

TRAITEMENT  
DU SIGNAL  
ET DE L'IMAGE

Information - Commande - Communication

# Les ondelettes et leurs applications

Michel Misiti  
Yves Misiti  
Georges Oppenheim  
Jean-Michel Poggi

 *Hermès*

*Lavoisier*

---

# Table des matières

<b>Notations</b> . . . . .	17
<b>Introduction générale</b> . . . . .	21
Les ondelettes . . . . .	21
Pourquoi ce livre ? . . . . .	22
Pour qui ce livre ? . . . . .	23
Que trouve-t-on dans cet ouvrage ? . . . . .	23
Indications bibliographiques . . . . .	25
<b>Chapitre 1. Un tour d'horizon</b> . . . . .	27
1.1. Introduction . . . . .	27
1.2. Ondelettes . . . . .	28
1.2.1. Généralités . . . . .	28
1.2.2. Une ondelette . . . . .	32
1.2.3. Organisation des ondelettes . . . . .	33
1.2.4. L'arbre d'ondelettes pour un signal . . . . .	35
1.3. Un signal de consommation électrique analysé par ondelettes . . . . .	37
1.4. Débruitage par ondelettes : avant et après . . . . .	39
1.5. Analyse par ondelettes d'un signal de type Doppler . . . . .	40
1.6. Débruitage par ondelettes d'un signal de type Doppler . . . . .	41
1.7. Débruitage par ondelettes d'un signal électrique . . . . .	43
1.8. Une image décomposée par ondelettes . . . . .	44
1.8.1. Décomposition sous forme d'arbre . . . . .	44
1.8.2. Décomposition sous forme compacte . . . . .	46
1.9. Une image comprimée par ondelettes . . . . .	48
1.10. Un signal comprimé par ondelettes . . . . .	49

1.11. Une empreinte digitale comprimée par paquets d'ondelettes . . . . .	51
<b>Chapitre 2. Le cadre mathématique . . . . .</b>	<b>53</b>
2.1. Introduction . . . . .	53
2.2. De la transformée de Fourier à la transformée de Gabor . . . . .	55
2.2.1. La transformée continue de Fourier . . . . .	55
2.2.2. La transformation de Gabor. . . . .	59
2.3. La transformée continue en ondelettes. . . . .	61
2.4. Bases orthonormées d'ondelettes. . . . .	64
2.4.1. Le passage à la transformée discrète en ondelettes . . . . .	64
2.4.2. Analyses multirésolution et bases orthonormées d'ondelettes . . . . .	65
2.4.3. La fonction d'échelle et l'ondelette . . . . .	69
2.5. Les paquets d'ondelettes . . . . .	72
2.5.1. Construction des paquets d'ondelettes . . . . .	73
2.5.2. Les atomes des paquets d'ondelettes . . . . .	75
2.5.3. Organisation des paquets d'ondelettes . . . . .	76
2.6. Bases biorthogonales d'ondelettes . . . . .	77
2.6.1. Orthogonalité et biorthogonalité . . . . .	78
2.6.2. La dualité pose plusieurs questions . . . . .	79
2.6.3. Propriétés des ondelettes biorthogonales . . . . .	80
2.6.4. Les ondelettes semi-orthogonales . . . . .	82
<b>Chapitre 3. Des bases d'ondelettes à l'algorithme rapide . . . . .</b>	<b>85</b>
3.1. Introduction . . . . .	85
3.2. Des bases orthonormées à l'algorithme de Mallat . . . . .	86
3.3. Les quatre filtres. . . . .	87
3.4. Calcul efficace des coefficients . . . . .	89
3.5. Justification : les projections et les deux échelles . . . . .	90
3.5.1. La phase de décomposition . . . . .	91
3.5.2. La phase de reconstruction . . . . .	94
3.5.3. Décompositions et reconstructions d'ordre plus élevé . . . . .	96
3.6. Mise en œuvre de l'algorithme . . . . .	97
3.6.1. Initialisation de l'algorithme . . . . .	98
3.6.2. Calcul sur des suites finies . . . . .	99
3.6.3. Extra-coefficients. . . . .	99
3.7. Complexité de l'algorithme . . . . .	100
3.8. Du 1D au 2D. . . . .	101
3.9. Transformée invariante par translation . . . . .	102
3.9.1. DWT $\epsilon$ -décimée. . . . .	104
3.9.2. Calcul de la SWT. . . . .	104
3.9.3. Inverse de la SWT . . . . .	108

