



UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA 1
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de Master en
Construction Mécanique

Titre

Analyse des plaques composite –
Atténuation de la déflexion

Proposé et encadré par :

Dr. EZZRAIMI Madjid

Dr. TIBERKAK Rachid

Réalisé par :

ZAMOUCHE Seifeddine

MEZIANI Mohamed

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

À Allah, le Tout-Miséricordieux, le Très-Miséricordieux, pour nous avoir accordé la force et la patience nécessaires pour mener à bien nos études et terminer ce travail. Sans Sa guidance et Sa bénédiction, rien de tout cela n'aurait été possible.

Nous tenons également à exprimer notre profonde gratitude à notre encadrant, ezzraimi madjid, pour son soutien constant, ses conseils avisés et sa patience tout au long de ce projet. Votre expertise et votre dévouement ont été essentiels à la réalisation de ce travail. Nous remercions sincèrement les membres du jury, pour leur temps leurs remarques constructives et leur bienveillance. Vos évaluations et suggestions ont été précieuses pour améliorer la qualité de ce travail.

Enfin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance infinie à nos familles. À nos parents, pour leur amour inconditionnel, leur soutien moral et financier, ainsi que leur encouragement tout au long de nos études. À nos frères et sœurs, pour leur patience et leur compréhension. Votre présence et votre soutien ont été une source de motivation constante pour nous.

Table des matières :

<i>Introduction générale</i>	1
Chapitre I : Généralité et notion de base	2
I.1. Introduction :	2
I.2.les vibrations :	2
I.2.1 mouvement périodique et période	3
I.2.2 mouvement sinusoïdale :	4
I.2.3 mouvement aléatoire	4
I.2.4 Mouvement oscillatoire :	5
I.3 Le contrôle des vibrations	5
I.3.1 Les systèmes de contrôle passif	6
I.3.2Systèmes de contrôle Semi-actif	6
I.3.3 Système de contrôle actif :	7
I.4 La Piézoélectricité	7
I.4.1 Le principe de l'effet piézoélectrique :	8
I.4.2Capteurs de pression ou d'accélération	9
I.4.3Actionneurs piézoélectriques :	10
I.4.4. Polarisation des piézoélectriques	10
1.4.5 Contrôle actif des vibrations :	12
I.5 Conclusion	13
<i>Chapitre II : théorie des plaques</i>	14
II.1 introductions :	14
II.2 définitions d'une plaque :	14
II.3 la théorie des plaques :	15
II.3.1 démarches :	15
II.4 classifications des plaques :	15
II.4.1 la théorie des plaques minces de love-Kirchhoff :	16
II.4.1.1 Champs de déplacement :	16
II.4.2 la théorie des plaques épaisses (théorie de Reissner et Mindlin) :	17
II.4.2.1 champs de déplacement	18
II.4.2.2 champs de déformation :	19
II.4.3 lois de comportement :	20
II.4.3.1 résultantes des forces et des moments et loi constitutive :[16]	20
II.4.4 principes de Hamilton :	21
II.4.5 énergie cinétique :	22
II.4.6 énergie potentielle :	22
II.4.7 Travail des efforts externes :	23

II.5 matériau composite :	24
. Définition	24
II.5.1 Mécanique de composite unidirectionnel :	24
II.5.1.1 Relations contraintes-déformations :	24
II.5.2 mécaniques des structures stratifiées :	27
II.5.2.1 Définition :	27
II.5.2.2 Type des stratifiées :	28
II.5.2.3 Théorie classique des stratifiées :	28
II.6 matériau piézoélectrique :	30
II.6.1 Loi de comportement :	30
II.6.2 champ électrique :	31
II.6.3 Energie cinétique :	31
II.6.4 énergie potentielle :	32
II.6.5 travaux pour une plaque piézoélectrique :	33
II.7 plaques sandwich (multicouches) :	33
II.7.1 Energie cinétique de sandwich	34
II.7.2 Energie potentielle de sandwich :	34
II.7.3 travaux des efforts extérieurs :	35
II.8. Conclusion :	35
<i>Chapitre III discrétisation en élément finit</i>	36
III.1 Introduction	36
III.2 Choix du modèle :	36
III.3 Représentation de la géométrie	37
III.4 Fonction d'interpolation	37
III.5 approximations de solution	40
III.5.1 Approximations de l'Energie cinétique sur un éléments :	40
III .5.2 approximations de l'énergie potentielle sur un élément :	40
III .5.2.1 Energie potentielle élastique	40
III .5.2.2 Energie potentielle piézoélectrique	41
III 5.2.3 énergie potentielle diélectrique	41
III.5.3 travaille des forces extérieures pour le sandwich	41
III .5.3.1 mécaniques	41
III.5.3.2 électrique	41
III.6 matrice élémentaire de rigidité (sandwich piézoélectrique)	41
III.6.1 matrices de rigidité élastiquée	41
III.6.2 matrices de rigidité piézoélectrique	42
III.6.3 matrices de rigidité diélectrique	42
III.7 Conclusion	43
IV. Analyse d'un sandwich piézoélectrique :	44
IV.1 introduction:	44

IV.2. Analyse modèle :.....	44
IV.3. Analyse dynamique :	45
IV.4 excitations par actionneur piézoélectrique (mode actionneur) :.....	45
IV.5 résolution par la méthode de Newmark :	46
IV.6 contrôle active de vibration :	48
IV.7 conclusion :.....	48
Chapitre V : Applications et discussion	49
V.1.Introduction :.....	49
V.2 logiciel de calcul Ansys :.....	49
V.2.1 plaque élastique isotrope monocouche :	49
V.2.2. Plaque composite élastique orthotrope :	50
V.2.3 Etude de l'influence des conditions aux limites :	51
V.2.6 Plaque piézoélectrique sandwich	54
V.2.6.1 Plaque sandwich (AAAA)	58
Conclusion generale :	62

List des figures

Figure I.1 schéma des stratégies de contrôle	2
Figure I.2. Phénomène périodique.....	3
Figure I.3 l'onde sinusoïdal.....	4
Figure I.4 signal de vibration aléatoire	4
Figure I.5 Représentation graphique du mouvement d'un oscillateur simple.....	5
Figure I.6 Mode de fonctionnement d'un système de contrôle actif.....	7
Figure I.7 illustrations de l'effet piézoélectrique direct et inverse	8
Figure I.8: Classes cristalline.....	9
Figure I.9 accéléromètre piézoélectrique	10
figure I.10 détecteur a semi-conducteur au silicium.....	10
Figure .11 actionneur piézoélectrique	10
Figure .12 principes fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique.....	10
Figure I.13 : Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux.....	11
Fichier I.14 Générateur et actionneur de piézoélectrique.....	11
Figure15 schémas d'un structure intelligent.....	12
Figure I.16 représentation de mécanisme d'action par extension.....	13
Figure II.1 : géométrie d'une plaque rectangulaire.....	14
Figure II.2 : démarche pour l'étude des plaques.....	15
Figure II.3 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff.....	16
Figure II.4 : Définition des variables de plaque mince : champs de déplacement et de pente.....	17
Figure II.5 : Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin.....	18
Figure II.6: état complet de contrainte dans le repère locale.....	24
Figure II.7 : élément de composite et oriente des fibres.....	27

Figure II.8: Structure stratifiée.....	27
Figure II.9 : plaque sandwich piézoélectrique.....	33
Figure III.1 élément finit a quatre nœud de cellule de tisse.....	36
Figure III.2 a) éléments de référence b) élément réelle	37
Figure V.1 plaque isotrope monocouche (AAAA).....	49
Figure V.2 plaque composite orthotrope (ELLL).....	50
Figure V.3 : les couches et les orientations de la plaque	51
Figure V.4 : déformation de la plaque charger à 30 v	53
Figure V.5 : l'allongement et le retresse de la plaque charger à 50 v	53
Figure V.6 : plaque sandwich piézoélectrique.....	54
Figure V.7 : déformation de la plaque à 100 Pa et 0v.....	55
Figure V.8 : déformation de la plaque a 100 Pa et 30v.....	56
Figure V.9 : déformation de la plaque à 100 Pa et 50v.....	57
Figure V.10: déflexion de la plaque a 100 pa et 0v.....	58
Figure V.11: déflexion de la plaque à 100 Pa et 5v	59
Figure V.12: déflexion de la plaque a 100 Pa et 8v	60
Figure V.13: déformation de la plaque a 100 Pa et 10v	60

LIST des tableaux

Tableau IV.1 : domaine et sa stabilité.....	47
Tableau V.1 : les trois premières fréquences propres de la plaque (AAAA).....	50
Tableau V.2 : les trois premières fréquences propres de la plaque.....	51
Tableau V.3 : les trois premières fréquence propre de la plaque (AAAA) et (ELLL).....	52
Tableau V.4 : propreté de matériaux piézoélectrique.....	52
Tableau V.5 : déformation de la plaque avec déférent voltage.....	54
Tableau V.6 : Les caractéristiques des deux matériaux.....	55
Tableau V.7 : déformation de la plaque avec déférent voltage.....	57

Les symboles :

$[C]$: est la matrice de rigidité.

$[S]$: la matrice souplesse.

$[\varepsilon]$: la déformation.

δ : variation subie pendant l'intervalle de temps considéré

$[\sigma]$: la contrainte.

φ_x et φ_y : rotation de cisaillement des sections normales a l'axe x et y .

λ : coefficient de lamé

x, \dot{x}, \ddot{x} : le déplacement, la vitesse et l'accélération à l'état

$E1$: module d'élasticité longitudinal.

$E2$: module de cisaillement longitudinal.

$G12$: module de cisaillement longitudinal.

$G13=G23$: module de cisaillement transversal.

δ_{ij} : le symbole de Kronecker.

w : déplacements transversal.

t et r : désigne les variables de translation et de rotation.

$T\sigma$: est la matrice de changement de base $(1',2',3')$ des contraintes.

$T\varepsilon$: est la matrice de changement de base $(1',2',3')$ des déformations.

K^{2ij} : coefficients de couplage.

N : résultantes en membrane.

A : la matrice de rigidité en membrane.

B : la matrice de couplage membrane-flexion-torsion. D : la matrice de rigidité en flexion.

M_f : moments de flexion et de torsion.

$\{F\}$: force volumique.

$\{f\}$: force surfaciques.

$\{P\}$: forces ponctuelles.

$\{D\}$: vecteur de déplacements électriques.

$\{\epsilon\}$: vecteur de déformation.

$\{E\}$: vecteur des champs électrique.

$[e]$: matrice des constantes piézoélectrique ou de couplage mécanique.

$[d]$: matrice de permittivité électrique.

$[C]$: matrice des constantes élastiques.

$\{E\}$: le champ électrique.

$\{h_p\}$: épaisseur de la sous-couche électrique.

$\{h_c\}$: épaisseur de l'âme.

$\{D\}$: charge électrique surfacique ou déplacements électriques.

N_i : fonction d'interpolation.

n_n : nombre de nœuds par éléments.

$\{F_v\}$ et $\{F_s\}$: sont respectivement les forces volumiques.

$\{Q\}$: vecteur de charge électrique.

$\{\varphi\}$ et $\{\psi\}$: les vecteurs propres.

$\{\sigma\}$ et $\{\tau\}$: sont respectivement les contraintes de membrane et de cisaillements.

ϑ_x et ϑ_y : rotation totale par rapport a x et y respectivement.

u et v : déplacement de la membrane par rapport a x et y respectivement

λ et μ : les coefficients de lamé.

ν_{12} et ν_{21} et ν_{31} : coefficient de poisson.

$[Q_{ij}]$: la matrice de rigidité réduite exprimée dans les axes principaux (1, 2,3).

$[Q'_{ij}]$: matrice de rigidité réduite d'un composite unidirectionnel.

$[S'_{ij}]$: la matrice de souplesse dans la base (1',2',3').

Résumé :

Les vibrations indésirables sont un problème courant dans diverses applications industrielles et technologiques, résultant souvent de forces dynamiques ou de fluctuations de charge. Pour atténuer ces vibrations, une approche efficace utilise des actionneurs piézoélectriques dans le cadre du contrôle actif.

Un matériau piézoélectrique offre la capacité de convertir l'énergie électrique en déformation mécanique. Cette propriété est exploitée dans une variété d'applications, telles que le contrôle de bruit et des vibrations, des problématiques courantes dans le domaine industriel. Une approche innovante consiste à intégrer des matériaux piézoélectriques dans des structures composites pour en faire une structure dite intelligente. Dans cette optique, nous présentons une plaque sandwich, comportant une couche centrale élastique composite encadrée par deux couches de matériaux piézoélectriques. Cette conception permet à la structure d'agir comme un actionneur intelligent, capable de contrôler statiquement la déflexion de la plaque. En modulant la tension appliquée aux couches piézoélectriques, il est possible de manipuler la forme et les vibrations de la plaque, offrant une solution avancée pour le contrôle de structures dans divers environnements industriels.

ملخص

للقوى نتيجة غالبًا وتنتج والتكنولوجية، الصناعية التطبيقات مختلف في شائعة مشكلة تعتبر فيها المرغوب غير الاهتزازات التحكم إطار في بيزوكهربائية محركات فعال نهج يستخدم الاهتزازات، هذه من للحد. الحمل تقلبات أو الديناميكية يمتلك المادة الكهرو ضغطية القدرة على تحويل الطاقة الكهربائية إلى تشوه ميكانيكي. يتم استغلال هذه الخاصية في النشاط مجموعة متنوعة من التطبيقات، مثل التحكم في الضوضاء والاهتزازات، وهي مشكلات شائعة في المجال الصناعي. تتمثل إحدى الطرق المبتكرة في دمج المواد الكهرو ضغطية في الهياكل المركبة لجعلها محركات ذكية. في هذا السياق، نقدم لوحة ساندويتش مبتكرة، تحتوي على طبقة مركزية مرنة مركبة محاطة بطبقتين من المواد الكهرو ضغطية. يتيح هذا التصميم للهيكل أن يعمل كمحرك ذكي، قادر على التحكم في انحراف اللوحة بشكل ثابت. من خلال تعديل الجهد المطبق على في مختلف الطبقات الكهرو ضغطية، يمكن التحكم في شكل واهتزازات اللوحة، مما يوفر حلاً متقدماً للتحكم في الهياكل البيئات الصناعية

Abstract

Undesirable vibrations are a common issue in various industrial and technological applications, often resulting from dynamic forces or load fluctuations. To mitigate these vibrations, an effective approach utilizes piezoelectric actuators within active control frameworks

, piezoelectric material possesses the ability to convert electrical energy into mechanical deformation. This property is utilized in a variety of applications, such as noise and vibration control, which are common issues in the industrial sector. One innovative approach is to integrate piezoelectric materials into composite structures to create intelligent actuators. In this context, we present an innovative sandwich plate, consisting of a central elastic composite layer flanked by two layers of piezoelectric materials. This design allows the structure to function as an intelligent actuator capable of statically controlling the deflection of the plate. By modulating the voltage applied to the piezoelectric layers, it is possible to manipulate the shape and vibrations of the plate, offering an advanced solution for structural control in various industrial environments.

Introduction générale

Pour éviter que les vibrations ne soient un problème, le concepteur peut chercher à soustraire la structure aux sollicitations (suspension pour une voiture par exemple), ou ajouter de la masse et/ou de la raideur au système ou bien encore utiliser un dispositif spécialement conçu pour jouer sur l'amortissement de la structure et régler le problème de vibration.

On peut citer les dispositifs faisant appel à un couplage électromécanique. Dans ce cas, on utilise un circuit électronique couplé à la structure pour réduire l'amplitude des vibrations. On peut citer le système piézoélectrique :

- Les systèmes piézoélectriques, qui sont plus faciles à implémenter sur une structure quelconque car ils travaillent en déformation. Ces dispositifs sont généralement peu encombrants et peuvent être efficaces sur une large bande de fréquence. Dans cette thèse, c'est cette technique qui va être manipulée de manière actionnée pour la réduction de la déflexion des structures.

L'objectif du travail est de développer des modèles numériques adaptés à la simulation du comportement statique des structures en plaques par le logiciel de calcul multiphysiques nommé Ansys. Il s'agira en particulier d'atténuation de la déflexion de ces systèmes dus à la présence d'éléments piézoélectriques (couplages électromécaniques). (i)

Dans ce contexte, on a proposé un modèle éléments finis d'une plaque en sandwich qui intègre une couche centrale élastique (matériau isotrope ou composite) entre deux sous-couches piézoélectrique (actionneurs). Qui peut être considérée comme une structure intelligente et permettent le contrôle statique.

Ce document présente les travaux de recherche effectués pour répondre à la problématique et aux objectifs de cette thèse donnés (i), il s'organise alors dans Cinq chapitre :

- Dans le premier chapitre nous proposons un rappel sur les vibrations structurelles, et en gros modo sur les différentes techniques de réduction des vibrations, la technologie piézoélectrique pour le contrôle active.
- Dans la première partie du Chapitre 2 nous proposons un rappel sur la théorie de la flexion des plaques minces et épaisses, puis dans la deuxième, on a mentionné les grandeurs physiques d'un composite et la théorie classique de la stratification. Puis la piézoélectricité, les phénomènes et les grandeurs physiques qui interviennent dans le comportement d'un matériau piézoélectrique sont ainsi introduits.
- Le troisième chapitre est consacré à la discrétisation des éléments finis, et présente le modèle des éléments finis, maillage, approximation de la solution.
- Le Chapitre 4 concerne l'analyse de la plaque sandwich piézoélectrique, pour l'analyse modèle, analyse en mode actionneur, puis une méthode mathématique pour résoudre l'équation de mouvement (méthode de Newmark).
- Le chapitre 5 concerne de différentes applications et discussion (par la comparaison), on a traité certaines structures qui représentent les parties du sandwich puis le sandwich.

