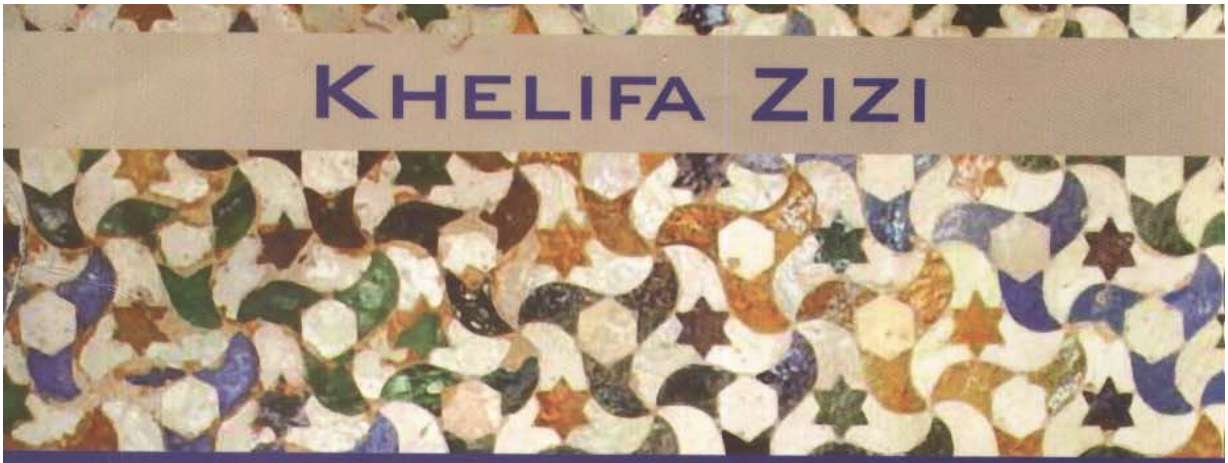
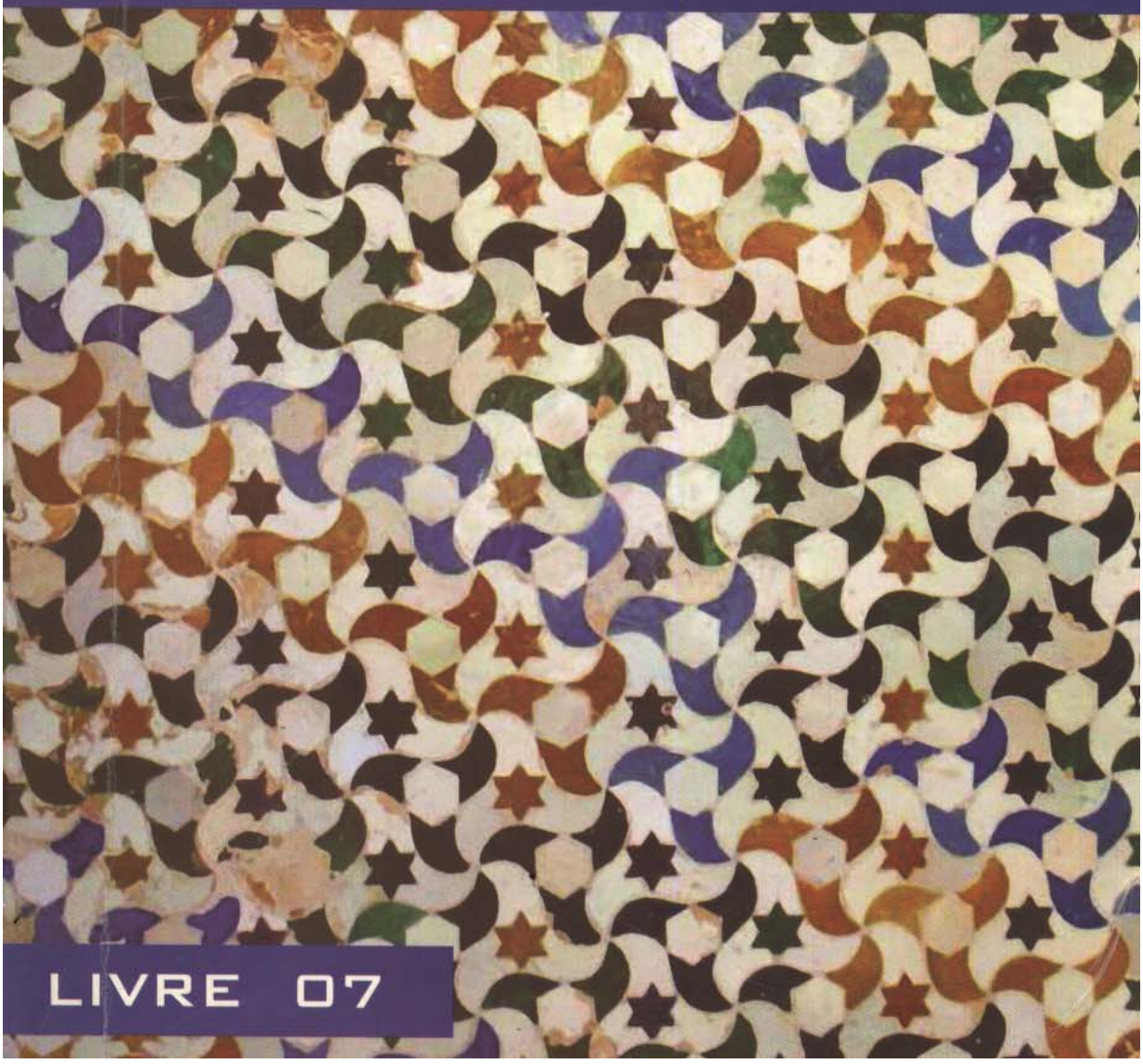
KHELIFA ZIZI



FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE



LIVRE 07

Table des matières

1 Propriétés des nombres réels - La droite réelle achevée **5**

1.1 Propriétés du corps commutatif ordonné $\mathbb{R}$ 8

1.1.1 Valeur absolue dans $\mathbb{R}$ 14

1.1.2 Suites convergentes de nombres réels 15

1.1.3 Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée 21

1.1.4 Suites adjacentes 22

1.1.5 Racine n-ème d'un nombre réel positif - Exposants généralisés 22

1.1.6 Suites de nombres réels remarquables 28

1.1.7 Extraction de la racine n-ème 41

1.1.8 Développement d'un nombre réel dans une base b 43

1.1.9 Développement en fraction continue 57

1.1.10 Réduites d'un développement en fraction continue 66

1.1.11 Développement en fraction continue d'un nombre irrationnel quadratique . 73

1.1.12 Applications du développement en fraction continue : Equation de Pell . . . 80

1.1.13 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, limites généralisées 86

1.1.14 Suites de nombres complexes 88

1.1.15 Topologie de la droite réelle $\mathbb{R}$ 89

1.1.16 Ensemble compact 93

1.1.17 L'ensemble de Cantor 96

1.1.18 Ensembles connexes 99

1.1.19 Exercices sur les propriétés des nombres réels 102

1.2 Fonction d'une variable réelle 131

1.2.1 Généralités sur les fonctions - Limites - Continuité 131

1.2.2 Limite d'une fonction en un point - Fonction continue en un point 138

1.2.3 Généralisation de la notion de limite 145

1.2.4 Théorèmes généraux sur les limites 147

1.2.5 Formes indéterminées 153

1.2.6 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle 157

1.2.7 Fonction uniformément continue 162

1.2.8 La fonction singulière de Lebesgue 164

1.2.9 Exercices sur les fonctions : généralités et continuité 168

1.3 Fonctions dérivables - Théorème des accroissements finis 185

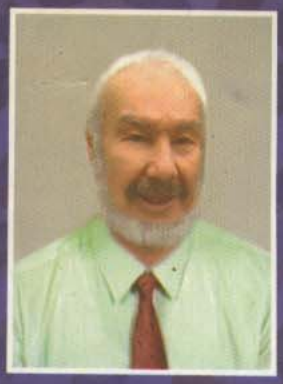
1.3.1 Dérivée d'une fonction en un point 185

