

Jacques RENAULT

TECHNIQUES  
MATHÉMATIQUES  
DE LA PHYSIQUE

*l'intègre*

PRÉPAS SCIENTIFIQUES

DUNOD

# TABLE DES MATIÈRES

*Avant-propos*

*XVII*

## I - NOTIONS DE BASE

### MISE AU POINT DES ACQUIS ANTÉRIEURS

1

#### *1. Calculs élémentaires sur les nombres réels et les nombres complexes*

3

1. Opérations élémentaires sur les réels ou les complexes

3

2. Identités remarquables

5

3. Rappel des définitions sur les nombres complexes

5

4. L'équation du second degré dans  $\mathbb{R}$  et dans  $\mathbb{C}$

9

5. Somme de progressions et formules diverses

10

#### *2. Rappels de géométrie I : droites, plans, triangles et cercles*

12

1. Objets de base

12

2. Quelques définitions et propriétés

13

3. Rappels sur les triangles	16
4. Rappels sur le cercle	22
<i>3. Rappels de géométrie II : coordonnées cartésiennes et calcul vectoriel</i>	24
1. Coordonnées cartésiennes et composantes d'un vecteur <b>AB</b>	25
2. Définition générale d'un vecteur dans l'espace ordinaire	29
3. Produit scalaire de deux vecteurs ; norme d'un vecteur	31
4. Produit vectoriel	33
5. Produit mixte de trois vecteurs	36
6. Changement de base par rotation dans le plan	38
7. Définition du barycentre d'un ensemble de points	40
8. Transformations géométriques et "raisons de symétrie"	41
<i>4. Rappels de géométrie III : coordonnées polaires, cylindriques et sphériques</i>	50
1. Coordonnées polaires dans le plan	50
2. Coordonnées cylindriques (ou semi-polaires) dans l'espace	52
3. Coordonnées sphériques	53
4. Notions sur les coordonnées curvilignes	57
<i>5. Rappels de géométrie analytique ; courbes, surfaces et volumes remarquables</i>	59
1. La droite dans le plan	60
2. La droite dans l'espace	62
3. Equation cartésienne d'un plan	62
4. Le cercle en coordonnées cartésiennes	64
5. La sphère dans l'espace en coordonnées cartésiennes	65
6. Notions sur les courbes dans le plan ou dans l'espace	65
7. Rappels sur les coniques	67
8. Surfaces et volumes remarquables	71
Exercices	71
<i>6. Rappels sur les fonctions réelles d'une variable réelle ; fonctions usuelles</i>	73
1. Notion de fonction ; dérivée	74
2. Un théorème important sur les fonctions continues	79
3. Dérivées successives d'une fonction ; classe d'une fonction	80
4. Fonctions réciproques ; fonctions composées	80
5. Fonctions usuelles en physique	82
6. Calcul pratique des dérivées ; dérivées des fonctions usuelles	91
<i>7. Rappels de trigonométrie ; formules sur les fonctions hyperboliques ou trigonométrie hyperbolique</i>	93
1. Rappel : le cercle trigonométrique et les fonctions trigonométriques	93

2. Formules de trigonométrie	96
3. Formules relatives aux fonctions hyperboliques	98
<b>8. Rappels d'analyse combinatoire</b>	101
1. Rappel des formules d'analyse combinatoire	101
2. Exemple de processus de Bernoulli	104
<b>II - COMPLÉMENTS D'ANALYSE</b>	
<b>LE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET LE CALCUL INTÉGRAL EN PHYSIQUE</b>	107
<b>9. Différentielle d'une fonction et petit accroissement ; découpage, intégrale simple et équation différentielle</b>	109
1. Différentielle d'une fonction et petit accroissement ; les points de vue du mathématicien et du physicien	110
2. Intégrale définie d'une fonction d'une variable	115
3. Formation d'une équation différentielle par "découpage"	121
<b>10. Développement limité d'une fonction d'une variable ; notions sur les développements en séries entières des fonctions réelles</b>	124
1. Définition d'un développement limité	125
2. Formule de Taylor-Lagrange et formule de Mac-Laurin	126
3. Développements limités des fonctions usuelles au voisinage de zéro	129
4. Remarques numériques ; formules approchées	131
5. Opérations sur les développements limités	132
6. Notions sur le développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle	133
Exercices	137
<b>11. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles ; fonctions implicites</b>	139
1. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles ; dérivées partielles et développements limités	140
2. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables et petits accroissements	148
3. Formes différentielles $P_1 dx + Q_1 dy$ ou $P dx + Q dy + R dz$	151
4. Fonctions implicites	155
5. Remarques sur les fonctions vectorielles de plusieurs variables	160
<b>12. Extensions de la notion d'intégrale définie ; dérivation sous le symbole d'intégration ; calcul pratique des intégrales simples</b>	161
1. Extensions de la notion d'intégrale définie	162
2. Dérivation sous le symbole d'intégration	166