Une conclusion rappelle les principaux résultats obtenus, les remarques et les perspectives.

Chapitre I : Généralité et notion de base

I.1. Introduction :

L'intérêt du contrôle des structures dans la construction présente divers aspects, parmi lesquels la possibilité de modernisation, l'adaptation des structures existantes au niveau de performance requis et le développement ultérieur de l'environnement et le maintien de l'exploitation, entre autres projets scientifiques. Le confort des structures après un séisme, la stabilité aéroélastique et l'économie des matériaux peuvent également être des critères limitants pour l'utilisation de structures telles que les ponts et les passerelles piétonnes. Pour atteindre tous ces objectifs, un nouveau concept de protection structurelle a été développé dans le domaine de la protection structurelle contre les vibrations.

Le développement de systèmes de contrôle actif-passif fait l'objet actuellement de plusieurs projets de recherche dans le monde. L'analyse des publications trouvées dans la littérature montre que les principaux centres d'intérêt concernent : 1) les configurations de contrôle hybride ; 2) la modélisation de structures sandwich multicouches ; 3) la modélisation des matériaux viscoélastiques ; 4) les algorithmes de contrôle. Cependant, le mécanisme d'action de l'actionneur piézoélectrique n'a pas été étudié par cette communauté. On présente donc ici une discussion sur les mécanismes d'action piézoélectrique. [1], [2], [3].

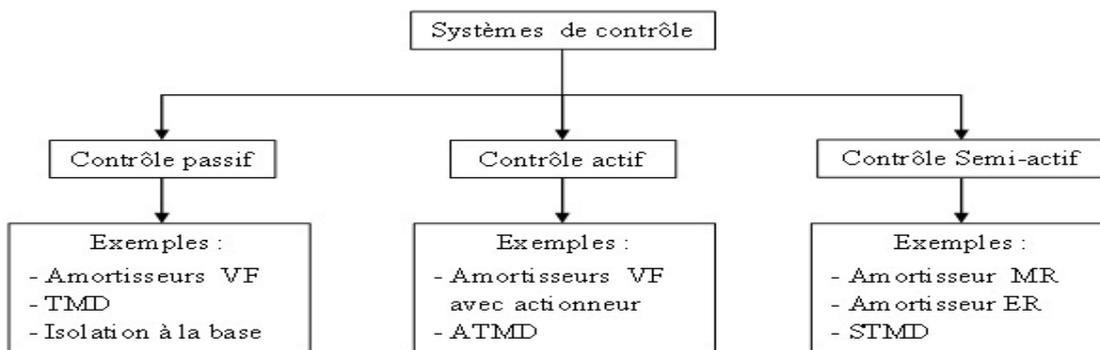


Figure I.1 schéma des stratégies de contrôle

STMD : Solutions Traitements Matériaux Dangereux ; ATMD : a été exploré largement pour des applications dans le **contrôle** de la réponse d'amortissement

-VF,MR,ER : ce sont des modèles d'amortissement

I.2.les vibrations :

La vibration est le mouvement oscillatoire périodique ou répétitif d'un objet ou d'un système autour d'une position d'équilibre. Celles-ci se produisent généralement dans des milieux

élastiques où les forces de rappel ramènent un objet ou un système à une position d'équilibre après une perturbation. Les vibrations sont transmises par divers médias. La vibration est un phénomène dynamique, c'est-à-dire en mouvement. L'étude des mouvements périodiques et, plus particulièrement, du mouvement oscillatoire conduit à une définition de la vibration.

Les vibrations structurales sont très indésirables puisqu'elles peuvent causer des problèmes tels que la fatigue structurale, la transmission des vibrations à d'autres systèmes, le bruit interne ou externe du au rayonnement acoustique ; etc. [4]

I.2.1 mouvement périodique et période

Un phénomène est périodique lorsqu'il se reproduit indéfiniment à lui-même, au bout d'un certain temps appelé période.

Ce phénomène peut-être de nature quelconque : mouvement d'un point matériel, variations de pression de l'air, variation de lumière ou de couleur, etc.

Une masse soulevée à intervalles identiques, un pendule, une corde, un manomètre excité régulièrement, au bout d'un temps donné appelé "période".

Ce mouvement est caractérisé par les variables suivantes :

- Amplitude (a) : elle représente l'écartement, l'élongation maximum d'un point à partir de la position de départ. C'est une distance en unités de longueur, cm, mm ou microns, par exemple.
- Fréquence (c) : C'est un nombre par unité de temps. Pour définir une fréquence, on donne le nombre de mouvements identiques, par exemple, en une seconde ; on parle alors de "cycles par seconde", ou de "Hertz (Hz) ; cette dernière unité est actuellement quasi généralisée.
- Période (T) : C'est la durée en secondes (s) ou millisecondes (ms) d'un mouvement isolé.

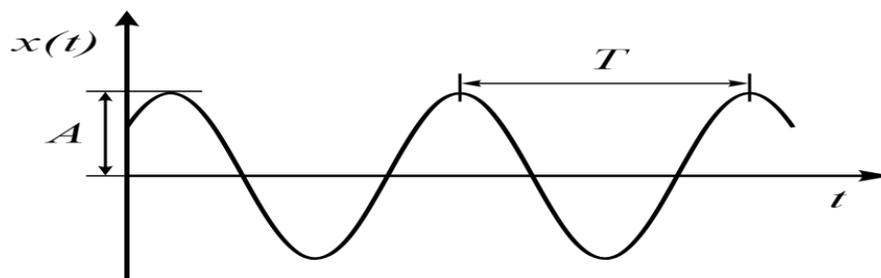


Figure I.2. Phénomène périodique

I.2.2 mouvement sinusoïdale :

Théoriquement, si une masse reliée à un ressort est mise en mouvement, la masse oscille - mouvement de va-et-vient autour de sa position d'équilibre stable (masse au repos) - sans jamais s'arrêter.

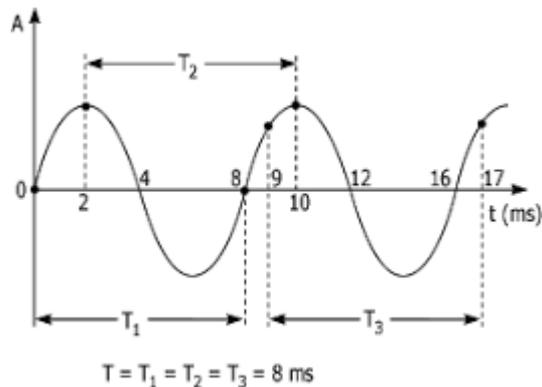


Figure I.3 l'onde sinusoïdal

I.2.3 mouvement aléatoire

Est un type de mouvement oscillatoire qui est imprévisible et ne peut pas être décrit exactement, mais seulement par ses propriétés statistiques. Contrairement à un signal vibratoire déterministe, qui a une forme d'onde précise et prévisible, un signal de vibration aléatoire varie continuellement en amplitude et en fréquence. Les transports routiers, ferroviaires, aériens... produisent tous des vibrations dites aléatoires. Il s'agit d'un ensemble de fréquences et d'amplitudes variant constamment au cours du temps.

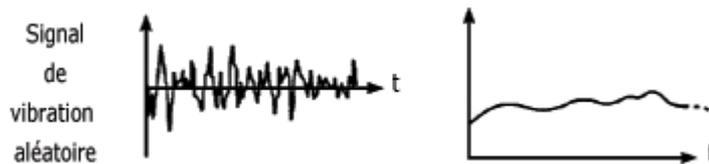


Figure I.4 signal de vibration aléatoire

I.2.4 Mouvement oscillatoire :

Les systèmes oscillatoires sont caractérisés par des mouvements périodiques autour d'une position d'équilibre sous l'influence de perturbations externes. Si le mouvement est une onde sinusoïdale, on l'appelle un oscillateur harmonique. On distingue deux types de vibrations (oscillations) :

- Vibrations mécaniques (pendule simple, corde vibrante, etc.)
- Vibrations électromagnétiques (lumière, ondes radio, etc.)

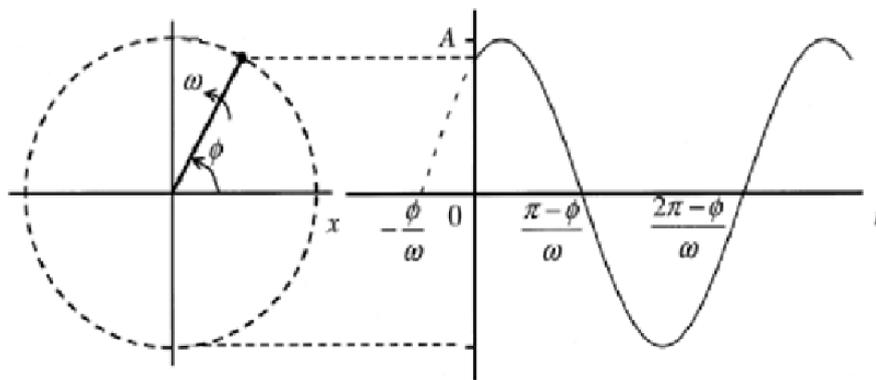


Figure I.5 Représentation graphique du mouvement d'un oscillateur simple

I.3 Le contrôle des vibrations

Les vibrations structurelles sont hautement indésirables car elles peuvent provoquer des problèmes tels que la fatigue structurelle, la transmission des vibrations à d'autres systèmes et des bruits internes ou externes dus au rayonnement sonore. Il est cependant possible de limiter ses effets en utilisant trois types fondamentaux de techniques de réduction des vibrations : La première méthode est la suppression. Ceci vise principalement à supprimer le bruit généré par les vibrations, plutôt que les vibrations elles-mêmes. Cela se fait en annulant les deux sources de bruit en créant une source de bruit secondaire qui émet le négatif du bruit primaire.

La deuxième option est l'isolation, L'idée est d'empêcher la transmission des vibrations d'un système à un autre sans nécessairement éliminer les vibrations dans le système de transmission.

Enfin, un troisième groupe de techniques appelé amortissement est utilisé pour réduire l'amplitude des vibrations dans le système en cas de panne ou de non-isolation du système, ou en cas d'inefficacité de la production secondaire.

Utilisé pour réduire les émissions acoustiques. Source de protection contre le bruit. Les techniques d'amortissement consistent à réduire l'amplitude de vibrations structurelles proches de la fréquence propre de la structure. De ce fait, ces techniques permettent d'amortir voire de supprimer les résonances dans les structures. Généralement, ils peuvent être classés comme passifs ou actifs.

I.3.1 Les systèmes de contrôle passif

Le contrôle passif des vibrations provient des propriétés dissipatives dû à l'intégration ou à l'ajout de matériaux ou systèmes, possédant des propriétés amortissantes est présenté par Cet ajout de masse peut entraîner une augmentation significative du poids des structures ce qui en fait une contrainte supplémentaire, en les rendant plus lourds et donc contraignant dans certaines applications telles que les applications aéronautiques et aérospatiales Ces systèmes additionnels sont couplés aux structures d'origine de telle façon que les vibrations des structures résultantes soient amorties passivement, c'est-à-dire, sans aucune intervention extérieure supplémentaire. Les revêtements composés de matériaux polymères viscoélastiques constituent des solutions très efficaces pour réduire les amplitudes de résonance de structures vibrantes.

I.3.2 Systèmes de contrôle Semi-actif

Les systèmes semi actifs fournissent de très bonnes performances d'isolation, tout en respectant des performances de sécurité sur la déflexion dynamique. Cependant, comme tout système semi actif, il a les défauts de ses qualités, à savoir d'être semi actif, notamment les défauts de la consommation énergétique, de la relative complexité sur des structures à plusieurs degrés de libertés.

Un bon compromis entre la performance et les qualités [coût, simplicité, fiabilité] peut être, en principe, atteint par les systèmes semi-actifs, l'idée principale du contrôle semi-actif est très simple : elle consiste à changer, en temps réel, les caractéristiques des dispositifs passifs de dissipation d'énergie et ce changement ne nécessite qu'une source minimale d'énergie. Le

concept de ce type de contrôle est introduit en modifiant la force d'amortissement du fluide en contrôlant l'ouverture de la valve d'un amortisseur conventionnel, par exemple, un amortisseur hydraulique muni d'une servovalve qui contrôle le débit d'huile à travers une restriction.

I.3.3 Système de contrôle actif :

Un système de contrôle est dit « actif » si un ou plusieurs actionneurs appliquent des forces sur une structure selon une loi de contrôle en utilisant une source d'énergie externe pour leur fonctionnement. Ces forces peuvent être utilisées pour ajouter ou dissiper l'énergie de la structure à contrôler. Afin de construire un tel système

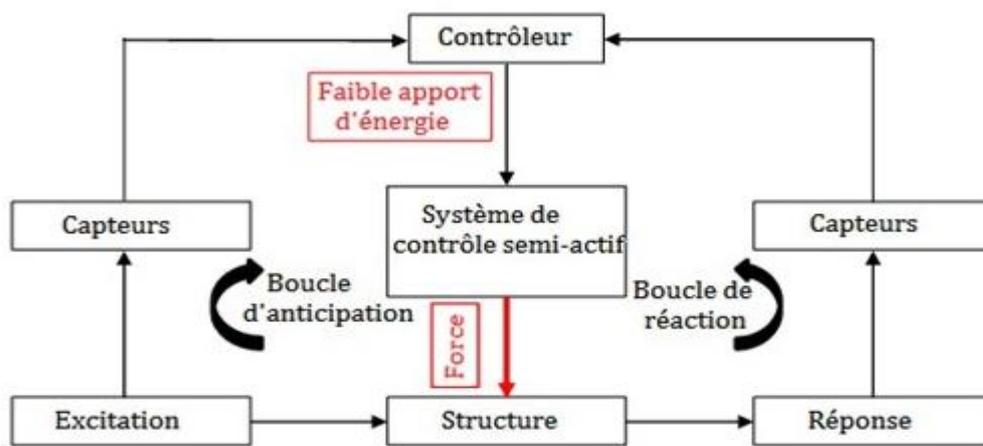


Figure I.6 Mode de fonctionnement d'un système de contrôle actif

Il est désormais possible de développer des structures intelligentes avec des capteurs et actionneurs piézoélectriques intégrés pour le contrôle actif des vibrations [5].

La piézoélectricité est principalement utilisée pour contrôler le comportement dynamique des structures afin d'amortir leurs vibrations et d'éviter les résonances et les dommages associés.

Les matériaux intelligents les plus couramment utilisés comprennent les piézocéramiques et les polymères [6]

I.4 La Piézoélectricité

La piézoélectricité, qui littéralement veut dire pression (piézo signifie pression en Grec) et électricité a été expliquée par Pierre et Jacques Curie en 1880. Caddy a défini la

piézoélectricité de la façon suivante : « polarisation électrique produite par des contraintes mécaniques dans les cristaux se rapportant à certaines classes, la polarisation étant proportionnelle à la contrainte et changeant »

I.4.1 Le principe de l'effet piézoélectrique :

Le principe de l'effet piézoélectrique est que si une pression est appliquée sur un matériau piézoélectrique, elle produira une différence de potentiel (appelée effet piézoélectrique positif), et au contraire, si une tension est appliquée, elle produira une contrainte mécanique (appelée l'effet piézoélectrique inverse). Si la pression est une vibration à haute fréquence, elle produira un courant à haute fréquence. Lorsque des signaux électriques à haute fréquence sont appliqués à des céramiques piézoélectriques, des signaux acoustiques à haute fréquence (vibrations mécaniques) sont générés, ce que nous appelons généralement des signaux ultrasonores. Autrement dit, les céramiques piézoélectriques ont la fonction de conversion et de conversion inverse entre énergie mécanique et énergie électrique

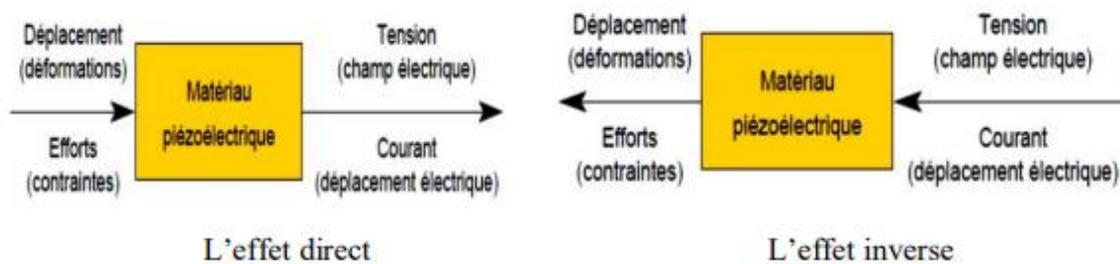


Figure I.7 illustrations de l'effet piézoélectrique direct et inverse

Grâce aux effets piézoélectriques direct et inverse, ces matériaux peuvent être utilisés dans les applications de type capteur et actionneur.

Une force ou une pression exercée sur un matériau piézoélectrique génère des champs électriques et donc une tension électrique mesurable. Ceci constitue le principe de fonctionnement des capteurs piézoélectriques [7].

L'existence de la piézoélectricité dans un cristal est liée aux symétries de la maille cristalline. En particulier, un cristal ne peut pas être piézoélectrique si sa maille possède un centre de symétrie (maille dite centrosymétrique : les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident avec le centre de la maille élémentaire. De manière générale, nous pouvons classer les cristaux suivant leurs symétries en 230 groupes d'espace regroupés en 32 classes cristallines [8]. Il existe 21 classes non centrosymétriques, dont 20 sont piézoélectriques.

