

---

# Signaux aléatoires et processus stochastiques

Yvon Mori

 *Hermès*

*Lavoisier*

---

<b>Chapitre 1. Introduction à la théorie des probabilités</b> .....	<b>15</b>
1.1. Notions sur la probabilité .....	15
1.1.1. La théorie et la réalité .....	15
1.1.1.1. Raisonnements déductif et inductif .....	15
1.1.1.2. Déterminisme, causalité et probabilité .....	15
1.1.2. Analyse de problèmes avec les probabilités .....	17
1.1.2.1. Séparation en trois étapes .....	17
1.1.2.2. Exemple des trois étapes .....	19
1.2. Quatre définitions de la probabilité .....	19
1.2.1. Quelques définitions : événements .....	19
1.2.2. Définition axiomatique de la probabilité .....	20
1.2.3. Définition par fréquence relative .....	20
1.2.4. Définition classique .....	21
1.2.5. Définition par mesure de croyance .....	24
<b>Chapitre 2. Théorie des ensembles et espace probabilisé</b> .....	<b>27</b>
2.1. Théorie des ensembles .....	27
2.1.1. Introduction et définition .....	27
2.1.1.1. Notion de l'ensemble .....	27
2.1.1.2. Définition de l'élément .....	28
2.1.1.3. Ensemble universel $S$ .....	28
2.1.1.4. Ensemble vide ou nul $\emptyset$ .....	29
2.1.1.5. Sous-ensemble .....	29
2.1.2. Cercles d'Euler et diagrammes de Venn .....	29
2.1.3. Opérations avec les ensembles .....	30
2.2. Espace de probabilité .....	33
2.2.1. Introduction et définition .....	33
2.2.2. Axiomes de probabilité .....	36
2.2.3. Classe et corps .....	37
2.2.4. Espace probabilisé .....	38
<b>Chapitre 3. Probabilités géométriques – Probabilités conditionnelles</b> .....	<b>43</b>
3.1. Espace probabilisé et probabilités géométriques .....	43
3.1.1. Probabilités discrètes (dénombrables) .....	43
3.1.2. Probabilités continues – Interprétation géométrique .....	44
3.2. Probabilités conditionnelles .....	48
3.2.1. Définitions et interprétations .....	48
3.2.2. Propriétés utiles .....	49
3.2.3. Événements indépendants .....	49

3.3. Probabilités totales .....	52
3.3.1. Théorèmes des probabilités totales .....	52
3.3.2. Probabilité des causes.....	53
<b>Chapitre 4. Théorie des épreuves répétées .....</b>	<b>61</b>
4.1. Expériences composées.....	61
4.1.1. Deux expériences .....	61
4.1.2. Espace produit et produit cartésien.....	63
4.1.3. Espace de probabilité et expériences composées .....	64
4.1.4. Espace somme .....	66
4.2. Epreuves de Bernoulli.....	68
4.2.1. Formule de Bernoulli .....	68
4.2.2. Nombre de succès le plus probable .....	69
4.2.3. Probabilité de $\{k_1 \leq k \leq k_2\}$ .....	69
<b>Chapitre 5. Théorèmes asymptotiques – Approximation gaussienne .....</b>	<b>75</b>
5.1. Introduction aux approximations.....	75
5.1.1. Epreuves de Bernoulli .....	75
5.1.2. Evaluation de la formule de Bernoulli.....	75
5.2. Approximation gaussienne .....	76
5.2.1. Fonction de Gauss .....	76
5.2.2. Théorème de Laplace .....	81
5.2.3. Théorème de De Moivre-Laplace.....	82
5.2.4. Loi des grands nombres.....	84
<b>Chapitre 6. Loi de Poisson – Loi multinomiale .....</b>	<b>91</b>
6.1. Loi binomiale et poissonnienne .....	91
6.1.1. Approximation à la loi binomiale .....	91
6.1.2. Preuve du théorème de Poisson.....	92
6.1.3. Distribution de Poisson .....	93
6.1.4. Application : points aléatoires sur une droite .....	94
6.1.5. Loi de Poisson.....	95
6.2. Epreuves généralisées de Bernoulli .....	97
6.2.1. Loi binomiale – Epreuves de Bernoulli.....	97
6.2.2. Epreuves indépendantes généralisées .....	98
6.2.3. Approximation de la loi multinomiale .....	99
6.2.4. Exemple global – Points sur une droite.....	100
<b>Chapitre 7. Variables aléatoires et fonction de distribution.....</b>	<b>105</b>
7.1. Introduction à la notion de variable aléatoire .....	105
7.1.1. Définition physique (imprécise).....	105
7.1.2. Définition plus concrète.....	106
7.1.3. Notion de fonction .....	107
7.1.4. Définition rigoureuse de variable aléatoire .....	109
7.2. Fonction de distribution d'une variable aléatoire .....	112
7.2.1. Définition de la fonction de distribution .....	112
7.2.2. Interprétation par fréquence relative .....	115
7.2.3. Propriétés des distributions.....	115

