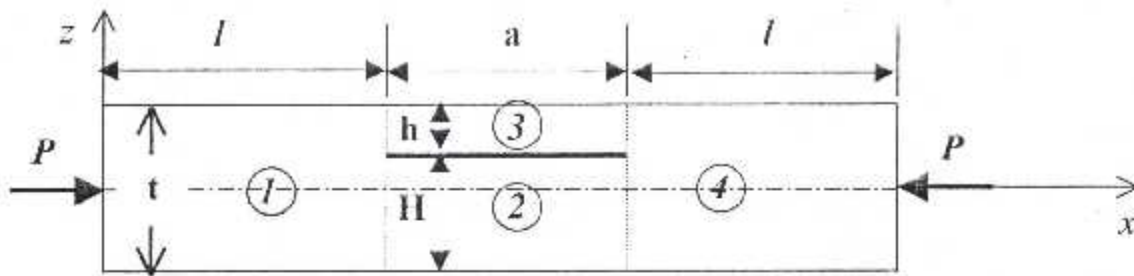


Figure 2.2: Caractéristiques géométriques et dimensionnement de la surface délaminée

II.3. Mode de travail

II.3.1. Travail en membrane

Une plaque possédant une rigidité transversale négligeable se comporte comme une membrane élastique, on l'appelle alors membrane. L'état de contrainte dans une membrane est plan, une membrane n'admet pas une contrainte de compression.

II.3.2. Travail en plaque :

La plaque d'épaisseur modérée a une rigidité transversale qui lui communique des propriétés de résistance à la flexion et c'est ce mode de travail qui nous intéresse.

II.4. Flexion des plaques :

On dit qu'il y'a flexion, si les sollicitation aux quelles est soumise la plaque sont des moments de flexion M_{xx} et M_{yy} qui sont répartis sur ses bords (l'ensemble de ces sollicitation devront constituer évidemment un système en équilibre).

On appelle w la déformée suivant z du plan moyen de la plaque induite par flexion. On appelle M_{xx} le moment de flexion réparti par unité de

longueur d'axe y appliqué sur l'extrémité $x = 0$ de la plaque $M_{xx} > 0$ si la déformée induite par M_{xx} et $w > 0$.

De même pour M_{yy} , qui est le moment de flexion réparti par unité de longueur d'axe x , appliqué sur l'extrémité $y = 0$ de plaque $M_{yy} > 0$, si la déformée (w) induite par $M_{yy} > 0$, il est à signaler que pour tout élément de la plaque nous avons :

- Le plan moyen ne subit aucune déformation dans le plan (x,y) , il n'y se résigne donc aucune contrainte et on peut parler du plan neutre.
- Les faces normales au plan moyen restent planes et normales à la surface neutre qui la déformée du plan moyen.

L'état de contrainte est un état plan, les faces supérieures et inférieures de la plaque sont libres $\sigma_z = 0$. Alors, on déduit que les axes (ox) et (oy) sont tangents aux lignes de courbures de la surface en O et les axes (ox) et (oy) sont les directions principales de la contrainte en O .

II.5. Flexion combinée avec des charges transversales réparties :

L'introduction des charges transversales apporte des sollicitations nouvelles par rapport à celles de flexion.

Il est à remarquer que :

- La charge transversale répartie, orientée suivant (z) , par unité de surface.
- Q_x et Q_y sont les efforts tranchants répartis appliqués à l'élément et qui résultent de la présence de $q(x,y)$ par unité de longueur d'axes x et y respectivement.

L'application du théorème d'équivalence nous permet d'aboutir aux résultats suivant :

– La réciprocité des cisaillements $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ des moments de torsion M_{xy} et M_{yx} et sous la forme :

$$M_{xy} = - M_{yx}$$

– On suppose $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ répartis sur les faces de telles sortes que leur résultante s'exerce au centre de gravité des forces et on pourra admettre que cette distribution est parabolique comme les poutres sollicitées en efforts tranchants.

II.6. Equation différentielle pour la déformée

Ecrivons l'équilibre mécanique de l'élément plaque

- Suivant z :
$$\frac{\partial q_x}{\partial X} + \frac{\partial q_y}{\partial Y} + q(x, y) = 0 \quad (2.1a)$$

- Moment suivant x :
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial X} + q_y - \frac{\partial M_y}{\partial Y} = 0 \quad (2.1b)$$

- Moment suivant y :
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial Y} - q_x + \frac{\partial M_x}{\partial X} = 0 \quad (2.1c)$$

En dérivant partiellement les équations (3.1a), (3.1b) et (3.1c) qui fournissent, par élimination de $\frac{\partial q_x}{\partial X}$ et $\frac{\partial q_y}{\partial Y}$, on obtient :

$$-\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (2.2)$$

Si on tient compte de la réciprocité des moments de torsion répartis

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) = 0 \quad (2.3)$$

II.7. Flexion combinée avec un changement transversal et un changement plan :

Dans ce type de sollicitation il est à noter que :

- N_{xx} force normale répartie par unité de longueur d'axe y , $N_{xx} > 0$ en traction.
- N_{yy} force normale répartie par unité de longueur d'axe x , $N_{yy} > 0$ en traction.
- N_{xy} et N_{yx} actions de cisaillement réparties par unité de longueur avec la même convention de signe que celle relative à $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ l'équilibre d'un élément (dx, dy, e) .

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.4b)$$

$$N_{xy} = N_{yx} \quad (\text{réciprocité}) \quad (2.4c)$$

II.8. Equation différentielle pour la déformée

Nous allons reprendre les équations d'équilibre du changement transversal, en remarquant que la déformation $w(x, y)$ induit des charges transversales supplémentaires du à N_{xx} , N_{yy} et N_{xy} .

Ainsi N_{xx} en P induit une composante élémentaire $dy [N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}]x$ vers les $z < 0$ et en P' une composante élémentaire vers les $z > 0$ on aura par la suite $dy [N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}]x+dx$. N_{xx} induit donc une composante transversale.

$$q_l = \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}) \quad (2.5)$$

De même N_{yy} induit une composante transversale répartie telle que :

$$q_2 = \frac{\partial}{\partial y} (N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y}) \quad (2.6)$$

D'autre part, N_{xy} et N_{yx} introduisent une composante transversale répartie q_3 illustrée par la relation suivante :

$$q_3 = \frac{\partial}{\partial x} (N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y}) \quad (2.7)$$

Donc, on peut dire que les forces réparties N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} et N_{yx} du changement (dans le plan travail en membrane) introduisent une composante transversale par unité de surface, est qui se décrit par :

$$q' = q_1 + q_2 + q_3 \quad (2.8)$$

La relation (3.8) peut aussi se mettre sous la forme :

$$q' = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

d'où on obtient les équations d'équilibre transversal :

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + q(x,y) + q'(x,y) = 0 \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + q_y - \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (2.10c)$$

On obtient donc, si on dérive la relation (2.10a), (2.10b) et (2.10c) et après élimination des efforts tranchants on obtient :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -(q + N_{xx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}) \quad (2.11)$$

Ce qu'on peut retenir, c'est le fait que pour une plaque rectangulaire les équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.12b)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_{xx}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + N_{yy}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = -q(x,y) \quad (2.12c)$$

II.9. Hypothèses fondamentales et équations principales

Les hypothèses simplificatrices utilisées dans la présente étude sont :

1. Les axes d'orthotropie sont parallèles à la direction xy.
2. Le plan moyen (neutre) de chaque région est considéré confondu avec le plan (x,y)
3. Le déplacement latéral (w) est supposé petite par rapport aux dimensions de la plaque considérée.
4. Les déplacements $u^{(i)}$ et $w^{(i)}$ ($i=1,2,3,4$) représentent respectivement le $i^{\text{ème}}$ déplacement axial (dans le plan de la plaque) et le $i^{\text{ème}}$ déplacement transversal d'un point quelconque du matériau dans chaque région.
5. Les charges de compression sont uniformément réparties sur une longueur unité et appliquées sur chaque extrémité de la plaque.
6. Le délaminage est supposé présent avant que la charge de compression soit appliquée.
7. Le délaminage possède une longueur (a) et s'étend sur toute la largeur de la plaque.

A cause de la supposition d'EULER-BERNOULLI [2.1], $w^{(i)}$ caractérisé le déplacement transversal de chaque point matériel qui se met sous la forme :

$$u_i(x, z_i) = u_i(x) - z_i \frac{\partial w_i}{\partial x} \quad (2-13)$$

Ou (z_i) est mesuré depuis la surface médiane de chaque région.