Parmi ces classes piézoélectriques, 10 possèdent une polarisation électrique spontanée et sont dites polaires. Ces derniers cristaux sont pyroélectriques car leur polarisation spontanée varie avec la température

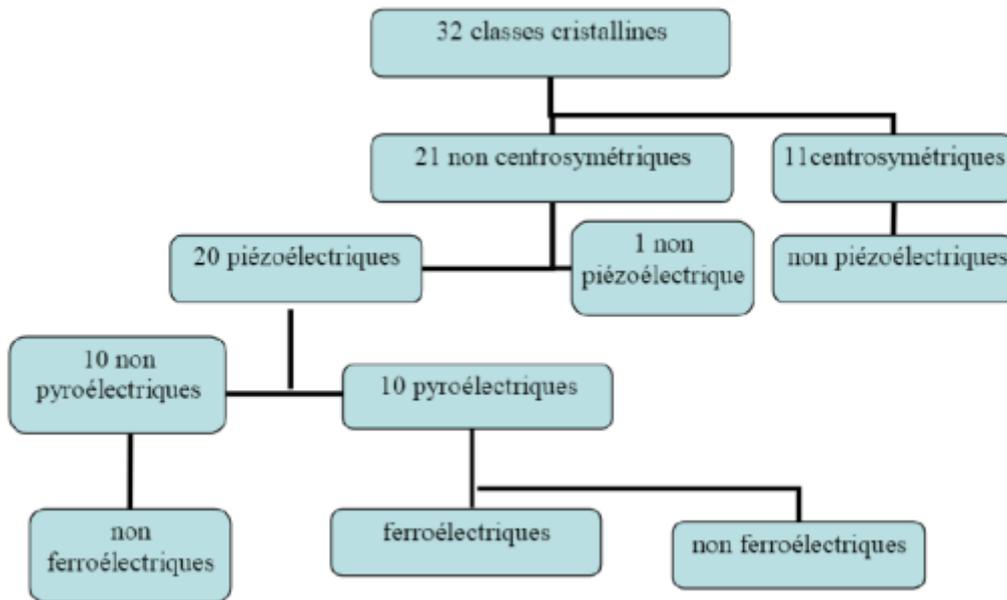


Figure I.8: Classes cristalline

I.4.2 Capteurs de pression ou d'accélération

L'application d'une pression sur un matériau piézoélectrique crée une charge électrique qui peut être mesurée électroniquement. Les matériaux piézoélectriques sont donc des candidats naturels pour les applications basées sur les mesures de pression. Ceux-ci sont notamment utilisés pour l'automobile (pression des pneus), l'aviation (pression dans les buses), les balances, ou encore la musique (batterie électronique).

Il est possible de mesurer l'accélération en utilisant le même principe. De cette manière, il est possible de fabriquer des capteurs inertiels (accéléromètres à pales oscillantes, gyromètres oscillants de Coriolis) applicables aux centrales inertiels. Il peut également s'appliquer plus généralement à des applications de faible précision telles que les airbags (airbags), l'induction et les jeux vidéo à levier de console.

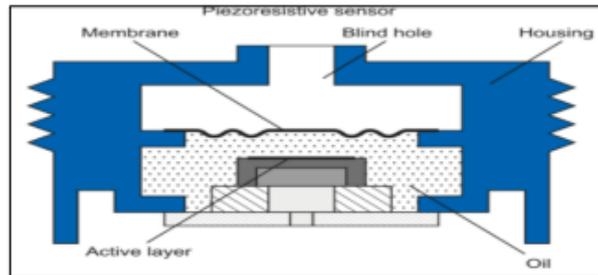


Figure I.9 accéléromètre piézoélectrique **figure I.10** détecteur a semi conducteur au silicium

I.4.3 Actionneurs piézoélectriques :

Les actionneurs utilisent l'effet piézoélectrique inverse dans ces appareils. Les champs électriques sont utilisés pour contrôler la déformation et le déplacement. Les actionneurs monolithiques contrôlables qui utilisent une tension induite pour piloter le déplacement sont appelés actionneurs piézoélectriques. Il

Existe deux principaux types d'actionneurs piézoélectriques :

Actionneur direct Le déplacement obtenu est égal à la déformation du matériau piézoélectrique. L'entraînement direct permet des courses de 0 à 100 μm .

Actionneurs agrandis dans lesquels des dispositifs mécaniques amplifient ce mouvement de 2 à 20fois. Ils ont généralement une course de 0.1 à 1 mm

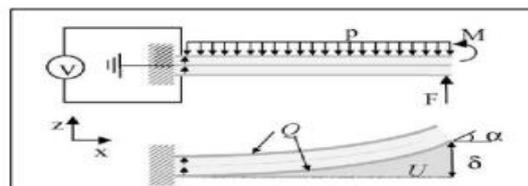


Figure .11 actionneur piézoélectrique **Figure .12** principes fonctionnement de l'actionneur piézoélectrique linéaire

I.4.4. Polarisation des piézoélectriques

Le phénomène piézoélectrique apparaît par la déformation mécanique du dipôle élémentaire de la maille cristalline. Le matériau piézoélectrique est très souvent sous forme polycristallines, que ce soit en massif ou en couches minces. Ainsi, à l'état naturel ou après

élaboration, les dipôles électriques sont orientés de façon aléatoire et le matériau ne présente aucun effet piézoélectrique.

Pour ce faire, il est nécessaire de procéder à une étape dite de polarisation qui consiste à appliquer un champ électrique intense afin d'orienter les polarisations des microcristaux dans la même direction. [9]

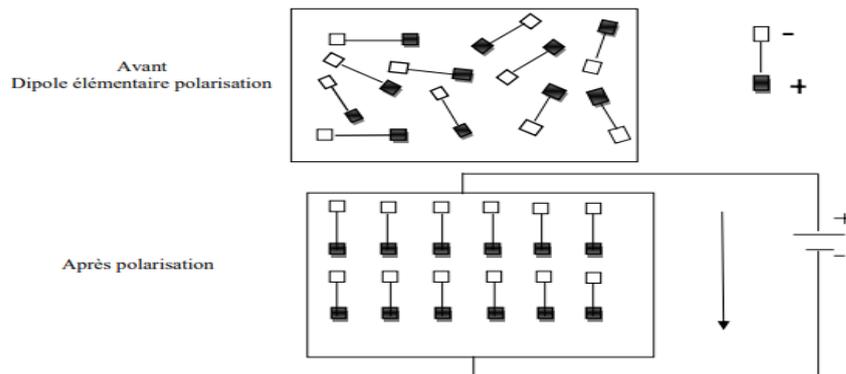
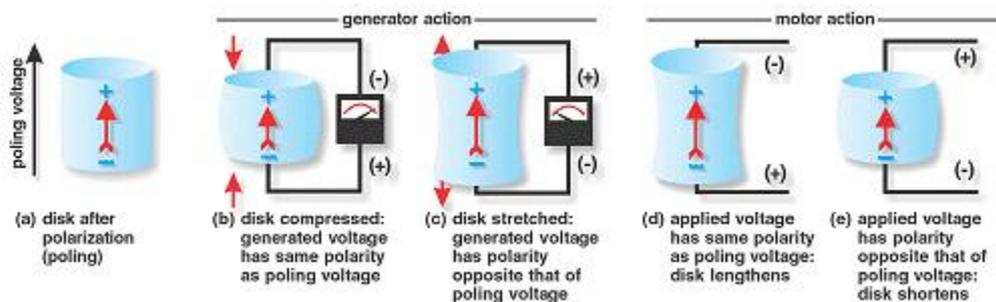


Figure I.13 : Polarisation par application d'un champ électrique dans les matériaux

Le champ de polarisation caractérise un déplacement de charges positives par rapport aux charges négatives. S'il est non-uniforme sur un volume donné, sa variation se traduit par un excès de charges positives hors du volume considéré. D'un point de vue quantitatif, cela permet de définir une densité volumique de charge de polarisation

Un voltage de même polarité induira une expansion de la céramique piézoélectrique selon l'axe de polarité et une contraction perpendiculaire à ce même axe. Par contre, une tension de polarité opposée induira une contraction de la céramique piézoélectrique selon l'axe de polarité et une expansion perpendiculaire à cet axe



Fichier I.14 Générateur et actionneur de piézoélectrique

- a) aucun voltage
- b) voltage de même polarité
- c) polarité opposée
- d) voltage de même polarité
- e) polarité opposée

Dans les deux cas, la céramique piézoélectrique retournera à son état une fois le voltage externe relâché. L'explication est donnée en termes de déformation. Cette explication est valide dans le cas où la céramique est libre de se déformer. [16]

1.4.5 Contrôle actif des vibrations :

Les techniques actives permettent, de contrôler les vibrations à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure (capteur) de l'intensité des vibrations indésirables, ce qui constitue le principe du contrôle actif des vibrations. Alors une structure contenant des actionneurs et capteurs collés ou intégrés et couplés par un système de contrôle est dite intelligente.

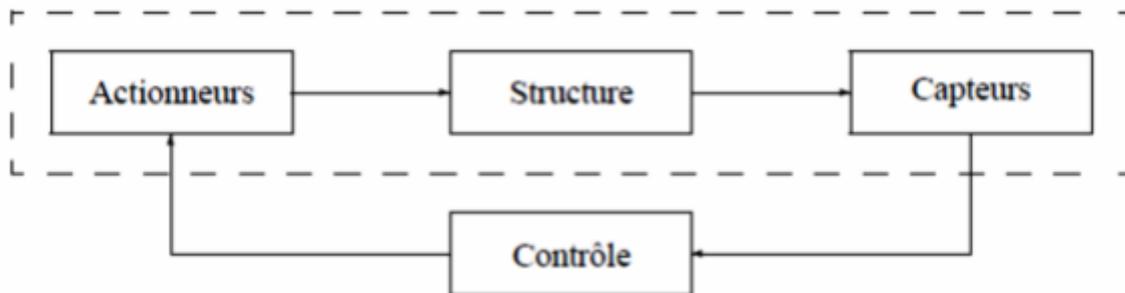


Figure I.15 schéma d'un structure intelligent

Le principal intérêt des matériaux piézoélectriques est qu'ils couplent fortement des grandeurs mécaniques et électriques, leur permettant d'agir sur l'état mécanique des structures en modifiant le champ électrique appliqué à ces matériaux.

Ensuite, en plaçant une paire de céramiques piézoélectriques symétriquement de chaque côté de la structure (sandwich) une céramique reçoit une tension de même polarité et l'autre céramique reçoit une tension de polarité opposée, comme le montre la figure I.15. Cela permet de créer un effet de flexion. Lorsqu'on nous le présente, on dit qu'on est en mode actionneur

Les actionneurs piézoélectriques considérés jusqu'ici sont collés sur les surfaces de la structure ou d'un revêtement contraint passif produisant ainsi des déformations de membrane lorsqu'ils sont actionnés par un potentiel électrique. Dans cette configuration, le champ électrique imposé et la polarisation du matériau piézoélectrique sont dans la même direction (transversale) et le couplage électromécanique se réalise par la constante piézoélectrique e_{31} . Ce mécanisme, d'engomme mécanisme d'action par extension,

constitue la majeure partie des applications des actionneurs piézoélectrique au contrôle des vibrations. [10, 11, 12, 13, 41, 93] afin d'étudier l'interaction entre ces types d'actionneurs/capteurs piézoélectriques et la structure.

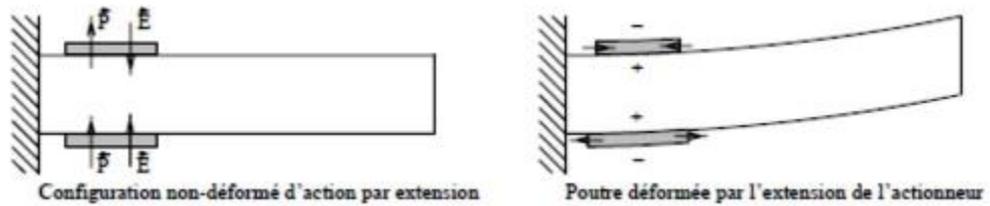


Figure I.16 représentation de mécanisme d'action par extension

I.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, une description du phénomène piézoélectrique est proposée à travers les effets directs et inverse et les l'intérêt que représentent les matériaux piézoélectriques dans le développement de structure intelligent, et une vue générale sur les contrôles de vibration (passif semi actif et actif) et ses outil (actionneur et capteur)

Chapitre II : théorie des plaques

II.1 introductions :

De nombreux problèmes sont rencontrés lors de l'étude des structures, qu'il s'agisse de déterminer l'ampleur des vibrations et des contraintes, de connaître le comportement dynamique ou statique de la structure, et de prendre en compte des plaques plus ou moins complexes. Le plus souvent, le choix est fait entre la théorie des plaques minces, fondée par Love sur la base des hypothèses de Gustav Kirchhoff, ou la théorie des plaques semi-épaisses, développée par Mindlin à partir des travaux de Timochenko et Resenro.

ce document donne l'ensemble du raisonnement mécanique adopté pour la simulation des plaques, en se base sur la théorie de mindlin puis le matériau composite, piézoélectrique ,suivi par la modélisation d'une plaque sandwich piézoélectrique qui on souhaite de la traiter dans cette thèse. 17]

II.2 définitions d'une plaque :

Une plaque est définie comme étant un solide délimité par deux plans parallèles appelés faces et dont l'épaisseur h est petite par rapport aux deux autres dimensions. Les plaques sont généralement employées pour modéliser des structures minces, car seule une dimension est faible par rapport aux deux autres. Par contre, si la structure présente une courbure géométrique, ce sont les éléments de coque qui sont privilégiés plutôt que les éléments de plaque qui sont plans. Autrement dit, si l'élément n'est pas plan au repos, nous parlons de coque plutôt que de plaque. On se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope. Pour l'étude de la flexion, on considère que les charges sont perpendiculaires aux faces [18]

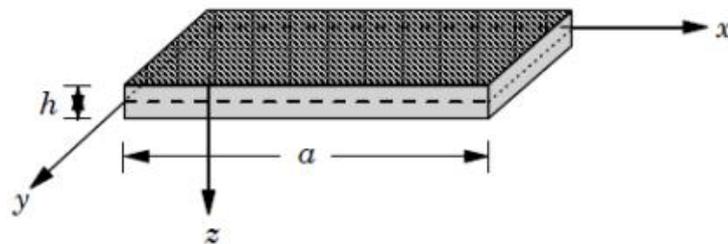


Figure II.1 : géométrie d'une plaque rectangulaire

II.3 la théorie des plaques :

II.3.1 démarches :

Comme pour l'étude des poutres, on met en relation :

- La forme finale de la plaque, c'est-à-dire le champ des déplacements, avec le champ de tenseur des déformations .
- Les efforts de cohésion avec les efforts extérieurs.
- Les efforts de cohésion avec le tenseur des contraintes, grâce au principe d'équivalence.
- Et le tenseur des contraintes avec le tenseur des déformations, grâce à la loi de Hooke généralisée.

Le modèle de poutre permet de passer des efforts de cohésion au tenseur des contraintes ; il permet d'appliquer le principe d'équivalence.



Figure II.2 : démarche pour l'étude des plaques

II.4 classifications des plaques :

On peut classer les plaques de type déplacement qui agissant à la flexion en deux catégories :

- Les éléments basés sur la théorie de Kirchhoff (cisaillement transversal à négliger).
- Les éléments basés sur la théorie de Reissner et Mindlin (avec cisaillement transversal)

II.4.1 la théorie des plaques minces de love-Kirchhoff :

La théorie des plaques de Kirchhoff-love est un modèle mathématique bidimensionnel utilisé pour déterminer les contraintes et les déformations dans les plaques minces soumises à des forces et des moments. Cette théorie est une extension de la théorie des poutres d'Euler, la théorie suppose qu'un plan médian peut être utilisé pour représenter une plaque tridimensionnelle sous forme bidimensionnelle.

La théorie de Love-Kirchhoff, suppose que :[33]

- Le plan moyen est initialement plan, c'est-à-dire qu'il ne présente pas de courbure.
- Le feuillet moyen ne subit pas de déformation dans son plan, c'est-à-dire que nous ne considérons que le déplacement transversal des points du feuillet moyen.
- Sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est-à-dire que nous pouvons négliger le cisaillement.
- L'épaisseur de la plaque est faible, c'est-à-dire que dans la direction de l'épaisseur, la déformation est nulle impliquant que les contraintes dans cette direction peuvent être négligées.