1.3.2 Opérations sur les fonctions dérivables 188

1.3.3 Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis 194

1.3.4 Fonctions convexes (resp.concaves) 203
1.3.5 Fonctions de classe C^n - Formule de Leibniz 213
1.3.6 Formules de Taylor 218
1.3.7 Formule des trapèzes et Formule de Simpson 221
1.3.8 Formules d'interpolation de Lagrange et de Newton 224
1.3.9 Conditions suffisantes de convexité et d'extremum 229
1.3.10 Exercices sur les fonctions dérivables 235
1.4 Intégrale de Riemann - Primitive d'une fonction continue 259
1.4.1 Définition de l'intégrale de Riemann 259
1.4.2 Intégrale de Riemann et primitive d'une fonction continue 271
1.4.3 Application de l'intégrale au calcul des aires planes 279
1.4.4 Calcul numérique approché des intégrales définies 282
1.4.5 Formules quadratiques de Gauss-Cotes 286
1.4.6 Application de l'intégrale à la théorie des nombres 291
1.4.7 Exercices sur l'intégrale définie 298
1.5 Fonctions élémentaires 326
1.5.1 Fonction puissance 326
1.5.2 Logarithme népérien 327
1.5.3 Logarithme à base $a > 0$, $a \neq 1$ 331
1.5.4 Les fonctions exponentielles 336
1.5.5 Les fonctions hyperboliques et leurs inverses 349
1.5.6 Formules de multiplication et problème inverse 356
1.5.7 Les fonctions trigonométriques 367
1.5.8 Formules de multiplication et problème inverse 404
1.5.9 Division des arcs 410
1.5.10 Exercices sur les fonctions élémentaires d'une variable réelle 413
1.6 Calcul des primitives - Intégrales et fonctions elliptiques 425
1.6.1 Méthodes générales pour le calcul des primitives 427
1.6.2 Intégrales elliptiques - Fonctions elliptiques 446
1.6.3 Exercices sur le calcul des primitives 467
1.7 Développements limités - Etude des fonctions 479
1.7.1 Développements limités 487
1.7.2 Opérations sur les développements limités 489
1.7.3 Développement limité généralisé 495
1.7.4 Branche infinie, Direction asymptotique, Asymptote 500
1.7.5 Construction du graphe d'une fonction $y = f(x)$ 501
1.7.6 Exercices sur les développements limités et l'étude des fonctions 512
1.8 Compléments sur l'intégrale de Riemann 522
1.8.1 Classes de fonctions intégrables-Riemann 522
1.8.2 Caractérisation d'une fonction Riemann-intégrable 528
1.9 Exercices sur les compléments de l'intégrale de Riemann 534

A Complétion d'un corps ordonné **539**
A.1 Corps commutatif ordonné 539
A.2 Valeur absolue dans un corps ordonné 544
A.3 Suites de Cauchy (resp. convergentes) dans un corps valué 545
A.4 Corps valué complet 553



KHÉLIFA ZIZI, mathématicien Algérien, nait à Koléâ (Algérie) en Juillet 1935 ; il y fait sa scolarité, qu'il poursuit au lycée Duveyrier (Lycée Ibn Rochd actuellement) à Blida.
Il obtient son baccalauréat en 1955. Jeune intellectuel engagé, il participe de 1956 à 1959 à la révolution algérienne au sein de l'ALN.

Il commence sa carrière universitaire à ORSAY (Université de Paris XI) en 1960, obtient son doctorat de troisième cycle en 1967 puis soutient sa thèse de doctorat d'Etat à l'université de Paris XIII en 1975, ses travaux portent sur la théorie de diffusion pour une classe d'opérateurs de Schroedinger avec des potentiels asymptotiquement Coulombiens.

Il est assistant à l'Université de Reims de 1967 à 1970, puis maître assistant au Centre Scientifique et Polytechnique de Paris XIII de 1971 à 1974 et maître de conférences en 1975.

Il enseigne pendant l'année 1975-1976 à l'Université d'Oran Es Sénia, où ses cours sont publiés par l'OPU et connaissent à ce jour un grand succès tant auprès des étudiants que des enseignants.

Il retourne à l'U.E.R. Sciences de Reims d'abord comme maître assistant de 1977 à 1980, ensuite comme professeur associé de 1980 à 1986 et enfin maître de conférences titulaire de 1986 à 1999.

Khélifa Zizi a rédigé la nouvelle version du cours de l'Ecole Polytechnique de Laurent Schwartz(1) à la demande de ce dernier, parue entre 1991 et 1993 (4 tomes). Il s'est donné ces dernières années comme objectif de réécrire toutes les Mathématiques selon sa vision des choses dans une collection destinée aux universitaires.

Khelifa ZIZI est marié et père de quatre filles et deux garçons, il est actuellement à la retraite et habite la banlieue de Paris.

(1)Laurent Schwartz (1915-2002), mathématicien français, lauréat de la médaille Fields (l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiques) en 1950 pour sa théorie des distributions. Premier Français à recevoir cette distinction internationale. Il est aussi, signataire du Manifeste des 121 pour l'arrêt de la guerre en Algérie et la défense des droits de l'homme.

ISBN : 978-9947-0-3881-0
9 789947 028810