

**GRANVILLE, SMITH et LONGLEY**

ÉLÉMENTS DE CALCUL

DIFFÉRENTIEL

ET

INTÉGRAL

**VUIBERT**

# TABLE DES MATIÈRES

## CALCUL DIFFÉRENTIEL

	Pages
CHAPITRE PREMIER. — FORMULES .....	1
<p style="margin-left: 2em;">Formules d'algèbre et de géométrie élémentaires, 1. Formules de trigonométrie plane, 2. Formules de géométrie analytique plane, 4. Formules de géométrie analytique dans l'espace, 6. Alphabet grec, 8.</p>	
CHAPITRE II. — VARIABLES, FONCTIONS ET LIMITES.....	9
<p style="margin-left: 2em;">Variables et constantes, 9. Intervalles d'une variable, 9. Variation continue, 10. Fonctions, 10. Variables dépendantes et indépendantes 10. Notations relatives aux fonctions, 11. Exclusion de la division par zéro, 11. Graphique (ou graphe) d'une fonction; continuité, 13. Valeur limite d'une variable, 14. Valeur limite d'une fonction, 15. Théorèmes relatifs aux limites, 15. Fonctions continues et fonctions discontinues, 16. Infini (<math>\infty</math>), 18. Infiniment petits, 21. Théorèmes relatifs aux infiniment petits et aux limites, 21.</p>	
CHAPITRE III. — DÉRIVATION.....	24
<p style="margin-left: 2em;">Introduction, 24. Accroissements, 24. Comparaison des accroissements, 25. Dérivée d'une fonction d'une variable, 26. Symboles relatifs aux dérivées, 27. Fonctions dérivables, 29. Règle générale de dérivation, 29. Interprétation géométrique de la dérivée, 31.</p>	
CHAPITRE IV. — RÈGLES DE DÉRIVATION DES FORMES ALGÈBRIQUES .....	35
<p style="margin-left: 2em;">Importance de la Règle générale, 35. Dérivée d'une constante, 36. Dérivée d'une variable par rapport à elle-même, 36. Dérivée d'une somme, 37. Dérivée du produit d'une fonction par une constante, 38. Dérivée du produit de deux fonctions, 38. Dérivée du produit de <math>n</math> fonctions, <math>n</math> étant un nombre fixe donné, 39. Dérivée d'une puissance, 39. Dérivée d'un quotient, 40. Dérivée d'une fonction de fonction, 45. Dérivées des fonctions inverses, 46. Fonctions implicites, 47. Dérivées des fonctions implicites, 48.</p>	

CHAPITRE V. — APPLICATIONS DIVERSES DES DÉRIVÉES.....	51
Direction d'une courbe, 51. Équations de la tangente et de la normale, sous-tangente et sous-normale, 53. Maximums et minimums d'une fonction, introduction, 57. Fonctions croissantes et fonctions décroissantes, règles, 62. Valeurs maximales et valeurs minimales d'une fonction; définitions, 63. Première méthode de détermination des valeurs maximales et minimales d'une fonction; règles, 66. Valeurs maximales et valeurs minimales quand $f'(x)$ devient infinie et que $f(x)$ est continue, 68. Applications des questions de maximum et de minimum, 71. Dérivée considérée comme taux de variation, 78. Vitesse dans un mouvement rectiligne, 81. Taux relatifs, 82.	
CHAPITRE VI. — DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET APPLICATIONS....	89
Définition des dérivées successives, 89. Dérivées successives des fonctions implicites, 90. Sens de la courbure d'une courbe, 92. Deuxième méthode pour l'étude des maximums et des minimums, 93. Points d'inflexion, 96. Tracé des courbes, 99. Accélération dans un mouvement rectiligne, 101.	
CHAPITRE VII. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRANSCENDANTES. APPLICATIONS .....	105
Formules relatives aux dérivées, deuxième liste, 105. Le nombre $e$ . Logarithmes naturels (ou népériens), 106. Fonction exponentielle et fonction logarithmique, 109. Dérivée d'un logarithme, 110. Dérivée de la fonction exponentielle simple, 111. Dérivée de la fonction exponentielle générale, 112. Dérivée logarithmique, 113. La fonction $\sin x$ , théorème, 118. Dérivée de $\sin v$ , 120. Dérivées des autres fonctions trigonométriques, 121. Fonction $\cos v$ , 122. Démonstration des formules XV-XIX, 122. Remarques, 123. Fonctions trigonométriques inverses, 126. Dérivée de arc $\sin v$ , 128. Dérivée de arc $\cos v$ , 129. Dérivée de arc $\operatorname{tg} v$ , 130. Dérivée de arc $\operatorname{cotg} v$ , 132. Dérivée de arc $\operatorname{séc} v$ et arc $\operatorname{coséc} v$ , 132. Dérivée de arc $\sin$ verse $v$ , 134.	
CHAPITRE VIII. — ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS POLAIRES, APPLICATIONS. RACINES DES ÉQUATIONS....	140
Équations paramétriques d'une courbe, pente, 140. Équations paramétriques, dérivée seconde, 145. Mouvement circulaire. Vitesse, 147. Mouvement circulaire. Composantes de l'accélération, 148. Coordonnées polaires, angle du rayon vecteur et de la tangente, 151. Sous-tangente et sous-normale polaires, 155. Racines réelles des équations. Méthodes graphiques, 158. Deuxième méthode de détermination des racines réelles, 159. Méthode de Newton, 162.	
CHAPITRE IX. — DIFFÉRENTIELLES.....	167
Introduction, 167. Définitions, 167. Valeurs approchées des accroissements au moyen des différentielles, 169. Calcul des erreurs, 169.	