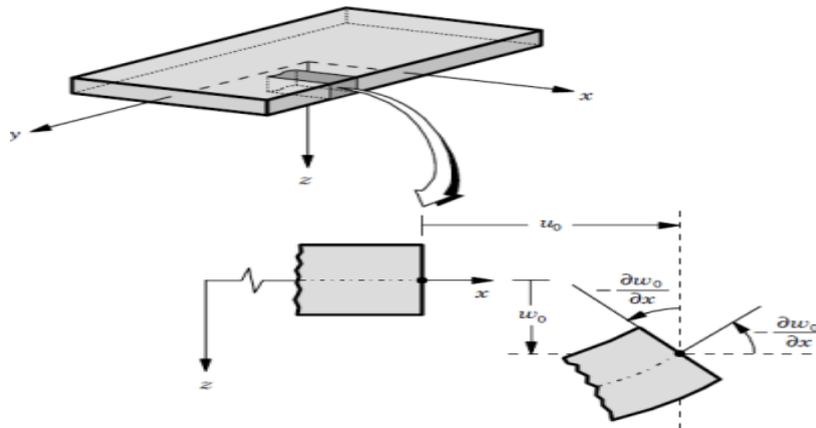


Figure II.3 : Illustration de la plaque de Love-Kirchhoff

II.4.1.1 Champs de déplacement :

. En se basant sur les hypothèses citées ci-dessus, le champ de déplacement de la théorie classique est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\theta_x(x, y, z) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\theta_y(x, y, z) \quad (\text{II.1}) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}$$

Les composantes de déplacements u_0 , v_0 et w_0 sont ceux d'un point du plan moyen ($x, y, z=0$)

Sachant que :

$$\theta_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.2})$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

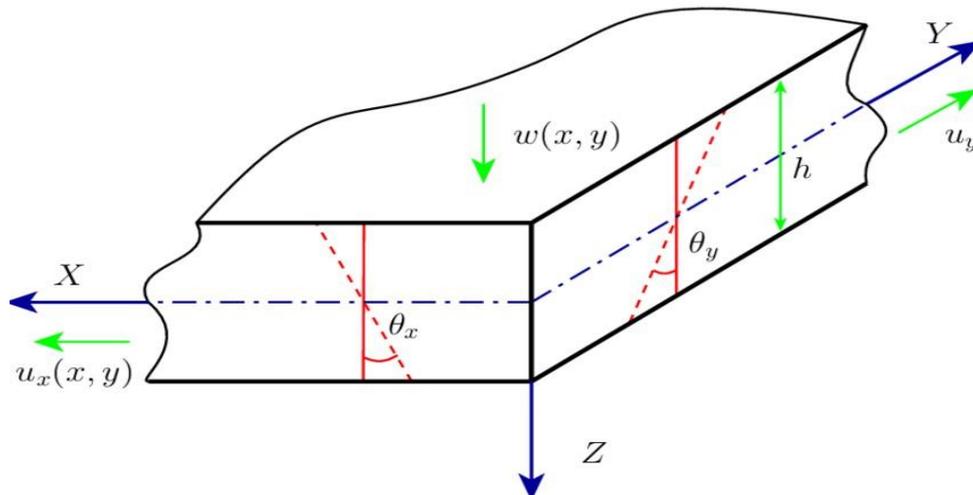


Figure II.4 : Définition des variables de plaque mince : champs de déplacement et de pente

Avec : θ_x et θ_y sont les rotations autour des axes x, y respectivement. [20]

II.4.2 la théorie des plaques épaisses (théorie de Reissner et Mindlin) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre est une extension de la cinématique de la théorie classique des plaques par une déformation de cisaillement transversale de la plaque, et dans ce cas les déformations à cause de cisaillement transversal ne sont pas négligeables, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen.[17]

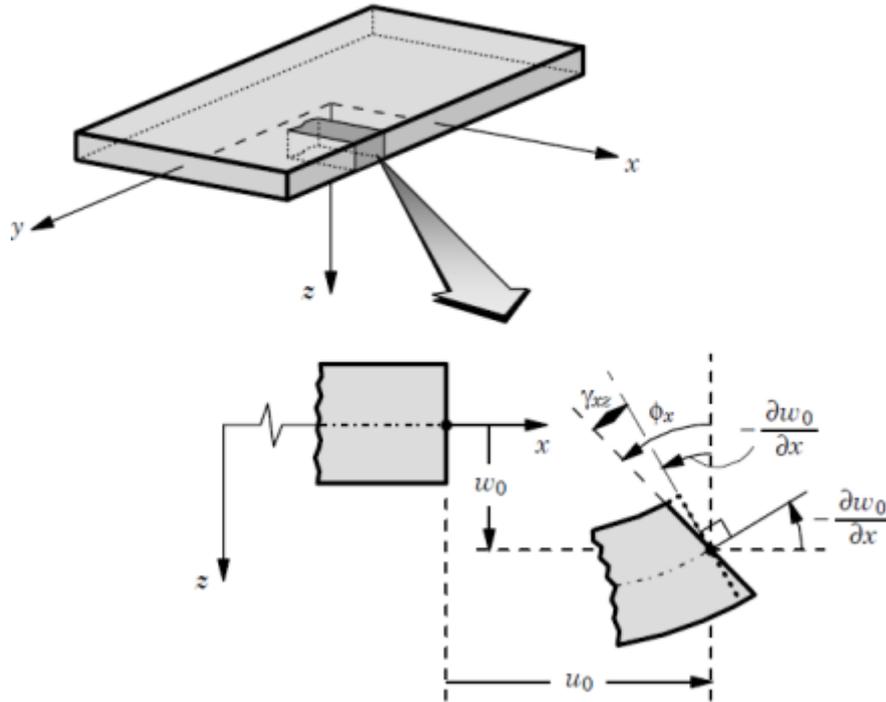


Figure II.5 : Cinématique de la plaque de Reissner- Mindlin.

II.4.2.1 champs de déplacement

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u(x, y) + z \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 v(x, y, z) &= v(x, y) + z \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (\text{II.4}) \\
 w(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}$$

Les composantes de déplacements u , v et w sont ceux d'un point du plan moyen ($x, y, z=0$)

Avec φ_x et φ_y sont les rotations de cisaillement des sections normales a les axes x , y respectivement. [21]

Sachant que :

$$\begin{aligned}
 \theta_x &= \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \theta_y &= \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{II.5})
 \end{aligned}$$

Avec θ_x et θ_y sont les rotations autour des axes x , y respectivement.[33]

Et sous forme matricielle on peut l'écrire comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & o \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L]\{u\} \quad (\text{II.4.1})$$

[L] : l'opérateur de localisation des variables.

Sachant que :

$$\{U\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & o \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4.2})$$

$$= [L_t]\{u\} + z[L_r]\{u\} \quad (\text{II.4.3})$$

Avec : t et r sont des indices qui désignent les valeurs de translation et de rotation respectivement.[16]

II.4.2.2 champs de déformation :

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

Principe de base : séparation des déformations

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{mf} \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + z[x^*] \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{xy} \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Où :

ε_{mf} : effet membrane et flexion.

ε_c : effet de cisaillement.

Le champ des déformations en membrane α :

$$\alpha = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Le champ des déformations en flexion x^* :

$$x^* = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ 0 \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Le champ des déformations en cisaillement transverse γ :

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

II.4.3 lois de comportement :

Les contraintes et déformations dans le milieu sont directement proportionnelles, Plus on charge le milieu plus la contrainte augmente et plus la déformation augmente, et on peut exprimer cette relation par des lois appelés comportement.[25]

On peut écrire les lois de comportement comme suit :

$$\{\sigma_{mf}\} = [c] \cdot \{\varepsilon_{mf}\} = [c_{mf}] \cdot \{\varepsilon_t\} \quad \text{Et} \quad \{\sigma_c\} = [C_c] \cdot \{\gamma_t\} \quad (\text{II.10})$$

$$[c_{mf}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{Et} \quad [C_c] = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{mf} \\ \sigma_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{mf} & 0 \\ 0 & C_c \end{bmatrix}$$

Avec :

- σ_{mf} : contrainte de membrane.
- σ_c : contrainte de cisaillement.
- $[C]$: matrice de raideur.

II.4.3.1 résultantes des forces et des moments et loi constitutive : [16]

❖ Les résultantes en membrane :

$$\begin{aligned} \text{❖ } \{N(x, y)\} &= \begin{bmatrix} N_x \\ N_Y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{mf}\} dZ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [c_{mf}] \cdot \{\varepsilon_{mf}\} dZ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [c_{mf}] \cdot (\{\alpha\} + \\ & z[x^*]) dZ = [H_m]\{\alpha\} + [H_{mf}]\{x^*\} \quad (\text{II.12}) \end{aligned}$$

$$\text{Ou : } [\mathbf{H}_m] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{c}_{mf}] dZ \quad (\text{II.13})$$

$$[\mathbf{H}_{mf}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\mathbf{c}_{mf}] dZ \quad (\text{II.14})$$

❖ **Les moments de flexion et de torsion :**

$$\{M(x, y)\} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_Y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \{\sigma_{mf}\} dZ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z [\mathbf{c}_{mf}] \cdot \{\varepsilon_{mf}\} dZ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z ([\mathbf{c}_{mf}] \cdot (\{\alpha\} + z[\mathbf{x}^*])) dZ = z[\mathbf{H}_m]\{\alpha\} + [\mathbf{H}_f]\{\mathbf{x}^*\} \quad (\text{II.15})$$

Ou :

$$[\mathbf{H}_f] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 [\mathbf{c}_{mf}] \cdot [\mathbf{x}^*] dZ \quad (\text{II.16})$$

❖ **Les résultantes en cisaillement :**

$$\{Q(x, y)\} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_Y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_c\} dZ = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{c}_c] \cdot \{\gamma_t\} dZ = [\mathbf{H}_c]\{\gamma\} \quad (\text{II.17})$$

Avec :

$$[\mathbf{H}_c] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\mathbf{c}_c] dZ \quad (\text{II.18})$$

❖ **Loi constative :**

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_m & H_{mf} & 0 \\ H_{mf} & H_f & 0 \\ 0 & 0 & H_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{x}^* \\ \gamma \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{x}^* \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

II.4.4 principes de Hamilton :

En mécanique classique, le principe de Hamilton est utilisé pour décrire le mouvement des particules dans un système. Ce principe s'applique aux systèmes conservatifs, c'est-à-dire aux systèmes où l'énergie totale est constante. Le principe de Hamilton permet de trouver l'équation de mouvement d'un système en utilisant la fonctionnelle d'action, qui est définie comme l'intégrale du lagrangien sur une période de temps.[42]

$$\delta \int (E_c - E_p + T) dt = 0 \quad (\text{II.20})$$

- T : le travail.
- E_c : énergie cinétique.
- E_p : énergie potentielle.
- δ : variation subie pendant l'intervalle de temps considérée.

II.4.5 énergie cinétique :

L'Energie cinétique s'écrit par :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_v (\{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\}) dv = \frac{1}{2} \rho \int_v (\{\dot{U}\}^T [L]^T [L] \{\dot{U}\}) dv \quad (\text{II.21})$$

$$= \frac{1}{2} \rho \int_v (\{\dot{U}\}^T ([L_t]^T [L_t] - z([L_r]^T [L_t] + [L_t]^T [L_r]) + z^2([L_r]^T [L_r])) \{\dot{U}\}) dv$$

Après l'intégration à la direction de l'épaisseur z ($\frac{h}{2}$ et $-\frac{h}{2}$), on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s (\{\dot{U}\}^T \left(h \cdot [L_t]^T [L_t] + \left(\frac{h^3}{12} \right) \cdot ([L_r]^T [L_r]) \right) \{\dot{U}\}) ds$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s (\{\dot{U}\}^T [\bar{m}_e] \{\dot{U}\}) ds$$

Par Identification de ces derniers :

$$[\bar{m}_e] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

II.4.6 énergie potentielle :

Savant qu'elle est l'Energie de déformation qui est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\}^T dv = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\} [C] \{\varepsilon\}^T dv \quad (\text{II.23})$$

L'énergie potentielle se forme de quatre effets :

$$E_p = E_{\text{membrane}} + E_{\text{flexion}} + E_{\text{membrane-flexion}} + E_{\text{cisaillement}} \quad (\text{II.24})$$

- effet membrane :

$$E_{\text{membrane}} = \frac{1}{2} \int_v \{\alpha\}^T [C_{mf}] \{\alpha\} dv \quad (\text{II.25})$$

En intégrant selon le tout long de l'épaisseur z , on obtient :

$$E_{\text{membrane}} = \frac{1}{2} h \int_s \{\alpha\}^T [C_{mf}] \{\alpha\} ds = \frac{1}{2} \int_s \{\alpha\}^T [H_m] \{\alpha\} ds \quad (\text{II.25})$$

Savant que : $[H_m] = h \cdot [C_{mf}]$ (II.26)

- Effet de flexion :

$$E_{\text{flexion}} = \frac{1}{2} \int_V \{\mathbf{x}^*\}^T [\mathbf{C}_{\text{mf}}] \{\mathbf{x}^*\} dv \quad (\text{II.27})$$

En intégrant par rapport à z :

$$E_{\text{flexion}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^3}{12} \right) \int_S \{\mathbf{x}^*\}^T [\mathbf{C}_{\text{mf}}] \{\mathbf{x}^*\} ds = \frac{1}{2} \int_S \{\mathbf{x}^*\}^T [\mathbf{H}_f] \{\mathbf{x}^*\} ds \quad (\text{II.28})$$

- **Effet couplage membrane-flexion :**

$$E_{\text{membrane-flexion}} = \frac{1}{2} \int_V (\{\alpha\}^T [\mathbf{C}_{\text{mf}}] \{\mathbf{x}^*\} + \{\mathbf{x}^*\}^T [\mathbf{C}_{\text{mf}}] \{\alpha\}) dv \quad (\text{II.29})$$

Après l'intégration, on aura :

$$E_{\text{membrane-flexion}} = 0$$

- **Effet de cisaillement :**

$$E_{\text{cisaillement}} = \frac{1}{2} k \int_V \{\gamma\}^T [\mathbf{C}_c] \{\gamma\} dv$$

Par intégration :

$$E_{\text{cisaillement}} = \frac{1}{2} k \cdot h \int_S \{\gamma\}^T [\mathbf{C}_c] \{\gamma\} ds = \frac{1}{2} \int_S \{\gamma\}^T [\mathbf{H}_c] \{\gamma\} ds \quad (\text{II.30})$$

$$\text{Avec : } [\mathbf{H}_c] = k \cdot h \cdot [\mathbf{C}_c] \quad (\text{II.31})$$

K : facteur de correction due au cisaillement.

II.4.7 Travail des efforts externes :

$$\mathbf{T} = \int_V [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\} dv + \int_S [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{f}\} ds + [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{p}\} \quad (\text{II.32})$$

Savant que :

$\{\mathbf{F}\}$: forces volumiques

$\{\mathbf{f}\}$: forces surfaciques

$\{\mathbf{p}\}$: forces ponctuelles

II.5 matériau composite :

• Définition

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

II.5.1 Mécanique de composite unidirectionnel :

II.5.1.1 Relations contraintes-déformations :

L'état complet de contrainte dans le repère (1,2) d'un pli est représenté par la figure :(II.6)

Ainsi les propriétés mécaniques du pli ont été mesurée dans ce repère locale.[31]

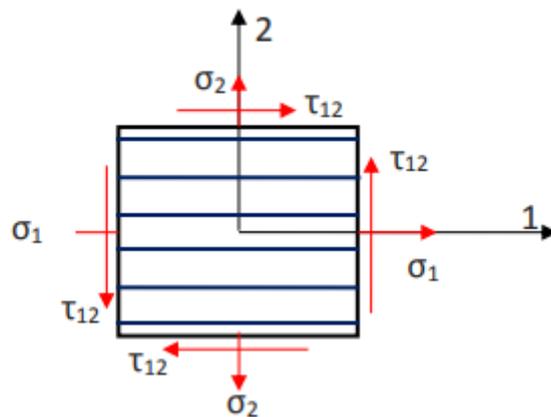


Figure II.6: état complet de contrainte dans le repère locale.

Les équations de transformation relatives aux contraintes sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T_{(\theta)}] \times \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Où [T] est la matrice de changement de repère.

Les équations de transformation relatives aux déformations sont tout à fait similaires à celles des contraintes

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} = [T_{(\theta)}] \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.34})$$

Les relations entre les contraintes et les déformations d'un pli soumis à un état complet de contraintes dans le repère local (1,2), sont définies par l'équation suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} = \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

Où les constantes de la matrice Q sont données par les équations suivante :[33]

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \quad (\text{II.36}) \\ Q_{12} &= \frac{E_2\nu_{12}}{1 - \nu_{21}\nu_{12}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned}$$

Où :

- $[Q_{ij}]$: matrice de rigidité réduite dans les axes principaux (1,2).
- E_1 : module de Young longitudinal.
- E_2 : module de Young transversal.
- G_{12} : module de cisaillement longitudinal.
- $\nu_{12} = \nu_{21}$: coefficient de poisson.

Pour exprimer cette équation dans l'axes global il faut intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations :

- Pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma_{x,y,z}\} = [T]^{-1} \{\sigma_{1,2,3}\} \quad (\text{II.37})$$

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -sc & sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Avec [T] c'est la matrice de changement de base des contraintes.

$$C = \cos \theta$$

$$S = \sin \theta$$

- Pour le champ des déformations :

$$\{\varepsilon_{x,y,z}\} = [\hat{T}]^{-1} \{\varepsilon_{1,2,3}\} \quad (\text{II.39})$$

$$[\hat{T}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & sc \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -sc \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ -2sc & 2sc & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Où : $[\hat{T}]$ c'est la matrice de changement de base des déformations.

Dans le repère globale (x, y) les relations entre les contraintes et les déformations sont données par la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

La matrice Q est déduite par intermédiaire de la matrice de rigidité dans le repère local Q en tenant compte de la rotation des axes avec un angle θ

L'angle de rotation des systèmes d'axes θ est considéré comme positif lorsqu'il faut tourner dans le sens trigonométrique pour passer de l'axe x vers l'axe 1.

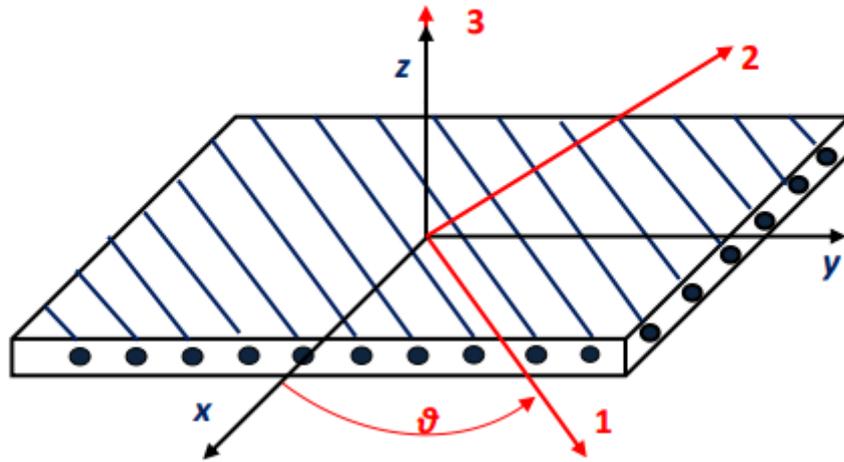


Figure II.7 : élément de composite et oriente des fibres.