<b>Chapitre 8. Densité de probabilité d'une variable aléatoire</b> .....	<b>121</b>
8.1. Introduction – La nécessité d'un théorème d'existence .....	121
8.1.1. Densité de probabilité définie sans espace .....	121
8.1.2. Théorème d'existence d'une variable aléatoire .....	121
8.2. Fonction de densité de probabilité .....	123
8.2.1. Définition d'une densité de probabilité .....	123
8.2.2. Variables aléatoires continues .....	123
8.2.3. Variables aléatoires discrètes .....	126
8.2.4. Interprétation avec fonction de masse .....	129
8.3. Distributions et densités usuelles .....	130
8.3.1. Variables aléatoires discrètes .....	130
8.3.2. Variables aléatoires continues .....	133
<b>Chapitre 9. Distributions et densités conditionnelles</b> .....	<b>139</b>
9.1. Définitions et propriétés .....	139
9.1.1. Définition de probabilité conditionnelle $P(A M)$ .....	139
9.1.2. Définition en fonction de variables aléatoires .....	141
9.2. Applications – Fiabilité et statistiques .....	144
9.2.1. Fiabilité : étude des probabilités de pannes .....	144
9.2.2. Détermination de densités <i>a posteriori</i> .....	146
<b>Chapitre 10. Transformations d'une variable aléatoire</b> .....	<b>151</b>
10.1. Introduction – Fonction d'une variable aléatoire .....	151
10.1.1. Variable aléatoire $X$ et fonction certaine $g(x)$ .....	151
10.1.2. Variable aléatoire $Y = g(X)$ formée de $g(x)$ .....	151
10.2. Transformation de la distribution et de la densité .....	153
10.2.1. Détermination de la distribution $F_Y(y)$ .....	153
10.2.2. Transformation de la densité de probabilité .....	160
10.2.3. Transformations courantes de v.a. ....	162
<b>Chapitre 11. Espérance mathématique et moments</b> .....	<b>171</b>
11.1. Espérance mathématique d'une v.a. ....	171
11.1.1. Interprétation fréquentielle de l'espérance .....	171
11.1.2. Définition de l'espérance mathématique .....	172
11.1.3. Propriétés et formules utiles .....	173
11.1.4. Espérance d'une fonction certaine d'une variable aléatoire .....	174
11.2. Moments d'une variable aléatoire .....	175
11.2.1. Variance – Mesure de la dispersion .....	175
11.2.2. Calcul de variance – Cas continu et discret .....	176
11.2.3. Généralisation – Moments d'une variable aléatoire .....	177
11.2.4. Moments des répartitions courantes .....	178
<b>Chapitre 12. Fonction caractéristique</b> .....	<b>185</b>
12.1. Introduction, définition et propriétés .....	185
12.1.1. Introduction et utilité .....	185
12.1.2. Variables aléatoires complexes .....	185
12.1.3. Fonction caractéristique (f.c.) d'une variable aléatoire .....	186
12.1.4. Propriétés et exemples de fonctions caractéristiques .....	187
12.1.5. Formule d'inversion et relations utiles .....	189
12.2. Utilisations et applications de la fonction caractéristique .....	189
12.2.1. Calcul de la densité de $Y = g(X)$ .....	189