3. Méthodes courantes pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$	167
4. Tableau des primitives usuelles	169
5. Quelques intégrales utiles en physique	172
<b>13. Intégrales multiples : intégrales doubles et intégrales triples</b>	<b>174</b>
1. Notion d'intégrale double	175
2. Notion d'intégrale triple ou intégrale de volume	181
3. Cas où le calcul d'une intégrale multiple se ramène au calcul du produit d'intégrales simples	185
4. Théorèmes de la moyenne	186
5. Utilisation des coordonnées polaires dans le plan, des coordonnées cylindriques ou sphériques dans l'espace	186
6. Remarques sur le changement de variables dans les intégrales multiples	189
<b>14. Calcul effectif des intégrales multiples ; surfaces, angles solides, volumes, barycentres</b>	<b>192</b>
1. Rappels	193
2. Calcul de surfaces	195
3. Notion d'angle solide	199
4. Calculs de volume	200
5. Barycentre d'une répartition volumique de masses	201
<b>15. Notions sur les équations différentielles</b>	<b>203</b>
1. La notion d'équation différentielle	204
2. Quelques résultats généraux	205
3. Solutions de quelques équations différentielles très courantes en mécanique et en électrocinétique	208
4. Quelques idées supplémentaires	211
5. Le comportement à long terme des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. La forme explicite du critère de Routh dans les cas usuels	214
6. Existence de méthodes numériques	217
<b>III - OSCILLATIONS ET ANALYSE DE FOURIER</b>	<b>219</b>
<b>16. Fonctions sinusoïdales du temps ; représentation complexe et fonction de transfert d'un système linéaire</b>	<b>221</b>
1. Les caractéristiques physiques d'une fonction sinusoïdale du temps	222
2. Représentation de Fresnel des grandeurs sinusoïdales	224
3. Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale	226

4. Système linéaire ; principe de superposition	230
5. Système linéaire en régime sinusoïdal permanent : fonction de transfert	232
6. Remarque sur la représentation complexe d'une onde scalaire ou vectorielle	233
Exercices	234
<b>17. Séries de Fourier et transformation de Fourier</b>	<b>236</b>
1. Introduction qualitative ; problèmes posés	237
2. Théorème de Fourier ; séries de Fourier	238
3. Exemples de séries de Fourier	240
4. Analyse de Fourier ; synthèse de Fourier	242
5. Transformation de Fourier à une dimension	245
6. Rôle de la transformation de Fourier en physique. Notions sur la transformation de Fourier des fonctions de plusieurs variables	249
 <b>IV - THÉORIE DES CHAMPS</b>	
<b>OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES</b>	<b>251</b>
<b>18. Notions générales sur la théorie des champs</b>	<b>253</b>
1. Champ scalaire, champ de vecteurs	253
2. Circulation d'un champ de vecteurs	257
3. Flux d'un champ de vecteurs	259
4. Retour sur la notion d'angle solide	263
<b>19. Les opérateurs différentiels</b>	<b>266</b>
1. Rappels sur les fonctions de plusieurs variables	267
2. Définition des opérateurs différentiels	267
3. Les deux théorèmes fondamentaux	271
4. L'interprétation physique des opérateurs	276
5. Champs particuliers : champ de gradient, champ de rotationnel	279
6. Formules diverses, autres systèmes de coordonnées	283
7. Définition d'un champ de vecteurs pour les équations locales	289
Exercices	294
<b>20. Notions sur les équations aux dérivées partielles</b>	<b>296</b>
1. Généralités	297
2. Quelques solutions de l'équation de Laplace $\Delta V = 0$	297
3. Equation de la diffusion	299
4. Equation de la chaleur	301
5. L'équation d'onde à une dimension	302