La matrice $[\bar{Q}]$ est calculée comme suit :

$$[\bar{Q}] = [T(\theta)]^{-1} \times [Q] \times [T(\theta)] \quad (\text{II.42})$$

Les éléments de la matrice $[\bar{Q}]$ sont déterminés par l'équation suivante :

$$[\bar{Q}] = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11}C^4 + Q_{22}S^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^4S^4 \\ (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})C^2S^2 + Q_{12}C^4S^4 \\ Q_{11}S^4 + Q_{22}C^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})C^2S^2 \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})C^3S - (Q_{22} - Q_{12} - Q_{66})CS^3 \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})CS^3 - (Q_{22} - Q_{12} - Q_{66})C^3S \\ (Q_{11} + Q_{12} - Q_{22} - Q_{66})C^2S^2 + Q_{66}(C^4 + S^4) \end{Bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

II.5.2 mécanique des structures stratifiées :

II.5.2.1 Définition :

Les structures stratifiées sont constituées d'un certain nombre de plis qui sont empilés et collés successives les uns sur les autres comme indiqué à la figure 2.8. Les axes x, y et z représentent le repère global de la structure. Par contre les axes 1 et 2 définissent le repère local du pli, ils sont orientés respectivement de façon parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres.[23]

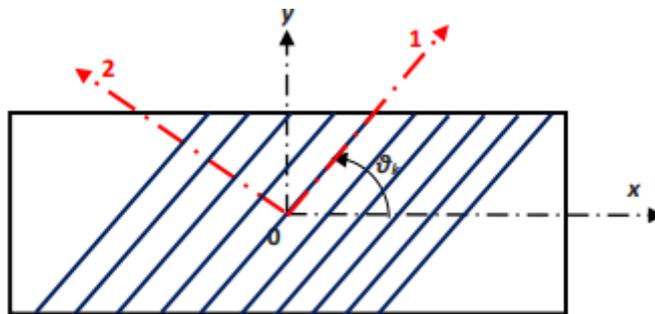


Figure II.8: Structure stratifiée.

Une structure stratifiée est caractérisée par la séquence d'empilement des plis qui la constitue et l'orientation de chaque pli. Des plis adjacents sont séparés par une barre oblique (/) si leurs angles ont de différentes valeurs absolues. Un indice est utilisé afin d'indiquer le nombre de plis adjacents possédant la même orientation.

II.5.2.2 Type des stratifiés :

On peut avoir plusieurs types de stratifié :

- Stratifié symétrique : Les plis sont disposés symétriquement par rapport au plan moyen géométrique (plan (x, y) passant par le milieu de l'épaisseur du stratifié).
- Stratifié équilibré : Nombre de plis à $+0$ est égal au nombre de plis à -0 .
- Stratifié orthogonal : Plis de 0 et de 90 degrés.

II.5.2.3 Théorie classique des stratifiés :

Cette théorie est basée sur les déformations de cisaillement et de torsion, et la flexion que subit un élément de stratifié fin lors de la mise en charge de la structure.[24]

- **Comportement en membrane :**

$$[N(x, y)] = \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \hat{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \hat{Q}_k \right] k(x, y) \quad (\text{II.44})$$

- En introduisant la matrice :

$$A = [A_{ij}] \left[\sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) \hat{Q}_k \right] \varepsilon_m \quad (\text{II.45})$$

$$B = [B_{ij}] \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \hat{Q}_k \right]$$

- **Comportement en flexion et en torsion :**

$$[M(x, y)] = \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2) \hat{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \hat{Q}_k \right] K(x, y)$$

Alors : $[M(x, y)] = [B] \varepsilon_m(x, y) + [D] K(x, y) \quad (\text{II.46})$

- En introduisant la matrice :

$$D = [D_{ij}] = \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3) \hat{Q}_k \right] \quad (\text{II.47})$$

Les coefficients de la matrice de cisaillement $[F]$ sont définies par :

$$[F_{ij}] = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^n \int_{Z^{(k-1)}}^{Z_k} (\bar{Q}_{ij}) dZ \quad (\text{II.48}) \quad i, j = 4, 5$$

Savant que : α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement, on reprend aussi la valeur 5,6

D'après le rassemblement des résultantes et des moments, en obtenant l'équation constitutive des stratifiés : [43]

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \\ k_{xx} \\ k_{yy} \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{II.49})$$

Avec :

- N : résultantes en membrane.
- A : la matrice de rigidité en membrane.
- B : la matrice de couplage (membrane-flexion-torsion).
- M_f : moment de flexion et de torsion.
- D : la matrice de rigidité en flexion.
- F : la matrice de rigidité en cisaillement.

II.6 matériau piézoélectrique :

Les matériaux piézoélectriques représentent une avancée majeure dans le domaine des technologies modernes. Ces matériaux possèdent la capacité unique de convertir l'énergie mécanique en énergie électrique et vice versa, ouvrant ainsi la voie à une multitude d'applications innovantes. Cette propriété, connue sous le nom de l'effet piézoélectrique, fut découverte en 1880 par les frères Curie.

L'effet piézoélectrique se manifeste dans certains matériaux cristallins qui, lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique, génèrent une charge électrique à leur surface.

Inversement, ces mêmes matériaux peuvent se déformer sous l'effet d'un champ électrique appliqué. Cette double capacité de conversion énergie mécanique-énergie électrique est le cœur de l'innovation des matériaux piézoélectriques.[35]

Cette partie se faillait pour faciliter la compréhension de phénomènes électriques a l'intérieur d'un corps piézoélectrique pour l'analyse de couplage change dans la structure intelligente (sandwich piézoélectrique).

II.6.1 Loi de comportement :

➤ L'effet direct de la piézoélectricité :

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [d]^T\{E\} \text{ (II.50)}$$

$$\text{Avec : } \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \text{ (II.51)}$$

➤ L'effet inverse de la piézoélectricité :

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^T\{E\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \text{ (II.52)}$$

Ou :

- $\{D\}$: vecteur de déplacement électrique.
- $\{\varepsilon\}$: vecteur des déformations.

- $\{E\}$: vecteur de champ électrique.
- $\{e\}$: matrice des constantes piézoélectrique ou de couplage électromécanique.
- $\{d\}$: matrice de primitive électrique.
- $\{\sigma\}$: vecteur des contraintes.
- $\{C\}$: matrice des constantes élastique.

II.6.2 champ électrique :

Le champ électrique $\{E\}$ est le gradient de potentielle électrique $\{\phi\}$, et c'est constant suivant l'épaisseur de la couche piézoélectrique h_p [36]

$$E_x = E_y = 0$$

$$E_z = -\frac{\phi}{h_p}$$

Implique :

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\phi}{h_p} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

Où :

- $\{E\}$: le champ électrique.
- $\{\phi\}$: potentiel électrique
- $\{h_p\}$: épaisseur de la couche électrique.

II.6.3 Energie cinétique :

L'énergie cinétique de la couche piézoélectrique a la même forme que celle d'un matériau purement élastique :[41]

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_s \left(\{\dot{U}\}^T [\bar{m}_p] \{\dot{U}\} \right) ds \quad (\text{II.54})$$

D'où :

$$[\bar{\mathbf{m}}_p] = \rho \begin{bmatrix} h_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_p^3}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

II.6.4 énergie potentielle :

Dans un milieu continue, un matériau piézoélectrique comporte une partie élastique et une partie électrique :[41]

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\} \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v [D] \{E\} dv = E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-électrique}} \quad (\text{II.56})$$

En substituant les expressions des effets direct et inverse en ce dernière expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\varepsilon\}) dv \quad (\text{II.57})$$

$$= E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piezoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}} \quad (\text{II.58})$$

- **E_{p-élastique}** : notamment que l'énergie élastique est de même forme que celle d'une couche élastique avec une matrice [C] déférente.
- **E_{p-piezoélectrique}** : elle représente le couplage :

$$E_{p\text{-piezoélectrique}} = \frac{1}{2} \int_v \left(\{\alpha\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\alpha\} + \{x^*\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{x^*\}^T [e_{mf}]^T \{x^*\} + \{\gamma\}^T [e_c]^T \{E\} + \{\gamma\}^T [e_c]^T \{\gamma\} \right) dv \quad (\text{II.59})$$

Ou :

$$[e_{mf}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.60}) \quad \text{Et} \quad [e_c] = \begin{bmatrix} e_{15} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sachant que le cisaillement est nul étant donné que $E_x = E_y = 0$, alors qu'après l'intégration selon l'épaisseur, on obtient

$$E_{p\text{-piezoélectrique}} = \frac{1}{2} \int_s \mathbf{h}_p \left(\{\alpha\}^T [e_{mf}]^T \{E\} + \{E\}^T [e_{mf}]^T \{\alpha\} \right) ds \quad (\text{II.61})$$

- **E_{p-diélectrique}** : la composant de la diélectrique est donne par :

$$E_{p\text{-diélectrique}} = \frac{1}{2} \int_s (\mathbf{h}_p \{E\}^T [d]^T \{E\}) ds \quad (\text{II.62})$$

II.6.5 travaux pour une plaque piézoélectrique :

Pour le travail des efforts externes de piézoélectrique comporte deux parties lors les propriétés de ce matériau.[16]

$$T_{mecanique} + T_{electrique} \text{ (II.63)}$$

$$\mathbf{T}_{mecanique} = \int_v [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{F}\} dv + \int_s [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{f}\} ds + [\mathbf{U}]^T \{\mathbf{p}\} \text{ (II.67)}$$

$$\mathbf{T}_{electrique} = - \int_s \{\phi\}^T \{\mathbf{D}\} ds \text{ (II.68)}$$

Avec :

$\{\phi\}$: potentiel électrique.

$\{\mathbf{D}\}$: charge électrique surfacique.

II.7 plaques sandwich (multicouches) :

Prenant le cas d'un sandwich intégrant une couche centrale élastique (isotrope ou composite) entre sous deux couches piézoélectriques de même épaisseur (en rôle d'un actionneur ou capture).[27]

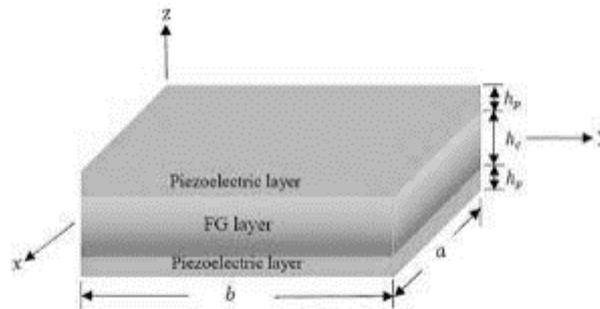


Figure II.9 : plaque sandwich piézoélectrique

On adopte les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de la couche centrale (l'âme) est plus élevée que celle des deux peaux (les sous couches piézoélectriques).
- Les déplacements de l'âme (u et v) suivant les directions x et z sont des fonctions linéaires de z .
- Le déplacement transverse (w) est indépendant de z , d'où la déformation ϵ_z est négligeable.[25]

II.7.1 Energie cinétique de sandwich

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_v \int_v \{\dot{u}\}^T \left([L_T]^T [L_T] - z([L_r]^T [L_T] + [L_T]^T [L_r]) + z^2([L_r]^T [L_r]) \right) dv \quad (\text{II.69})$$

En intégrant dans l'intervalle $[-\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2}]$ pour l'âme, et dans $[-\frac{h_c}{2} - h_p, -\frac{h_c}{2}]$ pour la couche piézoélectrique inférieure, et dans l'intervalle $[\frac{h_c}{2}, \frac{h_c}{2} + h_p]$ pour la couche piézoélectrique supérieure : [31]

$$E_c = \frac{1}{2} \int_s (\{\dot{u}\}^T [\bar{m}_s] \{\dot{u}\}) ds \quad (\text{II.70})$$

$$[\bar{m}_s] = \rho \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 + m_3 \end{bmatrix} \quad (\text{II.71})$$

Sachant que :

- $m_1 = \rho_c \cdot h_c + 2 \cdot \rho_p \cdot h_p$
- $m_2 = \rho_c \cdot h_c^3 / 12$
- $m_3 = \rho_p \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right)$

Ou :

- S : indice pour plaque sandwich.
- h_c : épaisseur du cœur (l'âme).
- h_p : épaisseur de la sous-couche piézoélectrique.

II.7.2 Energie potentielle de sandwich :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int_v (\{\varepsilon\}^T \{e\}^T [E] + \{E\}^T \{e\} \{\varepsilon\}) dv - \frac{1}{2} \int_v \{E\}^T [D] \{E\} dv \quad (\text{II.72})$$

$$= E_{p\text{-élastique}} - E_{p\text{-piezoélectrique}} - E_{p\text{-diélectrique}} \quad (\text{II.73})$$

Notamment qu'elle est du même forme que l'expression d'énergie potentielle d'un piézoélectrique dans un milieu continue, mais avec le rapport des trois sous couches. [31]

Pour la composante élastique :

$$E_{\text{élastique}} = \frac{1}{2} \int_s \{\alpha\}^T [H_m] \{\alpha\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{x^*\}^T [H_f] \{x^*\} ds + \frac{1}{2} \int_s \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} ds \quad (\text{II.74})$$

Ou :

$$[H_m] = H_c [C_{mf}]_{coeur} + 2 h_p [C_{mf}]_{piezo}$$

$$[H_f] = \frac{h_c^3}{2} [C_{mf}]_{coeur} + \frac{2}{3} \left(\left(\frac{h_c}{2} + h_p \right)^3 - \left(\frac{h_c}{2} \right)^3 \right) [C_{mf}]_{piezo}$$

$$[H_c] = K \cdot h_c [C_c]_{coeur}$$

Pour la composante piézoélectrique :

C'est le rapport que des deux sous-couches piézoélectriques, et c'est donne par :

$$\mathbf{E}_{p\text{-piezoelectrique}} = \frac{1}{2} \int_s 2 \mathbf{h}_p (\{\alpha\}^T [\mathbf{e}_{mf}]^T \{\mathbf{E}\} + \{\mathbf{E}\}^T [\mathbf{e}_{mf}]^T \{\alpha\}) ds \quad (\mathbf{II.75})$$

Pour la partie diélectrique :

La même remarque :

$$\mathbf{E}_{p\text{-dielectrique}} = \frac{1}{2} \int_s 2 \mathbf{h}_p (\{E\}^T [d]^T \{E\}) ds (\mathbf{II.76})$$

II.7.3 travaux des efforts extérieurs :

Le travail des efforts externes comporte aussi deux parties, une mécanique et l'autre électrique

$$T = T_{mechanique} + T_{electrique} (\mathbf{II.77})$$

Pour la première composante :

$$\mathbf{T}_{mechanique} = \int_v [U]^T \{F\} dv + \int_s [U]^T \{f\} ds + [U]^T \{p\} \quad (\mathbf{II.78})$$

La deuxième :

$$\mathbf{T}_{electrique} = - \int_s \{\phi\}^T \{D\} ds (\mathbf{II.79})$$

II.8. Conclusion :

Ce chapitre a abordé les équations nécessaires pour étudier le comportement d'une plaque élastique isotrope, composite et piézoélectrique même si sandwich piézoélectrique et les énergies cinétiques et potentielles, et le travail des efforts externes mécaniques et électriques, et le prochaine chapitre traite du concept des élément finis qui détermine les matrices élémentaires de system à l'aide de ces équations précédentes.

Chapitre III discrétisation en élément finit

III.1 Introduction

Le principe fondamental de l'élément finit est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple les déplacements en mécanique), alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par une grandeur physique (les déplacements aux extrémités des ressorts pour l'exemple choisi) en des points particuliers, appelés nœuds dans le cadre de la MEF. En mécanique, la MEF permet (lorsqu'elle est utilisée de manière éclairée) de dimensionner ou de calculer la résistance mécanique des pièces, assemblages et structures de manière très précise. [28]

III.2 Choix du modèle :

Le choix d'élément est en fonction de la précision voulue, de la nature du problème et aussi du temps disponible, et parmi les types des élément finis on choisira un élément rectangulaire bidimensionnel à quatre nœuds avec 5 degrés de liberté, car suite à une recherche sur le domaine ce type d'éléments est très utilisé pour le traitement des problèmes de plaques (isotropes, orthotropes et anisotropes). [28]

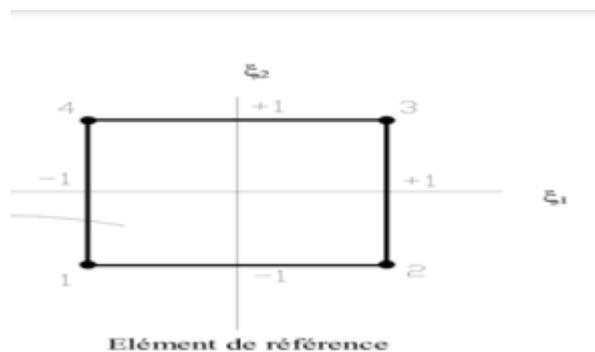


Figure III.1 élément finit à quatre nœuds de cellule de tisse

III.3 Représentation de la géométrie

On a opté pour un élément de plaque quadrilatère iso paramétrique bidimensionnel avec quatre nœuds (interpolation linéaire) et 5 degrés de liberté (3 déplacements u v w et 2 rotations θ_x et θ_y) à chaque nœud (chaque élément réel a un élément de référence). [29]

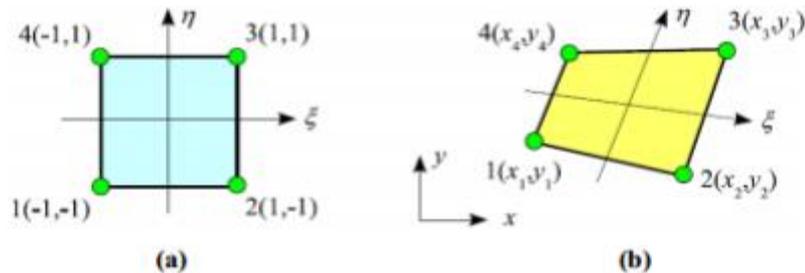


Figure III.2 a) éléments de référence b) élément réelle

III.4 Fonction d'interpolation

$$u = \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot v_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot w_i \text{ (III.1)}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{x_i}$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^{nn} N_i \cdot \theta_{y_i}$$

Où :

N_i : fonctions d'interpolation

nn : nombre de nœuds par élément

Pour un élément rectangulaire à quatre nœuds, la matrice de la fonction est donnée par :

$$[N] = [G].[C]^{-1} = [N_1 N_2 N_3 N_4] \quad \text{(III.2)}$$

$$[C] = 1/16 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(III.3)}$$

$$\text{Où : } [G] = [1 \ \xi \eta \ \eta \xi] \quad \text{(III.4)}$$

$$\text{On a donc } \begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad \text{(III.4)}$$

En suit on va les réorganiser sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ \omega \\ \theta x \\ \theta y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \\ \theta x_i \\ \theta y_i \end{Bmatrix} \quad \text{(III.5)}$$

$$\{u\} = [N_u]\{\bar{u}\} \quad \text{(III.6)}$$

Où : u vecteur de déplacement nodaux

Cette matrice permet notamment de transformer des intégrales exprimées sur un élément fini réelle en leur équivalent sur un autre élément d'élément de référence

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

$$D' \text{ où } \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\det[J(\xi, \eta)] = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} > 0$$

Donc l'élément réel et l'élément de référence sont positif puisqu'ils sont dans le même sens

[J] : matrice Jacobéenne (2x2) de la transformation des coordonnées cartésiennes aux coordonnées naturelle, et inversement.