<b>Chapitre 4. Botanique des familles d'ondelettes</b> . . . . .	109
4.1. Introduction . . . . .	109
4.2. Que peut-on vouloir d'une ondelette ? . . . . .	110
4.3. Tableau synoptique des familles usuelles . . . . .	111
4.4. Quelques familles bien connues . . . . .	111
4.4.1. Ondelettes orthogonales à support compact . . . . .	113
4.4.1.1. Les ondelettes de Daubechies : <i>dbN</i> . . . . .	113
4.4.1.2. Les Symlets : <i>symN</i> . . . . .	115
4.4.1.3. Les Coiflets : <i>coifN</i> . . . . .	116
4.4.2. Ondelettes biorthogonales à support compact : <i>bior</i> . . . . .	118
4.4.3. Ondelettes orthogonales à support non compact . . . . .	120
4.4.3.1. L'ondelette de Meyer : <i>meyr</i> . . . . .	120
4.4.3.2. Une approximation de l'ondelette de Meyer : <i>dmey</i> . . . . .	121
4.4.3.3. Les ondelettes de Battle et Lemarié : <i>btln</i> . . . . .	122
4.4.4. Ondelettes sans filtres, réelles . . . . .	122
4.4.4.1. Le chapeau mexicain : <i>mexh</i> . . . . .	123
4.4.4.2. L'ondelette de Morlet : <i>morl</i> . . . . .	123
4.4.4.3. Les ondelettes gaussiennes : <i>gausN</i> . . . . .	124
4.4.5. Ondelettes sans filtres, complexes . . . . .	124
4.4.5.1. Les ondelettes gaussiennes complexes : <i>cgau</i> . . . . .	124
4.4.5.2. Les ondelettes de Morlet complexes : <i>cmorl</i> . . . . .	125
4.4.5.3. Les ondelettes <i>B-splines</i> fréquentielles complexes : <i>fbsp</i> . . . . .	126
4.5. Algorithme en cascade . . . . .	127
4.5.1. L'algorithme et sa justification . . . . .	127
4.5.2. Un exemple d'application . . . . .	130
4.5.3. Qualité de l'approximation . . . . .	130
<b>Chapitre 5. Trouver, modeler et fabriquer son ondelette</b> . . . . .	133
5.1. Introduction . . . . .	133
5.2. Construction d'ondelettes pour l'analyse continue . . . . .	134
5.2.1. Construction d'une nouvelle ondelette . . . . .	134
5.2.1.1. La condition d'admissibilité . . . . .	134
5.2.1.2. Exemples simples d'ondelettes admissibles . . . . .	135
5.2.1.3. Constructions d'ondelettes approchant une forme . . . . .	137
5.2.2. Application à la détection de formes . . . . .	141
5.3. Construction d'ondelettes pour l'analyse discrète . . . . .	149
5.3.1. Les bancs de filtres . . . . .	149
5.3.1.1. De l'algorithme de Mallat aux bancs de filtres . . . . .	149
5.3.1.2. La condition de reconstruction parfaite . . . . .	150
5.3.1.3. Construction de bancs de filtres à reconstruction parfaite . . . . .	151
5.3.1.4. Exemples de bancs de filtres à reconstruction parfaite . . . . .	154
5.3.2. Lifting . . . . .	157

5.3.2.1. La méthode de lifting . . . . .	157
5.3.2.2. Lifting et méthode polyphase . . . . .	158
5.3.3. Lifting et ondelettes biorthogonales . . . . .	163
5.3.4. Exemples de constructions . . . . .	165
5.3.4.1. Illustrations du lifting . . . . .	165
5.3.4.2. Construction d'ondelettes avec davantage de moments nuls . . . . .	171
5.3.4.3. Approximation d'une forme par lifting . . . . .	172