La plaque délaminée est assimilée à une plaque plane composite ayant (N) plis, nous avons les relations cinématiques suivantes :

$$\varepsilon_{xxi} = \varepsilon_{xxi}^0 - Z_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad (2.14a)$$

$$\varepsilon_{xxi}^0 = \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 \quad (2.14b)$$

$$k_{xxi} = - \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \quad (2.14c)$$

Le comportement d'un stratifié est défini par la loi suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Dans ce problème, nous sommes en face d'une charge axiale suivant l'axe des x, pour cela, nous devons considérer deux cas :

- Plaque à appuis simples.
- Plaque encastree.

a : Appuis simples

Dans ce genre de situation, nous aurons les conditions aux limites suivantes :

$$N_y = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad M_y = 0 \quad \text{et} \quad M_{xy} = 0 \quad (2.16a)$$

La relation (3.15) peut être mise sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ M_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.16b)$$

Ou bien, on peut l'écrire sous forme plus simple comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ k_{xx} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

Tel que :

$$A_1 = A_{11} + b_1 \cdot A_{12} + a_1 \cdot B_{12} \quad (2.18a)$$

$$A_2 = B_{11} + b_2 \cdot A_{12} + a_2 \cdot B_{12} \quad (2.18b)$$

$$K_1 = B_{11} + b_1 \cdot B_{12} + a_1 \cdot D_{12} \quad (2.18c)$$

$$K_2 = D_{11} + b_2 \cdot B_{12} + a_2 \cdot D_{12} \quad (2.18d)$$

avec:

$$a_1 = \frac{B_{22}A_{12} - B_{12}A_{22}}{(D_{22}A_{22}) - B_{22}^2} \quad (2.19a)$$

$$a_2 = \frac{B_{12}B_{22} - D_{12}A_{22}}{(D_{22}A_{22}) - B_{22}^2} \quad (2.19b)$$

$$b_1 = \frac{B_{22}(B_{12}A_{22} - B_{22}A_{12})}{A_{22}[(D_{22}A_{22}) - B_{22}^2]} \frac{A_{12}}{A_{22}} \quad (2.19c)$$

$$b_2 = \frac{B_{22}(D_{12}A_{22} - B_{12}B_{22})}{A_{22}[(D_{22}A_{22}) - B_{22}^2]} \frac{B_{12}}{A_{22}} \quad (2.19d)$$

b : Encastrement (Extrémité fixe)

Dans ce cas les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\varepsilon_y^0 = 0 \quad , \quad \varepsilon_{xy}^0 = 0 \quad , \quad k_y = 0 \quad \text{et} \quad k_{xy} = 0 \quad (2.20a)$$

Donc La relation (2-15) prend la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.20b)$$

Alors, le système s'écrit sous la forme réduite suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ M_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ k_{xx} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

II.10. Technique de perturbation

II.10.1. Equations d'équilibres

Concernant les plaques ayant un rapport longueur sur largeur assez élevé, la théorie des plaques a simplifié le problème et peut nous ramener à une analyse unidimensionnelle.

Les équations d'équilibre dans notre cas peuvent être exprimées en fonction des résultantes des forces et des moments par les relations:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -q_z(x,y) \quad (2.22b)$$

Tel que $q_z(x,y)$ représente la distribution transversale des charges.

Les équations de flambement sont obtenues par la technique de perturbation, selon les étapes suivantes :

- Utilisant les (i) équations d'équilibres, les (ii) conditions aux limites et les (iii) conditions de continuités des forces et des moments.
- Perturbant les équations d'équilibres par un petit changement dans les fonctions de déplacement.
- Découplant les termes des états de pré-flambement et de flambement, décrivant respectivement les équations différentielles suivantes :

$$w = w^0 + w^1 \quad (2.23a)$$

$$u = u^0 + u^1 \quad (2.23b)$$

$$M_x = M_x^0 + M_x^1 \quad (2.23c)$$

$$N_x = N_x^0 + N_x^1 \quad (2.23d)$$

En substituant les équations (2.23a)–(2.23d) dans les équations (2.22a) et (2.22b), on obtient :

$$\frac{\partial N_x^0}{\partial x} = 0 \quad (2.24a)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^0}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} = -q_y(x, y) \quad (2.24b)$$

$$\frac{\partial N_x^1}{\partial x} = 0 \quad (2.24c)$$

$$\frac{\partial^2 M_x^1}{\partial x^2} + N_x^0 \frac{\partial^2 w^1}{\partial x^2} + N_x^1 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} = 0 \quad (2.24d)$$

On peut dire, que les équations (2.24a) et (2.24b) explicitent le pré-flambement et les équations (2.24c) et (2.24d) expriment le flambement.

II.10.2. Conditions aux limites

la technique de perturbation impose les conditions aux limites sur :

Déplacements

- déplacement axial

$$(u)$$

- déplacement transverse

$$(w)$$

- déplacement angulaire

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

forces et moments

- effort axial

$$(N_x)$$

$$(2.25a)$$

- cisaillement transverse

$$\left(v = \frac{\partial M_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$(2.25b)$$

- moment de flexion

$$(M_x)$$

$$(2.25c)$$

Si on substitue les équations (2.23a), (2.23b), (2.23c) et (2.23d) dans les équations (2.25a), (2.25b) et (2.25c); les conditions aux limites de pré-flambement et de flambement sont obtenues comme suit:

II.10.2.1. Conditions aux limites du pré-flambement

Déplacements

forces et moments

$$\bullet u^0 = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet N_x^0 = -P \quad (2.26a)$$

$$\bullet w^0 = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet \frac{\partial M_x^0}{\partial x} + N_x^0 \frac{\partial w^0}{\partial x} = 0 \quad (2.26b)$$

$$\bullet \frac{\partial w^0}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet M_{xx}^0 = 0 \quad (2.26c)$$

II.10.2.2. Conditions aux limites du flambement

Déplacements

forces et moments

$$\bullet u^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet N_x^1 = 0 \quad (2.27a)$$

$$\bullet w^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet \frac{\partial M_x^1}{\partial x} + N_x^0 \frac{\partial w^1}{\partial x} + N_x^1 \frac{\partial w^0}{\partial x} = 0 \quad (2.27b)$$

$$\bullet \frac{\partial w^1}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \bullet M_x^1 = 0 \quad (2.27c)$$

II.10.3. Conditions auxiliaires

Les conditions de continuités pour les deux extrémités du délaminage sont les suivants :

a : Déplacements

Pour $x = l$

$$u^{(1)} - \frac{h}{2} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = u^{(2)} \quad (2.28a)$$

$$u^{(3)} + \frac{H}{2} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = u^{(3)} \quad (2.28b)$$

$$w^{(1)} = w^{(2)} = w^{(3)} \quad (2.28c)$$

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} \quad (2.28d)$$

Pour $x = l+a$

$$u^{(4)} - \frac{h}{2} \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} = u^{(2)} \quad (2.29a)$$

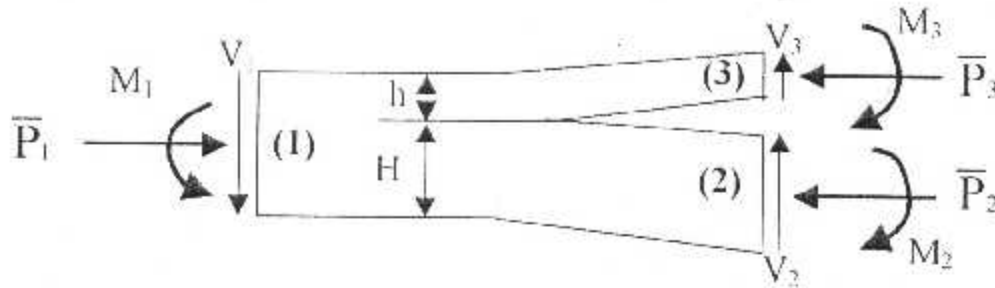
$$u^{(4)} + \frac{H}{2} \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} = u^{(3)} \quad (2.29b)$$

$$w^{(2)} = w^{(3)} = w^{(4)} \quad (2.29c)$$

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial w^{(4)}}{\partial x} \quad (2.29d)$$

b : Forces et moments

L'application des équations fondamentales de l'équilibre statique sur la structure représentée sur la figure (2.2), nous donne les conditions :



Fig(2.2) – Equilibre statique des forces et des moments

Pour $x=l$

$$M_x^{(1)} - M_x^{(2)} - M_x^{(3)} + \frac{H}{2} N_x^{(3)} - \frac{h}{2} N_x^{(2)} = 0 \quad (2.29e)$$

$$V^{(1)} - V^{(2)} - V^{(3)} = 0 \quad (2.29f)$$

$$N_x^{(1)} - N_x^{(2)} - N_x^{(3)} = 0 \quad (2.29g)$$

Pour $x=l+a$

$$M_x^{(4)} - M_x^{(2)} - M_x^{(3)} + \frac{H}{2} N_x^{(3)} - \frac{h}{2} N_x^{(2)} = 0 \quad (2.29h)$$

$$V^{(4)} - V^{(2)} - V^{(3)} = 0 \quad (2.29i)$$

$$N_x^{(4)} - N_x^{(2)} - N_x^{(3)} = 0 \quad (2.29j)$$

Tel que :

$$F^{(i)} = \frac{\partial M_x^{(i)}}{\partial x} + N_x^{(i)} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.30c)$$

Ces conditions auxiliaires sont applicables aux états de flambement et au pré-flambement. Alors, les conditions auxiliaires et les conditions aux limites produisent un nombre nécessaire d'équations pour le problème à résoudre.

Les cas des stratifiés symétriques et asymétriques avec les extrémités libres ou encastées sans distribution élastique vont être considérées.

Premièrement, les stratifiées asymétriques sont examinées, ce qui implique que le cas symétrique ne présentera qu'un cas particulier de l'analyse non symétrique.