L'utilisation des coordonnées naturelles simplifie le domaine sur lequel les intégrales sont définies, et les éléments de surfaces sont exprimées par

$$Dds = dx \cdot dy = [J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

(ξ_i, η_i) sont les coordonnées de nœud i^e de l'élément de référence on déduit

$$N_{J=}(\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = J \\ 0 & \text{si } i \neq J \end{cases}$$

Pour les couches de matériau piézoélectrique, il existe des degrés de liberté supplémentaires à chaque nœud représentant un potentiel électrique.

En supposant que le potentiel à la surface de la couche piézoélectrique est constant, le potentiel d'interpolation est : $\{\phi\} = [N_{\phi}] \cdot \{\bar{\phi}_i\} = [I] \cdot \{\bar{\phi}\}$ (III.7)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{nn} \begin{bmatrix} N_{\phi i} & 0 & 0 \\ 0 & N_{\phi i} & 0 \\ 0 & 0 & N_{\phi i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\phi}_i \end{bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

$\{\phi\}$: vecteur de potentiel électrique

$\{\bar{\phi}\}$: vecteur de potentiel électrique nœdaux

$[N_{\phi}] = [I]$: matrice d'interpolation

III.5 approximations de solution

En instruisant des expressions d'interpolation nodale pour obtenir les expression approximative et discret d'énergie

III.5.1 Approximations de l'Energie cinétique sur un éléments :

On prend l'expression (II.54) et la dérive de la relation : $\{u\} = [N_u]\{\bar{u}\}$

On obtient :

$$\{\dot{u}\} = [N_u]\{\dot{\bar{u}}\} \text{ (III.9)}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int \{\dot{U}\}^t [\dot{U}] ds = \frac{1}{2} \int [\dot{\bar{u}}]^t [N_u]^t [\bar{m}_s] [N_u] \{\dot{u}\} ds \text{ (III.10)}$$

III .5.2 approximations de l'énergie potentielle sur un élément :

L'énergie potentielle pour une plaque sandwich piézoélectrique est compose de trois parties

$$E_p = E_{p\text{-elastique}} - E_{p\text{-piezoelectrique}} - E_{p\text{-dielectrique}} \text{ (III.11)}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T [c] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T [e] \{\varepsilon\} dv + \frac{1}{2} \{E\}^T [e] \{\varepsilon\} dv - \frac{1}{2} \{E\}^T [D] \{E\} dv \text{ (III.12)}$$

III .5.2.1 Energie potentielle élastique

En substituant les expressions des approximations des relation (II.73) (II.74) (III.10)

$$E_p = \frac{1}{2} \int \{\bar{u}\}^T ([N_u]^T [D_{um}]^T [H_m] [N_u] + [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_f] [D_{uf}] [N_u] - [N_u]^T [D_{um}]^T [H_{mf}] [D_{uf}] [N_u] - [N_u]^T [D_{uf}]^T [H_{mf}] [D_{um}] [N_u] + [N_u]^T [D_{uc}]^T [H_C] [D_{uc}] [N_u] \{\bar{U}\} ds) \text{ (III.13)}$$

III .5.2.2 Energie potentielle piézoélectrique

En substituant les expressions d'approximation des relation (II.73) (III.7)

$$E_p = \frac{1}{2} \int 2. H_p \{\bar{U}\}^T ([N_u]^T [D_{um}]^T [e_{mf}]^T [D_\phi] [N_\phi] ds \frac{1}{2} \int 2. h_p \{\bar{\phi}\}^T ([D_\phi]^T [N_\phi]^T [e_{mf}]^T [[N_u][D_{um}]) \{\bar{U}\} ds \quad (\text{III.14})$$

III 5.2.3 énergie potentielle diélectrique

D'après l'expression (II.76) et en substituant les expressions des approximations de la relation (III.7)

$$E_p = \frac{1}{2} (2h_p) \int \{\bar{\phi}\}^T [N_\phi]^T [D_\phi]^T [d] [D_\phi] [N_\phi] \{\bar{\phi}\} ds \quad (\text{III.15})$$

III.5.3 travaille des forces extérieures pour le sandwich

Il y a deux parties dans ce travaille l'une est électrique et l'autre et mécanique

III .5.3.1 mécaniques

On prend cette relation de travail électrique tenant compte de la relation $\{u\} = [N_u] \{\bar{u}\}$

$$T_{mecanique} = \int (h_c + 2h_p) \{\bar{u}\}^T [N_U]^T \{F_V\} dv + \int \{\bar{u}\}^T [N_U]^T \{F_S\} ds + \{\bar{u}\}^T + [N_u]^T \{P\} \quad (\text{III.16})$$

Fv et Fs sont des forces volumiques et surfacique

III.5.3.2 électrique

$$T_{electrique} = \int \{\bar{\phi}\}^T [N_\phi]^T [D] ds \quad (\text{III.17})$$

III.6 matrice élémentaire de rigidité (sandwich piézoélectrique)

L'Energie potentielle d'une plaque sandwich piézoélectrique comporte trois partie un élastique et l'autre piézoélectrique et la troisième diélectrique :

III.6.1 matrices de rigidité élastiquée

L'Energie potentiel de la relation (III.13) et réécrit sous la forme suivante

$$E_{elastique} = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K_{UU}]_{ele} \{\bar{u}\} \quad (\text{III.18})$$

Par identification entre la relation (III.13)

(III.18) on obtient [30]

$$\begin{aligned}
[K_{UU}]_{ele} = & \sum_i h_i \int s [N_u]^T [D_{um}]^T [C_{mf}] [D_{um}] [N_u] ds \\
& + \sum_i \left(\frac{h_i^2}{12} + z_i h_i \right) \int s [N_u]^T [D_{uf}]^T [C_{mf}] [D_{uf}] [N_u] ds \\
& - \sum_i (z_i h_i) \int s [N_u]^T [D_{um}]^T [C_{mf}] [D_{uf}] [N_u] ds \quad (\text{III.19}) \\
& - \sum_i z_i h_i \int s [N_u]^T [D_{uf}]^T [C_{mf}] [D_{um}] [N_u] ds \\
& + \sum_i (k h_i) \int s [N_u]^T [D_{uc}]^T [C_c] [D_{uc}] [N_u] ds
\end{aligned}$$

III.6.2 matrices de rigidité piézoélectrique

Cette partie représente le couplage électromécanique on écrit l'expression (III.14) sous la forme

$$E_{piezoelectrique} = \frac{1}{2} \overline{\{u\}}^T [K_{U\phi}]_{ele} \overline{\{\phi\}}^T [K_{\phi u}]_{ele} \overline{\{u\}} \quad (\text{III.20})$$

Par identification on a (30)

$$\begin{aligned}
[K_{U\phi}]_{ele} = & - \sum_i h_i \int s [N_u]^T [D_{um}]^T [e_{mf}] [D_{\phi}] [N_{\phi}] ds \\
& - \sum_i z_i h_i \int s [N_u]^T [D_{uf}]^T [e_{mf}] [D_{\phi}] [N_{\phi}] ds \quad (\text{III.21})
\end{aligned}$$

$[K_{U\phi}]_{ele} = [K_{\phi u}]_{ele}^T$ est la composante de la matrice de rigidité du au couplage piézoélectrique

III.6.3 matrices de rigidité diélectrique

Cette matrice représente l'effet de la partie électrique de l'Energie par identification de la relation $\{\sigma.\}^k = \overline{\{Q\}} \{\varepsilon.\}^k$ avec l'expression suivante

$$E_{dielectrique} = \frac{1}{2} \overline{\{\phi\}}^T [K_{\phi\phi}]_{ele} \overline{\{\phi\}} \quad (\text{III.22})$$

On obtienne :

$$[K_{\phi\phi}]_{ele} = - \sum_i h_i \int s [N_{\phi}]^T [D_{\phi}]^T [d] [D_{\phi}] [N_{\phi}] ds \quad (\text{III.23})$$

Avec toutes les composantes on aura la matrice de rigidité élémentaire d'une plaque sandwich piézoélectrique

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{ele} \quad (\text{III.24})$$

Les équations du mouvement de la structure :

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & k_{\phi\phi} \end{bmatrix}_{ele} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

{F} : vecteur de de force extérieures

{Q} : vecteur de charge électrique

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre on a utilisé les éléments finit pour l'approximation de l'énergie sur un élément de manière très précise pour permet d'obtenir la matrice globale et les équations du mouvement et pour discrétiser le milieu.

IV. Analyse d'un sandwich piézoélectrique :

IV.1 introduction:

Afin de faire une analyse d'une plaque sandwich piézoélectrique, il est nécessaire d'aborder le traitement des équations de mouvement qui imposent son comportement dynamique.

Cela se fait par faire l'analyse modale et dynamique de la structure puis introduisant des formules pour atténuer les vibrations dans les modes capteur et actionneur.

IV.2. Analyse modèle :

En résolvant l'équation de mouvement régissant le comportement des structures, En résolvant l'équation de mouvement régissant le comportement des structures, pour une plaque monocouche ou plaque sandwich, on peut obtenir la réponse modale et dynamique.

L'analyse modale caractérise la vibration libre d'une structure, et permet de déterminer les fréquences propres de vibrations (valeurs propres) et les déformées modales (vecteurs propres) de cette structure.

L'analyse modale d'une plaque piézoélectrique peut suivre les mêmes étapes que celles pour une plaque purement isotrope à quelques détails près. Donc, si aucune force externe n'est appliquée sur la structure, l'équation de mouvement se réduit à :[30]

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.1)}$$

La solution est écrite sous la forme suivante :

$$\{u(t)\} = \{\psi\}e^{j\omega t} \quad \text{(IV.2)}$$

Et

$$\{\phi(t)\} = \{\varphi\}e^{j\omega t} \quad \text{(IV.3)}$$

Où :

ω : valeur propre.

$\{\varphi\}$ et $\{\psi\}$: les vecteurs propres.

Substituant ces expressions dans la première relation, on obtient l'équation caractéristique du problème aux valeurs propres suivant :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

D'où :

$$\left(\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \psi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

Cette équation peut être séparée en deux parties, une partie élastique et l'autre électrique présenté comme suit :[16]

$$[K_{uu}]\{\psi\} + [K_{u\phi}]\{\varphi\} - \omega^2 [M]\{\psi\} = \{0\} \quad (\text{IV.6})$$

Et

$$[K_{\phi u}]\{\psi\} + [K_{\phi\phi}]\{\varphi\} = \{0\} \quad (\text{IV.7})$$

IV.3. Analyse dynamique :

Cette analyse permet l'étude des vibrations d'une structure sous chargement externe, et l'équation de mouvement d'une plaque sandwich piézoélectrique est donnée par :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{\phi u} & K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Les éléments piézoélectriques peuvent être utilisés soit comme capteur (effet direct), ou autant qu'actionneur (effet inverse). Dépendant de leur utilisation, les conditions aux limites électriques sont différentes.[36]

IV.4 excitations par actionneur piézoélectrique (mode actionneur) :

Dans ce cas, il n'y a que des actionneurs sur la plaque sandwich, donc le vecteur potentiel ($\{\phi\} \neq 0$) est connu. La composante d'excitation de l'actionneur est alors transférée du même côté du vecteur force. L'équation du mouvement (IV.8) devient :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} = \{F_u\} - [K_{u\phi}]\{\phi_a\} \quad (\text{IV.9})$$

IV.5 résolution par la méthode de Newmark :

La méthode de Newmark est une technique d'intégration numérique utilisée pour résoudre certaines équations différentielles, notamment dans l'analyse dynamique des structures et des solides, comme dans l'analyse par éléments finis pour modéliser des systèmes dynamiques.[37]

Principe :

On considère la forme générale de l'équation de la dynamique :

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = f(t) \quad \text{(IV.10)}$$

En cas de déplacement ($u=x(t)$) :

$$[M] \{a\} + [C] \{v\} + [K] \{u\} = \{f(t)\} \quad \text{(IV.11)}$$

En cas d'actionneur a la statique :

$$[K] \{u\} = \{f(t)\} \quad \text{(IV.12.a)}$$

$$[K_{uu}]\{u\} = \{F_u\} - [K_{u\phi}]\{\phi_a\} \quad \text{(IV.12.b)}$$

Dans laquelle M est la matrice de masse, K la matrice de rigidité, et C un éventuel opérateur d'amortissement.

Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant t à partir des mêmes grandeurs à l'instant t- Δ t. Ce développement contient un terme d'erreur du troisième ordre proportionnel à la dérivée de l'accélération. Diverses hypothèses permettent de remplacer cette dérivée troisième par l'accélération au temps précédent en introduisant deux paramètres γ et β, on peut écrire le schéma correctif suivant :

$$\begin{aligned} x_t &= x_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{x}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{x}_{t-\Delta t} + 2\beta\ddot{x}_t] \\ \dot{x}_t &= \dot{x}_{t-\Delta t} + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{x}_{t-\Delta t} + \gamma\ddot{x}_t] \end{aligned} \quad \text{(IV.13)}$$

Dans la première équation, on exprime \ddot{x}_t , puis de la second \dot{x}_t , en fonction de Δx , $\dot{x}_{t-\Delta t}$, $\ddot{x}_{t-\Delta t}$.

Des deux paramètres dépendent les propriétés de l'algorithme, en particulier la stabilité et son caractère implicite ou explicite.

Une méthode est dite explicite quand les déplacements au pas de temps t dépendent explicitement des variables au pas de temps t- Δt (c'est le cas lorsque $\beta=0$). Les méthodes implicites font dépendre le déplacement au pas de temps t des vitesses à ce même pas de temps.[37]

Domaine	Stabilité
$\gamma \leq 1/2$	Instable
$1/2 \leq \gamma$ Et $2\beta \leq \gamma$	Conditionnellement stable
$1/2 \leq \gamma \leq 2\beta$	Inconditionnellement stable

Tableau IV.1 : domaine et sa stabilité

Les vecteurs de déplacements, vitesses et accélérations à l'instant t. Pour résoudre numériquement cette équation, la méthode des éléments finis, Hughes [38], permet de discrétiser le modèle physique et de le transformer en un problème numérique qui sera résolu par l'utilisation d'un schéma d'intégration en temps. La méthode de Newmark [39] parue en 1959 et également appelée la méthode de Stormer et Cowell dans Curnier [40], reste parmi les méthodes d'intégration en temps les plus utilisées de nos jours, et a subi plusieurs améliorations et modifications au cours du temps.

Le temps est discrétisé en pas de tailles ΔT . t_n représente la valeur du temps au pas n, et ainsi $t_{n+1} = t_n + \Delta T$ sera le temps au pas n + 1. L'expression des déplacements, basée sur un développement en série de Taylor [37], s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= u_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}] \\
 v_{n+1} &= v_n + \Delta t [(1 - \gamma)a_n + \gamma a_{n+1}]
 \end{aligned}
 \tag{IV.14}$$

IV.6 contrôle active de vibration :

Le contrôle actif des vibrations a pour but de réduire le niveau des vibrations dans une structure mécanique donnée, en intégrant des actionneurs et des capteurs directement dans la structure. La démarche la plus courante est la suivante : le capteur mesure une caractéristique de la structure (force, position, vitesse, etc.). Cette mesure est ensuite traitée par un correcteur (par Feedback ou Feed for Ward), qui génère un signal transmis à l'actionneur, qui crée ainsi une force qui s'oppose à la vibration en contre-réaction. De telles structures instrumentées sont appelées Structures Intelligentes, ou Smart Structures en anglais.

