

NOUVELLE BIBLIOTHÈQUE
MATHÉMATIQUE

RACHED MNEIMNÉ

éléments de géo métrie

actions
de groupes

C A S S I N I

Table des Matières

Notations	xi
0 Actions de groupes	
0.1 Introduction	1
0.2 Quelques mots clés	2
0.3 Exemples fondamentaux	3
0.4 Premières manipulations	4
0.5 Aspect topologique	9
0.6 Aspect différentiel	11
0.7 Sous l'angle de la géométrie algébrique	12
0.8 Représentations linéaires	17
0.9 Produits semi-directs de groupes	23
0.10 Espaces symétriques	26
0.11 Exercices	27
0-A Le groupe quaternionique $\mathbb{H}_8$ et le groupe $SL(2, \mathbb{F}_3)$	
0-A.1 Introduction	81
0-A.2 Construction du groupe $\mathbb{H}_8$	82
0-A.3 Les matrices de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	83
0-A.4 Les groupes d'automorphismes de $\mathbb{H}_8$ et de $SL(2, \mathbb{F}_3)$	83
0-A.5 Structure des 2-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_3)$	86
0-A.6 Exercices	86
0-B Le birapport	
0-B.1 Introduction	121
0-B.2 Définition et premières propriétés	122
0-B.3 Action du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur le birapport	124
0-B.4 Expression classique du birapport	126
0-B.5 Une $\mathfrak{S}_4$ -compactification de $\mathbb{R} - \{0, 1, \infty\}$	127
0-B.6 Un peu de géométrie plane	131
0-B.7 La conique fondamentale	134
0-B.8 Involutions et groupe circulaire	138
0-B.9 Retour sur le birapport	145
0-B.10 Le complexe octaédral	149
0-B.11 Exercices	158
0-C Classes de similitude	
0-C.1 Introduction	181
0-C.2 Premières manipulations	184
0-C.3 Le cas $n = 8$	191
0-C.4 Les tableaux de Young	193
0-C.5 Le cône nilpotent	193
0-C.6 Réduite de Jordan, théorème de Jacobson-Morozov et représentations de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$	200

0-C.7	Le théorème de Jacobson-Morozov dans les algèbres de Lie semi-simples	212
0-C.8	Appendice 1 – Quadriques affines et classes de similitude dans $M(2, \mathbb{R})$	215
0-C.9	Appendice 2 – L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$	228
0-C.10	Appendice 3 – Scholie informatique pour orbites nilpotentes . . .	238
0-C.11	Exercices	246
	Bibliographie	303
	Index	305

L'auteur exprime avec ce livre une conception résolument novatrice de l'enseignement de la géométrie. Il affirme sa conviction que cet enseignement ne peut qu'évoluer dans le sens que son exposé indique : place grandissante donnée, dès le premier cycle, à la notion de groupes opérant ; nécessité de fournir à l'apprenti mathématicien des moyens nouveaux pour affronter la prolifération des connaissances et la complexité des nouvelles techniques ; priorité au travail de prospection et de réflexion à partir d'une « situation » donnée et abandon du traditionnel exposé magistral linéaire.

Rompant avec certaines classifications habituelles en mathématiques, R. Mneimné propose un parcours varié, guidé par la notion centrale de l'ouvrage : celle d'action de groupe. Du birapport aux groupes de Sylow, des triquadrangles harmoniques aux orbites nilpotentes, des groupes algébriques affines à la famille des sous-groupes de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ au grand complet, de la réduite de Jordan aux représentations de $sl(2, \mathbb{C})$, le lecteur n'apprendra pas seulement de belles mathématiques, il se convaincra de la vertu unifiante et organisatrice de l'idée de groupe opérant. Il se rendra compte, de surcroît, qu'en travaillant le corps du texte et ses plus de deux cents exercices, il a appris beaucoup d'algèbre linéaire et même de géométrie algébrique élémentaire.

Affranchi de toute contrainte de programme ou de niveau, l'auteur a réuni ici une matière suffisamment variée pour intéresser l'étudiant de maîtrise, l'agrégatif, le bon taupin, le futur chercheur, le professeur. Tous devraient trouver dans ce livre une note de bonheur mathématique. Si le « principe de symétrie » est une des sources de la beauté, les actions de groupes sont une des façons savantes de parler de cette symétrie, et de mieux la comprendre.

F
il a r
quin
tali
est
l'Un

	
9 782842 250034	
ELEMENTS DE GEOMETRIE	
98042	
01542	191098
0001	

1
4
X
3

temps assistant à l'E.N.S. de Saint-Cloud où
ation à l'agrégation, accompagnant ainsi une
sont sortis de nombreux mathématiciens de
stard d'un ouvrage sur les groupes de Lie qui
est actuellement maître de conférences à
erot.

C A S S I N I

Graphisme : Massin

ISBN 2-84225-003-6



9 782842 250034