CHAPITRE V. — APPLICATIONS DIVERSES DES DÉRIVÉES.....	51
Direction d'une courbe, 51. Équations de la tangente et de la normale, sous-tangente et sous-normale, 53. Maximums et minimums d'une fonction, introduction, 57. Fonctions croissantes et fonctions décroissantes, règles, 62. Valeurs maximales et valeurs minimales d'une fonction; définitions, 63. Première méthode de détermination des valeurs maximales et minimales d'une fonction; règles, 66. Valeurs maximales et valeurs minimales quand $f'(x)$ devient infinie et que $f(x)$ est continue, 68. Applications des questions de maximum et de minimum, 71. Dérivée considérée comme taux de variation, 78. Vitesse dans un mouvement rectiligne, 81. Taux relatifs, 82.	
CHAPITRE VI. — DÉRIVÉES SUCCESSIVES ET APPLICATIONS....	89
Définition des dérivées successives, 89. Dérivées successives des fonctions implicites, 90. Sens de la courbure d'une courbe, 92. Deuxième méthode pour l'étude des maximums et des minimums, 93. Points d'inflexion, 96. Tracé des courbes, 99. Accélération dans un mouvement rectiligne, 101.	
CHAPITRE VII. — DÉRIVÉES DES FONCTIONS TRANSCENDANTES. APPLICATIONS .....	105
Formules relatives aux dérivées, deuxième liste, 105. Le nombre $e$ . Logarithmes naturels (ou népériens), 106. Fonction exponentielle et fonction logarithmique, 109. Dérivée d'un logarithme, 110. Dérivée de la fonction exponentielle simple, 111. Dérivée de la fonction exponentielle générale, 112. Dérivée logarithmique, 113. La fonction $\sin x$ , théorème, 118. Dérivée de $\sin v$ , 120. Dérivées des autres fonctions trigonométriques, 121. Fonction $\cos v$ , 122. Démonstration des formules XV-XIX, 122. Remarques, 123. Fonctions trigonométriques inverses, 126. Dérivée de arc $\sin v$ , 128. Dérivée de arc $\cos v$ , 129. Dérivée de arc $\operatorname{tg} v$ , 130. Dérivées de arc $\operatorname{cotg} v$ , 132. Dérivée de arc $\operatorname{séc} v$ et arc $\operatorname{coséc} v$ , 132. Dérivée de arc $\sin$ verse $v$ , 134.	
CHAPITRE VIII. — ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES ET ÉQUATIONS POLAIRES, APPLICATIONS. RACINES DES ÉQUATIONS....	140
Équations paramétriques d'une courbe, pente, 140. Équations paramétriques, dérivée seconde, 145. Mouvement circulaire. Vitesse, 147. Mouvement circulaire. Composantes de l'accélération, 148. Coordonnées polaires, angle du rayon vecteur et de la tangente, 151. Sous-tangente et sous-normale polaires, 155. Racines réelles des équations. Méthodes graphiques, 158. Deuxième méthode de détermination des racines réelles, 159. Méthode de Newton, 162.	
CHAPITRE IX. — DIFFÉRENTIELLES.....	167
Introduction, 167. Définitions, 167. Valeurs approchées des accroissements au moyen des différentielles, 169. Calcul des erreurs, 169.	

Formules pour déterminer les différentielles des fonctions, 172. Différentielle d'un arc en coordonnées rectangulaires, 174. Différentielle d'un arc en coordonnées polaires, 176. Vitesse considérée comme taux de variation d'un arc, 179. Différentielles et infiniment petits, 179. Infiniment petits de divers ordres, 181. Différentielles d'ordre supérieur, 182.