Pour simplifier, le cas où seulement $(B_{11})_i$ de la région (2) non nulle, est considérée et pour n'importe quel autre cas $(B_{11})_i$ est similaire.

II.11. Etat de pré-flambement

L'équation (2.17) appliquée aux extrémités libres, est applicable comme les cas du couplage flexion-torsion en été examinés, il est connu que le déplacement transversal (w) est égale à zéro. Seulement, dans le cas où les deux extrémités sont encastées, pour les stratifiées non symétriques, ce qui suivra portera sur les bords encastés.

Dans l'état de pré-flambement où il n'y a pas de chargement transversal ($q=0$ et $w=0$), on peut simplifier les équations de la façon suivante :

$$\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x^2} = 0 \quad (2.31a)$$

$$w_i^0 = 0 \quad (2.31b)$$

L'intégration de l'équation (2.31a) deux fois par rapport à x , nous donne :

$$\frac{\partial u_i^0}{\partial x} = A^{(i)} \quad (2.31c)$$

et ;

$$u_i^{(0)} = A^{(i)} x + B^{(i)} \quad (i=1,2,3,4) \quad (2.31d)$$

Ou $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$ sont des constantes arbitraires déterminées par l'utilisation des conditions aux limites.

- Les conditions aux limites pour l'encastrement deviennent :

Pour $x = 0$

$$u_1^0 = 0 \quad , \quad w_1^0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial w_1^0}{\partial x} = 0 \quad (2.31e)$$

Pour $x = L$

$$N_4^0 = -P \quad , \quad w_4^0 = 0 \quad , \quad \frac{\partial w_4^0}{\partial x} = 0 \quad (2.31f)$$

Les conditions auxiliaires deviennent :

Pour $x = l$

$$u_2^0 = u_1^0 \quad (2.31g)$$

$$u_3^0 = u_1^0 \quad (2.31h)$$

$$w_2^0 = w_3^0 = w_1^0 \quad (2.31i)$$

$$\frac{\partial w_2^0}{\partial x} = \frac{\partial w_3^0}{\partial x} = \frac{\partial w_1^0}{\partial x} \quad (2.31j)$$

Pour $x = l+a$

$$u_2^0 = u_4^0 \quad (2.31k)$$

$$u_3^0 = u_4^0 \quad (2.31l)$$

$$w_2^0 = w_3^0 = w_4^0 \quad (2.31m)$$

$$\frac{\partial w_2^0}{\partial x} = \frac{\partial w_3^0}{\partial x} = \frac{\partial w_4^0}{\partial x} \quad (2.31n)$$

Pour $x = l$

$$-(B_{11})_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x} + (A_{11})_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} \cdot \left(\frac{H}{2}\right) - (A_{11})_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x^2} = 0 \quad (2.32b)$$

$$-(A_{11})_1 \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + (A_{11})_2 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} + (A_{11})_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} = 0 \quad (2.32c)$$

Pour $x = l+a$

$$-(B_{11})_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x} + (A_{11})_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} \cdot \left(\frac{H}{2}\right) - (A_{11})_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x} \cdot \left(\frac{h}{2}\right) = 0 \quad (2.32d)$$

$$\frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x^2} = 0 \quad (2.32e)$$

$$-(A_{11})_4 \frac{\partial u_4^0}{\partial x} + (A_{11})_2 \frac{\partial u_2^0}{\partial x} + (A_{11})_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x} = 0 \quad (2.32f)$$

Après la résolution des équations précédentes, les expressions pour u_i sont obtenues avec ($i = 1, 2, 3$ et 4), c'est à dire que lorsqu'on remplace les u_i , on obtient les expressions de N_i , comme suite :

$$N_1^0 = N_4^0 = -P \quad (2-33)$$

$$N_2^0 = \frac{-P \cdot (A_{11})_2}{(A_{11})_2 + (A_{11})_3} \quad (2-34)$$

$$N_3^0 = \frac{N_2^0 (A_{11})_3}{(A_{11})_2} \quad (2-35)$$

II.12. Etat de flambement

En utilisant les équations (2.24c), (2.24d) et les expressions des résultantes des forces et des moments (2.20b), les équations caractérisant l'état du flambement peuvent être exprimé par :

$$A_{11}^{(i)} \frac{\partial^2 u_1^{(i)}}{\partial x^2} - B_{11}^{(i)} \frac{\partial^3 w_1^{(i)}}{\partial x^3} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.36)$$

$$\left[\frac{[B_{11}^{(i)}]^2}{A_{11}^{(i)}} - D_{11}^{(i)} \right] \frac{\partial^4 w_1^{(i)}}{\partial x^4} + N_0^{(i)} \frac{\partial^2 w_1^{(i)}}{\partial x^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2.37)$$

Cette dernière équation (2.37) est appelée « l'équation de flambement statique » ; elle l'état de flambement de la plaque stratifié.

II.13. Procédure de solution

Pour résoudre l'équation (2.37), deux cas peuvent se présenter selon le signe du terme (Δ), tel que :

$$\Delta = \left[\frac{[B_{11}^{(i)}]^2}{A_{11}^{(i)}} - D_{11}^{(i)} \right]$$

1^{er} cas : $\Delta > 0$

Dans ce cas, on obtient :

$$w_1^{(i)} = E^{(i)} e^{k^{(i)} x} + F^{(i)} e^{-k^{(i)} x} + G^{(i)} x + H^{(i)} \quad (2.38)$$

En substituant (2-38) dans (2-36), le déplacement axial sera exprimer par :

$$u_i^{(i)} = \frac{B_{11}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}} k^{(i)} [E^{(i)} e^{k^{(i)}x} - F^{(i)} e^{-k^{(i)}x}] + C^{(i)} x + D^{(i)} \quad (2.39)$$

avec :

$$[k^{(i)}]^2 = - \frac{N_u^{(i)}}{\Delta} \quad (i = 1,2,3,4)$$

2^{ème} cas : $\Delta < 0$

Dans ce cas :

$$w_i^{(i)} = E^{(i)} \sin(k^{(i)}x) + F^{(i)} \cos(k^{(i)}x) + G^{(i)}x + H^{(i)} \quad (2.40)$$

et ;

$$u_i^{(i)} = \frac{B_{11}^{(i)}}{A_{11}^{(i)}} k^{(i)} [E^{(i)} \cos(k^{(i)}x) - F^{(i)} \sin(k^{(i)}x)] + C^{(i)} x + D^{(i)} \quad (2.41)$$

Tel que:

$$[k^{(i)}]^2 = - \frac{N_u^{(i)}}{\Delta} \quad (i = 1,2,3,4)$$

Ainsi que, les valeurs $C^{(i)}$, $D^{(i)}$, $E^{(i)}$, $F^{(i)}$, $G^{(i)}$ et $H^{(i)}$ ce sont des constantes d'intégrations, qu'on peut les déterminer par l'utilisation des conditions aux limites, les conditions auxiliaires et les conditions de continuité des forces et des moments.

Dans notre étude, deux cas importants de conditions aux limites ont été examinés :

a : Plaque encastree

Les conditions aux limites de ce cas sont :

•Pour $x = 0$

$$u_1^{(1)}=0 \quad , \quad w_1^{(1)}=0 \quad , \quad \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial x}=0 \quad (2.42)$$

•Pour $x = L$

$$\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial x}=0 \quad , \quad w_1^{(4)}=0 \quad , \quad \frac{\partial w_1^{(4)}}{\partial x}=0 \quad (2.43)$$

b : Plaque en appuis simples**•Pour $x = 0$**

$$u_1^{(1)}=0 \quad , \quad w_1^{(1)}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w_1^{(1)}}{\partial x^2}=0 \quad (2.44)$$

•Pour $x = L$

$$\frac{\partial u_1^{(4)}}{\partial x}=0 \quad , \quad w_1^{(4)}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w_1^{(4)}}{\partial x^2}=0 \quad (2.45)$$

Le système à résoudre doit être arrangé entre les six conditions de l'un des deux cas précédents, sans oublier les conditions auxiliaires et celles de continuité des forces et des moments qui sont données respectivement par les relations (2.28a) – (2.29d) et (2.29e) – (2.29j).

Complètement, on a 24 équations à évaluer pour une solution non triviale, tel que le système doit être écrit sous la forme matricielle :

$$[A]\{X\}=\{0\} \quad (2.46)$$

Cette relation caractéristique (2.46) a nous permet de calculer la charge critique en résolvant le déterminant de [A] qui doit être nul.