## Chapitre 6. Les livres d'images 1D . . . . . 175

6.1. Introduction . . . . .	175
6.2. Le livre d'images 1D discret . . . . .	176
6.2.1. Les signaux analysés . . . . .	176
6.2.2. Les traitements effectués . . . . .	177
6.2.3. Les exemples commentés . . . . .	178
6.2.3.1. Une somme de sinus . . . . .	178
6.2.3.2. Une rupture de fréquence . . . . .	180
6.2.3.3. Un bruit blanc . . . . .	181
6.2.3.4. Un bruit coloré . . . . .	182
6.2.3.5. Une rupture . . . . .	184
6.2.3.6. Deux ruptures de la dérivée . . . . .	185
6.2.3.7. Une rupture de la dérivée seconde . . . . .	186
6.2.3.8. Une superposition de signaux . . . . .	188
6.2.3.9. Une rampe plus un bruit coloré . . . . .	189
6.2.3.10. Un premier signal réel . . . . .	191
6.2.3.11. Un second signal réel . . . . .	192
6.3. L'apport de l'analyse par paquets d'ondelettes . . . . .	193
6.3.1. Exemple 1 : <i>Chirp</i> linéaire et quadratique . . . . .	194
6.3.2. Exemple 2 : Un sinus . . . . .	196
6.3.3. Exemple 3 : Un signal composite . . . . .	197
6.4. Le livre d'images 1D « continu » . . . . .	198
6.4.1. Résolution en temps . . . . .	198
6.4.1.1. Repérer une discontinuité dans le signal . . . . .	198
6.4.1.2. Repérer une discontinuité dans la dérivée du signal . . . . .	200
6.4.2. Analyse précise de la régularité . . . . .	201
6.4.2.1. Repérer une singularité höldérienne . . . . .	201
6.4.2.2. Analyse de la régularité höldérienne de la singularité . . . . .	203
6.4.2.3. Etude de deux singularités höldériennes . . . . .	206
6.4.3. Analyse d'un signal auto-similaire . . . . .	207

## Chapitre 7. Débruitage et compression de signaux 1D . . . . . 211

7.1. Introduction . . . . .	211
-----------------------------	-----

7.2. Principe du débruitage par ondelettes . . . . .	212
7.2.1. Le modèle . . . . .	212
7.2.2. Débruitage : avant et après . . . . .	212
7.2.3. L'algorithme. . . . .	213
7.2.4. Pourquoi ça marche ? . . . . .	214
7.3. Ondelettes et statistique . . . . .	214
7.3.1. Estimateurs à noyau et estimateurs par projection orthogonale. . . . .	214
7.3.2. Estimateurs par ondelettes . . . . .	215
7.4. Méthodes de débruitage . . . . .	216
7.4.1. Un premier estimateur . . . . .	217
7.4.2. De la sélection des coefficients au seuillage . . . . .	218
7.4.3. Le seuillage universel . . . . .	219
7.4.4. Estimer l'écart-type du bruit . . . . .	220
7.4.5. Risque minimax. . . . .	220
7.4.6. Compléments sur le seuillage. . . . .	221
7.5. Exemple de débruitage avec bruit stationnaire . . . . .	222
7.6. Exemple de débruitage avec bruit non stationnaire . . . . .	225
7.6.1. Le modèle avec ruptures de variance . . . . .	226
7.6.2. Seuillage adapté aux ruptures de l'échelle du bruit. . . . .	227
7.7. Exemple de débruitage d'un signal réel . . . . .	229
7.7.1. Bruit inconnu mais « homogène » en variance par niveau d'échelle . . . . .	229
7.7.2. Bruit inconnu et « non homogène » en variance par niveau d'échelle . . . . .	230
7.8. Apport de la transformée invariante par translation . . . . .	231
7.9. Estimation de densité et de régression . . . . .	234
7.9.1. Estimation de densité . . . . .	234
7.9.2. Estimation de la régression . . . . .	236
7.10. Principe de la compression par ondelettes. . . . .	237
7.10.1. Le problème . . . . .	237
7.10.2. L'algorithme de base . . . . .	238
7.10.3. Pourquoi ça marche ? . . . . .	238
7.11. Méthodes de compression . . . . .	238
7.11.1. Seuillage des coefficients . . . . .	238
7.11.2. Sélection des coefficients . . . . .	240
7.12. Exemples de compression . . . . .	241
7.12.1. Seuillage global . . . . .	241
7.12.2. Une comparaison des deux stratégies de compression . . . . .	243
7.13. Débruitage et compression par paquets d'ondelettes . . . . .	244
7.14. Commentaires bibliographiques. . . . .	245