12.2.2. Théorème des moments – Série entière .....	191
12.3. Produit de f.c. et convolution de densités .....	192
12.4. Variables aléatoires gaussiennes .....	192
12.4.1. Fonction caractéristique .....	192
12.4.2. Relations utiles et théorèmes .....	193
<b>Chapitre 13. Distributions et densités bidimensionnelles .....</b>	<b>199</b>
13.1. Fonction de distribution bidimensionnelle .....	199
13.1.1. Introduction à deux variables aléatoires .....	199
13.1.2. Définition de distribution bidimensionnelle .....	199
13.1.3. Propriétés de la distribution bidimensionnelle .....	201
13.2. Densité de probabilité bidimensionnelle .....	203
13.2.1. Définition de densité bidimensionnelle .....	203
13.2.2. Utilisation de la densité bidimensionnelle .....	204
13.2.3. Analogie massique de la densité .....	208
<b>Chapitre 14. Deux valeurs aléatoires – Lois conditionnelles et indépendance .....</b>	<b>213</b>
14.1. Répartitions bidimensionnelles conditionnelles .....	213
14.1.1. Définitions des relations conditionnelles .....	213
14.1.2. Théorème des probabilités totales et théorème de Bayes .....	216
14.1.3. Autres distributions conditionnelles .....	217
14.1.4. Espérance mathématique de v.a. conditionnelles .....	218
14.2. Variables aléatoires indépendantes .....	218
14.2.1. Définition de l'indépendance stochastique .....	218
14.2.2. Expériences indépendantes .....	220
14.3. Variables aléatoires bidimensionnelles gaussiennes .....	221
14.3.1. Définition de la densité gaussienne $f_{XY}(x,y)$ .....	221
14.3.2. Densités marginales en X et en Y .....	222
14.3.3. Deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes .....	222
<b>Chapitre 15. Une fonction de deux variables aléatoires .....</b>	<b>227</b>
15.1. Les définitions .....	227
15.1.1. Introduction aux fonctions de deux variables .....	227
15.1.2. Fonction de distribution de $Z = g(X,Y)$ .....	228
15.1.3. Densité de probabilité de $Z = g(X,Y)$ .....	230
15.1.4. Variables aléatoires X et Y discrètes .....	231
15.2. Opérations sur deux variables aléatoires .....	231
15.2.1. Somme de deux variables aléatoires .....	231
15.2.2. Opérations « minimum » et « maximum » .....	235
15.2.3. Somme quadratique et racine carrée .....	237
15.2.4. Rapport et produit de variables aléatoires .....	237
<b>Chapitre 16. Deux fonctions de deux variables aléatoires .....</b>	<b>249</b>
16.1. Deux fonctions de deux variables aléatoires .....	249
16.1.1. Introduction – Intérêt de l'étude .....	249
16.1.2. Distribution bidimensionnelle .....	249
16.1.3. Densité bidimensionnelle .....	250
16.1.4. Opérateur Jacobien .....	251
16.1.5. Théorèmes sur transformations de densités .....	254
16.2. Applications particulières .....	256

16.2.1. Transformations linéaires .....	256
16.2.2. Transformation : $Z = +(X^2 + Y^2)^{1/2}$ et $W = X/Y$ .....	257
16.2.3. Variables aléatoires auxiliaires .....	258
16.2.4. Fonctions de variables aléatoires indépendantes .....	259

## **Chapitre 17. Espérance, moments et fonction caractéristique de deux variables aléatoires .....**

17.1. Espérance pour deux variables aléatoires .....	265
17.1.1. Extension de la notion d'espérance .....	265
17.1.2. Théorème sur l'espérance mathématique pour deux variables aléatoires .....	266
17.1.3. Espérance conditionnelle bidimensionnelle .....	267
17.1.4. Fonction caractéristique bidimensionnelle .....	267
17.2. Moments de deux variables aléatoires .....	268
17.2.1. Définition des moments pour deux variables aléatoires .....	268
17.2.2. Covariance et corrélation .....	269
17.2.3. Théorèmes sur l'indépendance et la corrélation .....	275
17.2.4. Applications aux v.a. normales centrées .....	275

## **Chapitre 18. Variables aléatoires à plusieurs dimensions .....**

18.1. Variables aléatoires n-dimensionnelles .....	283
18.1.1. Introduction à n variables aléatoires .....	283
18.1.2. Fonction de distribution et densité de probabilité .....	283
18.1.3. Transformation de n variables aléatoires .....	285
18.1.4. Probabilité conditionnelle et l'indépendance .....	286
18.1.5. Espérance mathématique de n variables aléatoires .....	287
18.2. Applications – Théorie des mesures .....	288
18.2.1. Introduction : estimation d'un paramètre .....	288
18.2.2. Moyenne et variance d'un échantillon .....	289
18.2.3. Variables aléatoires gaussiennes centrées .....	291

## **Chapitre 19. Convergence des variables aléatoires .....**

19.1. Notions sur la convergence .....	303
19.1.1. Introduction : convergence de variables aléatoires .....	303
19.1.2. Concentration d'une variable aléatoire autour de sa moyenne .....	304
19.1.3. Réduction de la variable avec épreuves répétées .....	305
19.1.4. Limites appliquées aux variables aléatoires .....	306
19.2. Lois des grands nombres et théorème central-limite .....	310
19.2.1. Lois des grands nombres .....	310
19.2.2. Théorème central-limite .....	312

## **Chapitre 20. Introduction aux processus stochastiques .....**

20.1. Etendue de l'étude et quelques définitions .....	319
20.1.1. Introduction, étude des processus stochastiques .....	319
20.1.2. Définition de stationnarité et ergodicité .....	321
20.1.3. Application des processus stochastiques .....	322
20.2. Définition de « processus stochastique » .....	323
20.2.1. Définition mathématique .....	323
20.2.2. Interprétation du processus $X(t, \xi)$ .....	324
20.2.3. Propriétés générales des processus stochastiques .....	325
20.2.4. Propriétés statistiques des deux premiers moments .....	326
20.2.5. Quelques exemples de processus simples .....	329