CHAPITRE X. — COURBURE. RAYON ET CERCLE DE COURBURE... 183

Courbure, 183. Courbure d'un cercle, 184. Expression de la courbure en coordonnées rectangulaires, 184. Formule spéciale aux équations paramétriques, 186. Expression de la courbure en coordonnées polaires, 186. Rayon de courbure, 187. Ligne de chemin de fer et courbes de transition, 187. Cercle de courbure, 188. Centre de courbure, 192. Développées, 194. Propriétés des développées, 199. Développantes et leur construction mécanique, 201. Transformation des dérivées, 203.

CHAPITRE XI. — THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS ET SES APPLICATIONS..... 207

Théorème de Rolle, 207. Cercle osculateur, 208. Position limite du point d'intersection de deux normales voisines, 210. Théorème des accroissements finis, 211. Formes indéterminées, 213. Forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , 215. Forme indéterminée  $\frac{\infty}{\infty}$ , 218. Forme indéterminée  $0 \cdot \infty$ , 219. Forme indéterminée  $\infty - \infty$ , 219. Formes indéterminées  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ , 221. Extension du théorème des accroissements finis, 223. Maximums et minimums obtenus analytiquement, 224.

## CALCUL INTÉGRAL

CHAPITRE XII. — INTÉGRATIONS, RÈGLES, FORMULES..... 229

Intégration, 229. Constante d'intégration. Intégrale définie, 231. Règles pour l'intégration des formes élémentaires, 223. Formules (3), (4), (5), 236. Démonstrations de (6) et (7), 242. Démonstrations de (8) à (17), 243. Démonstrations de (18) à (21), 247. Démonstrations de (22) et (23), 256. Différentielles trigonométriques, 258.

Intégration d'expressions contenant  $\sqrt{a^2 - u^2}$  ou  $\sqrt{u^2 \pm a^2}$  par des substitutions trigonométriques, 267. Intégration par parties, 270. Remarques, 275.

CHAPITRE XIII. — CONSTANTE D'INTÉGRATION..... 278

Détermination de la constante d'intégration par les conditions initiales, 278. Signification géométrique de la constante d'intégration, 278. Signification physique de la constante d'intégration, 283.

CHAPITRE XIV. — L'INTÉGRALE DÉFINIE..... 288

Différentielle de l'aire sous une courbe, 288. L'intégrale définie, 289. Calcul d'une intégrale définie, 290. Changement des limites correspondant à un changement de variable, 291. Calcul d'aires, 293. Aire dans le cas d'équations paramétriques, 294. Représentation géométrique d'une intégrale, 298. Intégration approchée; méthode des trapèzes, 298. Règle de Simpson (paraboles), 301. Échange de limites, 304. Décomposition de l'intervalle d'intégration d'une intégrale définie, 304. L'intégrale définie comme fonction de ses limites, 305. Intégrales impropres; limites infinies, 305. Intégrales impropres; quand  $y = \varphi(x)$  est discontinue, 307.

CHAPITRE XV. — L'INTÉGRATION COMME PROCÉDÉ DE SOMMATION..... 311

Introduction, 311. Théorème fondamental du calcul intégral, 311. Démonstration analytique du théorème fondamental, 314. Aires des courbes planes; coordonnées rectangulaires, 316. Aires des courbes planes; coordonnées polaires, 321. Volumes de solides de révolution, 325. Longueur d'un arc de courbe, 333. Longueur des courbes planes; coordonnées rectangulaires, 334. Longueur des courbes planes; coordonnées polaires, 338. Aires des surfaces de révolution, 341. Solides dont les sections par des plans parallèles sont connues, 349.

CHAPITRE XVI. — PROCÉDÉS DIVERS D'INTÉGRATION..... 356

Introduction, 356. Intégration des fractions rationnelles, 356. Intégration par substitution; rationalisation, 364. Différentielles binômes, 368. Condition de rationalisation des différentielles binômes, 371. Transformation des différentielles trigonométriques, 372. Substitutions diverses, 375.

CHAPITRE XVII. — FORMULES DE RÉDUCTION. EMPLOI D'UNE TABLE D'INTÉGRALES..... 377

Introduction, 377. Formules de réduction des différentielles binômes, 377. Formules de réduction des différentielles trigonométriques, 383. Emploi d'une table d'intégrales, 387.

CHAPITRE XVIII. — CENTRES DE GRAVITÉ, PRESSION DANS LES FLUIDES ET AUTRES APPLICATIONS..... 392

Moments d'aire; centres de gravité géométrique, 392. Centre de gravité d'un solide de révolution, 396. Pression dans un fluide, 399. Notion de travail, 403. Valeur moyenne d'une fonction, 409.