<b>Chapitre 8. Traitement d'images par ondelettes</b> . . . . .	247
8.1. Introduction . . . . .	247
8.2. Les ondelettes pour l'image . . . . .	248
8.2.1. La décomposition en ondelettes 2D . . . . .	249
8.2.2. Les coefficients d'approximation et de détail . . . . .	250
8.2.2.1. Détails horizontaux, verticaux et diagonaux . . . . .	250
8.2.2.2. Les deux représentations de la décomposition . . . . .	252
8.2.3. Les approximations et les détails. . . . .	253
8.3. Détection de contours et de textures . . . . .	255
8.3.1. Un exemple géométrique simple. . . . .	255
8.3.2. Deux exemples issus d'images réelles . . . . .	256
8.4. Fusion d'images . . . . .	258
8.4.1. Le problème au travers d'un exemple simple . . . . .	259
8.4.2. Fusion d'images floues . . . . .	261
8.4.3. Mélange d'images . . . . .	263
8.5. Débruitage d'images . . . . .	267
8.5.1. Une image bruitée artificiellement. . . . .	267
8.5.2. Une image réelle . . . . .	270
8.6. Compression d'images . . . . .	271
8.6.1. Les principes de la compression . . . . .	271
8.6.2. Compression et ondelettes . . . . .	273
8.6.2.1. Pourquoi ça marche ? . . . . .	273
8.6.2.2. Pourquoi seuiller ? . . . . .	274
8.6.2.3. Exemples de compression d'images . . . . .	276
8.6.3. La « vraie » compression . . . . .	279
8.6.3.1. La quantisation . . . . .	279
8.6.3.2. Le codage EZW . . . . .	282
8.6.3.3. Remarques sur la norme JPEG 2000 . . . . .	286
<b>Chapitre 9. Panorama des applications</b> . . . . .	289
9.1. Introduction . . . . .	289
9.1.1. Pourquoi ça marche ? . . . . .	289
9.1.2. Une classification des applications . . . . .	291
9.1.3. Deux problèmes dans lesquels les ondelettes sont compétitives . . . . .	292
9.1.4. Présentation des applications . . . . .	293
9.2. Coups de vents. . . . .	294
9.3. Détection de séismes . . . . .	296
9.4. Etude bathymétrique du sol marin . . . . .	299
9.5. Analyse de la turbulence . . . . .	300
9.6. Electrocardiogramme (ECG) : codage et instant du maximum . . . . .	302
9.7. Comportement alimentaire. . . . .	304
9.8. Ondelettes fractionnaires et imagerie RMN . . . . .	305

9.9. Ondelettes et sciences biomédicales . . . . .	307
9.9.1. Analyse des signaux biomédicaux 1D . . . . .	308
9.9.1.1. Signaux bio-acoustiques . . . . .	308
9.9.1.2. Electrocardiogramme (ECG). . . . .	309
9.9.1.3. Electro-encéphalogramme (EEG). . . . .	309
9.9.2. Analyse des signaux biomédicaux 2D . . . . .	309
9.9.2.1. Résonance magnétique nucléaire (RMN) . . . . .	309
9.9.2.2. RMN fonctionnelle et imagerie fonctionnelle. . . . .	310
9.10. Maîtrise statistique des procédés . . . . .	310
9.11. Compression en ligne d'informations industrielles . . . . .	312
9.12. Transitoires dans des signaux sous-marins . . . . .	315
9.13. Quelques applications en vrac . . . . .	317
9.13.1. Codage vidéo . . . . .	317
9.13.2. Tomographie assistée par ordinateur . . . . .	317
9.13.3. Fabriquer et analyser des signaux ou des images irrégulières . . . . .	318
9.13.4. Prévoir . . . . .	319
9.13.5. Interpolation par krigeage . . . . .	319
<b>Annexe. L'algorithme EZW.</b> . . . .	321
A.1. Le codage . . . . .	321
A.1.1. Description détaillée de l'algorithme EZW (phase de codage) . . . . .	321
A.1.2. Exemple d'application de l'algorithme EZW (phase de codage) . . . . .	322
A.2. Le décodage . . . . .	325
A.2.1. Description détaillée de l'algorithme EZW (phase de décodage) . . . . .	325
A.2.2. Exemple d'application de l'algorithme EZW (phase de décodage) . . . . .	325
<b>Bibliographie</b> . . . . .	327
<b>Index</b> . . . . .	333