

**Patrick Dehornoy**

LICENCE • MAÎTRISE • AGRÉGATION

# Mathématiques de l'informatique

Cours et exercices corrigés



DUNOD

# Table des matières

<b>AVANT-PROPOS</b>	XI
<b>CHAPITRE 1 • MOTS, LANGAGES ET ARBRES</b>	1
1.1 Le type mot	1
1.1.1 Mots	2
1.1.2 Concaténation	3
1.1.3 Monoïdes	4
1.1.4 Ordre préfixe	6
1.2 Le type langage	7
1.2.1 Opérations sur les langages	8
1.2.2 Homomorphismes	10
1.2.3 Notion de langage décidable	11
1.3 Le type arbre	12
1.3.1 Ordres et graphes	12
1.3.2 Arbres	15
1.3.3 Arbres et graphes	17
1.3.4 Niveaux et branches	19
1.3.5 Parcours d'arbres	21

CHAPITRE 2 • <b>MONOÏDES ET GROUPES LIBRES</b>	23
2.1 Structures libres	23
2.1.1 Variétés équationnelles	24
2.1.2 Sous-structure engendrée par une partie	25
2.1.3 Familles libres	26
2.1.4 Bases	27
2.1.5 Congruences et quotients	29
2.2 Monoïdes libres	32
2.2.1 Familles génératrices	32
2.2.2 Familles libres	33
2.2.3 Bases	33
2.2.4 Congruences	34
2.2.5 Présentations	35
2.3 Groupes libres	36
2.3.1 Construction des groupes libres	37
2.3.2 Présentations de groupes	40
CHAPITRE 3 • <b>AUTOMATES</b>	47
3.1 Automates	47
3.1.1 La notion d'automate	47
3.1.2 Langages automatiques	51
3.2 Construction d'automates	52
3.2.1 Construction directe	52
3.2.2 Opérations booléennes	54
3.2.3 Homomorphismes	56
3.3 Extensions de la notion d'automate	57
3.3.1 Automates non déterministes	57
3.3.2 Epsilon-transitions	62
CHAPITRE 4 • <b>LANGAGES AUTOMATIQUES</b>	69
4.1 L'automate minimal d'un langage	69
4.1.1 Minimalisation d'un automate	69
4.1.2 Classes à droite suivant un langage	75
4.1.3 Un exemple important	79
4.1.4 Applications	80

4.2	Expressions régulières	82
4.2.1	Propriétés de clôture	82
4.2.2	Le théorème de Kleene	83
4.2.3	Applications	85
4.2.4	Alphabet à un élément	86
4.3	Propriétés d'itération	87
<b>CHAPITRE 5 • GRAMMAIRES FORMELLES</b>		93
5.1	Réécriture et productions	93
5.1.1	Règles de réécriture	94
5.1.2	Productions	94
5.2	Construction de grammaires	97
5.2.1	Grammaires régulières	98
5.2.2	Quelques exemples	98
5.2.3	Systèmes d'équations dans les langages	100
5.2.4	Grammaires formelles comme modèles	103
5.2.5	Opérations sur les langages algébriques	104
5.3	Grammaires de formes particulières	105
5.3.1	Suppression des epsilon-productions	106
5.3.2	Suppression des productions-unité	108
5.3.3	Forme normale de Chomsky	110
5.3.4	Forme normale de Greibach	111
<b>CHAPITRE 6 • ARBRES DE DÉRIVATION ET AUTOMATES À PILE</b>		117
6.1	Arbres de dérivation	117
6.1.1	Arbres de dérivation	117
6.1.2	La propriété d'itération	121
6.1.3	Propriétés de non-clôture	123
6.2	Principe de l'analyse syntaxique	124
6.2.1	Analyse descendante	124
6.2.2	Tables d'analyse	126
6.3	Automates à pile	128
6.3.1	Automates à pile	129
6.3.2	Automates à pile déterministes	134