# CALCUL DIFFÉRENTIEL ET CALCUL INTÉGRAL

<b>CHAPITRE XIX. — SÉRIES.....</b>	415
Définitions, 415. La série géométrique, 416. Séries convergentes et séries divergentes, 418. Théorèmes généraux, 419. Règles de comparaison, 420. Règle de d'Alembert, 424. Séries alternées, 426. Convergence absolue, 428. Résumé, 428. Séries entières, 431. Séries du binôme, 434. Autre exemple de séries entières, 436.	
<b>CHAPITRE XX. — DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DES FONCTIONS..</b>	439
Séries de Maclaurin, 439. Opérations sur les séries, 444. Dérivation et intégration des séries entières, 448. Formules approchées déduites des séries de Maclaurin, 451. Séries de Taylor, 452. Autre forme des séries de Taylor, 455. Formules approchées déduites des séries de Taylor, 456.	
<b>CHAPITRE XXI. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.</b>	460
Équations différentielles; ordre et degré, 460. Solutions des équations différentielles. Constantes d'intégration, 461. Vérification des solutions des équations différentielles, 462. Équations différentielles du premier ordre et du premier degré, 464. Deux types particuliers d'équations différentielles de plus haut degré, 474. Équations différentielles linéaires, du second ordre, à coefficients constants, 477. Applications. Intérêts composés, 488. Applications à certains problèmes de mécanique, 492. Équations différentielles linéaires du $n^{\text{ième}}$ ordre, à coefficients constants, 498.	
<b>CHAPITRE XXII. — FONCTIONS HYPERBOLIQUES.....</b>	506
Sinus et cosinus hyperboliques, 506. Autres types de fonctions hyperboliques, 507. Courbes 508. Fonctions hyperboliques de $c + \alpha$ , 509. Dérivées, 511. Relations avec l'hyperbole équilatère, 512. Fonctions hyperboliques inverses, 515. Dérivées ( <i>suite</i> ), 518. Ligne télégraphique, 521. Intégrales, 523. Intégrales ( <i>suite</i> ), 525. Gudermannien, 528. Carte de Mercator, 532. Relations entre les fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques, 535.	
<b>CHAPITRE XXIII. — DIFFÉRENTIATION PARTIELLE.....</b>	540
Fonctions de plusieurs variables. Continuité, 540. Dérivées partielles, 541. Interprétation géométrique des dérivées partielles, 543. Différentielle totale, 545. Valeur approchée de l'accroissement total. Petites erreurs, 549. Dérivée totale. Taux, 553. Changement de variables, 556. Dérivation des fonctions implicites, 557. Dérivées d'ordre plus élevé, 562.	

## CHAPITRE XXIV. — APPLICATIONS DES DÉRIVÉES PARTIELLES. 566

Enveloppe d'une famille de courbes, 566. Développées d'une courbe considérée comme l'enveloppe de ses normales, 570. Tangente et plan normal en un point d'une courbe gauche, 573. Longueur d'un arc de courbe gauche, 575. Normale et plan tangent en un point d'une surface, 577. Interprétation géométrique de la différentielle totale, 579. Autre forme de l'équation de la tangente et de celle du plan normal en un point d'une courbe gauche, 582. Formule des accroissements finis, 585. Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables, 586. Théorème de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables, 592.

## CHAPITRE XXV. — INTÉGRALES MULTIPLES..... 596

Intégration partielle et intégrations successives, 596. Intégrale double définie; interprétation géométrique, 597. Valeur d'une intégrale double définie au-dessous d'une région, S, 603. Aire plane considérée comme intégrale double définie; coordonnées rectangulaires, 604. Volume au-dessous d'une surface, 608. Indications relatives au calcul des intégrales doubles, 611. Moments d'aires et centres de gravité, 611. Théorème de Guldin, 612. Centre de pression, 615. Moment d'inertie d'une aire, 617. Moment d'inertie polaire, 620. Coordonnées polaires. Aires planes, 622. Problèmes utilisant les coordonnées polaires, 624. Méthode générale de calcul d'aires de surfaces gauches, 628. Volumes calculés au moyen d'intégrales triples, 633. Volumes calculés en utilisant les coordonnées cylindriques, 636.

## CHAPITRE XXVI. — COURBES DE RÉFÉRENCE..... 645

## CHAPITRE XXVII. — TABLES D'INTÉGRALES..... 652

Fonctions hyperboliques, tables..... 667

INDEX..... 671

رقم الجرد: 10543A  
رقم الفاتورة:  
التاريخ: 3.11.2016  
الأصل: DAN