Pour illustrer les procédures des calculs, il est convenable de rendre le système adimensionnel, et ceci sera réaliser par les changements suivants :

$$\bar{H}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{t} \quad , \quad \bar{F}^{(i)} = \frac{F^{(i)}}{t} \quad , \quad \bar{E}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{t}$$

$$\bar{H}^{(i)} = \frac{H^{(i)}}{t} \quad , \quad \bar{G}^{(i)} = \frac{G^{(i)}L}{t} \quad , \quad \bar{C}^{(i)} = C^{(i)}$$

aussi,

$$\bar{l} = \frac{l}{L} \quad , \quad \bar{a} = \frac{a}{L} \quad , \quad \bar{h} = \frac{h}{t} \quad , \quad \bar{H} = \frac{H}{t}$$

La charge critique adimensionnelle sera exprimée par la formule :

$$\bar{p} = \frac{p}{P_{cr}}$$

or :

$$P_{cr} = \frac{4 \pi^2 \left[D_{11}^{(1)} - \frac{[B_{11}^{(1)}]^2}{A_{11}^{(1)}} \right]}{L^2} \quad , \quad (\text{pour une plaque encastree})$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \left[D_{11}^{(1)} - \frac{[B_{11}^{(1)}]^2}{A_{11}^{(1)}} \right]}{L^2} \quad , \quad (\text{pour une plaque simplement appuyee})$$

Après l'élimination de ces constantes, le système d'équation est réduit à un système de 18 équations algébrique homogène et linéaire avec les inconnues suivantes :

$$\bar{C}_2, \bar{D}_2, \bar{D}_3, \bar{D}_4, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \bar{E}_4, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{H}_2, \bar{H}_3, \bar{H}_4, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4.$$

Pour une solution matricielle, le déterminant doit être nul, la plus petite valeur propre donne la valeur de la charge critique pour le déclenchement de délaminage.

Chapitre III

PRESENTATION DU PROGRAMME

III.1. Introduction

L'utilisation du modèle physique (géométrie de la structure, conditions aux limites, charges appliquées) et les hypothèses de base nous a permis de modéliser mathématiquement le problème de délaminage des plaques composites soumises à des charges de compression axiales par des équations différentielles. Ce modèle peut être traité :

- Soit par des méthodes numériques telle que la méthode des éléments finis (*MEF*) et la méthode des différences finis (*MDDF*).
- Soit par des méthodes analytiques basées sur des formulations mathématiques.

La deuxième méthode fait l'objet de ce présent travail.

III.2. Méthode de calcul des charges critiques des plaques délaminées

III.2.1. Introduction

La détermination des valeurs propres des systèmes définis positifs d'ordre supérieur à (4) nécessite l'utilisation des méthodes itératives, à titre d'exemple on cite :

- La méthode de *Jacobi*.
- La méthode des itérations inverses.
- La méthode des sous espaces.

Les valeurs propres des systèmes quelconques sont très sensibles à un petit changement dans la matrice $[A]$ et les erreurs d'exécution sont très importantes. Dans ces conditions, avant d'utiliser telle ou telle méthode permettant de calculer les valeurs propres, il est préférable d'utiliser des programmes (logiciels) pointilleux tel que le *Matlab*, le *Delphi* et le *C++* dans le but d'avoir une minimale valeur d'erreurs d'exécution. Et pour cela, on a choisi le *Matlab* pour traiter ce problème.

Notre choix est basé essentiellement sur les avantages importants caractérisant cet outil (le *Matlab*) ainsi que sa rapidité, sa simplicité de manipulation en terme de langage de programmation et surtout sa précision de calcul qui nous s'intéresse vraiment.

III.2.2. Détermination des charges critiques des plaques délaminées

Les charges critiques d'un stratifié soumis à des chargements de compression sont les charges qui provoquent le déclenchement du phénomène de délaminage par flambement (l'instabilité élastique). La plus petite charge critique correspond à la plus petite valeur propre de la matrice générée. Cette charge sera calculée en fonction de la charge appliquée, les caractéristiques géométriques et les constantes élastiques de chaque région de la plaque.

Pour déterminer la charge critique des stratifiés considérés, nous avons élaboré un programme de calcul écrit en *Matlab* et qui peut être appliqué à quelques structure composite à base de fibres.

Celui-ci contient un programme principal se composant de plusieurs sous programmes de calcul, qui nous permet de déterminer :

- La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans les axes principaux $[Q]$ qui prend les mêmes éléments pour tous les plis du stratifié.
- Les cotes des plis de chaque région.

- La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans les axes du stratifié $[\bar{Q}]$.
- Les constantes élastiques $[A_y]$, $[B_y]$ et $[D_y]$ du stratifié (Fig 3.3).
- Les efforts internes dans les régions 1, 2, 3 et 4 dans le cas de pré-flambement.

Quelques sous-programmes développés sont utilisés pour calculer les matrices $[Q]$, $[\bar{Q}]$ et les constantes élastiques $[A_y]$, $[B_y]$ et $[D_y]$ des régions 2 et 3.

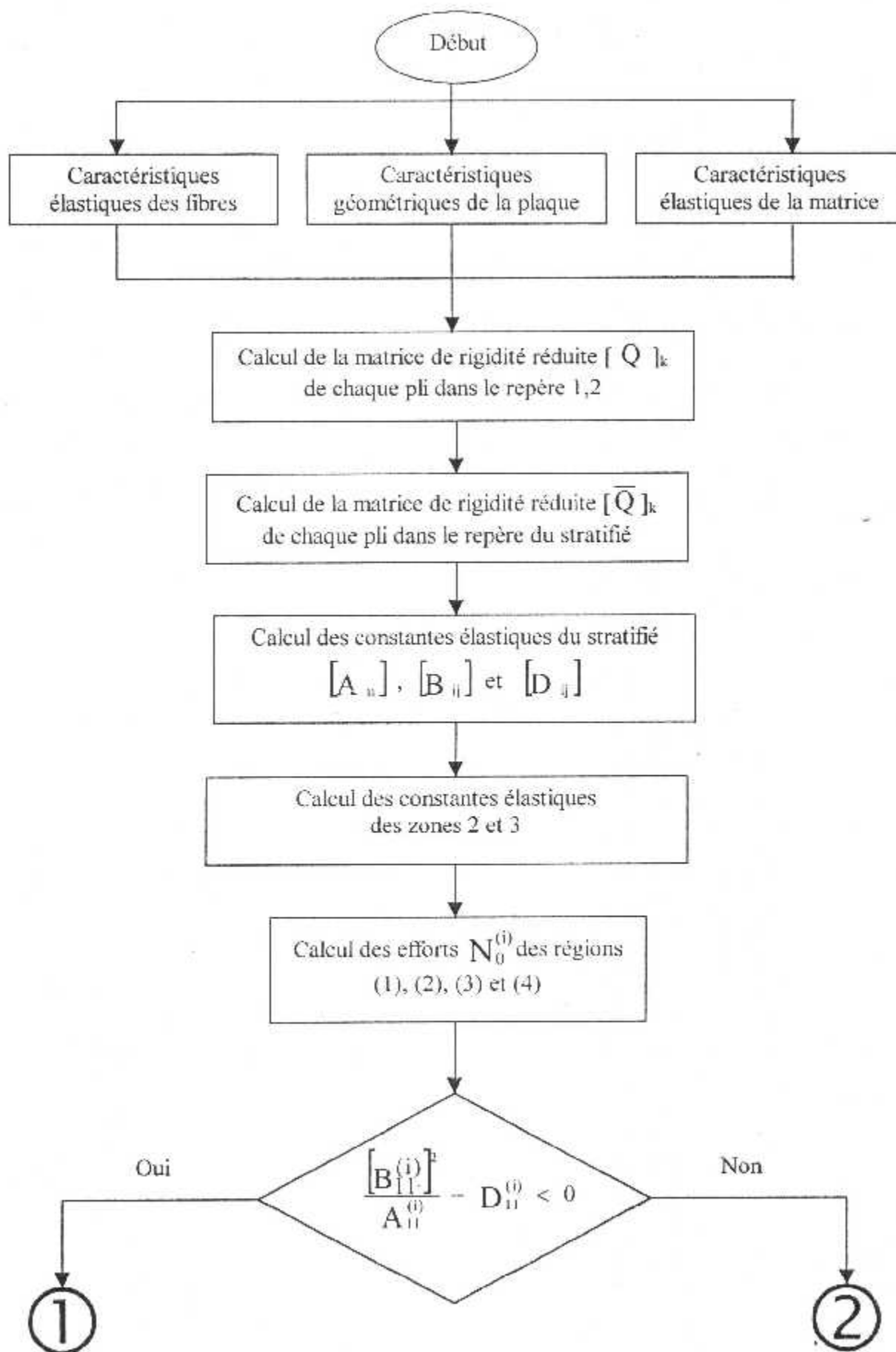
Après avoir utiliser les solutions mathématiques exactes, les conditions aux limites, les conditions auxiliaires et les conditions de continuité des forces et des moments, le système $[A]\{X\} = 0$ peut être générer.