<b>CHAPITRE 7 • MACHINES DE TURING</b>	137
7.1 Machines de Turing	137
7.1.1 Notion générale de calcul	138
7.1.2 Machines de Turing pour un ruban	139
7.1.3 Ensemble décidé par une machine de Turing	142
7.2 Simulation entre machines de Turing	145
7.2.1 Machines de Turing pour plusieurs rubans	146
7.2.2 Simulation	150
7.3 Construction de machines de Turing	156
7.3.1 Fonctions MT-calculables	156
7.3.2 Représentation des entiers	159
7.3.3 Quelques exemples	160
7.3.4 Indépendance du choix de la base	163
7.3.5 Propriétés de clôture	164
7.3.6 Réels MT-calculables	165
<b>CHAPITRE 8 • FONCTIONS RÉCURSIVES</b>	171
8.1 Notion de fonction récursive	171
8.1.1 Définitions de fonctions	171
8.1.2 Calculabilité	175
8.1.3 Ensembles récursifs	176
8.2 Récursivité des fonctions MT-calculables	179
8.2.1 Fonctions usuelles	179
8.2.2 Récurrence multiple	180
8.2.3 Contrôle d'une machine de Turing	182
8.3 Deux contre-exemples	186
8.3.1 Le castor affairé	186
8.3.2 La fonction d'Ackermann	188
<b>CHAPITRE 9 • COMPLEXITÉ ALGORITHMIQUE</b>	197
9.1 La thèse de Church	197
9.1.1 Modèle de calcul	197
9.1.2 Classes de complexité	200
9.2 Machines de Turing non déterministes	203
9.2.1 Résolution et vérification	203
9.2.2 Complexité non déterministe	205
9.2.3 Le problème $P = NP$	206

9.3	Évaluation d'algorithmes	207
9.3.1	Algorithmes de tri	207
9.3.2	Multiplication des entiers	209
9.3.3	Calcul du pgcd	212
9.3.4	Multiplication des matrices	214
<b>CHAPITRE 10 • LOGIQUE BOOLÉENNE</b>		221
10.1	Formules et réalisations	221
10.1.1	Formules booléennes	222
10.1.2	Valeurs de vérité	223
10.1.3	Le théorème de compacité	227
10.2	Notion de preuve	228
10.2.1	Preuves par coupure	228
10.2.2	La méthode de résolution	231
10.3	Complexité du problème de satisfaisabilité	236
10.3.1	Le problème SAT	236
10.3.2	Problèmes NP-complets	239
<b>CHAPITRE 11 • LOGIQUE DU PREMIER ORDRE</b>		243
11.1	Calcul des prédicats	243
11.1.1	Termes et formules	243
11.1.2	Réalisations et satisfaction	246
11.1.3	Pouvoir d'expression	249
11.2	Théorèmes de complétude	252
11.2.1	Preuves	253
11.2.2	Applications	257
11.2.3	La méthode de résolution	259
11.3	Logique et complexité	262
11.3.1	Semidécidabilité	262
11.3.2	Indécidabilité	264
11.3.3	Incomplétude	265
11.3.4	Suites de Goodstein	266
<b>SOLUTIONS DES EXERCICES</b>		272
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		299
<b>INDEX</b>		301

SCIENCES SUP

Patrick Dehornoy

# MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

## Cours et exercices corrigés

Cet ouvrage, destiné en priorité aux étudiants de second cycle de mathématiques, intéressera également un public plus large : enseignants de mathématiques pratiquant l'informatique et désireux d'en approfondir les bases théoriques, étudiants ou ingénieurs en informatique intéressés par les aspects mathématiques de leur discipline.

Centré sur les notions de calcul et de définition, ce cours est une introduction à l'étude des structures mathématiques sous-jacentes à l'informatique. Les principaux développements concernent les automates, les langages algébriques, la calculabilité effective et la complexité des algorithmes, la logique booléenne et les logiques du premier ordre, dont les définitions et propriétés élémentaires usuelles sont exposées.

L'approche proposée est résolument mathématique et souligne une orientation générale tournée vers la théorie. Une attention spéciale a été portée à la rigueur et à la précision de la rédaction, en particulier dans les démonstrations.

Cent cinquante exercices d'application et de complément sont proposés, dont plus de la moitié avec un corrigé rédigé.



PATRICK DEHORNOY, professeur à l'université de Caen, est un mathématicien de notoriété internationale. Il a publié plus de cinquante articles de recherche dans plusieurs domaines des mathématiques : théorie des ensembles, algèbre, topologie des tresses. Il a été lauréat du prix Ferran Sunyer i Balaguer en 1999.

MATHÉMATIQUES

PHYSIQUE