Ce type de contrôle est dit actif car il nécessite généralement un apport d'énergie pour être mis en place, contrairement au contrôle passif de vibrations qui s'appuie purement sur les propriétés mécaniques de la structure pour rejeter les vibrations (ajout d'amortisseurs dans la structure, traitements de surface...). Ces deux approches ne s'opposent pas, et peuvent être mises en place conjointement. Des démarches de contrôle actif de vibrations ont été mises en place avec succès par plusieurs chercheurs, sur différents types de structures mécaniques, comme des poutres, des plaques ou encore des coques. De nombreuses recherches ont également été faites sur les différents types d'actionneurs et capteurs que l'on peut intégrer dans les structures : les matériaux piézo-électriques sont les plus utilisés.[41]

IV.7 conclusion :

Ce chapitre clarifie certaines des ambiguïtés et des équations de mouvement qui déterminent le comportement d'une plaque sandwich (Notamment que l'analyse modelé et le contrôle de vibration en mode actionneur et capture et on a exposé les formules et l'algorithme à exécuter) Qui doivent être comprises afin d'aborder l'application et la discussion.

Chapitre V : Applications et discussion

V.1.Introduction :

L'analyse de plusieurs types de plaques fera l'objet de ce chapitre. Donc plusieurs applications sont traitées, commençant d'une plaque isotrope, au composite arrivant au sandwich piézoélectrique (représentant une structure intelligente). Les résultats concerneront l'analyse modale et le contrôle de déflexion des plaques.

V.2 logiciel de calcul Ansys :

ANSYS est un logiciel multiphysique de simulation numérique. Grâce aux outils d'analyse par éléments finis (Finit Elément Analysais, FEA) , il peut traiter les problèmes de calcul de structures complexes.

V.2.1 plaque élastique isotrope monocouche :

Pour se familiarise avec l'logiciel Ansys, on va en premier lieu traiter un cas très simple qui concerne une plaque isotrope élastique simplement appuyée sur les quatre cotés (AAAA), de dimensions $A*B*h$ ($A=2000\text{mm}$, $B=1500\text{mm}$ et $h=10\text{mm}$), avec les propriétés mécaniques suivantes : [1]

$E=200\text{GPa}$, $\rho=7800\text{kg/m}^3$, $\nu=0.3$

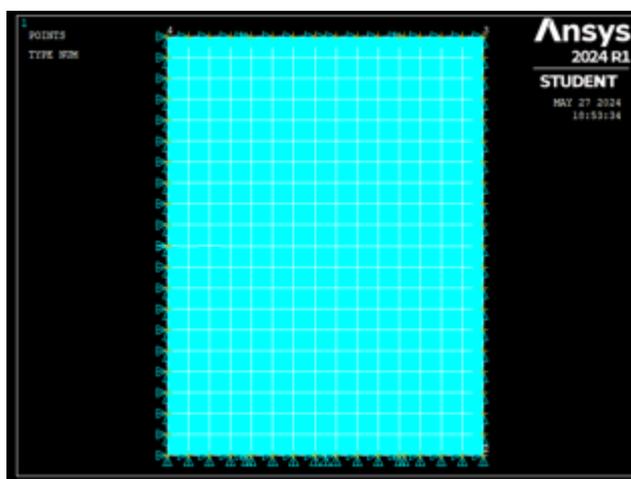


Figure V.1 plaque isotrope monocouche (AAAA)

Les résultats de l'analyse modale, et les fréquences propres de la plaque (AAAA) sont présentées dans le tableau V.1 :

Set	Résultat en (HZ)	Ezzraimi [16]	Déférence
Mode 1	16.769	16.75	0.01%
Mode 2	35.038	35,88	0.07%

Tableau V.1 : les trois premières fréquences propres de la plaque (AAAA)

On compare nos résultats avec les résultats de ezzraimi [16], d'après les résultats les fréquence sont très proches et la déférence maximale est a 1% , donc les résultats sont juste.

V.2.2. Plaque composite élastique orthotrope :

Maintenant on va traiter un autre cas plus complexe qui concerne une plaque composite en graphite-époxy (T300/976), de séquence d'empilement de plies (- 45/45/-45/45), d'épaisseur de 0.25mm chacune, de dimensions A*B (A=200mm et B=200 mm). La plaque est encastrée d'un seule coté et libre des trois autres (ELLL), de propriétés mécaniques :

$E_{11}=150\text{GPa}$ $E_{22}, E_{33}=9\text{GPa}$ $G_{12}= G_{13}= 7.1 \text{ GPA}$ $G_{23}=2.5\text{Gpa}$ $V_{12}=V_{23}=V_{13}=0.3$
 $p=1600 \text{ Kg/m}^3$

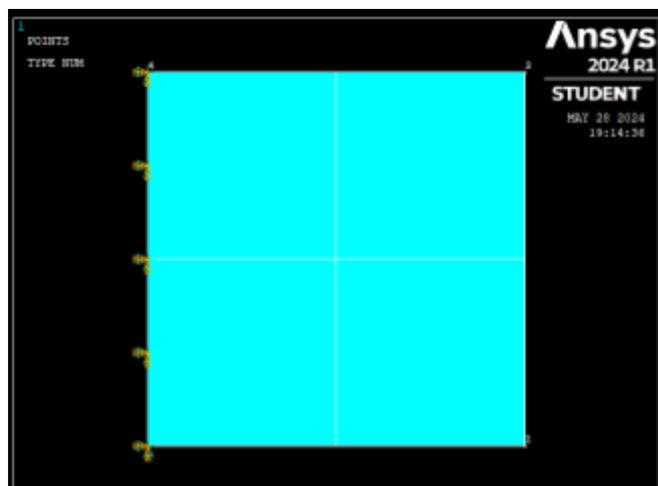


Figure V.2 plaque composite orthotrope (ELLL)



Figure V.3 : les couches et les orientations de la plaque

Les résultats de la fréquence propre de la plaque (ELLL) ce présente dans le tableau V.2:

SET	Résultats en (HZ)	Article [30]	Déférence %
Mode 1	19.719	21.4657	1.8%
Mode 2	68.47	63.3491	4.6%

Tableau V.2 : les trois premières fréquences propres de la plaque

Après la comparaison de nos résultats avec l'article [30] on remarque que les fréquences sont très proches, et la déférence maximale est inferieure à 5%, donc les résultats sont proche.

V.2.3 Etude de l'influence des conditions aux limites :

On prend la même plaque composite mais avec des conditions aux limite différentes, simplement appuyé sur les quatre cotes (AAAA) , Les fréquences propres de la plaque (ELLL) sont présentées dans le tableau V.3:

SET	[AAAA] en (HZ)	[ELLL]
Mode 1	145.498	19.719
Mode 2	339.78	68.47

Tableau V.3 : les trois premières fréquence propre de la plaque (AAAA) et (ELLL)

D'après les résultats des deux plaque (AAAA) et (ELLLL) on remarque que les fréquence propre de la plaque (AAAA) augmentent de presque six fois que la plaque (ELLL) ce qui fait que la plaque aux condition limite (AAAA) est plus rigide que la première plaque (ELLL).

V.2.5 Plaque anisotrope piézoélectrique :

On va étudier l'effet piézoélectrique utilisant le logiciel ANSYS pour un cas qui concerne une plaque anisotropie piézoélectrique (PZTG1195N) encastéré d'un seul côté avec de démentions A*B (200*200mm) et épaisseur $h_p=0.1\text{mm}$ et d'une masse volumique égale à 7600 kg/m^3 .

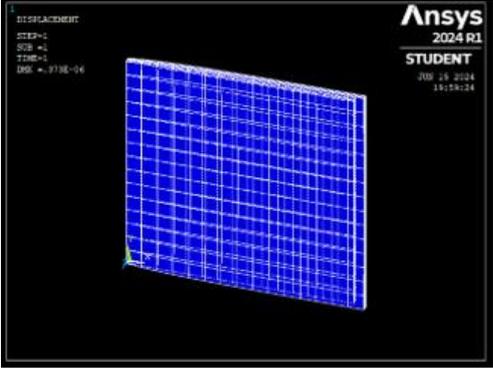
Les caractéristiques du matériau sont présentées dans le tableau suivant ;

Propriétés		PZT G1195N
Module de Young en GPa	E_{11}	63
	$E_{22}=E_{33}$	63
Coefficients de Poisson	ν_{23}	0.3
	$\nu_{13}=\nu_{12}$	0.3
Module de cisaillement (GPa)	$G_{12}=G_{13}$	24.2
	G_{23}	24.2
Masse volumique (Kg/m ³)	P	7600
Constantes piézoélectriques (m/V)	$e_{31}=e_{32}$	254 10 ⁻¹²
Permittivité électrique (F/m)	$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}$	15.3x10 ⁻⁹
	ϵ_{33}	15x10 ⁻⁹

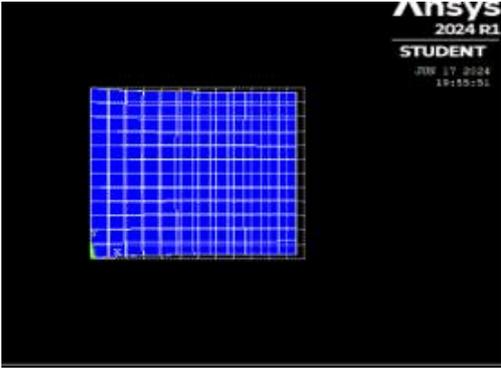
Tableau V.4 : propriété de matériaux piézoélectrique

On a effectué deux cas, le premier est d'appliquer deux une tension électrique de 50 v sur la surface supérieure de la plaque piézoélectrique et 0 v sur sa surface inferieur, ce qu'on a appelé polarisation 01, et le cas oppose est la polarisation 02. Les résultats des applications en ANSYS sont les suivants ;

Plaque charger à 30v dans les deux polarisations :



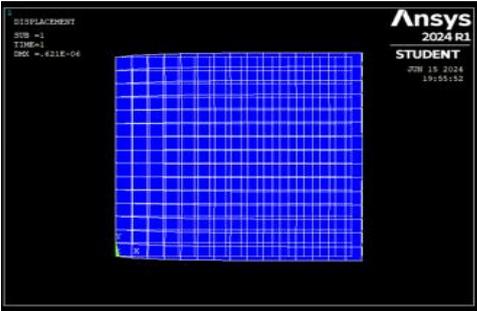
Le premier cas 1



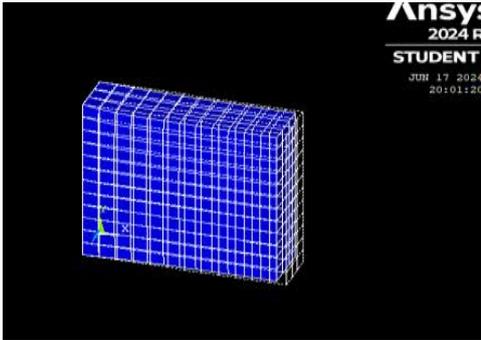
le deuxième cas 2

Figure V.4 : l'allongement et restressé de la plaque charger à 30 v

Plaque charger à 50 v dans les deux polarisations :



Le premier cas 1



le deuxième cas 2

Figure V.5 : l'allongement et restressé de la plaque charger à 50 v

Voltage / polarisation	Résultat pour le cas 1 (m)	Résultat pour le cas 2 (m)
30v	$0.373 \cdot 10^{-6}$	$0.373 \cdot 10^{-6}$
50v	$0.62 \cdot 10^{-6}$	$0.62 \cdot 10^{-6}$
100v	$0.124 \cdot 10^{-5}$	$0.124 \cdot 10^{-5}$

Tableau V.5 : déplacements de la plaque avec différent voltage

D'après cette solution on voit que quand le voltage augmente la déflexion augmente. Les résultats sont les même pour le voltage en polarité inverse.

On remarque qu'il y'a allongement de la plaque pour la polarisation 1, et un rétrécissement pour la polarisation 2.

V.2.6 Plaque piézoélectrique sandwich

On va traiter une plaque sandwich de dimensions $a \cdot b$ ($200 \cdot 200 \text{mm}^2$) avec une couche centrale (cœur) en composite (graphite-époxy T300/976) d'une épaisseur totale de h ($h=1 \text{mm}$), avec deux sous-couches piézoélectriques (PZTG1195N) d'épaisseur h_p chacune ($h_p=0.1 \text{mm}$)

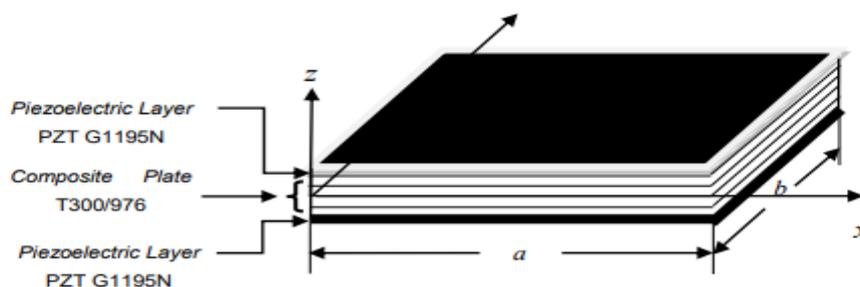


Figure V.6 : plaque sandwich piézoélectrique

Dans ce cas les deux ces couches sont present comme actionneur, on va introduire des tensions sur les deux surface inferieur et supérieure, Les caractéristiques des deux matériaux sont présentes dans le tableau suivant (Tab V.6).

Propriétés	PZT G1195N	T300/976	
Modules de Young (GPa)	E_{11}	63.0	150
	$E_{22} = E_{33}$	63.0	9
Coefficients de Poisson	ν_{23}	0.3	0.3
	$\nu_{12} = \nu_{13}$	0.3	0.3
Module de cisaillement (GPa)	$G_{12} = G_{13}$	24.2	7.1
	G_{23}	24.2	2.5
Masse volumique (Kg/m ³)	ρ	7600	1600
Constantes piézoélectriques (m/V)			
	$d_{31} = d_{32}$	$254 \cdot 10^{-12}$	
Permittivité électrique (F/m)	$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$	$15.3 \cdot 10^{-9}$	
	ϵ_{33}	$15.0 \cdot 10^{-9}$	

Tableau V.6 : Les caractéristiques des deux matériaux

Pour 100 PA de charge mécanique et sans une tension 0v :

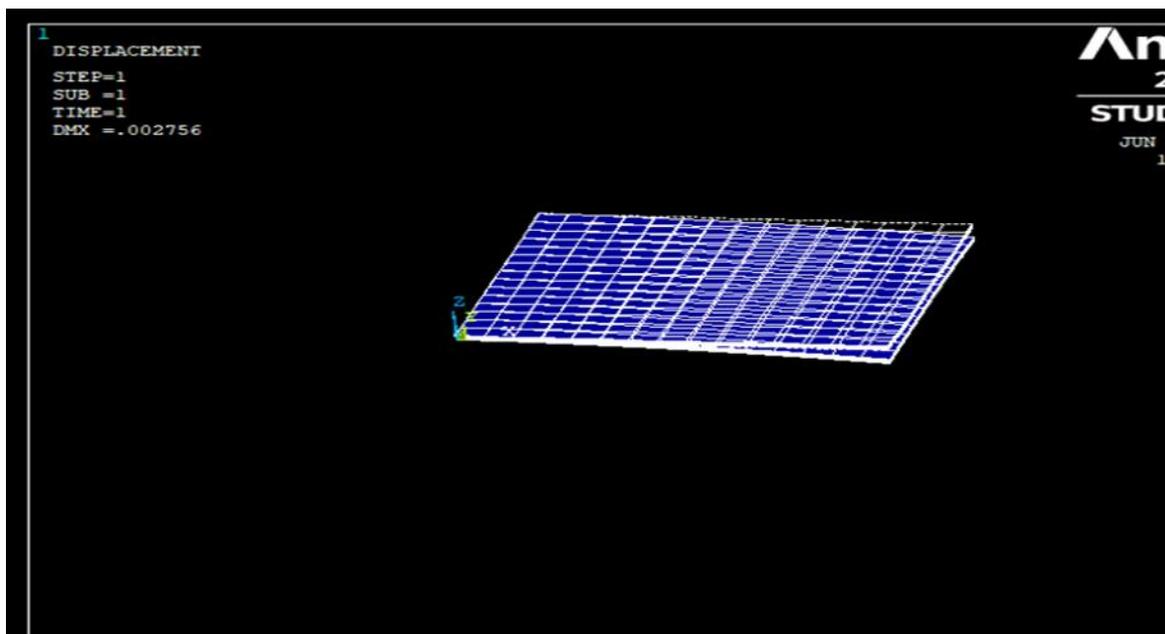


Figure V.7 : déformation de la plaque à 100 Pa et 0v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 50 v la plaque fléchisse de 0.002756 m (2.75 mm).