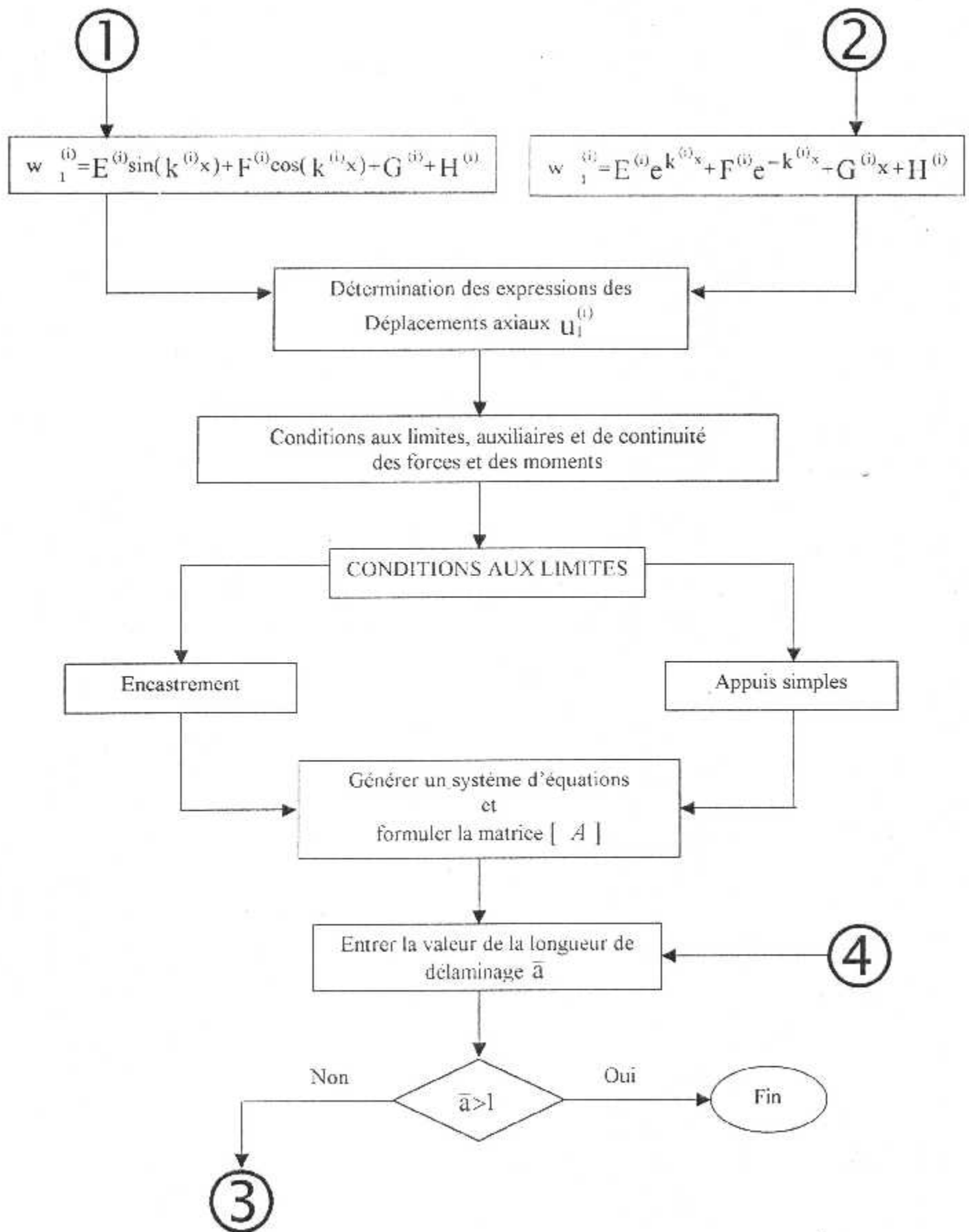
La matrice $[A]$ du système est une matrice carrée de dimension 24x24. Elle peut être réduite après élimination de six constantes à une matrice de dimensions 18x18, qui contient les efforts internes, les constantes élastiques, la charge appliquée et les caractéristiques mécaniques et géométriques du stratifié considéré.

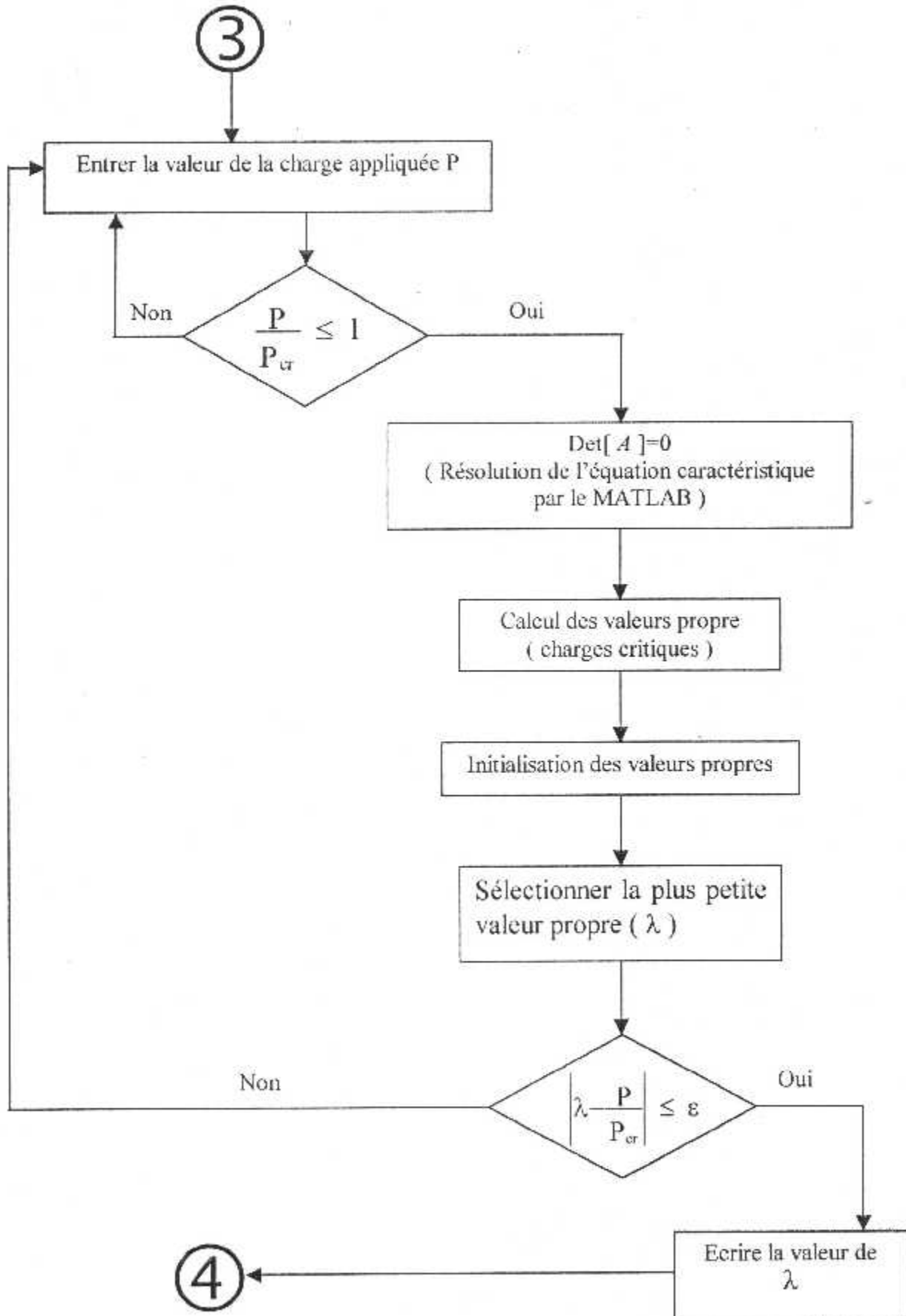
Le programme traité par le *Matlab* que l'on a choisi afin de calculer les valeurs propres du système généré. Finalement un sous programme a été développé pour initialiser ces valeurs propres et par conséquent la détermination de la charge critique de la plaque délaminée.

III.3. Organigramme de calcul

L'organigramme suivant englobe les différentes étapes permettant d'aboutir au calcul de la charge critique de la plaque composite supposée initialement délaminée.







III.4. Exécution du programme

Pour l'exécution du programme réalisé, il est nécessaire de passer par les étapes suivantes :

III.4.1. Etape 1

Dans le fichier nommé ` Exemple 1 `, il faut donner :

- Les caractéristiques élastiques des fibres et de la matrice (E_1 , E_2 , G_{12} , μ_{12}).
- Les caractéristiques géométriques de la plaque (Longueur et Largeur).
- Le nombre des plis caractérisant la plaque.
- L'épaisseur et l'orientation des fibres de chaque pli.
- Les pas de la charge critique (\bar{P}) et de la longueur de délaminage (\bar{a}).
- La position de délaminage.