6. Recherche d'une solution d'une équation aux dérivées partielles sous forme d'ondes planes sinusoïdales	304
7. Existence de méthodes numériques	306
<b>V - APPLICATIONS DU CALCUL MATRICIEL</b>	<b>307</b>
21. <i>Rappels sur les matrices</i>	309
1. Définitions	309
2. Opérations sur les matrices	311
3. Les matrices carrées	313
4. Déterminant d'une matrice carrée	316
5. Deux applications du calcul des déterminants : inverse d'une matrice carrée régulière et rang d'une matrice	319
22. <i>Quelques applications du calcul matriciel en physique</i>	323
1. Résolution d'un système d'équations linéaires ; formules de Cramer et remarques diverses	324
2. Matrice de changement de base	328
3. Transformation de Galilée, transformation de Lorentz	334
4. Effet d'un changement de base sur la matrice associée à une application linéaire d'un espace vectoriel sur lui-même	337
5. Matrice de transfert d'un quadripôle électrocinétique linéaire	341
6. Exemples d'oscillateurs couplés en mécanique	342
Exercice	346
<b>VI - NOTIONS SUR LES PROBABILITÉS</b>	<b>347</b>
23. <i>Quelques notions sur les probabilités, les variables aléatoires et l'exploitation statistique d'une série de mesures</i>	349
1. Epreuve aléatoire ; événements élémentaires	350
2. But du calcul des probabilités	350
3. Notion de variable aléatoire ; espérance et écart-type	353
4. Exemples de variables aléatoires	357
5. Loi des grands nombres	359
6. Mesure répétée d'une grandeur ; exploitation statistique d'une série de mesures : estimation et intervalle de confiance	359
<b>VII - INTRODUCTION AUX MÉTHODES NUMÉRIQUES</b>	<b>365</b>
24. <i>Introduction aux méthodes numériques : racine d'équations, calcul d'intégrales, équations différentielles et calcul de dérivées</i>	365

---

1. Introduction : notion d'ordre d'une méthode numérique à pas constant	366
2. Recherche d'une racine d'équation par bisection	367
3. Méthodes de calcul d'intégrales simples	369
4. Intégration numérique des équations différentielles : problème à une dimension	372
5. Intégration numérique des équations différentielles : problème à deux dimensions	378
6. Calcul numérique des dérivées et des dérivées partielles	378
7. Remarque sur la résolution numérique d'une équation aux dérivées partielles	381
8. Remarque finale sur les développements limités	381
<i>Appendice 1. Les opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes orthogonales</i>	387
1. Rappel sur les coordonnées curvilignes	387
2. Base locale ; coordonnées curvilignes orthogonales	388
3. Déplacements élémentaires en coordonnées curvilignes orthogonales	388
4. Les opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes orthogonales	389
<i>Appendice 2. Champs de vecteurs irrotationnels à circulation</i>	391
1. Champ de vecteur irrotationnel dans un domaine simplement connexe	391
2. Cas d'un domaine non simplement connexe	392
<i>Appendice 3. Notion d'élément de volume dans un milieu continu</i>	394
<i>Appendice 4. Fini, infini, continu et équations différentielles de la physique selon Boltzmann</i>	395
<i>Bibliographie</i>	398
<i>Index</i>	401

Ce livre présente, sous une forme compacte, les nombreux résultats de mathématiques nécessaires à l'étudiant du 1<sup>er</sup> cycle universitaire ou des classes préparatoires pour comprendre le cours de physique et résoudre les exercices. Ces résultats sont de trois types :

- soit des résultats acquis dans les classes secondaires (en géométrie élémentaire en particulier) et qui sont rarement rappelés ensuite ;
- soit des résultats introduits rigoureusement dans le cours de mathématiques mais dont la mise en œuvre, dans un contexte physique, pose souvent des problèmes réels aux étudiants ;
- soit enfin des notions de mathématiques que le physicien introduit "au coup par coup" et qui sont disséminées dans le cours.

En rassemblant toutes ces notions dans un même livre, en regroupant de nombreux résultats sous forme de tableaux, en proposant quelques exercices particulièrement démonstratifs, l'objectif est de fournir aux étudiants un ouvrage efficace, complet et de consultation aisée et rapide.

*Jacques Renault* est professeur en mathématiques spéciales M' au Lycée du Parc à Lyon. Il est auteur ou coauteur de plusieurs ouvrages d'enseignement.

*J'intègre* c'est un objectif qui a donné son nom à une collection d'ouvrages d'entraînement pour les classes préparatoires aux grandes écoles.

Cette collection qui se décline pour les prépas commerciales, les prépas scientifiques et les langues comprend trois types de livres : des *manuels* pour l'acquisition des connaissances fondamentales, des livres *d'exercices et d'annales* régulièrement mis à jour pour la maîtrise des connaissances, et des séries de *QCM* pour l'évaluation et l'entraînement individuels.

Couverture : L'atelier Cerce



Code 042144  
ISBN 2 10 002144 3