<b>Chapitre 21. Exemples et applications de processus stochastiques .....</b>	<b>335</b>
21.1. Exemples de processus stochastiques.....	335
21.1.1. Processus de Poisson.....	335
21.1.2. Applications du processus de Poisson.....	341
21.1.3. Processus binomial.....	345
21.1.4. Applications du processus binomial.....	347
21.2. Généralisation sur les processus.....	348
21.2.1. Distribution et densité d'ordre $n$ .....	349
21.2.2. Processus à $N$ dimensions.....	349
21.2.3. Processus stochastiques complexes.....	349
21.2.4. Non-corrélation, orthogonalité et indépendance.....	350
21.2.5. Processus gaussien d'ordre $n$ .....	351
<b>Chapitre 22. Processus stationnaires et différenciation .....</b>	<b>361</b>
22.1. Processus stochastiques stationnaires.....	361
22.1.1. Introduction à la notion.....	361
22.1.2. Stationnarité au sens strict.....	362
22.1.3. Stationnarité au sens large.....	364
22.1.4. Autres formes de stationnarité.....	365
22.2. Transformation de processus stochastiques.....	366
22.2.1. L'opérateur $T$ et les systèmes déterministes.....	366
22.2.2. Systèmes sans mémoire et temporellement invariants.....	366
22.2.3. Systèmes linéaires.....	369
22.3. Continuité et différenciation stochastique.....	369
22.3.1. Continuité stochastique.....	369
22.3.2. Différenciation stochastique.....	371
<b>Chapitre 23. Intégration stochastique et processus ergodiques .....</b>	<b>381</b>
23.1. Introduction à l'intégration stochastique.....	381
23.1.1. Rappel de la notion d'ergodicité.....	381
23.1.2. Intégration stochastique.....	383
23.2. Processus ergodiques réels.....	386
23.2.1. Définition de moyenne temporelle.....	386
23.2.2. Ergodicité de la valeur moyenne.....	387
23.2.3. Ergodicité de l'autocorrélation.....	388
23.2.4. Ergodicité de la fonction de distribution.....	390
<b>Chapitre 24. Corrélation et spectre de puissance .....</b>	<b>403</b>
24.1. Corrélation et processus stochastiques.....	403
24.1.1. Introduction : définition du spectre de puissance.....	403
24.1.2. Définition et propriété de la corrélation.....	403
24.1.3. Relations utiles pour deux processus.....	404
24.2. Densité spectrale de puissance.....	405
24.2.1. Définition de la densité spectrale.....	405
24.2.2. Propriétés de la densité spectrale.....	406
24.2.3. Tableau élémentaire de correspondance.....	408
24.2.4. Ergodicité de la densité spectrale de puissance.....	409

<b>Chapitre 25. Applications des processus aux systèmes linéaires .....</b>	<b>421</b>
25.1. Définition de systèmes.....	421
25.1.1. Rappel des définitions.....	421
25.1.2. Fonction aléatoire comme excitation.....	422
25.2. Statistiques du processus de sortie.....	423
25.2.1. Définition du problème.....	423
25.2.2. Valeur moyenne du processus réponse.....	423
25.2.3. Intercorrélation et autocorrélation.....	423
25.3. Applications avec processus de bruit.....	426
25.3.1. Processus excitation – Bruit blanc (BB).....	426
25.3.2. Mesure de la réponse impulsionnelle.....	427
25.4. Stationnarité du processus d'entrée.....	427
25.4.1. Stationnarité au sens large.....	427
25.4.2. Stationnarité au sens strict.....	428
25.5. Densité spectrale de puissance.....	428
25.5.1. Représentation avec systèmes équivalents.....	428
25.5.2. Relations entre les densités spectrales.....	428
25.5.3. Propriétés du spectre et de la corrélation.....	429
<b>Chapitre 26. Processus stochastiques à bande limitée .....</b>	<b>439</b>
26.1. Introduction aux processus à bande limitée.....	439
26.2. Processus stochastique passe-bas.....	439
26.2.1. Définition du processus passe-bas.....	439
26.2.2. Analyticité et série de Taylor.....	440
26.2.3. Théorèmes d'échantillonnage.....	441
26.2.4. Processus passe-bas idéal.....	443
26.3. Processus stochastiques passe-bande.....	443
26.3.1. Définition des trois cas.....	443
26.3.2. Processus passe-bande de Rice.....	444
<b>Bibliographie .....</b>	<b>463</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>467</b>
<b>Index.....</b>	<b>473</b>