III.4.2. Etape 2

Dans le fichier d'exécution (*Matlab Command Window*), en écrivant le mot clé ` pfe ` puis en appuyant sur ` entrée ` pour avoir la fenêtre suivante :

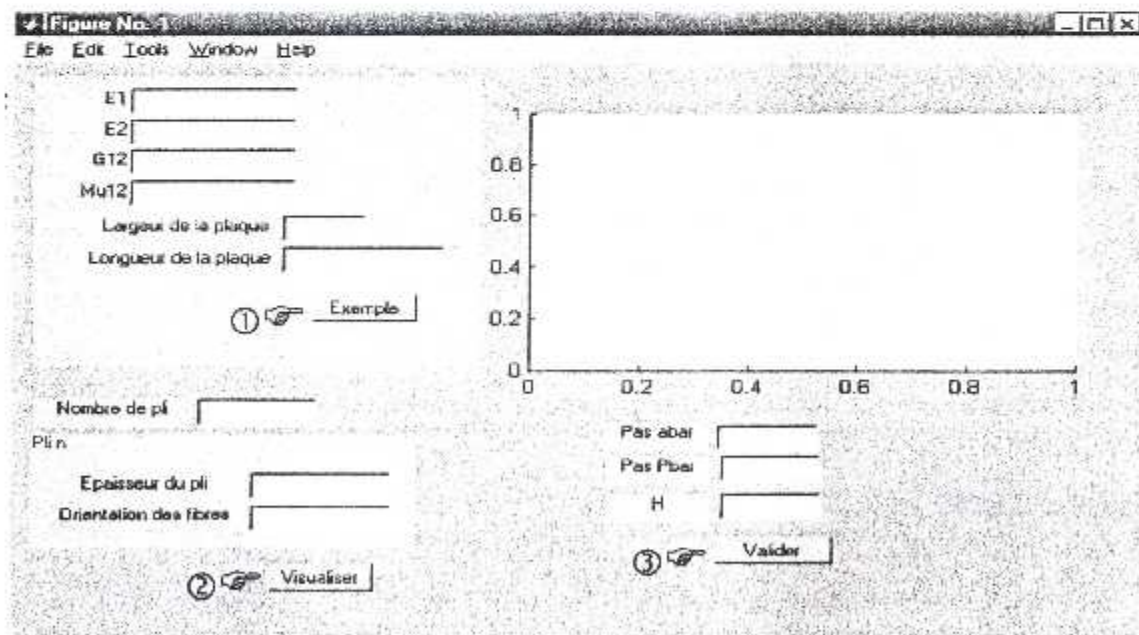


Figure 3.1 : Fenêtre de d'exécution.

Après avoir la fenêtre d'exécution cliquer respectivement sur les boutons :

1. **Exemple** : pour prendre les valeurs qu'on a déjà les écrit dans le fichier `Exemple`.
2. **Visualiser** : C'est une étape d'esthétique. On a la fait pour voir la forme de la plaque en 3D avec les dimensions données (longueur, largeur et épaisseur).
3. **Valider** : C'est le bouton essentiel dans le logiciel, il est fait pour exécuter le programme.

III.4.3. Etape 3

Juste après, cliquer sur le bouton `Valider`. Le programme va s'exécuter automatiquement avec les valeurs données et nous a tracé la variation des charges critiques en fonction de la longueur du délaminage sur la fenêtre des graphes.

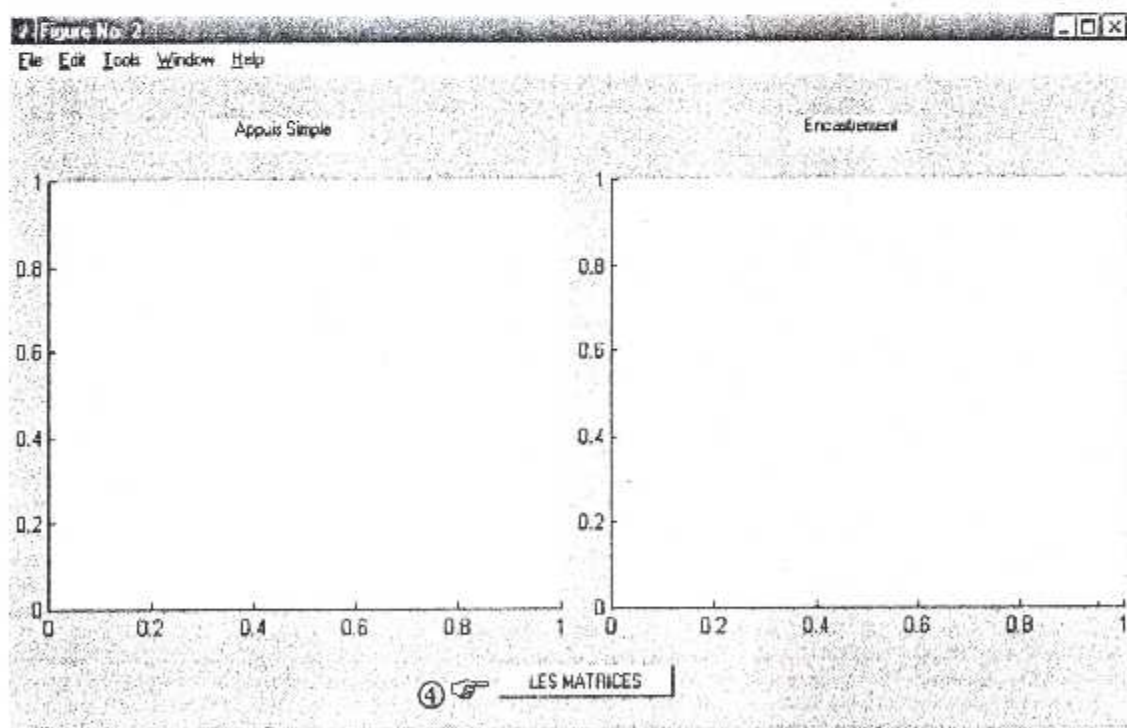


Figure 3.2 : Fenêtre des graphes.

III.4.3. Etape 3

On a fait le bouton nommé ` LES MATRICES ` existé sur la fenêtre des graphes dans le but de visualiser les matrices de rigidité [M] de chaque zone de la surface délaminée.

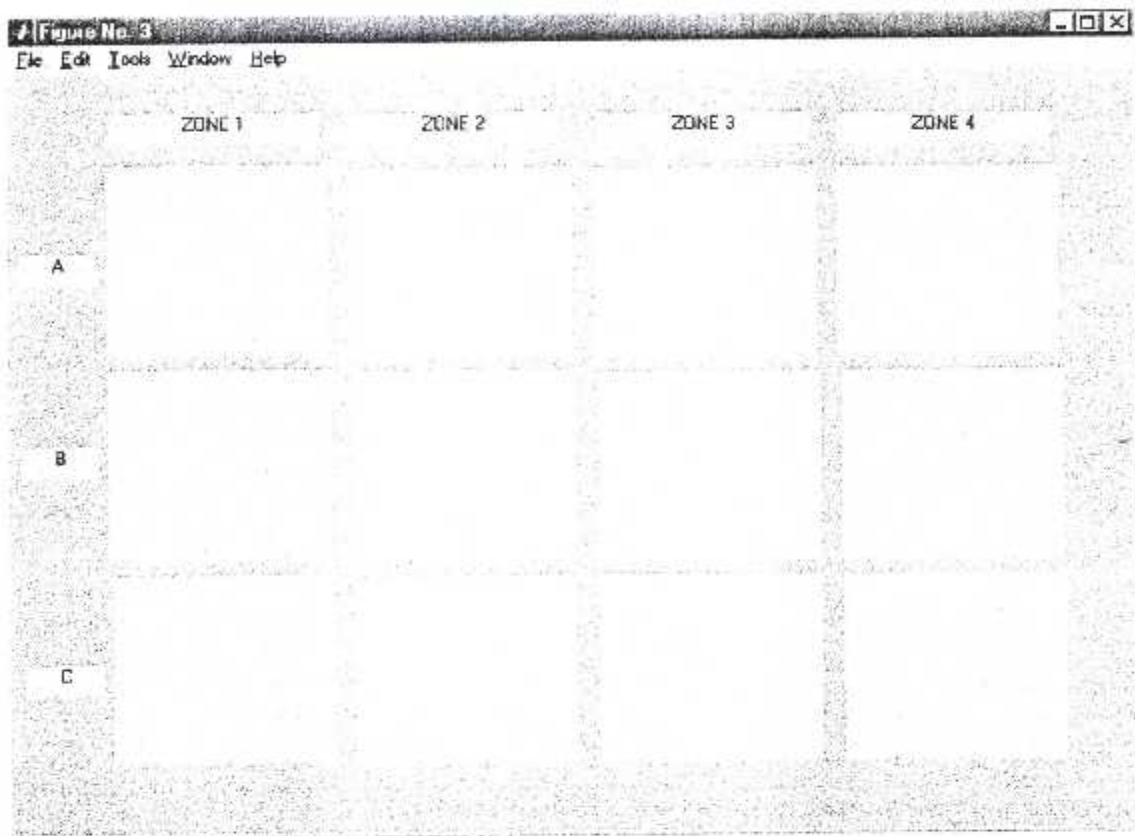


Figure 3.3 : Fenêtre des matrices de rigidité [M] de chaque zone.

Chapitre IV

APPLICATIONS ET INTERPRETATIONS DES RESULTATS

IV.1. Introduction

Dans le but d'étudier la variation de la charge critique $\bar{P} = P/P_{cr}$ en fonction de la longueur de délaminage $\bar{a} = a/l$, et de sa position verticale $\bar{h} = h/t$ (l'épaisseur de la région 3 de la plaque stratifiée). Nous avons établi un programme nommé " *pfe* " écrit en *Matlab* pour étudier les variations de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage ainsi que sa position verticale.

Les résultats sont obtenus sous forme des graphes et nous les interprétons dans le but d'expliquer les influences de certains paramètres sur la charge critique d'une plaque composite supposée initialement délaminée.