Pour 100 PA de charge mécanique et une tension 30v :

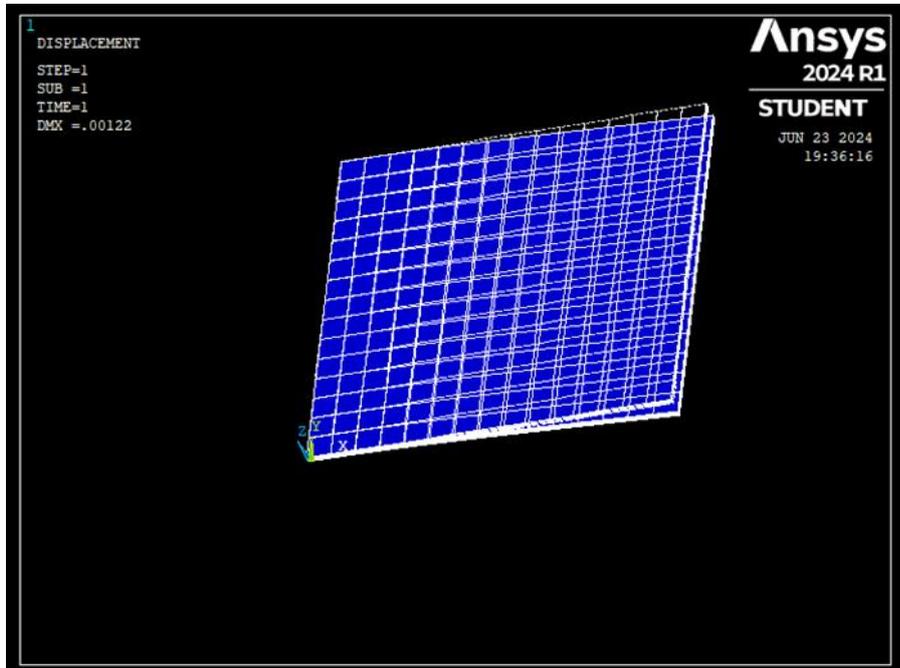


Figure V.8 : déformation de la plaque a 100 Pa et 30v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 30 v la plaque fléchisse de 0.00122 m (1.22mm)

Pour 100 PA de charge mécanique et une tension électrique 50 v :

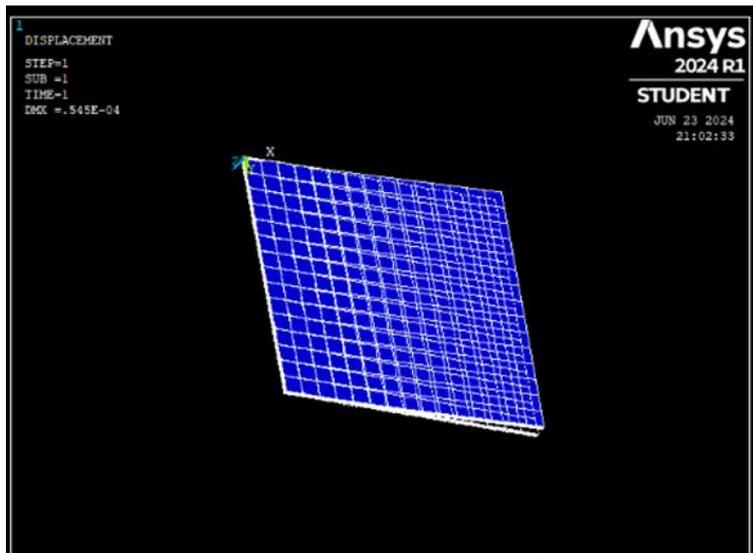


Figure V.9 : déformation de la plaque à 100 Pa et 50v

A une charge de 100 Pa et sans tension électrique la plaque subit fléchisse de $0.56 \cdot 10^{-4}$ m (0.056 mm)

Dans l'exemple précédent (plaque piézoélectrique monocouche) la plaque s'allonge ou rétrécisse, mais avec le sandwich ou on a deux sous couches piézoélectriques des deux côtés de la plaque mais de polarisation opposée, alors on obtient un effet de flexion.

Les résultats de la flexion se trouve dans le tableau V.7 :

Voltage	Résultat	Dr. ezzraimi [16]
0v +100 Pa	2.7 mm	2.7 mm
30 + 100 Pa	1.2 mm	1.2mm
50+100 Pa	0.05 mm	0.05

Tableau V.7 : déformation de la plaque avec différent voltage

Après la comparaison de nos résultats avec la référence [16], on remarque que les résultats sont très proches qui confirme et valide les résultats.

Dans les résultats on remarque que la déflexion maximale est à 2.75mm sous l'effet de la charge mécanique seulement et sans une tension électrique, après avoir appliqué une tension électrique les actionneurs ont atténué la flèche a une valeur acceptable 0.05mm.

V.2.6.1 Plaque sandwich (AAAA)

Avec la même structure et les mêmes données, on va suivre les étapes précédentes mais avec des conditions aux limite différentes, c'est appuis simplement sur les quatre cotés.:

Avec une charge mécanique de 100 PA et 0 v



Figure V.10 : déflexion de la plaque a 100 pa et 0v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 0 v la plaque fléchisse de $0.606 \cdot 10^{-4}$ m (0.0606 mm).

Avec une charge de 100 Pa et une tension de 5v :



Figure V.11: déflexion de la plaque à 100 Pa et 5v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 5 v la plaque fléchisse de $0.249 \cdot 10^{-4}$ m (0.0249 mm).

Avec une charge mécanique de 100 PA et 8v

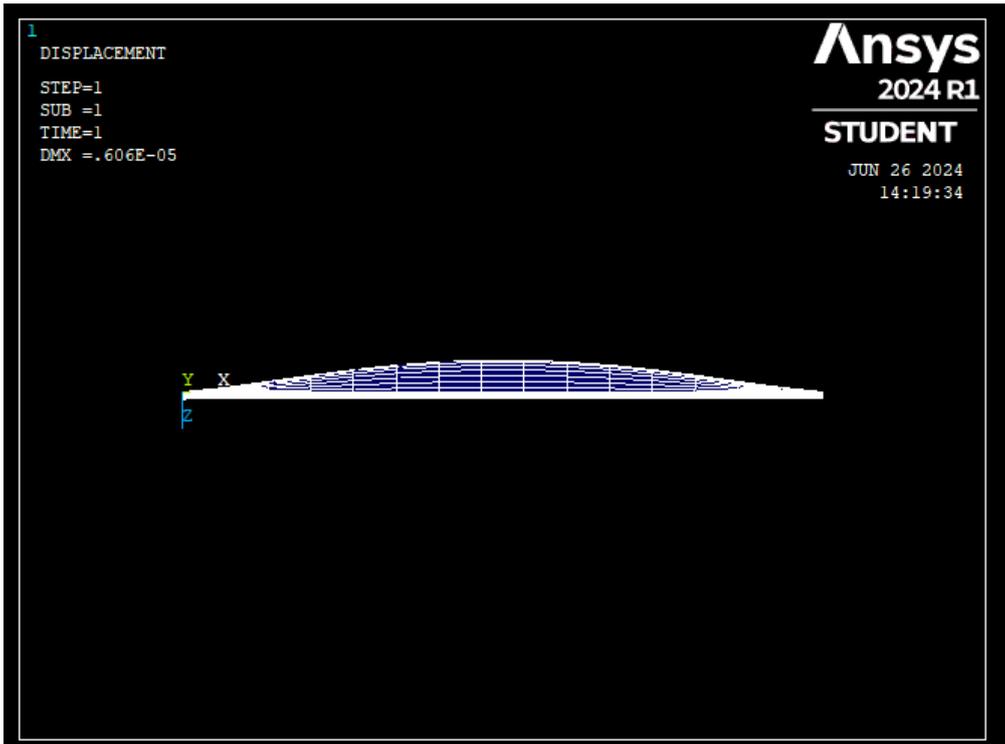


Figure V.12: déflexion de la plaque à 100 Pa et 8v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 8 v la plaque fléchisse de $0.606 \cdot 10^{-5}$ m (0.00606 mm).

Avec une charge mécanique de 100 PA et 10 v

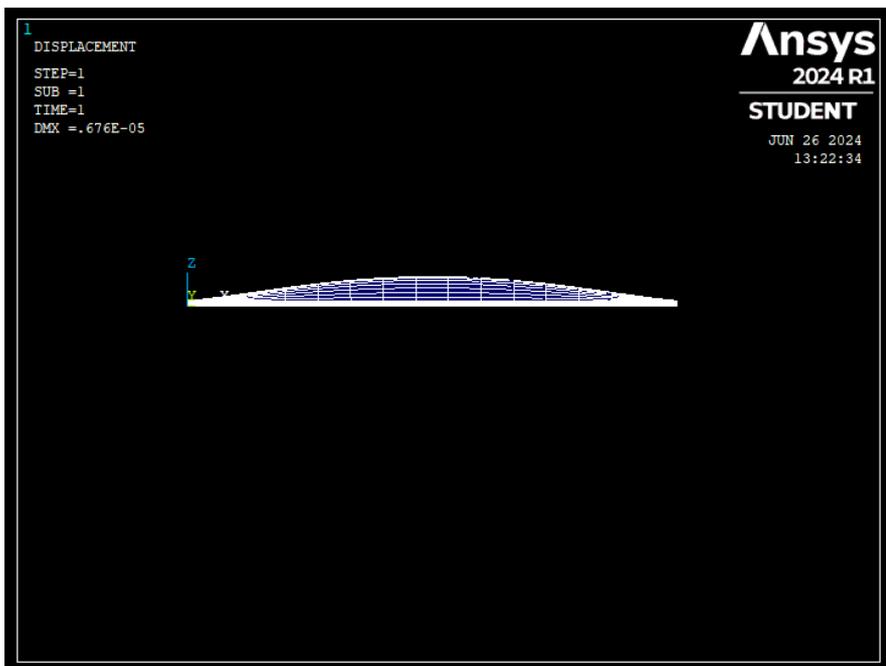


Figure V.13: déflexion de la plaque a 100 Pa et 10v

A une charge de 100 Pa et une tension électrique de 10v la plaque fléchisse de $0.676 \cdot 10^{-5}$ m (0.0067 mm).

Voltage + La charge	Résultat (mm)	[Dr. ezzraimi]
100PA +0V	0.06	0.06
100PA +5V	0.02	0.02
100PA +8V	0.006	0.007
100PA +10V	0.0067	0.008

La déflexion maximale est de 0.06mm sous la charge mécanique seulement puis les actionneurs on réduit à 0.006mm pour une valeur du potentiel appliqué de 8 v

Avec des conditions aux limites différentes (ELL, AAA) la déflexion maximale de la première est de 2.7mm et avec la deuxième est de 0.0606 c'est à cause de l'augmentation de la rigidité .

v.3 Conclusion :

Dans ce chapitre on a expliqué l'effet de la piézoélectrique monocouche par une simulation de l'logicielle ANSYS qui est différente d'une plaque sandwich la première allonge ou retrisse et la deuxième se fléchit vers le bas ou haute, et le rôle de l'actionneur et d'atténuer la déflexion.

Conclusion generale :

Le travail présenté consiste à développer un modèle d'éléments finis pour une plaque sandwich intégrant des éléments piézoélectriques. J'ai choisi d'étudier les vibrations dans mon travail car elles sont omniprésentes dans de nombreuses applications industrielles et techniques, où leur contrôle est crucial pour la performance et la durabilité des structures. De plus, les vibrations peuvent causer des défaillances matérielles et réduire la précision des instruments sensibles, ce qui rend essentiel le développement de solutions efficaces pour leur atténuation. Ce modèle, caractéristique des structures intelligentes, permet un contrôle statique et actif des vibrations. Après avoir détaillé les principes fondamentaux des matériaux piézoélectriques, des structures intelligentes et du contrôle actif des vibrations, nous avons élaboré une équation basée sur les hypothèses de Mindlin et Kirchhoff pour décrire le comportement des plaques en matériaux élastiques isotropes ou composites avec des éléments piézoélectriques. Le logiciel ANSYS a été employé pour modéliser ces structures dans diverses configurations. L'intégration des éléments piézoélectriques pour l'atténuation des vibrations a présenté des défis, nécessitant une familiarisation progressive avec le logiciel. Nous avons ainsi débuté par une analyse modale de plaques isotropes et composites monocouches sans éléments piézoélectriques, puis avec des éléments piézoélectriques pour illustrer l'effet piézoélectrique inverse. Pour le sandwich composite, soumis à différents chargements mécaniques et électriques, nous avons observé une atténuation progressive de la déflexion avec l'augmentation de la tension appliquée.

Reference bibliographies

- [1] Benjeddou, A. Recent advances in hybrid active-passive vibration control (submitted). *J. Vib. Control*, 1999.
- [2] Inman, D.J. and Lam, M.J. Active constrained layer damping treatments. In Ferguson, N.S., Wolfe, H.F., and Mei, C., eds., 6 th Int. Conf. on Recent Advances in Struct. Dyn., Southampton (UK), vol. 1, pp. 1–20, 1997.
- [3] Lesieutre, G.A. and Lee, U. A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics. *Smart Mater. Struct.*, 5(5) :615–627, 1996.
- [4] Marcelo AREIAS TRINDADE thèse de doctorat CONTROLE HYBRIDE ACTIF–PASSIF DES ^ VIBRATIONS DE STRUCTURES PAR DES MATERIAUX ' PIEZO ' ELECTRIQUES ET VISCO ' ELASTIQUES : ' POUTRES SANDWICH/MULTICOUCHES INTELLIGENTES ,2000
- [5] Bandyopadhyay B., Manjunath T.C., Umapathy M., "Modeling, Control and Implementation of Smart Structures", Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (2007).
- [6] BOUDAUD H., "Modélisation de l'amortissement actif-passif des structures sandwichs", Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz, (2007).
- [7] : Mei, B. Z., J. I. Scheinbeim, and B. A. Newman. "The ferroelectric behavior of oddnumbered nylons." *Ferroelectrics* 144.1 (1993)
- [8] : Su, J., J. S. Harrison, and T. St Clair. "Novel polymeric elastomers for actuation." ISAF 2000. Proceedings of the 2000 12th IEEE International Symposium on Applications of Ferroelectrics (IEEE Cat. No. 00CH37076). Vol. 2. IEEE, 2000.
- [9] E. DEFAÿ, Thèse de doctorat. Université de Lyon, (1999)
- [10] Crawley, E.F. and deLuis, J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures. *AIAA J.*, 25(10) :1373–1385, 1987.
- [11] Ha, S.K., Keilers, C., and Chang, F.-K. Finite element analysis of composite structures containing distributed piezoceramic sensors and actuators. *AIAA J.*, 30(3) :772–780, 1992.
- [12] Hagood, N.W., Chung, W.H., and von Flotow, A. Modelling of piezoelectric actuator dynamics for active structural control. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 1(7) :327–354, 1990
- [13] Herman Shen, M.-H. Analysis of beams containing piezoelectric sensors and actuators. *Smart Mater. Struct.*, 3(4) :439–447, 1994
- [14] Im, S. and Atluri, S.N. Effects of a piezo-actuator on a finitely deformed beam subjected to general loading. *AIAA J.*, 27(12) :1801–1807, 1989

- [15] Yang, S.M. and Lee, Y.J. Interaction of structure vibration and piezoelectric actuation. Smart Mater. Struct., 3(4) :494–500, 1994.
- [16] Ezzraimi Madjid thèse de doctorat « développement d'un algorithme de contrôle actif des vibrations avec prise », en compte du couplage fluide-structure, 2018/2019.
- [17] Florence Zara hal open science Modèle mécanique d'une plaque mince : 2017
- [18] Guillaume Bourgeois projet de physique p6stpi : Déformation d'une plaque : 2019
- [19] article: Kirchhoff-Love plate theory, note: The Einstein summation convention of summing on repeated indices is used below.
- [20] Jean-Louis Batoz, « modélisation des structures par éléments finis », volume 2, Poutres et plaques
- [21] REISSNER.E, «the effect of the transverse shear deformation on the bending of elastic plates». J. Appl. Mech, vol.12 pages 62/77 en 1945
- [22] Laurent Gornet Hal open science 'Généralités sur les matériaux composites ; 2008
- [23] DJEBLOUN Youcef thèse de doctorat « Comportement élastique des matériaux composites » université du Biskra en 2004
- [24] Laroze, S., Barraud JJ, « Mécanique des structures. Tome 4, Calcul des structures en matériaux composites », Eyrolles, Masson, Paris. 1987
- [25] Chedid Houda, thèse de doctorat « analyse dynamique des paques minces et épaisses application aux matériaux homogènes et non homogènes>>Université de Constantine
- [26] Mme Tahi Wassila these mmoire : Contribution au développement et la modélisation des micro-transformateurs : 2023
- [27] jean marie Berthelot, mécanique des matériaux et structures composites, 23 octobre 2012 , France
- [28] Lionel GENDRE thèse de doctorat Introduction à la simulation par éléments finis3>> université paris-SACLAY 10/01/2013
- [29] Yves Debard thèse de Master « Méthode des éléments finis élasticité plane » en 2011
- [30] Madjid EZZRAIMI, Rachid TIBERKAK, Abdelkader MELBOUS, Said RECHAK, “ LQR and PID Algorithms for Vibration Control of Piezoelectric Composite Plates”, MECHANIKA, Volume 24 (5) : 734-740, (2018).
- [31] omari yasmine nirak fatima thèse de master «utilisation des élément piézoélectrique pour l'alunation des vibration» 2019/2020
- [32] kara abde el karim daoudi ilhem thèse de master «analyse en mode actionneur des plaques composites piézoélectriques» 2018/2019
- [33] derbane said thèse de doctorat «modélisation des plaque par la méthode des éléments finis, chapitre 2 : théorie des plaques » 2012

- [34] merhbaoui ibtissem thèse de master «étude d'une plaque soumis à la flexion par la méthode des éléments finis » 2020 /2021
- [35]c. . Nadal. « Contribution à la conception et la modélisation transformateurs piézoélectriques dédiés à la génération de plasma », thèse de doctorat, Université de Toulouse, France, 2011.
- [36] Julien DUCARNE « Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés» F :4.28 .Soutenance de thèse Conservatoire National des Arts et Métiers, Le 27 Mars 2009 `a 10h30, Amphithéâtre Gaston Planté, 2 rue Conté, Paris
- [37] David Ryckelynck Centre des Matériaux, Mines ParisTech master «SCHEMAS D'INTEGRATION TEMPORELLE POUR LES'EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE»
- [38] T. Hughes, The Finite Element Method, Prentice Hall, 1987.
- [39] N. Newmark, A method of computation for structural dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division (ASCE) 85 (1959) 67–94.
- [40] A. Curnier, Méthodes numériques en mécanique des solides, Presses polytechniques et universitaires Romandes, ISBN 2-88074-247-1, 1993.
- [41] Sharma, Kumar, Vaish et Chauhan, « Lead-free piezoelectric materials' performance in structural active vibration control », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*.
- [42] Le principe de Hamilton | Description, Example & Application (your-physicist.com)
- [43] mahai noureddine fakher khiera Application d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour l'étude de la flexion des plaques composites stratifié universite iben khaldun tiaret