IV.2. interprétations des graphes obtenus

IV.2.1. Influence des conditions aux limites sur la charge critique

Dans le but d'étudier l'influence des conditions aux limites sur la charge critique, nous avons deux plaques stratifiées de même caractéristiques géométriques et mécaniques:

1000mm x 60mm x 10mm

$$E1=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, \quad E2=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$G12=0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, \quad \mu_{12}=0.25$$

Ainsi que ses séquences d'empilement $[[0^\circ/90^\circ_2/0^\circ]_{81}/[0^\circ/90^\circ/0^\circ]/30^\circ/90^\circ_3/0^\circ]$, mais avec deux conditions aux limites différentes (encastrement et appui simple)

Les deux graphes caractérisant l'influence des conditions aux limites des deux cas précédents sont obtenus dans la figure (4.1)

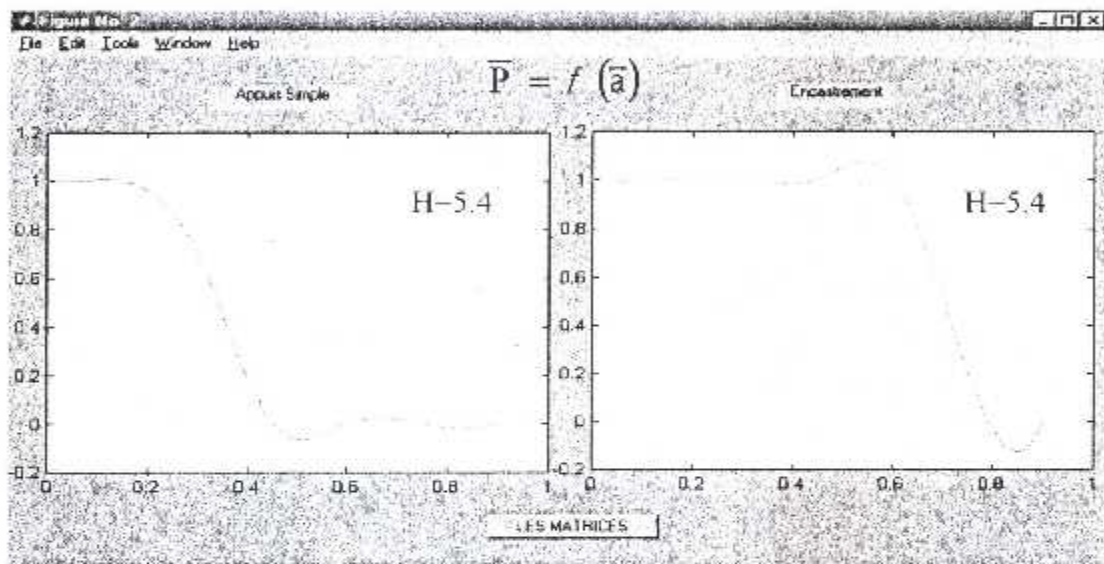


Figure 4.1 : influence des conditions aux limites sur la charge

On remarque d'après la figure (4.1) que la charge critique pour une valeur de $\bar{h}=0.1$ ($h=0.6$) correspondant aux appuis simples subie pour des valeurs de $\bar{a} \geq 0.2$, une chute rapide d'une valeur maximale ($\bar{P}=1$) à une valeur minimale (approximativement nulle) au voisinage de $\bar{a} \approx 0.4$. Par contre, pour le cas de la plaque encadrée et pour les même valeurs, ne subie aucun chute jusqu'au $\bar{a} \geq 0.6$.

D'après l'évolution de \bar{P} en fonction de \bar{a} (Fig 4.1), on peut conclure que la charge critique est proportionnelle au nombre de degré de fixation représentant les conditions aux limites. Donc, il est alors conseillé d'opter pour des extrémités encastées au lieu des extrémités simplement appuyées.

IV.2.2. L'influence de l'épaisseur de la région (3) sur la charge critique

La variation de la charge critique (\bar{P}) en fonction de la longueur de délaminage (\bar{a}) est illustrée pour différentes valeurs de H (h) par la figure (4.2). L'étude a été faite pour une plaque composite (carbone/époxyde) définie par les dimensions $1000\text{mm} \times 60\text{mm} \times 6\text{mm}$ et avec une séquence d'empilement de $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$ dont les caractéristiques mécaniques sont :

$$\begin{aligned} E1 &= 2.0685 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 & E2 &= 0.0517 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ G12 &= 0.0759 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 & \mu_{12} &= 0.25 \end{aligned}$$

La figure (4.2) montre la variation de (\bar{P}) en fonction de (\bar{a}) pour deux valeurs différentes de h (ou bien H) d'une plaque stratifiée $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$. D'après cette figure, on constate que la présence de délaminage affecte légèrement la charge critique P pour des valeurs de $\bar{a} \leq \bar{h}$.

Pour la courbe relative à h = 0.4, la charge critique P est très affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de $0.2 \leq \bar{a} \leq 0.6$. Au delà de cette valeur ($\bar{a} \geq 0.6$), la charge critique peut être négligeable devant la charge appliquée.

En ce qui concerne la courbe relative à h = 0.6, la charge critique est très affectée par la présence de délaminage pour des valeurs de $0.4 \leq \bar{a} \leq 0.6$.

D'après les deux courbes de la figure (4.2), on constate que la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage pour différentes valeurs de l'épaisseur de la zone (3) du stratifié augmente et diminue respectivement avec l'augmentation de \bar{h} et \bar{a} .

$$\begin{aligned} E1 &= 2.0685 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ E2 &= 0.0517 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ G12 &= 0.0759 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \\ \mu_{12} &= 0.25 \\ [0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T} \end{aligned}$$

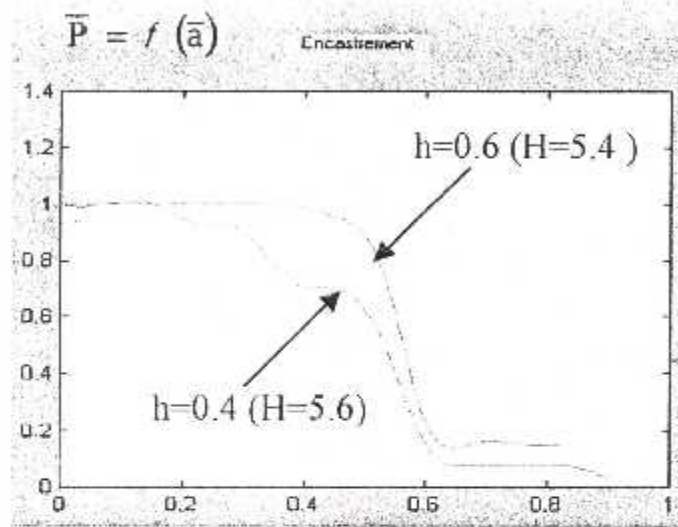


Figure 4.2 : L'influence de la position verticale du délaminage (\bar{a}) sur la charge critique (\bar{P})

IV.2.3. L'influence de la symétrie miroir

Dans ce cas, on a étudié deux plaques composites des empilements $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$ et $[45^\circ/90^\circ/0^\circ][[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_s]_4[0^\circ/90^\circ/-45^\circ]$ et pour une valeur de $h = 5.4$ dont les caractéristiques mécaniques sont :

$$\begin{aligned} E1 &= 2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, & E2 &= 2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2 \\ G12 &= 0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2, & \mu_{12} &= 0.25 \end{aligned}$$

La figure (4.3) montre l'influence de la symétrie miroir sur la variation de la charge critique \bar{P} en fonction de la longueur de délaminage \bar{a} .

D'après les graphes de la figure (4.3), on remarque que la symétrie miroir joue un rôle très important concernant la variation de la charge critique qui augmente avec son existence. Cependant, sa présence influe d'une manière positive sur la rigidité de la plaque composite et par conséquent sur la charge critique.

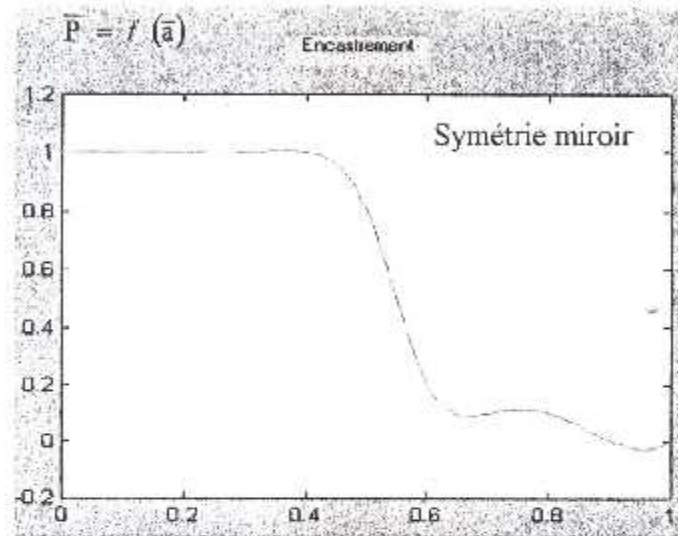
$$E1=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$E2=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$G12=0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_{12}=0.25$$

$$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{101}$$



$$E1=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$E2=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$G12=0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_{12}=0.25$$

$$[45^\circ/90^\circ/0^\circ]_s [[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_s]_4 [0^\circ/90^\circ/-45^\circ]$$

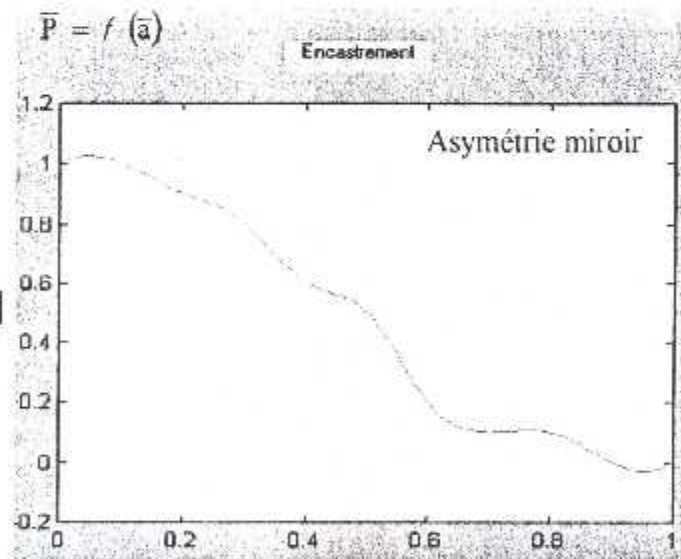


Figure 4.3 : L'influence de la symétrie miroir sur la charge critique

IV.2.4. Répartitions des graphes obtenus

D'après les graphes obtenus, on peut constater que l'allure des courbes de la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage passe par trois zones différentes (figure 4.4) :

$$E1=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

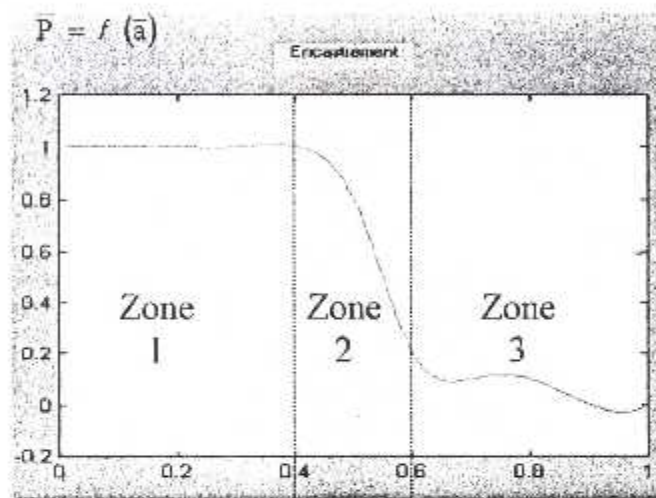
$$E2=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$G12=0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_{12}=0.25$$

$$H=5.4$$

$$[0^\circ/90^\circ/0^\circ]_{10T}$$



$$E1=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$E2=2.1030 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$G12=0.02625 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$\mu_{12}=0.342$$

$$H=5$$

$$[0^\circ_s / [[45 \ 0 \ 0 \ 90]_s]_4 / 0^\circ_s]$$

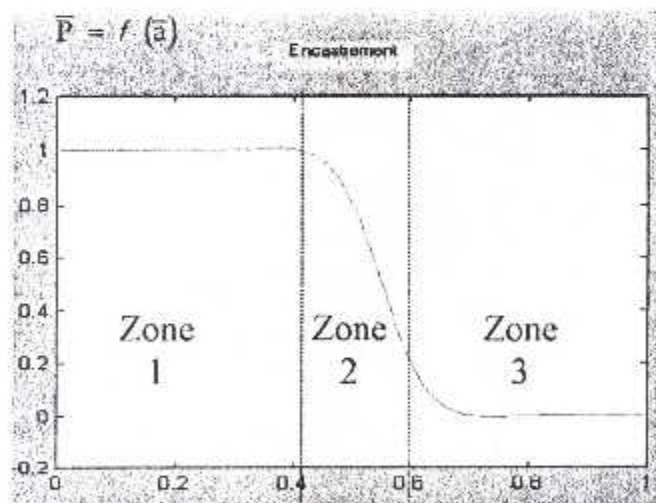


Figure 4.4 : Répartitions des graphes obtenus

Zone 1 :

Elle est caractérisée par une variation constante de \bar{P} (pente = 0.0 %) pour des valeurs de \bar{a} appartenant à $[0.0 \quad 0.4[$. Cette condition explique que la présence de délaminage n'influe pas sur la charge critique.

Zone 2 :

Elle est caractérisée par une chute de la charge critique (\bar{P}) pour des valeurs de \bar{a} appartenant à $[0.4 \quad 0.6[$. Cette condition explique que la présence de délaminage a une très grande influence sur la charge critique.

Zone 3 :

Elle est caractérisée par une variation lente de \bar{P} pour des valeurs de $\bar{a} \geq 0.6$. Cette condition explique que la présence de délaminage affecte légèrement la charge critique.

CONCLUSION GENERALE

L'étude et l'analyse du comportement macroscopique des stratifiés nous a permis d'obtenir des informations très importantes concernant la compréhension de certains phénomènes, parmi eux on peut citer le phénomène de délaminage par flambement.

Dans ce travail, l'étude est basée essentiellement sur une analyse semi-analytique du délaminage dans un simple modèle unidirectionnel des plaques composites à base de fibres. Une modélisation mathématique du phénomène de délaminage par flambement a été réalisée grâce à l'utilisation d'un modèle physique autant que les hypothèses de base.

Vu la complexité du phénomène de délaminage, nous avons utilisé des simples géométries, des hypothèses de base, ainsi que les conditions aux limites et les conditions auxiliaires et ce, pour simplifier les applications et faciliter la résolution du problème.

Un programme de calcul basé sur des solutions analytiques a été développé dans le but de faire une analyse macroscopique des stratifiés et par conséquent d'étudier l'influence de plusieurs paramètres sur la charge critique d'une plaque composite soumise à une force de compression axiale.

Une étude sur la séquence d'empilement des stratifiés (symétriques et non symétriques) sans distribution élastique a été détaillée. Les résultats obtenus nous ont montré que l'effet de couplage membrane-flexion a diminué la charge critique des stratifiés.

D'après les résultats obtenus et les courbes tracées, il est envisagé de conclure :

- D'une part que la variation de la charge critique en fonction de la longueur de délaminage est passée par les trois zones suivantes :

- La première zone est caractérisée par une variation constante de la charge critique ce qui explique que la présence de délaminage n'influe pas sur elle.

- La deuxième zone est caractérisée par une chute (décroissance de la courbe) ce qui montre d'une manière évidente l'influence de la présence du délaminage sur la charge critique.

- La dernière zone est légèrement affectée par la présence de délaminage.

- D'autre part, suivant l'épaisseur du stratifié, la variation de la charge critique en fonction de la position de délaminage croît avec l'augmentation de l'épaisseur de la zone 3.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] **Sallam. S and Smitses. G.J** " *Delamination Buckling and Growth of Flat, cross-ply Laminates* ". *Composite Structures* 17 (1985), pp.361-381.
- [2] **Smitses. G.J and Sallam. S** " *Delamination Buckling and Growth of Flat Composite Structural Element* ". *AFOSR-TR (Report N° AD-A162 370)*, University of Georgia, Atlanta, USA (1985).
- [3] **Sheiman. I and Bass. M** " *Effect of Delamination on Stability of Delaminated Composite Strip-Composite Structures* ". Vol 6 (1986), pp.261-270
- [4] **Smitses. G.J, Sallam. S and Yin. W.L** " *Effect of Delamination of Axially Loaded Homogeneous Laminated Plates* ". *AIAA Journal*. Vol.23, N° 29 September 1985.
- [5] **Gay. D.** " *Matériaux Composites* ", Edition Hermes 1989.
- [6] **R. Tiberkak** *Mémoire de magister en génie mécanique (1999) :*
" *Effets de la longueur de délaminage et de sa position sur la charge critique des plaques composites à base de fibres dans une matrice céramique* "

ANNEXE A

MATRICE DE RIGIDITE :

La matrice de rigidité réduite dans les axes principaux (repère local) (1,2) est donnée par :

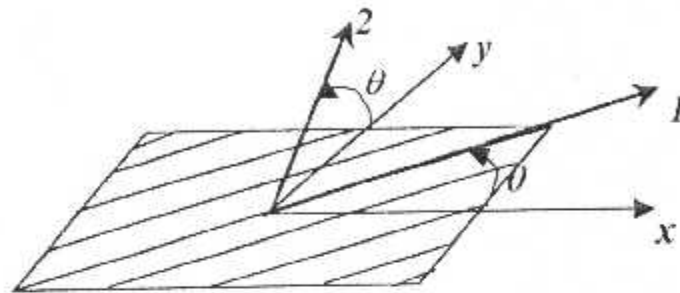


Figure A.1 : Représentation des systèmes d'axes

θ : Angle que font le repère (1,2) et le repère (x,y).

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

ou :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2} \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}^2$$

$$Q_{12} = \nu_{12} Q_{22}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

avec :

E_1 : Module d'élasticité longitudinale.

E_2 : module d'élasticité transverse.

ν_{12} : coefficient de poisson.

G_{12} : module de cisaillement.

La matrice de rigidité réduite de chaque pli dans le repère du stratifié (x,y) est donnée par :

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} - Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{66} + Q_{12})) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$